МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема выпускной квалификационной работы

Методика изучения темы «Проценты» в школьном курсе математики в процессе подготовки в ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа

по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
50,96 % авторского текста

Работа рекоменд. к защите
«22» июня 2018 г.
зав. кафедрой МиМОМ
Суховиенко Е.А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Федорова Ольга Андреевна

Научный руководитель:
Доцент, кандидат пед.наук
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск

2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В настоящее время уделяется большое внимание школьному образованию как первой ступени образовательного процесса. Одна из важных его задач – обеспечить обучающимся глубокие и крепкие знания, а также умение рационально применять их в учебной и практической деятельности.

Тема «Проценты» является универсальной, так как она охватывает бытовые и производственные сферы жизни, а также связывает между собой многие точные и естественные науки. Поэтому большое практическое значение имеет умение решать задачи на проценты, так как понятие процента используется в различных областях науки и в реальной жизни.

С процентами учащиеся знакомятся в 5 – 6 классах, то есть на первом этапе основной школы. К этому периоду ученики умеют в практических заданиях находить дробь от числа, число по её дроби и определять, какую часть одна величина составляет от другой. Данные умения если и обобщаются учителем в виде правил, то сами правила не помогают перенести уже освоенное умение в новую ситуацию, в связи с тем, что при решении определённых задач на проценты речь идёт о количестве процентов, которые содержатся в целом и его части, а не о числителе и знаменателе дроби.

В школьном курсе математики данной теме отводится мало времени и поэтому учащиеся не умеют решать задачи на проценты. Задачи на проценты все чаще встречаются в химии, у которой свой взгляд на проценты. А в математике задачи на проценты в учебниках лишь в рамках задач на повторение и задач повышенной трудности. В итоге, учащиеся забывают о том, что тема «Проценты» является универсальной и применяется во многих сферах нашей жизни. Поэтому является актуальным вопрос о том, чтобы задачи на проценты заняли достойное место в старших классах. В это время ученики изучают различные виды уравнений и их систем, геометрическую и арифметическую прогрессии, и др. темы, закрепление которых ведется на текстовых задачах. В содержании текстовых задач наличие процентов дает возможность связать абстрактные математические понятия с реальной жизнью.

То есть актуальность дипломной работы заключается в необходимости более подробного разбора темы «Проценты», ее повторения и закрепления на различных текстовых задачах на проценты, чтобы помочь ученикам систематизировать знания и научиться применять их в практической деятельности.

Объектом исследования работы является процесс обучения математике в школе.

Предметом исследования является обучение решению задач на проценты в школьном курсе математики.

Цель данной работы – повысить уровень обученности и практической подготовки учеников при решении задач на проценты.

Гипотеза исследования: применение разработанного элективного курса поможет обеспечить более углубленное изучение темы «Проценты», что будет способствовать формированию у учащихся умения решать задачи на проценты.

Обучение решению задач на проценты будет более эффективным, если:

1. Формирование понятия процента начать в 5 – 6 классе и продолжать на протяжении школьного курса математики;
2. Рассматривать различные виды задач на проценты в течение всего курса алгебры 7 – 9 класса и более сложные задачи в 10 – 11 классах на элективном курсе;
3. Применить разработанный элективный курс, который содержит подборку задач от простого к сложному.

В соответствии с целью, объектом, предметом и гипотезой исследования были определены следующие задачи:

· Выявить особенности содержания темы «Проценты» в учебниках Математика для основной школы;

· Провести сравнительный анализ задач на проценты в вариантах единого государственного экзамена по годам;

· Собрать и систематизировать теоретический материал по методике работы с задачами на проценты;

· Разработать элективный курс на тему «Проценты».

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.

1. Роль и место темы «Проценты» в школьном курсе математики

Роль и место задач в обучении математике.

В ходе преподавания математики задачи выполняют различные функции. Вообще говоря, математические задачи очень эффективны и чаще всего являются незаменимым средством усвоения обучающимися понятий и методов школьного курса математики, а также математических теорий. Большую роль задачи играют в расширении и совершенствовании познавательной деятельности, а также в математическом воспитании обучающихся. Задачи формируют у них умения и навыки, применяемые в практической деятельности. Достижению целей, которые стоят перед обучением математике служит решение задач. Большое значение в формировании достаточно высокого уровня математических знаний, умений и навыков обучающихся играет правильно подобранная методика обучения решению математических задач. Задачи при обучении математике имеют многостороннее значение: образовательное, практическое, воспитательное.

Образовательное значение математических задач.

В процессе решения математической задачи человек узнаёт немало нового: встречается с новой ситуацией, которая описывается в задаче; с использованием теории, необходимой для её решения, познаёт новые методы и способы решения, теоретические разделы математики, и т.д. Другими словами, решая математические задачи, человек приобретает и расширяет математические знания, что способствует повышению уровня математического образования. Овладевая методом решения определённого вида задач у человека формируется умение решать такие задачи, а при достаточной тренировке – и навык. Таким образом, человек повышает уровень математического образования.

Практическое значение математических задач.

При решении математических задач школьник учится применять математические знания для решения прикладных задач, готовится к практической деятельности в будущем, к решению задач, с которыми сталкивается в практике повседневной жизни. Практически во всех инженерных расчетах приходится решать математические задачи, отталкиваясь от запросов практики. Математические задачи решаются в химии, физике, биологии, электро– и радиотехнике и др. Это значит, что при обучении математике в 5 – 6 классах ученикам следует предлагать задачи, которые связаны с такими предметами, как химия, физика, география и др. Например, задачи на концентрацию, смеси и сплавы (подобные задачи потом будут встречаться в курсе химии и старших классах), а также текстовые задачи с практическим, жизненным содержанием.

Воспитательное значение математических задач.

В первую очередь задача воспитывает своим текстовым содержанием. Правильно организованное решение задачи воспитывает трудолюбие. Решение сложных задач требует у обучающихся проявление настойчивости, упорства в достижении цели. При всём этом воспитывается и развивается чувство долга и ответственности за приобретение математических знаний, умений и навыков. Решение математических задач воспитывает особый математический стиль мышления. Они развивают логическое мышление, требуют проявления творческого, пространственного воображения, а также формируют диалектико – материалестическое мировоззрение.

Проценты в повседневной жизни.

Современная жизнь делает задачи на проценты актуальными, так как применение процентных расчётов широко распространено в практической деятельности. В повседневной жизни люди сталкиваются с процентами ежедневно. Вопросы инфляции, увеличение и понижение цен, рост стоимости акций, изменение курса валют касаются каждого человека в нашем обществе. Таким образом, без умения производить несложные процентные расчёты невозможно распланировать семейный бюджет, сравнить и найти более выгодное вложение денежных средств в банки. Знание процентов оказывает помощь в развитии практических способностей, а также в развитии умения решать различные экономические задачи. Сознательное изучение процентов развивает такие навыки, как экономичность, расчетливость.

Каждый человек в обществе сталкивается с вопросами: «Купить в кредит или взять ссуду в банке? Возможно будет выгоднее накопить денег для дорогостоящей покупки?». Человек в современном обществе должен свободно решать такие задачи, уметь сравнить разные предложения магазинов, банков и выбрать наиболее выгодные. Задачи практического характера в повседневной жизни человека требуют для их решения как первичных знаний о процентах, так и более глубоких знаний, таких как вычисление простых и сложных процентов, арифметической и геометрической прогрессий.

Таким образом, в настоящее время математика всё шире внедряется в повседневную жизнь и обиходный язык, давно став языком науки и техники и всё более проникает в традиционно далекие от нее области. Особенно усилилось применение математики с внедрением современных информационных технологий, требующих математической грамотности человека почти на каждом рабочем месте.

Осознание процентов и умение применять их не практике необходимо каждому человеку, это способствует «вхождению» в современную информационно – экономическую среду и, в результате, облегчает социализацию.

2. Из истории возникновения процентов и их проникновения в школьный курс математики

Слово «процент» от латинского слова «pro centum», что буквально означает «за сотню» или «со ста».

Идея представления частей целого постоянно в одних и тех же величинах, которая вызвана практическими соображениями, родилась еще в древности у вавилонян. Уже в клинописных табличках содержится ряд задач, посвященных исчислению процентов. В то время проценты были известны и в Индии. Индийские математики умели вычислять проценты, применяя так называемое тройное правило, то есть пользуясь пропорцией. К примеру, при расчете 8% от 720 записывали:

1% составляет $\frac{720}{100}$, а 6% составляют $\frac{720 \cdot 8}{100} = 57{,}6$.

Они умели производить и сложные процентные вычисления.

Особенно проценты были распространены в Древнем Риме. Римляне называли процентами деньги, которые платил должник заимодавцу за каждую сотню. В древнем Риме были широко распространены денежные расчеты с процентами. Таким образом, даже римский сенат вынужден был устанавливать максимально допустимый процент, взимаемый с должника, так как некоторые заимодавцы чрезмерно усердствовали в получении процентных денег. От римлян проценты перешли к другим странам Европы[19].

В связи с широким развитием торговли в средние века в Европе особенное внимание обращали на умение производить расчеты с процентами. В то время приходилось рассчитывать не только простые проценты, но и проценты с процентов, то есть сложные проценты, как называют их в наше время. Для облегчения труда при вычислении процентов отдельные конторы и предприятия разрабатывали свои особые таблицы, которые чаще всего были коммерческим секретом фирмы.

По – видимому, процент возник в Европе вместе с ростовщичеством. Есть мнение, что понятие процент ввел бельгийский ученый Симон Стевин. Впервые в 1584 году он опубликовал таблицы для расчета процентов. Стевин также известен разнообразием научных открытий, в том числе – особой записи десятичных дробей.

Употребление термина «процент» в качестве нормы русского языка начинается, с конца XVIII века. Об этом свидетельствует сравнительный анализ текстов двух фундаментальных учебников по математике Ефима Войтяховского (первое издание 1795 г.) и Т. Ф. Осиповского (первое издание 1802 г.). В обоих учебниках имеется по нескольку задач «на проценты по вкладу», но Е. Войтяховский оперирует исключительно сотыми долями, тогда как Т. Ф. Осиповский уже употребляет термин «процент».

Долгое время под процентами понималось исключительно прибыль или убыток на каждые 100 рублей. Они применялись только в торговых и денежных сделках. Затем область их применения расширилась, проценты встречаются в хозяйственных и финансовых расчетах, статистике, науке и технике.

Знак % происходит, как полагают, от итальянского слова cento (сто), которое в процентных расчетах часто писалось сокращенно cto. Отсюда путем дальнейшего упрощения в скорописи буква t превратилась в наклонную черту (/), возник современный символ для обозначения процента, который указан в схеме 1.

Как возник знак процента?
pro cento → cento → cto → c/o → %

Схема 1. Возникновение знака процента.

Запись отношений стала удобнее, исчезли ноль и запятая, а символ % сразу указывает, что перед нами не граммы, рубли или метры. Введение процентов оказалось удобным не только для оценки содержания одного вещества в другом. В процентах стали измерять изменение производства товаров, денежный доход и т.д.

В учебнике 5 класса Н.Я. Виленкина, В.И. Жохова, и др., в рубрике «Историческая справка» дана еще одна очень интересная версия возникновения знака %. Там, говорится, что этот знак произошел в результате нелепой опечатки, совершенной наборщиком. В Париже в 1685 году была опубликована книга – руководство по коммерческой арифметике, где по ошибке наборщик вместо cto напечатал % [13].

Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, которые составляют тысячные доли от самого вещества. Тогда, чтобы не вводить нули и запятую, то есть не писать 0,6%, ввели новую величину – «промилле» тысячную долю, которую обозначили ‰. Однако эта величина привилась только в тех областях науки и техники, где имеют дело с малыми величинами, а необходимость и появившаяся возможность считать точнее привели к тому, что счет стал вестись до десятых и сотых долей процента. Нередко можно видеть и в технической литературе, и на страницах газет записи вида 27,4%; 6,35%.

Вообще, возникновение математических знаков и символов значительно облегчило изучение математики и способствовало дальнейшему ее развитию.

Задачи с историческим сюжетом можно встретить в учебнике 5 – го класса [13].

Такие примеры задач исторического содержания представлены в 5 – ом классе по теме «Проценты».

Задача 1. Один небогатый римлянин взял в долг у заимодавца 50 сестерциев. Заимодавец поставил условие: «Ты вернешь мне в установленный срок 50 сестерциев и еще 20% от этой суммы». Сколько сестерциев должен отдать небогатый римлянин заимодавцу, возвращая долг?

Задача 2 (более сложная). Некий человек взял в долг у ростовщика 100 руб. Между ними было заключено соглашение о том, что должник обязан вернуть деньги ровно через год, доплатив еще 80% от суммы долга. Но через 6 месяцев должник решил вернуть свой долг. Сколько рублей он вернёт ростовщику?

3. Сравнительный анализ изложения темы «Проценты» в различных учебниках математики 5–6 классов

Рассмотрим изучение данной темы в некоторых современных учебниках по математике в основной школе. А также подходы к рассмотрению решений типовых задач на проценты, предлагаемых в современных учебниках.

Первый подход. Впервые с задачами на проценты ученики знакомятся без опоры на дроби. Способы решения типовых задач опираются на содержательный смысл понятия «процент».

Чтобы найти несколько процентов от числа, надо выполнить два действия: сначала находится 1% от числа (величины), а затем это число (величина) умножается на заданное число процентов. Чтобы найти число, если известны несколько его процентов, также нужно выполнить два действия: сначала находится 1% искомого числа (величины), а затем результат умножается на 100%. Если нужно найти количество процентов, которое одно число (величина) a составляет от другого числа (величины) b, при том что нам известны два числа (обе величины), мы находим чему равен 1% числа (величины) a, а затем делим b на 1% числа (величины) a.

Задачи на дроби изучаются позже задач на проценты. Таким образом, используется индуктивный метод, т.е. обучение идет от частного к общему. При таком построении материала учащиеся усваивают содержательный смысл понятия и отрабатывают данный способ решения задач на проценты.

Ученики овладевают другим способом решения задач на проценты только после ознакомления с типовыми задачами на дроби (обыкновенные или десятичные). В этом случае задачи на проценты – это частный случай задач «на части». Все приемы решения задач на дроби переносятся на задачи, в которых присутствуют проценты, тем самым реализуется метод аналогии. Этот факт значительно упрощает поиск решения «новых» задач.

Необходимо отметить, что со стороны методики нужно сначала рассматривать нахождение 1% от данного числа, затем – нахождение произвольного числа процентов; также в первую очередь обсуждать, как найти число, 1% которого нам известен, далее такая задача рассматривается для любого произвольного числа процентов. Именно при таком подходе формируется осознание понятия «процент».

Так как действия с обыкновенными и десятичными дробями, проценты рассматриваются в 5 – 6 классах, то к концу 6 класса школьники овладевают двумя способами решения задач на проценты.

Такой подход представлен в учебниках [18], [13] и [15], [17], [14] и [16].

После изучения свойств пропорциональной зависимости в учебниках [18], [13] и [15], учащиеся осваивают третий способ решения типовых задач.

Второй подход. Изначально задачи на проценты изучаются как частный случай задач на дроби. Таким образом, при изучении материала используется дедуктивный метод – от общего случая, задач на дроби, к частному.

Для нахождения нескольких процентов числа (величины) необходимо найти, какую долю от числа (величины) составляет данный процент (т.е. перевести проценты в обыкновенную или десятичную дробь путем деления на 100%), а затем умножить исходное число (величину) на эту долю. Для нахождения числа, если известны несколько его процентов, выражаем процент дробью (обыкновенной или десятичной), затем делим заданную часть числа (величины) на эту дробь. Если нужно найти какое количество процентов число (величина) a составлет от числа (величины) b, когда нам известны два числа (обе величины), мы находим, какую долю числа (величины) b составляет число (величина) a, а затем получившееся число умножить на 100%.

При таком подходе школьники не осваивают способы решения типовых задач на проценты, которые опираются на содержательный смысл понятия «процент», что в последствии приводит к трудностям в освоении понятия «процент».

Такой подход представлен в учебниках [10], [11], [12]. В этом случае учителю нужно познакомить учащихся с первым способом решения задач на проценты. После изучения свойств пропорциональной зависимости учащиеся также знакомятся с новым способом решения типовых задач.

В учебнике И.И. Зубаревой и А.Г. Мордковича учащиеся рассматривают сразу два способа решения основных задач на проценты, т.к. проценты вводятся после изучения десятичных дробей. Первый и второй тип задач на проценты содержится в одном параграфе. При изучении пропорций авторы учебников предлагают школьникам лишь 2 задачи на проценты, которые решаются с помощью пропорциональной зависимости. После изучения темы «Проценты» в 5 классе авторы обращаются к данной теме только в конце 6 класса, в связи с этим утрачивается навык решения таких задач.

В учебном комплекте С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. учащиеся знакомятся с различными способами решения трех основных задач на проценты. Изначально в данной теме ученикам предлагается решать задачи на проценты, делая упор на содержательный смысл понятия «процент», дальше приводятся задачи, которые показывают учащимся связь задач на проценты и задач на обыкновенные дроби, а далее – решение задач с помощью пропорции. Таким образом, в данных учебниках одновременно рассматриваются три типовые задачи на проценты. В параграфе «Круговые диаграммы» авторы учебников показывают практическое применение процентов.

После того, как изучена тема десятичных дробей предлагается решать задачи первого и второго типа, пользуясь умножением либо делением на эту десятичную дробь.

В учебнике Н.Я. Виленкина и др. в 5 классе вводится понятие «процента», решение типовых задач опирается на содержательный смысл «процента». Так же одна из следующих тем – это «Диаграммы». Каждая из трех основных задач в 6 классе рассматривается вместе с соответствующей задачей на дроби. То есть «нахождение процентов от числа» одновременно рассматривается с «нахождением дроби от числа», «нахождение числа, если известен его процент» – с «нахождением числа по его дроби», и процентное отношение двух чисел – с «нахождением части числа». Итак, типовые задачи сводятся к задачам «на части» и изучаются на разных уроках.

В учебном комплекте под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина авторы к данной теме обращаются в начале года и в конце. При первом обращении ученики решают задачи на проценты первого типа, делая упор на содержательный смысл понятия «процент». Далее после изучения десятичных дробей решение основных задач на проценты сводится к пониманию процентной записи десятичного числа и к решению задач «на части».

В учебнике 6 класса Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон изучение материала, связанного с процентами представлен таким образом: сначала вводится понятие «процент», рассматриваются три типовые задачи на проценты, при этом изложение этого материала предполагается на одном уроке, а также содержатся задачи на простой и сложный процентный рост. Также решение задач на проценты сводится к задачам «на части».

Так как с понятием «Доля» ученики знакомы еще с младших классов, значит, не имеет значения то, какая тема будет предшествовать первому ознакомлению с процентами. Однако рассматривать решение задач на проценты вторым способом, которые опираются на соответствующие задачи на дроби, уместно после тем: «Действия с обыкновенными дробями» либо «Действия с десятичными дробями». Так как в большей степени развитию обучающихся способствует изучение частного случая с опорой на общий.

После изучения понятия «процент» надо обязательно показать ученикам применение процентов в практической деятельности. Более удачной после темы «Проценты» являются диаграммы, они используются наглядного представления зависимости между частями целого.

Практически во всех учебниках знакомство с процентами начинается традиционным образом, а конкретно рассказом учителя. Демонстрируя удобство обозначение словом часто используемых дробей, например, «треть» или «четверть», авторы подводят учащихся к введению понятия «процент» как одной сотой части числа. А к примеру, при изучении темы по учебнику Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсона подразумевается, что ученики познакомились с данным понятием ещё в начальной школе.

Во всех учебниках, кроме учебника под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина, ученики знакомятся сначала с понятием процента как одной сотой, а только после вводится понятие «процента от числа (величины)». Данные авторы, к сожалению, не обращают внимание учащихся на то, что проценты являются одной из форм записи действительного числа. В учебнике под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина вообще не рассматривается определение, что проценты – это одна сотая, в силу этого утрачивается связь действительных чисел и процентов.

В учебниках Н.Я. Виленкина и др., Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон после введения основного понятия представлена историческая справка о происхождении «процентов».

В учебном комплекте под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина содержится наибольшее количество разнообразных заданий, связанных с данной темой. Учащимся предлагаются такие задания, как: проверить истинность или ложность высказываний, которое способствует усвоению теоретического метода изучения (анализа); «заштриховать на рисунке данную часть круга» и «определить, какая часть прямоугольника заштрихована, а также выразить эту часть в процентах», такие задания формируют предметно – образную наглядность; «выбрать для каждого процента в левом столбце соответствующею ему дробь в правом столбце» или «найти группы утверждений, означающих одно и тоже», осваивается теоретический метод – синтез; сравнение величин, представленных разными способами (например, часть класса, выраженная в процентах или дробью), такие задания позволяют проводить аналогии и анализировать данные. С помощью системы упражнений ученики могут «переводить» задачу с языка долей и дробей на язык процентов и обратно. В результате учащиеся овладевают навыками, которые в будущем помогают как при изучении темы проценты, так и математики в целом. Так, они усваивают некоторые равносильные выражения: 30% величины – это треть этой величины; половина какой – либо величины – это ее 50%, вся величина – это 100 % и т.п.

В учебниках Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина и др.; Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон, а также Н.Я. Виленкин детям предлагается заполнить таблицу:

Дробь	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{50}$			
Десятичная дробь		0,25					0,05	
Проценты				20%		100%		1%

Данная таблица представлена для отработки правил перевода процента в обыкновенную и десятичную дроби, и обратно, а также она является одним из средств наглядности.

В учебнике под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина уделяется внимание работе с «большими» процентами. Оно проявляется в формировании умения найти 175%, 200%, 250% величины. Ученики начинают понимать, что, например, число увеличенное на 100% это то же самое, что увеличение в два раза.

Учащимся также предлагаются задачи из повседневной жизни, в которых требуется найти приближенно с помощью прикидки процент от заданной величины. Так если требуется прикинуть, чему равны 24 % от какой – либо величины, то находят 25 % этой величины, т.е. ее четвертую часть. Еще ученики знакомятся с использованием процентов, которые могут встречаться в средствах массовой информации, например: «Из каждых 100 новорожденных 51 – мальчики».

В учебнике Н.Я. Виленкина уделяется особое внимание правильному прочтению записей с процентами.

В учебниках И.И.Зубаревой и А.Г.Мордковича; Н.Я. Виленкина и др. при обучении решению основных задач на проценты, четкой их классификации не предусматривается. В учебнике Н.Я. Виленкина и др. учащихся приучают к выделению числа, принимаемого за 100%, а у И.И.Зубаревой и А.Г.Мордковича – 1% и в процессе решения конкретной задачи требуют привести соответствующие рассуждения, которые не предусматривают запоминания правил решения какого – либо вида задач на проценты.

При этом, в учебнике Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон для каждого вида задач соответствующие рассуждения обобщаются в правила. Поэтому любая задача на проценты становится алгоритмом и вызывает трудности, если правило забыто. Авторы как бы ограничивают учеников, не давая им рассуждать над решением. В данных учебниках правила сформулированы на языке «букв», т.е. в простых задачах на проценты некоторая величина «a» принимается за 100%, а «b» ее часть, которая выражается числом процентов «p». Ученикам при этом предстоит разобраться ,какие величины обозначаются буквами: a, b, p, что может вызвать затруднения при решении задач.

В учебниках Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсона; Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина и др. представлены несколько способов решения задач на проценты первого и второго типа. Один способ опирается на содержательный смысл понятия «процент», а другой – сводит решение задачи к пониманию процентной записи десятичного числа и к решению задач «на части». В других учебных комплектах, второй способ решения задач первого и второго типа учитель должен показать сам. Так как проценты это лишь особая форма записи дробей, то необходимо рассматривать два способа решения, потому что каждая задача с дробями может быть представлена и решена в процентной записи и обратно.

В 6 классах в учебниках Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсона; И.И. Зубаревой и И.Г. Мордковича при изучении темы «Проценты» рассматриваются решения задач с помощью составления линейных уравнений, т.е. алгебраическим способом.

В учебном комплекте И.И. Зубаревой и А.Г.Мордковича в условии некоторых задач представлены не один, а несколько вопросов, таким образом решается несколько задач. К примеру,

№1 [14, №886]. Лыжники за три дня прошли 87 км. В первый день они прошли 35% всего пути, во второй – 38%, а в третий – остальной путь.

Ответьте на следующие вопросы.

1) Какая величина принята за 100% и известна ли она?

2) Какая величина приходится на 1%?

3) Сколько километров лыжники прошли за три дня?

4) Сколько километров они прошли во второй день?

5) Сколько километров они прошли в третий день?

Авторы предлагают ученикам и в дальнейшем, перед тем, как преступить к решению задач, определить, где величина, принятая за 100%, известна, а где не известна, а также нужно ли найти процент от числа или число, если известны его проценты. Таким образом, учащиеся осваивают умение читать задачу, делать из нее различные выводы и определять последовательность своих действий при решении. Аналогичные последовательные вопросы к задачам встречаются и в учебнике Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина.

В задачах на сравнение рассматривается два вопроса: «На сколько процентов величина A больше величины B»; «На сколько процентов величина B меньше величины A». В таких задачах при решении может возникнуть трудность, чтобы определить, какая величина принята за 100%. В учебнике И.И. Зубаревой и А.Г. Мордковича при решении задач есть соответствующие пояснения: величина, с которой сравнивают, принимается за 100%, так в первом вопросе за 100% принята величина B, а во втором – A.

Таким образом, ученики при решении задач на проценты учатся составлять вопросы, находить ответы и делать выводы, которые помогут определить последующие действия, а также освоить и применять в дальнейшем схему рассуждений.

При решении задач на проценты в комплектах С.М. Никольского и др., Н.Я. Виленкина и др. уделяется внимание и работе с калькулятором.

В учебниках Г.В.Дорофеева и И.Ф. Шарыгина представлены задачи на концентрацию, смеси и сплавы, банковские расчеты. Такие задачи являются хорошим примером практических задач, которые позволяют показать, как формальные арифметические и алгебраические знания применяются в реальной жизни. В учебнике приводятся образцы решения ряда задач, чтобы помочь школьникам осознать на новом уровне подход к решению задачи с процентами. Параграф «Задачи на смеси и сплавы» также рассматриваются и в учебнике С.М. Никольского и др., он отмечен как параграф повышенной трудности. Применение таких задач важно не только для математики, но и для других предметов, в первую очередь, химии. Поэтому им необходимо уделять особое внимание.

4. Анализ изложения различных тем, связанных с процентами в учебниках алгебры 7–9 классов

Рассмотрим изложение тем, связанных с процентами, в учебном комплекте под редакцией Г.В. Дорофеева [8], [6], [4].

В учебнике [4] учащиеся неоднократно обращаются к задачам на проценты. В начале года в первой главе учебника «Дроби и проценты» школьники сталкиваются с более трудными задачами, как в логическом, так и в техническом отношении.

№1 [4, №91]. а) Автомобиль прошел 40% всего пути, а затем 30% оставшегося расстояния. Сколько процентов всего пути ему осталось пройти?

б) Перед поездкой бак автомобиля был заполнен на 80%. Во время поездки было истрачено 25% от имеющегося запаса бензина. На сколько процентов был заполнен бензином бак к концу поездки?

Особое внимание уделяется вопросу о «больших» (больше 100%) и «маленьких» (меньше 1%), так как этот материал считается наиболее трудным для усвоения.

№2 [4, №74]. В состав одного из поливитаминов входят минералы в следующих количествах: кальций и фосфор – по 4%, магний – 1,6%, железо – 0,07%, цинк – 0,06%. Сколько миллиграммов каждого минерала содержится в одной таблетке поливитамина, масса которой 250 мг?

Первая глава заканчивается разделом «Для тех, кому интересно», в нем ученикам также предлагается обратиться к задачам на проценты. В этом разделе рассматриваются более трудные задачи. Приведем пример одной из задач.

№3 [4]. После повышения цены на 30% книга стала стоить 182р. Сколько стоила книга до повышения цены?

В главе «Прямая и обратная пропорциональность» при изучении темы «Пропорции. Решение задач.» авторы предлагают учащимся решить задачи на проценты с помощью пропорции.

№4 [4, №225]. Решите задачу составив пропорцию:

а)В библиотеке 8 тыс. книг. Книги для детей составляют 35% всех книг. Сколько в библиотеке книг для взрослых?

б) В первый день открытия библиотеки в нее записались 42 читателя, что составило 17,5 % всех читателей библиотеки. Сколько читателей стало в библиотеке через месяц после ее открытия?

в) Из 300 читателей библиотеки 108 человек – школьники. Какой процент всех читателей составляют школьники?

Учащиеся в учебнике [6] знакомятся с задачами на «концентрацию, смеси и справы», «банковские расчеты», эти задачи являются хорошим примером применения в реальных жизненных ситуациях. В учебнике приводятся образцы решения ряда задач, к которым учащиеся при желании могут, вернутся вновь, и использовать его в качестве опоры при решении аналогичной задачи.

Задача по теме «Алгебраические дроби» (8 класс):

№5 [6, №174]. Разберите, как по условию задачи составлено уравнение и решите задачу:

Клиент открыл счет в банке на некоторую сумму денег. Годовой доход по этому вкладу составляет 11%. Если бы он добавил 800 руб., то через год получил бы 220 руб. Какая сумма была внесена им в банк?

Составление уравнения:

1) x руб. – сумма, которую клиент внес в банк.

2) $(x+800)$ руб. – такая сумма была бы на вкладе, если бы он добавил 800 руб.;

3) $0{,}11\cdot(x+800)$ руб. – доход в 11%, который мог бы получить клиент с этой суммы.

Так как доход равен 220 руб., то имеем равенство: $0{,}11\cdot(x+800)=220$.

№6 [6, №186]. Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение до конца:

Сколько граммов 75%–го раствора кислоты надо добавить к 30 г 15%–го раствора этой же кислоты, чтобы получить 50%–й раствор?

Составление уравнения:

1) x г – количество 75%-го раствора кислоты, которое надо добавить;

2) $(30+x)$ г – масса получившегося 50%-го раствора кислоты;

3) $0{,}75x$ г – количество кислоты в x г 75%-го раствора;

4) $0{,}15\cdot 30$ г – количество кислоты в 30 г 15%-го раствора;

5) $0{,}5\cdot(30+x)$ г – количество кислоты в 50%-м растворе.

Уравнение:

Кол-во кислоты в 75%-ном растворе + кол-во кислоты в 15%-ном растворе = кол-во кислоты в 50%-ном растворе

$$0{,}75x+0{,}15\cdot 30=0{,}5(30+x)$$

$$0{,}75x-0{,}5x=15-4{,}5$$

$$0{,}25x=10{,}5$$

$$x=42\text{ г.}$$

Ответ: 42 г.

При изучении темы «Решение задач с помощью систем уравнений» главы «Системы уравнений» учащимся необходимо показать новый метод решения задач на проценты. Ученикам предлагается план решения.

№7 [6, №679]. а) В колбу налили некоторое количество 60%-го раствора соли и некоторое количество 80%-го раствора этой же соли. Получили 35 мл раствора, содержащего 72% соли. Сколько миллилитров каждого раствора налили в колбу? Решите задачу, используя следующий план:

1) Обозначьте буквами количество 60%-го и 80%-го растворов соли, налитых в колбу.

2) Запишите уравнение, связывающее эти две величины и общее количество раствора.

3) Определите количество соли в получившемся растворе.

4) Запишите уравнение, связывающее количество соли в 60%-ном, 80%-ном и получившемся растворах.

5) Составьте систему и решите ее.

В учебнике 9 класса [8] задачи на проценты представлены в теме «Простые и сложные проценты», которая включена в главу «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Сведения о простых и сложных процентах имеют большую практическую значимость. Возможность опереться на сформированные навыки в работе с процентными вычислениями, на умение воспользоваться калькулятором, табличным или графическим представлением информации позволило охватить наибольшее количество задач на проценты. При изучении темы используется калькулятор, который позволяет рассматривать самые разнообразные задачи. Рассмотрим, например, как ученики должны рассуждать при решении следующей задачи.

№8 [8, №691]. В банк внесен вклад в размере 500 руб. Выясните, через сколько лет вклад удвоится, если банк выплачивает: 8% годовых; 10%; 16%. (Воспользуйтесь калькулятором.)

Решение:

Через год сумма вклада увеличится на 8% и составит 108% от первоначальной. Для того, чтобы найти новую сумму, нужно 500 руб. умножить на 1,08. Через два года новая сумма увеличится в 1,08 раза и т.д. С помощью калькулятора, последовательным умножением 500 на 1,08 найдем, что через 9 лет величина вклада удвоится. (на 10% и 16% рассуждения аналогичны)

№9 [8, №703] Ирина внесла в конце января 1000 р. на счет, по которому ежемесячно начисляется 2%, от имеющейся на нём суммы. И затем в конце каждого месяц в течение года она вносила на этот счет еще по 1000 р., не снимая с него никаких сумм. Сколько рублей будет на ее счете в конце декабря?

Решение:

Выразим процент десятичной дробью: $2\% = 0{,}02$. Вклад ежемесячно увеличивается в 1,02 раза, и идет последовательное накопление вклада:

Январь – $1000(\textit{руб.})$;

Февраль – $1000 \cdot 1{,}02 + 1000(\textit{руб.})$;

Март – $1000 \cdot 1{,}02^2 + 1000 \cdot 1{,}02 + 1000(\textit{руб.})$;

. . .

Декабрь – $$1000 \cdot 1{,}02^{11} + 1000 \cdot 1{,}02^{10} + \ldots + 1000 = 1000\left(1{,}02^{11} + 1{,}02^{10} + \ldots + 1\right) = = 1000 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02} \approx 13412(\textit{руб.})$$

Таким образом, на счёте Ирины в конце декабря будет 13412 руб.

Ответ: 13412 руб.

В процессе решения подобных задач ученики видят, что формула суммы геометрической прогрессии – это не просто абстрактная формула, а конкретное математическое знание, которое необходимо в конкретной жизненной ситуации.

В 10 классе в теме «Дробные уравнения» главы «Уравнения и системы уравнений» также рассмотрены задачи на проценты, их решение основано на составлении дробных рациональных уравнений. К примеру,

№10 [8,№435]. Заказ на пошив сумок был распределен между мастером и его учеником. Мастер выполнил 75% заказа, сшив 90 сумок. Количество сумок, которое сшил в день ученик, составило 30% количества сумок, изготовляемых в день мастером, и он работал на один день дольше мастера. Сколько сумок в день сшил мастер и сколько ученик?

Ясно, что проценты в 6 – 7 классах используются для представления информации в виде таблиц и диаграмм, в 7 – 9 классах – при изучении вероятностно – статистического материала.

Таким образом, в рассмотренных учебных комплектах тему «Проценты» изучают в несколько подходов с 5 по 9 класс включительно. При каждом обращении к процентам на новом уровне знания учащихся расширяются, добавляются новые типы задач и приемы решения. Такое многократное обращение к данной теме приводит к тому, что она постепенно, прочно и осознано усваивается.

В учебнике для 7 классов [1] задачи на проценты встречаются в заданиях на повторение и в параграфе «Текстовые задачи».

Учащимся предлагаются как типовые задачи:

№11 [2, №1056]. Сколько процентов числа a составляет число b, если: а) $a = 40$, $b = 50$; б) $a = 50$, $b = 40$.

№12 [2, №1014]. Сумма 12 000 руб. увеличилась на вкладе в банке на 5%. Какая сумма получилась?

Так и задачи повышенного уровня сложности:

№13 [1, №1079]. На некотором участке пути машинист уменьшил скорость поезда на p%. На сколько процентов увеличится время движения на этом участке?

№14 [1, №1086]. Частный инвестор купил 200 акций известной фирмы по 100 р. за акцию. Когда цена каждой акции увеличилась на p%, он продал половину акций. А когда цена каждой акции увеличилась еще на q%, он продал остальные акции. Вычислите прибыль, полученную частным инвертером от продаж всех купленных им акций.

Образцы решения задач на проценты повышенного уровня сложности в учебнике не представлены, что является мотивом для самостоятельного исследования предложенных задач и поиска способа их оформления.

В дополнении к главе «Линейные уравнения» встречаются задачи, каким – либо образом связанные с процентами.

№15 [1, №751]. а) 5% одного числа и 4% другого вместе составляют 46, а 4% первого числа и 5% второго вместе составляют 44. Найдите эти числа.

б) 20% одного числа и 50% другого вместе составляют 27, а 50% первого числа и 50% второго вместе составляют 42,3. Найдите эти числа.

Рассмотрим следующий учебник для 7 классов [2]. В главе «Алгебраические выражения» в параграфе «Числовые выражения» учащимся предлагается следующая задача на процентные вычисления:

№16 [2, №8]. Записать в виде равенства и проверить, верно ли оно:

1) 20% от числа 240 равны 62;

2) число 18 составляет 3% от числа 600;

3) произведение чисел 15 целых 2/5 и 5 составляет 11% от числа 700;

4) четвертая часть числа 18 равна 5% от числа 90;

5) число 111:3 равно 10% от числа 370;

6) 650% от числа 12 равно 77.

При выполнении данного упражнения, ученики должны вспомнить правило перевода процентов в десятичные дроби, решение задач первого типа, а также не забывать связь процентов и действительных чисел.

В главе «Уравнения с одним неизвестным» предлагается еще один способ решения задач на проценты – с помощью составления уравнения. Но образца решения авторы не предоставляют.

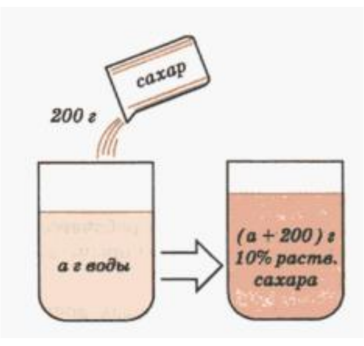
№17 [2, №81]. Записать данное утверждение в виде равенства и найти значение x, при котором равенство верно:

1) число x составляет 18% числа 75;

2) число 15 составляет 25% числа x.

Далее авторы показывают решение задачи на концентрацию, но потом встречается только одна задача для самостоятельного решения с подобным условием.

№18 Задача. 10%-ный раствор сахара получится, если добавить 200 г сахара в а г воды. Найдем а:



$$\frac{200}{a+200}\cdot 100\% = 10\%$$

$$\frac{200}{a+200}=\frac{10}{100}$$

$a = 1800г.$

В какое количество воды нужно добавить 200 г сахара, чтобы получить 15%-ный раствор?

В упражнениях к главе «Системы двух уравнений с двумя неизвестными» встречаются задачи на проценты, которые отмечены как трудные задачи. Например,

№19 [2, №685] Антикварный магазин, купив две старинные вазы на общую сумму 36000 руб., продал их, получив 25% прибыли. За сколько была продана каждая ваза, если наценка на первую вазу была 50%, а на вторую – 12,5%?

В учебнике для 8 классов [7] задачи на проценты встречаются лишь в параграфах, связанными с неравенствами и их системами, а так же системами уравнений.

Всего одна задача на проценты, решаемая с помощью составления неравенства представлена в параграфе «Решение неравенств».

№20 [7, №109]. Рабочий по плану должен изготовить 40 деталей. Сколько деталей он должен изготовить, чтобы перевыполнить план более чем на 7%?

В параграфах «Решение систем неравенств» и «Решение задач с помощью квадратных уравнений» представлены задачи на проценты, которые отмечены как трудные. Представим некоторые из них:

№21 [7, №147]. В раствор объемом 8 л, содержащий 60% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько можно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не больше 40%, но не меньше 30%?

№22 [7, №491]. Два раствора, из которых первый содержит 0,8 кг, а второй – 0,6 кг безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Найти массу первого и второго растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты в первом растворе было на 10% больше, чем во втором.

В учебнике нет задач более легкого уровня сложности, тем самым слабым ученикам не предоставляется возможность увидеть новый способ решения таких задач на проценты. Сильным ученикам необходимы задачи с приведенным решением для правильного оформления. А средние по успеваемости ученики, после того, как разберутся в решении, могли бы по аналогии решить похожие по содержанию задачи.

Рассмотрим учебник для 7 классов под ред. С.А. Теляковского [3].

В начале года при изучении первых параграфов учащимся предлагаются задачи на нахождение 1 и нескольких процентов от числа; на нахождение числа и величины, если известны несколько его (ее) процентов; задач такого типа, как «на сколько процентов одна величина больше другой». К примеру,

№23 [3, №10]. За несколько книг уплатили 320 р. Стоимость одной из книг составила 30%, а другой 45% израсходованных денег. На сколько рублей первая книга дешевле второй?

№24 [3, №45]. После того как из бидона отлили 30% молока, в нем осталось 14 л. Сколько литров молока было в бидоне первоначально?

№25 [3, №46]. Перевыполнив план на 15%, завод выпустил за месяц 230 станков. Сколько станков должен был выпустить за месяц завод по плану?

В дополнительных упражнениях ко второй главе содержится задача, при решении которой прослеживается связь между количеством процентов, на которое перевыполнен план, и числом изготовленных деталей.

№26 [3, №352]. Бригада по плану должна изготовить 150 деталей за смену. Однако она перевыполнила план на x%. Составьте формулу, выражающую зависимость y от x, где y – число изготовленных бригадой деталей. Найдите по формуле:

а) значение y, если $x = 10$;

б) значение x, при котором $y = 180$.

Задачи, при решении которых необходимо составлять систему линейных уравнений с двумя переменными, находится в последней главе «Системы линейных уравнений». Например,

№27 [3, №1183]. За 8 дней работы на первом станке и 5 дней работы на втором было изготовлено 235 деталей. В результате усовершенствования производительность первого станка возросла на 15%, а второго — на 20%. Теперь за 2 дня работы на первом станке и 3 дня на втором можно изготовить 100 деталей. Сколько деталей в день изготовляли раньше на каждом станке?

Чтобы решать задачи такого плана необходимо отлично владеть техникой представления процентов в виде десятичных дробей.

В данном учебнике также нет образца решения задач по рассматриваемой теме. Задачи на составление систем линейных уравнений, задачи повышенной трудности рассматриваются в дополнительных упражнениях.

№28 [3, №1187]. В двух бочках было воды поровну. Количество воды в первой бочке сначала уменьшилось на 10%, а затем увеличилось на 10%. Количество воды во второй бочке сначала увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды?

Рассмотрим учебник [5] по алгебре для школ и классов с углубленным изучением математики.

Здесь, при изучении первых параграфов учащимся предлагаются задачи на нахождение 1 и несколько процентов от числа; на нахождение числа и величины, если известны несколько его (ее) процентов; задачи типа «на сколько процентов одна величина больше другой». Такой же подход был представлен в учебнике [3].

В конце первой главы «Выражение и множество значений» в дополнительных упражнениях к главе встречаем задачи на проценты, в которых требуется по условию задачи составлять выражения с переменными:

№29 [5, №155]. Альбом стоил a руб., а набор цветных карандашей b руб. После повышения цен стоимость альбома возросла на 5%, а цветных карандашей – на 3%. В какую сумму обойдется покупка двух альбомов и одного набора цветных карандашей после повышения цен?

№30 [5, №156]. Банк ежегодно выплачивает вкладчикам n% от вложенной суммы. Какая сумма будет у вкладчика, положившего в банк 1000 руб.: а) через год; б) через два года?

В задачах для самостоятельного решения по теме «Стандартный вид многочлена» представлены задачи такого типа:

№31 [5, №356]. Длина прямоугольника равна a м, а ширина b м. На сколько квадратных метров увеличится его площадь, если длину увеличить на 10%, а ширину увеличить на 15%?

В такой задаче сперва требуется записать буквенное выражение по условию, а после выполнить соответствующие алгебраические операции.

В параграфе «Уравнения» в пункте «Решение задач с помощью уравнений» дается общий алгоритм:

1) обозначить неизвестное число буквой и составить уравнение, используя условие задачи;

2) решить уравнение;

3) истолковать результат в соответствии со смыслом задачи.

В этом параграфе встречаются задачи на смеси (раствор), задачи на банковские расчеты, но не представлено ни одного образца решения.

Задачи, при решении которых необходимо составить систему линейных уравнений с двумя переменными, содержатся в последней главе «Системы линейных уравнений». Например,

№32 [5, №1298]. В двух табунах было 120 лошадей. Когда число лошадей в первом табуне увеличилось на 40%, а во втором уменьшилось на 10%, в первом табуне стало на 30 лошадей больше, чем во втором. Сколько лошадей было в каждом табуне?

В разделе «Задачи повышенной трудности» представлены следующие задачи:

№33 [5, №1381]. Цены повысились на 25%. На сколько процентов меньше товаров можно купить на ту же зарплату? Какой результат получится при снижении цен на 25%?

№34 [5, №1383]. Взяли 100 кг вещества, в котором содержится 99 % воды. Сколько воды испарится при подсушивании этого вещества, когда его влажность снизится до 98%?

Таким образом, в 7 – 9 классах рассматривают задачи на проценты, которые решаются с помощью составления уравнения или системы уравнений. Это связано с тем, что в 7 классах рассматриваются задачи, алгебраическая модель которых является линейным уравнением или системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными, в 8 классах – квадратные уравнения.

5. Сравнительный анализ задач на проценты в ЕГЭ

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике – это обязательный экзамен для выпускников школы. В 1997 году появились первые прообразы единого государственного экзамена, лишь только в некоторых школах начали проводиться эксперименты по добровольному тестированию учащихся. Автором идеи был министр Владимир Филиппов. В 2001 – 2003 годах вышли постановления Правительства РФ об организации эксперимента и участии в нем образовательных учреждений. Так в 2003 году в эксперименте приняли участие 47 субъектов РФ. С 2009 года экзамен стал обязательным и единым для всех, заканчивающих школу.

Экзаменационные задания ЕГЭ – контрольные измерительные материалы (КИМ) представляют собой комплексы заданий стандартизированной формы, выполнение которых позволяет установить уровень освоения федерального государственного образовательного стандарта.

ЕГЭ по математике с 2015 года разделен на два уровня – базовый и профильный. Базовый ЕГЭ сдают выпускники, которые идут на специальности, где математика не является профильным предметом или не планируют поступать в вузы. Профильный экзамен предназначен для выпускников, у которых математика является одним из вступительных экзаменов в вуз.

Экзаменационная работа по математике базового уровня состоит из одной части, включающей 20 заданий с кратким ответом. Все задания направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

Ответом к каждому из заданий 1–20 является целое число, конечная десятичная дробь, или последовательность цифр.

Экзаменационная работа профильного уровня состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий:

- 8 заданий первой части (задания 1–8) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби
- 4 задания второй части (задания 9–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби
- 7 заданий второй части (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий)

Задания первой части направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

Посредством заданий второй части осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом:

- задания 1–8 имеют базовый уровень;
- задания 9–17 – повышенный уровень;
- задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности[21].

Впервые в вариантах единого государственного экзамена по математике задача на проценты появились в 2003 году в заданиях группы В, в 2004 и в 2005 годах такие задачи также были представлены в вариантах единого экзамена. В вариантах 2006 года были задачи на работу, а также на проценты, в вариантах 2007 – 2018гг. года представлены задачи на проценты, что говорит о необходимости серьезной работы над этой темой.

В 2003 году на ЕГЭ в части В (В7) представлена следующая задача:

К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

Решение:

В 120г первого раствора соли будет $120 \cdot 0{,}8 = 96г.$

В растворе объёмом 480г соли будет $480 \cdot 0{,}2 = 96г.$

В двух растворах $96г + 96г = 192г.соли$.

Объём двух растворов $120г + 480г = 600г.$

Процент содержания соли будет $\frac{192}{600} \cdot 100\% = 32\%$

В получившемся растворе будет 32% соли

Ответ: 32

В ЕГЭ 2004 – 2005гг. представлены задачи:

Задача. В колбе было 800 г 80% –ного спирта. Провизор отлил из колбы 200 г этого спирта и добавил в нее 200 г воды. Определить концентрацию (в процентах) полученного спирта.

Решение:

После того, как провизор отлил 200 г раствора, стало 600г, в котором чистого спирта $0{,}8 \cdot 600 = 480г.$, когда добавили 200г воды, то раствор снова стал 800г, а концентрация чистого спирта в растворе $\frac{480}{800} \cdot 100\% = 60\%$.

Ответ: 60

Задача. Из сосуда, доверху наполненного 94%–м раствором кислоты, отлили 1,5 л жидкости и долили 1,5 л 70%–го раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 86% раствор кислоты. Сколько л раствора вмещает сосуд?

Решение:

Пусть x л вмещает сосуд, тогда из условий задачи можно составить уравнение: $0{,}94 \cdot (x - 1{,}5) + 0{,}7 \cdot 1{,}5 = 0{,}86x$, решив которое получаем $x = 4{,}5$ л

Ответ: 4,5

Задача в демонстрационном варианте 2006 года:

По пенсионному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года эти проценты капитализируются, т.е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счёт в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

Решение:

В конце первого года сумма составляет 55000 руб. Теперь начисляем 10 % от этой суммы и получаем сумму в конце второго года 60500 руб. Чтобы узнать весь доход за три года находим 110% от 60500, а это число равно 66550. Итак, по истечении всего срока доход составляет 16550 рублей.

Ответ. 16550

Задача 2007 года:

Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

Решение:

7000 – первоначальный вклад, $7000 + 0{,}11 \cdot 7000 = 7700$ – вклад в конце первого года. Вкладчик добавил x, значит на начало второго года сумма была $7770 + x$. В конце второго года сумма станет равной $7770 + x + 0{,}11(7770 + x)$ и это выражение должно быть больше или равно 10000. Решим неравенство $1{,}11x + 8624{,}7 \geq 10000$ $\Rightarrow$ $1{,}11x \geq 1375{,}3$ $\Rightarrow$ $x \geq 1239{,}009$.

Ответ: 1240

Задача 2008 года:

В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 рублей, он через два месяца был продан за 2250 рублей.

Решение:

Пусть после первого снижения цена магнитофона стала равна $4000x$ рублей. Тогда после второго снижения она стала $4000x^2$ рублей. Имеем:

$$4000x^2 = 2250$$

$$x^2 = \frac{2250}{4000}$$

$$x^2 = \frac{9}{16}$$

$$т.к\ x > 0,\ \ x = 0{,}75.$$

Значит, после каждого снижения цена составляла 75 % от предыдущей, т. е. уменьшалась на 25 %.

Ответ: 25

Задача 2009 года (В9):

Летом огурцы становятся дешевле, чем зимой на 35%, а помидоры – на 60%. Поэтому овощи для салата "Овощной" из огурцов и помидоров летом обходятся на 50% дешевле, чем зимой. Сколько процентов от стоимости овощей для этого салата составляет зимой стоимость входящих в него помидоров?

Решение:

Пусть зимой огурцы стоят x, а помидоры y, салат стоит зимой $x+y$.

Летом огурцы стоят $0{,}65x$, а помидоры $0{,}4y$. Салат летом стоит $0{,}65x+0{,}4y$, а это по условию $0{,}5(x+y)$.

Получим: $0{,}65x+0{,}4y=0{,}5(x+y)$

$0{,}15x=0{,}1y$

$3x=2y$

$x=\frac{2y}{3}$; $y=\frac{3x}{2}$

$\frac{y}{x+y}\cdot 100\%=\frac{y}{\frac{2y}{3}+y}\cdot 100\%=\frac{3}{5}\cdot 100\%=60\%$ – составляют помидоры от стоимости овощей.

Ответ: 60

Задача 2010 года (В1):

Шариковая ручка стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 700 рублей после повышения цены на 10%?

Решение:

После повышения цены ручка будет стоить $30\cdot 1{,}1=33$рубля. Поскольку $700:33=21\frac{7}{33}$, на 700 рублей можно купить не больше 21 ручки.

Ответ: 21

Задача 2011 года демонстрационный вариант (В1):

Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

Решение:

После повышения цены билет станет стоить $15+0{,}2\cdot 15=18$ рублей. Разделим 100 на 18: $100:18=5\frac{5}{9}$.

Значит, можно будет купить 5 билетов.

Ответ: 5

В демонстрационном варианте 2012 года представлена аналогичная задача на проценты, что и в 2010 – 2011 годах.

Задача 2013 года (B13):

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

Решение:

Виноград содержит 18% питательного вещества, а изюм — 81%. Следовательно, 42 кг изюма содержат $42\cdot 0{,}81=34{,}02$ кг питательного вещества. Таким образом, для получения 42 килограммов изюма требуется $\frac{34{,}02}{0{,}18}=189$ килограмм винограда.

Ответ: 189

Задача 2014 года (B14):

Имеется два раствора. Первый содержит 10% соли, второй – 30% соли. Из этих двух растворов получили третий раствор массой 200 кг, содержащий 25% соли. На сколько килограммов масса первого раствора меньше массы второго?

Решение:

Пусть масса первого раствора x кг, а масса второго – y кг. Тогда массовое содержание соли в первом и втором растворах $0{,}1x$ и $0{,}3y$, соответственно. Из этих двух растворов получили третий раствор массой 200 кг, содержащий 25% соли. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 0{,}25 \cdot 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 200 - x \\ 0{,}1x + 0{,}3(200 - x) = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 200 - x \\ 0{,}2x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 150 \end{cases}$$

Таким образом, масса первого раствора меньше массы второго на 100 килограммов.

Ответ: 100

Задача 2015 года:

Базовый уровень (задание №3)

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 6960 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Решение:

Найдём сколько рублей составляет заработная плата:

$\dfrac{100 \cdot 6960}{87} = \dfrac{696000}{87} = 8000$ рублей.

Ответ: 8000

Профильный уровень (задание №19)

15 – го января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1 – го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2 – го по 14 – е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 – го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение:

Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый месяц равна $\frac{r}{100}S_0$. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшаться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной $\frac{S_0}{14}$, и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{r}{100}S_0, \frac{13}{14}\cdot\frac{r}{100}S_0, \ldots, \frac{2}{14}\cdot\frac{r}{100}S_0, \frac{1}{14}\cdot\frac{r}{100}S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{r}{100}S_0\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=\frac{r}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{14}}{2}\cdot 14=\frac{3r}{40}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 15% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0{,}075rS_0=0{,}15S_0 \Leftrightarrow r=2.$$

Ответ: 2

Задача 2016 года:

Базовый уровень (задание №3)

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 22500 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налогов? Ответ дайте в рублях

Решение:

Налог на зарплату Ивана Кузьмича составит $22500\cdot 0{,}13=2925$ рублей. Значит, после вычета налога на доходы он получит: $22500-2925=19575$ рублей.

Ответ: 19575

Профильный уровень (задание №17)

15 – го января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1 – го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2 – го по 14 – е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 – го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн рублей.

Решение:

A – основной долг;

r – процент за пользование кредитом ($r\%$ выразим десятичной дробью: $0{,}01r$);

$A + A \cdot 0{,}01r = A(1+0{,}01r)$ – сумма основного долга + процент за пользование кредитом.

Сумма кредита (основной долг) составляет 1 млн рублей. Тогда 1 февраля на эту сумму банк начислит r процентов, т.е. $(1+1\cdot 0{,}01\cdot r)$ – сумма долга заемщика на 2 февраля.

Составим следующую таблицу:

Период	Сумма основного долга	Основной долг + сумма процентов за пользование кредитом на 2–ое число каждого периода	Сумма выплаты со 2–го по 14–е число каждого месяца
01 – 02	1	$1+0{,}01r$	$0{,}1+0{,}01r$
02 – 03	0,9	$0{,}9(1+0{,}01r)$	$0{,}1+0{,}009r$

03 – 04	0,8	$0{,}8(1+0{,}01r)$	$0{,}1+0{,}008r$
04 – 05	0,7	$0{,}7(1+0{,}01r)$	$0{,}1+0{,}007r$
05 – 06	0,6	$0{,}6(1+0{,}01r)$	$0{,}1+0{,}006r$
06 – 07	0,5	$0{,}5(1+0{,}01r)$	$0{,}5+0{,}005r$
Остаток: 0 млн руб.		Выплат всего: более $1{,}25$ $(>1{,}25)$ млн руб.	

Просуммируем последний столбик таблицы:

$$(0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}5)+(0{,}01+0{,}009+0{,}008+0{,}007+0{,}006+0{,}005)r=1+0{,}045r$$

Составим и решим неравенство: $1+0{,}045r>1{,}25$

$$0{,}045r>0{,}25$$

$$r>\frac{250}{45}=5\frac{5}{9}$$

Наименьшее целое число r, которое следует за числом $5\frac{5}{9}$ является число 6. Поэтому $r=6$.

Ответ: 6

Задача 2017 года:

Базовый уровень (задание №3)

Ивану Кузьмичу начислена заработная плата 20 000 рублей. Из этой суммы вычитается налог на доходы физических лиц в размере 13%. Сколько рублей он получит после уплаты подоходного налога?

Решение:

Налог на зарплату Ивана Кузьмича составит $20000\cdot 0{,}13=2600$ рублей. Значит, после вычета налога на доходы он получит: $20000-2600=17400$ рублей.

Ответ:17400

Профильный уровень (задание №17)

15 – го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1 – го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

- со 2 – го по 14 – е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 – го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение:

По условию, долг перед банком (в млн рублей) на 15 – е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$1;\ 0{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0.$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1 – е число каждого месяца равен:

$k;\ 0{,}6k;\ 0{,}4k;\ 0{,}3k;\ 0{,}2k;\ 0{,}1k.$

Отсюда следует, что выплаты со 2 – го по 14 – е число каждого месяца составляют: $k - 0{,}6;\ 0{,}6k - 0{,}4;\ 0{,}4k - 0{,}3;\ 0{,}3k - 0{,}2;\ 0{,}2k - 0{,}1;\ 0{,}1k.$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) =$$
$$= (k - 1)(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) + 1 = 2{,}6(k - 1) + 1$$

Так как, общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, получим: $2{,}6(k - 1) + 1 < 1{,}2$; $2{,}6 \cdot \frac{r}{100} + 1 < 1{,}2$; $r < 7\frac{9}{13}$.

Наибольшее целое решение этого неравенства –7.

Ответ: 7

В демонстрационном варианте 2018 года представлены аналогичные задачи, что и в 2017 году.

Анализируя материалы ЕГЭ за 2003 – 2018 год, можно сказать что задачи на проценты стали сложнее и вызывают трудности у учащихся. Так в 2003 – 2005 гг. представлены задачи на концентрацию, смеси, справы. Начиная с 2006 года задачи на проценты встречаются во второй части единого экзамена в заданиях В9 (банковские задачи). Данное задание направлено на проверку умения решать практическую задачу, составляя математическую модель (уравнения, неравенства, их системы) предложенной в ней ситуации. Сюжеты задач близки к реальным ситуациям - экономическим, финансовым, деловым, игровым, и пр.. С 2010 года задача на проценты переместилась в первую часть и занимает самое первое задание (В1), которое направлено на проверку знаний основных задач на проценты. В 2013 и 2014 году представлены задачи на концентрацию, смеси. С 2015 года и по настоящее время в вариантах единого государственного экзамена также содержатся задачи на проценты, в базовом уровне задачи на нахождение процента от числа, числа по его процентам и процентное отношение чисел, а в профильном – задачи на проценты относятся к повышенному уровню сложности (речь в них идет о банковских вкладах или платежах). Поэтому нужно больше времени уделять на усвоение данной темы, для того чтобы учащиеся как можно меньше допускали ошибок при решении задач.

Вывод по главе

В данной главе были рассмотрены теоретические основы обучения решению задач на проценты в школьном курсе математики. Данное изучение позволило сделать ряд выводов:

1. Математические задачи очень эффективны и чаще всего являются незаменимым средством усвоения обучающимися понятий и методов школьного курса математики, а также математических теорий. Задачи формируют у них умения и навыки, применяемые в практической деятельности. При обучении математике задачи имеют многостороннее значение: образовательное, практическое, воспитательное.
2. Существует два подхода к рассмотрению решений типовых задач на проценты: первый – с задачами на проценты ученики знакомятся без опоры на дроби; второй – задачи на проценты

изучаются как частный случай задач на дроби. Таким образом, в первом случае используется индуктивный метод (от частного к общему), во втором – используется дедуктивный метод (от общего случая, задач на дроби, к частному).

3. Сравнив задачи единого государственного экзамена с 2003 по 2018 год, можно сказать, что задачи на проценты стали сложнее, тем самым вызывают трудности у учащихся. После разделения на базовый и профильный уровни в 2015 году, в профильном уровне задача на проценты относятся к повышенному уровню сложности (речь в них идет о банковских вкладах или платежах). Поэтому нужно больше времени уделять на усвоение данной темы, для того чтобы учащиеся как можно меньше допускали ошибок при решении задач.

Глава 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ

1. Методика решения задач различных типов на проценты

1.1. Методика введения процентов

При изучении этого материала нужно сначала объяснить учащимся, что такое сотая часть числа. К примеру, сотая часть метра – это сантиметр, сотая часть рубля – копейка, и т.д. К этому времени школьники уже прошли деление дроби и у них не возникает трудностей. Люди давно заметили, что сотые доли величин удобны в практической деятельности, например, при записи десятичных дробей. Поэтому для них придумали специальное название – процент (от лат. «pro centum» – на сто). Таким образом, один процент – это одна сотая доля. При введении процентов необходимо обратить внимание на их математическую запись «$\%$» , а также пояснить, что целое (целая часть) равна 100%.

Задача 1. [13] Швейная фабрика выпустила 1200 костюмов. Из них 32% составляют костюмы нового фасона. Сколько костюмов нового фасона выпустила фабрика?

Решение:

В задаче известно число, которое принято за 100%, т.е. 1200 костюмов — это 100% выпуска. Чтобы найти 1% выпуска, нужно 1200 разделить на 100: $1200:100=12$. Значит, 12 костюмов – это 1% выпуска.

Теперь найдём чему равны 32% выпуска: $12\cdot 32=384$.Т.е. фабрика выпустила 384 костюма нового фасона.

Ответ: 384 костюма

1.2. Нахождение нескольких процентов от числа

В данном разделе рассмотрим методику нахождения нескольких процентов от числа, так как эта тема является одной из трех важнейших тем, которые должны усвоить ученики при изучении темы «Проценты». Важно, чтобы они осознали алгоритм нахождения одного или нескольких процентов от числа, и могли применять эти знания в практической деятельности, при решении различных задач на проценты.

Главное чтобы учащиеся усвоили, что один процент – это одна сотая от данного числа. Чтобы найти несколько процентов от числа нужно найти сначала один процент. Так определение одного процента можно записать равенством: $1\% = 0{,}01 \cdot a$, а из этого каждый учащийся быстро поймет, что $6\% = 0{,}06$; $48\% = 0{,}48$; $125\% = 1{,}25$ и т. д.

Отсюда возникает вопрос: как найти 1% от числа? Так как 1% это одна сотая часть, надо число разделить на 100. Мы уже рассмотрели ранее, что деление на 100 можно заменить умножением на $0{,}01$. Поэтому, чтобы найти 1% от данного числа, нужно умножить его на $0{,}01$.

Теперь можно вывести алгоритм нахождения одного или нескольких процентов от числа:

Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь [17].

Задача 2. Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60% имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение:

Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов), т.е. нужно найти процентов от числа, для этого проценты представляем в виде десятичной дроби: $60\% = 0{,}6$; $500 \cdot 0{,}6 = 300$ насосов высшей категории качества.

Ответ: 300 насосов

1.3. Нахождение числа по его процентам

Дальше рассмотрим методику нахождения числа от одного или нескольких процентов. Это также является важной частью в изучение процентов, так как встречаются не только задачи на нахождение процентов от числа, но и числа по его процентам. Особенно хорошо это представлено в задачах, связанных с экономикой, например, когда в банк ложится сумма под проценты, а через какое – то время забирается на с набежавшими процентами и требуется найти данную сумму. Так что учащимся нужно так же раскрыть алгоритм нахождения числа от нескольких процентов.

Школьники уже знают, что один процент можно представить десятичной дробью: $1\% = 0{,}01 \cdot a$.

Так вот возникает вопрос, как найти искомое число, если известно лишь, сколько процентов составляет другое число от искомого? Для этого нужно сначала проценты записать десятичной дробью, после чего нужно данное нам число разделить на эту десятичную дробь в результате получим число от нескольких процентов.

Если дано, сколько процентов от искомого числа составляет данное число, то, чтобы найти искомое число, нужно заменить проценты десятичной дробью и разделить на эту дробь данное число [17].

Задача 3. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Решение:

Нам известно, что часть, которую прочитал ученик (138 страниц) составляет 23% от общего количества страниц в книге, но неизвестно целое. Так как 138 стр. – это часть, то количество страниц в книге будет больше 138. Это поможет нам при проверке.

$138 : 23\% = 138 : 0{,}23 = 138 \cdot 100 : 23 = 600(стр.)$ – общее количество страниц в книге.

Проверка: $600 > 138$, т.е. 138 является частью 600.

Ответ: 600 стр.

1.4. Нахождение процентного отношения

А так же рассмотрим последнее, но не менее важное для нахождения процентов при решении задач – это нахождение процентного отношения. В этом разделе рассмотрим алгоритм нахождения процентного отношения.

Встречаются задачи, в которых даны два числа и нужно найти их процентное отношение, для этого нужно взять первое число назовем его a и разделим его на второе число, назовем его число b, а затем результат умножим на100%, то мы получим процентное отношение первого числа на второе:

$$\frac{a}{b}\cdot 100\% \ (*)$$

Чтобы найти процентное отношение двух чисел a и b, надо отношение этих чисел умножить на сто процентов, то есть получить формулу $(*)$[17].

Задача 4. Из 200 арбузов 16 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелый арбузы?

Решение:

О чем спрашивают? О незрелых арбузах. Значит, 16 делим на общее количество арбузов и умножаем на 100 %.

$\frac{16}{200}\cdot 100\% = \frac{16}{200}\cdot 100\% = \frac{2}{25}\cdot 100\% = 8\%$ – составляют незрелые арбузы от всех арбузов.

Ответ: 8 %

1.5 Этапы решения задачи

Деятельность по решению задачи включает следующие этапы независимо от выбранного метода решения:

1) Анализ содержания задачи

На этом этапе нужно добиться того, чтобы учащиеся «приняли» задачу, т. е. поняли ее смысл, сделав целью своей деятельности. В этом случае задача становится объектом мышления. Важное значение имеют краткая запись текста задачи, составление схем, таблиц, рисунков. Таблицы, схемы и рисунки выступают в роли наглядного представления содержания задачи и зависимостей величин, входящих в нее. А также важно определить не принадлежит ли задача к основным типам задач.

2) Поиск пути решения задачи и составление плана её решения

Далее осуществляется поиск способа решения задачи. Поиск пути решения задачи можно осуществлять от вопроса задачи к данным (аналитический путь) или от данных к вопросу (синтетический путь). Аналитико – синтетический поиск решения заканчивается получением уравнения. Составленный план решения обсуждается с учащимися. Он выполняет роль ориентировочной основы деятельности учащегося.

3) Осуществление плана решения задачи

На этом этапе осуществляется найденный план решения, выполняется проверка решения и записывается полученный ответ. Осуществление плана решения задачи выполняется письменно.

4) Проверка решения задачи

На данном этапе нужно установить, правильно ли понята задача, и выяснить, не противоречит ли полученный ответ всем другим условиям задачи. А так же установить соответствие чисел в решении с условием задачи. Этот этап является обязательным в процессе решения задач.

5) Анализ найденного решения

Ставятся вопросы следующего типа: Какова главная идея решения данной задачи? Есть ли другие способы решения данной задачи? Является ли данный способ решения рациональным?

А также необходимо ознакомиться с этапами решения задачи (на составление уравнения или системы уравнений):

1. этап составления математической модели (этап формализации) – выбор неизвестного, обозначаемого, как правило, через x (или нескольких неизвестных, обозначаемых x, y,...), и составление уравнения (или системы уравнений), связывающего некоторой зависимостью выбранное неизвестное с величинами, заданными условием задачи;

2. этап работы с составленной моделью (этап внутримодельного решения) – решение полученного уравнения (или системы уравнений);

3. этап интерпретации – отбор решений по смыслу задачи.

2. Элективный курс на тему «Проценты»

Пояснительная записка

Разработка программы данного курса обусловлена непродолжительным изучением темы «Проценты» на первом этапе основной школы, когда учащиеся в силу возрастных особенностей еще не могут получить полноценные представления о процентах, об их роли в повседневной жизни. На последующих этапах обучения повторного обращения к этой теме не предусматривается. Задачи на проценты можно встретить во многих школьных учебниках, но в них отсутствует компактное и четкое представление теории, которая требуется для решения и понимания того, о чем идет речь в задаче. Текстовые задачи на проценты содержатся в материалах основного государственного экзамена за курс основной школы, в конкурсные экзамены (ЕГЭ). Однако практика показывает, что задачи на проценты вызывают затруднения у обучающихся и даже те, кто окончили школу не имеют прочных навыков обращения с процентами в повседневной жизни. Практическое значение этой темы очень велико и затрагивает различные стороны нашей жизни.

Цели курса:

- сформировать понимание необходимости знаний процентных вычислений для решения большого круга задач, а также показать широту применения процентных расчетов в реальной жизни;

- способствовать повышению уровня математической подготовки школьников, в том числе, для успешной сдачи единого государственного экзамена.

Задачи курса:

- углубить и расширить знания по данной теме;

- сформировать умения производить процентные вычисления, необходимые при решении задач различной сложности;

- способствовать развитию познавательного интереса учащихся к предмету.

Данный курс рассчитан на 16 часов, включая в себя теоретические вопросы, подборку задач и контрольные работы. Практическая работа учащихся должна присутствовать в различных формах: индивидуально, в парах или в группах. Такая организация способствует реализации развивающих целей курса, так как развитие способностей учащихся возможно лишь при сознательном, активном участии в работе самих учащихся.

Предлагаемые задачи различны по уровню сложности: от простых упражнений на применение изученных формул до достаточно трудных примеров расчета процентов в реальной банковской ситуации. В разработке курса проводится примерное распределение учебного времени, включающее план занятий. К каждой теме предоставлен рекомендуемый набор задач, который будет способствовать достижению поставленных целей.

Ожидаемый результат изучения курса:

- расширение знаний по математике;

- систематизация знаний по методам решения задач на проценты;

- способность применять полученные знания и умения при сдаче ЕГЭ и дальнейшем обучении.

Программа курса может быть эффективно использована в 10 – 11 классах с любой степенью подготовленности, предполагает как итоговый результат не только приобретение знаний, предусмотренных требованиями программы общеобразовательной школы, но и дает возможность осознанно определиться с выбором профиля обучения и дальнейшей специализации.

Учебно – тематический план факультатива на тему «Проценты» представлен в таблице 1.

Таблица 1.

№	Наименование тем курса	Количество часов
1	Контрольная работа	1
2	Решение задач первого типа (нахождение процента от числа)	1
3	Решение задач второго типа (нахождение числа по его проценту)	1
4	Решение задач третьего типа (нахождение процентного отношения)	1
5	Задачи на уменьшение, увеличение цены (наценка, уценка товара)	1
6	Задачи на концентрацию, смеси, сплавы, растворы	2
7	Простые проценты, налоги	2
8	Сложные проценты, вклады	2
9	Банковские задачи, кредиты	2
10	Задачи на оптимальный выбор	2
11	Итоговая контрольная работа	1
	Итого:	16

Подборка задач к занятиям представлена в Приложении 1.

Занятие 1. Контрольная работа (входная)

Входной контроль знаний обучающихся является частью внутришкольного контроля и предназначен для определения уровня готовности каждого ученика и класса в целом к дальнейшему обучению, а также для выявления типичных пробелов в знаниях обучающихся с целью организации работы по ликвидации этих пробелов. Контрольная работа состоит из 5 задач, из которых 3 типовые задачи, 2 более сложные, и одного теоретического вопроса.

Занятие 2. Решение задач первого типа (нахождение процента от числа)

Правило. Чтобы найти указанный процент от числа, нужно данное число умножить на число процентов и результат разделить на 100.

Занятие 3. Решение задач второго типа (нахождение числа по его проценту)

Правило. Чтобы найти число по его указанному проценту, нужно заданное число разделить на заданную величину процента, а результат умножить на 100.

Занятие 4. Решение задач третьего типа (нахождение процентного отношения чисел)

Правило. Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно одно число разделить на другое, а результат умножить на 100.

Занятие 5. Задачи на уменьшение, увеличение цены (наценка, уценка товара)

Скидка (уценка) – это понижение цены товара или услуги. Чаще всего скидку указывают в процентах.

Распродажа – реализация какого – либо товара по сниженным ценам; организованный процесс снижения цен на товары разных категорий, целью которого является освобождение складских и торговых площадей для поступления нового товара. Также зачастую происходит при закрытии или ликвидации торгового заведения.

Наценка – это процент превышения розничной цены продажи над оптовой ценой закупки товара.

Занятие 6. Задачи на концентрацию, смеси, сплавы, растворы

Здесь нужно знать что такое концентрация вещества, – это величина, которая определяет содержание компонента в сплаве, смеси, растворе. Концентрация выражается в процентах. При решении задач на смеси, растворы и сплавы, важно не забывать их общее свойство, которое заключается в том, что масса смеси, раствора или сплава равна сумме масс их компонентов.

Занятие 7. Простые проценты, налоги

Простые проценты – это метод расчета процентов, при котором начисление происходит на первоначальную сумму (т.е. один раз).

Налог – это обязательный безвозмездный платеж в бюджет государства.

Номинальная заработная плата – это сумма денег, т.е. денежное выражение труда рабочего за определенный период времени (час, день, месяц, год).

Реальная заработная плата — это совокупность товаров и услуг, которые наемный работник может приобрести на ту сумму денежных средств, которая останется у него от номинальной зарплаты после уплаты налогов и взносов обязательного характера. Реальная зарплата зависит не только от уровня номинальной заработной платы, но и от уровня цен на товары и услуги.

При умеренной инфляции изменение уровня реальной заработной платы можно рассчитать как разность индекса номинальной зарплаты и процентного изменения уровня цен: $ИРЗ = ИНЗ - ПИЦ$.

В общем случае индекс реальной заработной платы определяется как отношение индекса номинальной заработной платы к индексу потребительских цен: $ИРЗ = \frac{ИНЗ}{ИПЦ} \cdot 100\%$.

Индекс реальной заработной платы – это показатель, который позволяет определить изменение реальной заработной платы за тот или иной период времени.

Подобным образом рассчитываются индексы других реальных доходов: стипендий, пенсий, пособий и т. д. Динамику индексов реальных доходов учитывают при индексации доходов населения.

Также необходимо понимать эквивалентность утверждений «больше на 30%» и «больше в 1,1 раза», «меньше на 65%» и «меньше в 4 раза». Взаимосвязь этих утверждений можно записать в виде формул (*):

- если величина А больше величины В на $p\%$, то $A = B + \frac{p}{100}B = (1+0{,}01p)B$.
- если величина А меньше величины В на $p\%$, то $A = B - \frac{p}{100}B = (1-0{,}01p)B$.

Занятие 8. Сложные проценты, вклады

Если проценты начисляются на наращенный капитал, т.е. несколько раз, то такие проценты называются сложными.

При решении задач на начисление процентов таким способом применяются следующие формулы: $S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, где S_n – это общая (конечная) сумма, включающая проценты, S_0 – первоначальная сумма, p – годовая процентная ставка, n – количество периодов начисления процентов (месяц, год, квартал). При этом $1+0{,}01p = \sqrt[n]{\frac{S_n}{S_0}}$.

При последовательном изменении величины S_0 на $p_n\%$ в течение n периодов, она становится равной

$S_n = S_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)$, где величины p_n могут быть как положительными при увеличении величины на $p\%$, так и отрицательными при уменьшении величины на $p\%$.

Занятие 9. Банковские задачи, кредиты

Кредит – это предоставление денежных средств на условиях последующего возврата в установленный срок, включая оплату процентов за их использование.

Перед тем, как взять кредит заемщик сравнивает процентные ставки и выбирает наиболее выгодную для него. При таком выборе нужно учитывать не только ставку, но и метод погашения кредита. Есть два метода: дифференцированные платежи и аннуитетные платежи.

При дифференцированном методе погашения кредита платеж каждый месяц разный. Неизменным остается только основной платеж, который используется для погашения «тела» кредита. Проценты начисляются на фактический остаток, так сумма выплат постепенно снижается, и к окончанию срока кредитования становится минимальной.

В отличие от дифференцированных, аннуитентные платежи выплачиваются всегда одной и той же суммой. Так, в первые месяцы выплаты кредита платеж заемщика будет большей частью направляться именно на уплату процентов, а оставшаяся небольшая часть, которая будет зависеть от ставки по кредиту, – на погашение его «тела». Со временем доля платежа, направляемая на уплату процентов, будет уменьшаться, а доля, перечисляемая на погашение «тела» кредита, – увеличиваться.

Представим графики погашения кредита в размере 1 млн руб., взятого на 20 лет при 12% годовых (серым выделена выплата процентов по кредиту, темно – серым – выплата тела кредита).

График погашения кредита дифференцированными платежами

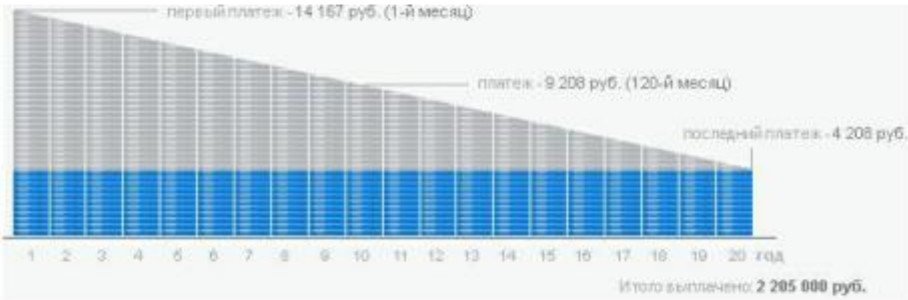
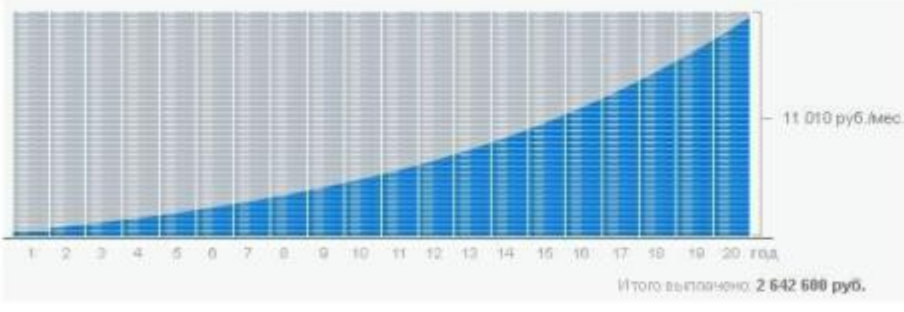


График погашения кредита аннуитетными платежами



Дифференцированные платежи дают линейную зависимость от погашения кредита: чем меньше должен – тем меньше начислили процентов. Сумма и срок досрочного погашения ничем не ограничены. Досрочное погашение в аннуитетной схеме только сокращает срок выплаты кредита: на графике «срезаются» последние платежи и отпадает необходимость платить соответствующие им проценты, которые в конце графика как раз очень малы. В итоге, в аннуитетной схеме досрочное погашение невыгодно.

Теорема об аннуитетных платежах. Для случая n платежных периодов (дней, месяцев, лет) верны формулы, связывающие сумму кредита S_0, коэффициент $m = 1 + 0{,}01q$, где $q\%$ — процентная ставка за период, величину текущего долга S_n и постоянную выплату x: $S_n = m^n S_0 - (1 + m + ... + m^{n-1})x$, и тогда $S_n = m^n S_0 - \frac{m^n - 1}{m - 1}x$, $x = \frac{m^n(m-1)}{m^n - 1}S_0$, $S_0 = \frac{m^n - 1}{m^{n+1} - m^n}x$, $n = \log_m \frac{x}{x - S_0(m-1)}$.

Теорема о дифференцированных платежах. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S_0, причем каждый платежный период долг сначала возрастет на $q\%$ по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за все время выплаты кредита представлены формулами:

$$П = \frac{q}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0, \; В = S_0 + П = S_0\left(1 + \frac{q(n+1)}{200}\right).$$

Занятие 10. Задачи на оптимальный выбор (задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения)

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. В условиях рыночных отношений среди разнообразных вариантов приходится отыскивать наилучшие, наиболее выгодные. Таким образом, возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций математические методы и современную вычислительную технику. При решении задач экономии ресурсов необходимо применять методы оптимизации.

Математическое программирование – это область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных задач с ограничениями. Математическое программирование занимается математическими методами решения задач нахождения наилучших вариантов из всех возможных, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Целевая функция – это функция, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей. Также ее называют показателем эффективности или критерием оптимальности. Экономические возможности представлены в виде системы ограничений. Все это составляет математическую модель. Математическая модель задачи – это представление реальной ситуации с помощью математического языка (с использованием математических символов, т.е. в виде выражений, функций, уравнений, неравенств, цифр, знаков и т.д.)

Целевая функция позволяет выбирать наиболее лучший вариант из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение, т.е наибольшее или наименьшее. Целевой функцией может быть прибыль предприятия, объем выпуска продукции, затраты производства, уровень обслуживания и т. д.

Оптимальное решение не всегда может быть единственным, бывают случаи, когда оно не существует, имеется несколько выгодных вариантов или бесконечное множество таких решений.

Занятие 11. Итоговая контрольная работа

Итоговая контрольная работа проводится после изучения всех тем данного курса. Так же контрольная работа состоит из 5 задач и одного теоретического вопроса.

Вывод по главе

В данной главе практическое приложение методики обучения решению задач на проценты рассмотрена методика решения задач различных типов на проценты, этапы решения задачи, а также разработан элективный курс на тему «Проценты», который способствует повышению уровня понимания и практической подготовки школьников.

Заключение

В данной работе была рассмотрены типы и методы решения задач на проценты, а также методика их изучения в школьном курсе математики.

При проведении исследования были решены задачи, заявленные во введении:

– в главе I проанализирована учебная, методическая литература, связанная с изучением темы «Проценты» в основной школе, определены роль и место темы в школьном курсе математики, проведён сравнительный анализ изложения темы «Проценты» в учебниках математики 5–6 классов, проанализировано изложение различных тем, связанных с процентами, в учебниках алгебры 7–9 классов, а также сравнительный анализ задач на проценты в вариантах ЕГЭ по годам.

– в главе II представлены методика решения задач различных типов на проценты, основные этапы решения, разработка элективного курса на тему «Проценты» для 10 – 11 класса с подборкой задач с решением различных уровней сложности.

Задачи на проценты рассматриваются преимущественно в 5–6 классах, в то время как в 7 – 9 классах навыки решения таких задач утрачиваются, а в 10 – 11 классах практически нет обращения к этой теме. Поскольку в заданиях ОГЭ и ЕГЭ встречаются задачи на проценты, именно в 7–9 и 10–11 классах необходимо проводить работу, направленную на поддержание этих навыков и умений.

Таким образом, ознакомившись с методикой изучения темы «Проценты» в школьном курсе математики, важно отметить, что задачи на проценты, широко используемые как в различных областях науки, так и в реальной жизни, имеют большое практическое значение. Поэтому необходимо выстроить процесс изучения данной темы таким образом, чтобы добиться высокого уровня знаний, умений и навыков учащихся, которые необходимы для дальнейшего успешного обучения учащихся не только по математике, но и по другим школьным предметам. А также при изучении данной темы использовать элективный курс, который способствует повышению уровня понимания и практической подготовки школьников.

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций [Текст] / С.М.Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.
2. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В.Сидоров и др. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 224с.
3. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К..И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.
4. Алгебра. 7 класс: Учеб. для общеобразовательных учреждений [Текст] / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А.Бунимович и др.; Под ред. Г.В. Дорофеева. – Рос. акад. наук, Рос. акад. образования – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 256 с.
5. Алгебра. 7 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений, с углубл. изуч. [Текст] / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К..И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 13-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 336 с.
6. Алгебра. 8 класс: Учеб. для общеобразоват. организаций [Текст] / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А.Бунимович и др.; Под ред. Г.В. Дорофеева. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.
7. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В.Сидоров и др. – 19-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 255с.
8. Алгебра. 9 класс: Учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А.Бунимович и др.; Под ред. Г.В. Дорофеева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.

9. Дорофеев Г.В. и др. Изучение процентов в основной школе [Текст] / Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Минаев С.С. и др. //Математика в школе. – 1994. – №4.
10. Дорофеев Г.В. Математика: учебник для 6 класса: Ч. 1. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон – М.: Ювента, 2010 г.
11. Дорофеев Г.В. Математика: учебник для 6 класса: Ч. 2. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон – М.: Ювента, 2010 г.
12. Дорофеев Г.В. Математика: учебник для 6 класса: Ч. 3. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон – М.: Ювента, 2010 г.
13. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений [Текст] / Н.Я. Виленкин, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.
14. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений [Текст] / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд. – М.: Мнемозина, 2013. – 270 с.
15. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288 с.
16. Математика. 6 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений [Текст] / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 8-е изд. – М.: Мнемозина, 2009. – 264с.
17. Математика. 6 класс: учеб.для общеобразоват. учреждений [Текст] / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.В. Суворова и др.; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования. – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 303 с.
18. Математика. 6 класс: учебник для общеобразоват. учреждений [Текст] / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2012. – 256 с.

19. Савин А.П. , Станцо В.В., Котова А.Ю. Я познаю мир: Детская энциклопедия: Математика [Текст] / Под общ. ред. О.Г. Хинн – М.: ООО «Фирма «Издательство АСТ»», 2006 – 479 с.
20. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студ. математических спец. пед вузов и университетов [Текст] / Г.И. Саранцев – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
21. Спецификация экзаменационной работы по математике ЕГЭ 2018 г. подготовлена Федеральным государственным научным учреждением ФИПИ [Электронный ресурс] // URL: http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory

Приложение

Занятие 1. Контрольная работа (входная)

Задача 1. В школе 500 учеников. 15% из них посещают спортивные секции. Сколько учеников в школе занимаются спортом?

Решение:

Пользуясь правилом нахождения процента от числа найдем сколько человек занимаются спортом: $500:100\cdot 15=75$.

Ответ: 75 учеников

Задача 2. В некотором населенном пункте 85 человека знают испанский язык, что составляет 5% всех жителей. Сколько жителей проживет в населенном пункте?

Решение:

В данной задаче нужно воспользоваться правилом нахождения числа по его проценту.

$85:5\cdot 100=1700$ – жителей проживет в населенном пункте.

Ответ: 1700 человек

Задача 3. В 6в классе 25 учеников. 13 из них составляют мальчики. Сколько процентов мальчиков в классе?

Решение:

Воспользуемся правилом нахождения процентного отношения двух чисел.

$13:25\cdot 100=52\%$ – составляют девочки.

Ответ: 52%

Задача 4. Ваня положили 50000 рублей в банк под 10% годовых на 5 лет. Какая сумма будет у него через 5 лет?

Решение:

Рассчитаем по формуле сложного процента:

$$S_5=50000\cdot(1+0{,}01\cdot 10)^5=50000\cdot 1{,}1^5=80525{,}5 \text{ рублей.}$$

Ответ: 80525,5 руб.

Задача 5. В банк был положен вклад под банковский процент 10%. Через год, после начисления процентов, хозяин вклада снял со счета 2000 рублей, а еще через год снова внес 2000 рублей. Однако, вследствие этих действий через три года со времени первоначального вложения вклада он получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы получил в итоге вкладчик?

Решение:

Пусть вкладчик в банк первоначально положил x рублей. Тогда за 3 года хранения этих денег вклад вырос бы до $1{,}331x$ рублей, то есть до $1{,}1^3 x$ рублей.

За первый год хранения вклада он вырос до $1{,}1x$ рублей. Однако, через год вкладчик снял 2000 рублей. На счету осталось $1{,}1x-2000$ рублей. В конце второго года хранения вклада на эту сумму были начислены проценты, вклад стал $(1{,}1x-2000)\cdot 1{,}1$ рублей.

Однако, вкладчик снова внес 2000 рублей. Сумма вклада стала $(1{,}1x-2000)\cdot 1{,}1+2000$ рублей.

К концу третьего года хранения вклада ее сумма стала

$$((1{,}1x-2000)\cdot 1{,}1+2000)\cdot 1{,}1=1{,}1^3 x-2000\cdot 1{,}1^2+2000\cdot 1{,}1 \text{ рублей.}$$

И эту сумму снял вкладчик в итоге вместо первоначально запланированной $1{,}1^3 x$ рублей.

Найдем искомую разность:

$$1{,}1^3 x-1{,}1^3 x+2000\cdot 1{,}1^2-2000\cdot 1{,}1=2000\cdot 1{,}1\cdot(1{,}1-1)=2000\cdot 1{,}1\cdot 0{,}1=220 \text{ рублей.}$$

Ответ: на 220 руб.

Теоретический вопрос: что такое кредит?

Ответ: Кредит – это предоставление денежных средств на условиях последующего возврата в установленный срок, включая оплату процентов за их использование.

Занятие 2. Решение задач первого типа (нахождение процента от числа)

Задача 1. Средний вес леопарда равен 54 кг. Вес черной пантеры составляет 135% среднего веса. Сколько кг весит черная пантера?

Решение:

Нужно найти 135% от 54 кг, то есть проценты от числа.

$135 \cdot 54 : 100 = 72{,}9(кг)$ – вес черной пантеры

Ответ: 72,9 кг

Задача 2. За месяц на предприятии изготовили 800 приборов. 20% изготовленных приборов не смогли пройти контроль качества. Сколько приборов не прошло контроль качества?

Решение:

Нужно найти 20% от общего количества изготовленных приборов (800).

$20\% = 0{,}2$

$800 \cdot 0{,}2 = 160$

160 из общего количества изготовленных приборов контроль не прошло.

Ответ: 160 приборов

Задача 3. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Ваня, равен 32 кг. Вес Вани составляет 125% среднего веса. Сколько килограммов весит Ваня?

Решение:

$125 \cdot 32 : 100 = 40(кг)$ – весит Ваня.

Ответ: 40 кг

Задача 4. Из молока получается 24% сливок. Сколько получится сливок из 120 кг молока?

Решение:

Сливки – это часть молока, значит, все молоко – 100%.

$1) 120 : 100 = 1{,}2(кг)$ – 1% молока

$2) 1,2 \cdot 24 = 38,8 (кг)$ – получится сливок

Ответ: 38,8 кг

Задача 5. Если Вася не сможет поехать на соревнования, то ему придётся сдать билет. 70% от цены билета ему вернут. Сколько Вася «потеряет» денег, если билет стоит 2300 рублей?

Решение:

Сначала нужно найти проценты, которое Вася «потеряет», а затем найти проценты от числа (2300).

$1) 100\% - 70\% = 30\%$ – «потеря»

$2) 2300 \cdot 30 : 100 = 690 (руб.)$ – Васе не вернут

Ответ: 690 руб.

Задача 6. Городской бюджет составляет 45 млн. р., а расходы на одну из его статей составили 12,5%. Сколько рублей потрачено на эту статью бюджета?

Решение:

$45000000 : 100 \cdot 12,5 = 5625000 (руб.)$ – потрачено на статью

Ответ: 5625000 руб.

Занятие 3. Решение задач второго типа (нахождение числа по его проценту)

Задача 1. Готовясь к годовой контрольной работе, школьник решил 38 задач из пособия для самоподготовки. Что составляет 23% числа всех задач в пособии. Сколько всего задач собрано в этом пособии для самоподготовки?

Решение:

Известно, что 38 задач составляют 25% от общего их количества, нужно найти число по его проценту.

$38 : 25 \cdot 100 = 152 (задачи)$ – всего в пособии

Ответ: 152 задачи

Задача 2. Из пшеницы получили 80% муки. Сколько взяли пшеницы, если муки получили 640 кг?

Решение:

$1) 640:80=80(кг)$ – 1% муки

$2) 80\cdot 100=800(кг)$ – взяли пшеницы

Ответ: 800 кг

Задача 3. 6 студентов отделения конькобежного спорта составляют 30% от всей группы. Сколько в группе человек?

Решение:

Нам известно, что 6 студентов составляют 30% от всей группы, следовательно, нужно найти число по его проценту.

$6:30\cdot 100=20(чел.)$ – в группе

Ответ: 20 человек

Задача 4. В населенном пункте 72 человека знают испанский язык, что составляет 9% всех жителей. Сколько жителей проживет в населенном пункте?

Решение:

72 учащихся – это 9% от общего количества.

Узнаем, чему равен 1% жителей, знающих испанский язык.

$1) 72:9=8(чел.)$ – 1% жителей, знающих испанский язык

Чтобы узнать, чему равно 100% населения, надо умножить 8 на 100.

$2) 8\cdot 100=800(чел.)$ – проживающих в населенном пункте

Ответ: 800 человек

Задача 5. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько всего страниц в книге?

Решение:

Итак, нам известно, что часть, которую прочитал ученик, т. е. 138страниц, что составляет 23% от общего количества страниц в книге.

$138:23\cdot 100=600(стр.)$ — общее количество страниц в книге

Ответ: 600 страниц

Задача 6. Магазин получил с продуктовой базы 60 т яблок, что составило 30% от массы всех полученных фруктов. Сколько тонн фруктов получил магазин?

Решение:

$60:30\cdot 100=200(т.)$ – фруктов получил магазин

Ответ: 200 тонн

Занятие 4. Решение задач третьего типа (нахождение процентного отношения чисел)

Задача 1. В 8а классе 30 учеников. 18 из них – девочки. Сколько процентов девочек в классе?

Решение:

Чтобы узнать, какой процент составляет одно число от другого, воспользуемся правилом.

$18:30\cdot 100=60\%$ – составляют девочки

Ответ: 60%

Задача 2. В начале года число абонентов телефонной компании «Маяк» составляло 200 тыс. чел., а в конце года их стало 210 тыс. чел. На сколько процентов увеличилось за год число абонентов этой компании?

Решение:

Найдём процентное отношение чисел 210 000 и 200 000.

$210000:200000\cdot 100=105\%$

Теперь найдём на сколько процентов увеличилось число абонентов

$105\%-100\%=5\%$

Ответ: 5%

Задача 3. В 200 кг сливочного мороженого содержится 30 кг сахара. Какое процентное содержание сахара в мороженом?

Решение:

Найдём процентное отношение чисел 30 и 200.

$30:200\cdot 100=15\%$

Ответ: 15%

Задача 4. Магазин предоставляет пенсионерам скидку на продукты питания. Пакет сока стоит в магазине 70 рублей, а пенсионер заплатил за сок 65 рублей 10 копеек. Сколько процентов составляет скидка для пенсионера?

Решение:

Найдём процентное отношение чисел 65,1 и 70.

$1) 65{,}1 : 70 \cdot 100 = 93\%$

70 рублей – это 100%

$2) 100 - 93 = 7\%$ – составляет скидка

Ответ: 7%

Задача 5. Завод должен был за месяц изготовить 1200 изделий, а изготовил 2300 изделий. На сколько процентов завод перевыполнил план?

Решение:

Сначала найдём сколько процентов составляет фактический выпуск изделий по сравнению с плановым

$1) 2300 : 1200 \cdot 100 = 191{,}7\%$

Найдём на сколько процентов перевыполнен план

$2) 191{,}7 - 100 = 91{,}7\%$

Ответ: на 91,7%.

Задача 6. В новогоднюю коробку положили 16 конфет «Маска», 24 конфеты «Ромашка» и 40 ирисок «Золотой ключик». Определите процентное содержание конфет каждого сорта, содержащихся в коробке.

Решение:

Всего конфет $16 + 24 + 40 = 80$.

Определим процентное содержание конфет каждого сорта, содержащихся в коробке:

$\frac{16}{80} \cdot 100\% = 20\%$ – приходится на конфеты «Маска»,

$\frac{24}{80} \cdot 100\% = 30\%$ – приходится на конфеты «Ромашка»,

$\frac{40}{80}\cdot 100\% = 50\%$ – приходится на конфеты «Золотой ключик».

Ответ: 20%, 30%, 50%

Занятие 5. Задачи на уменьшение, увеличение цены (наценка, уценка товара)

Задача 1. Брюки на распродаже уценили на 30%, при этом они стали стоить 700 рублей. Сколько рублей стоили брюки до распродажи?

Решение:

$100\% - 30\% = 70\%$, т.е. 700руб.–это 70% от первоначальной цены.

$700 : 70 \cdot 100 = 1000(\textit{руб.})$ – стоили брюки до распродажи

Ответ: 1000 руб.

Задача 2. Товар на распродаже уценили на 20%, при этом он стал стоить 680 р. Сколько стоил товар до распродажи?

Решение:

1 способ

$1) 100\% - 20\% = 80\% = 0{,}8$

$2) 680 : 0{,}8 = 850(\textit{руб.})$

2 способ

$x \ \textit{руб.} - 100\%$

$680 \ \textit{руб.} - 80\%$

$x = 680 \cdot 100 : 80 = 850(\textit{руб.})$

Ответ: 850 руб.

Задача 3. В понедельник некоторый товар поступил в продажу по цене 1000 руб. В соответствии с принятыми в магазине правилами цена товара в течение недели остается неизменной, а в первый день каждой следующей недели снижается на 20% от предыдущей цены. Сколько рублей будет стоить товар на девятый день после поступления в продажу?

Решение:

1 способ

1 неделя – товар стоит 1000 рублей

2 неделя – на 20% меньше

$1) 1000 \cdot 0{,}2 = 200 (руб.)$ – уценка товара на второй неделе

$2) 1000 - 200 = 800 (руб.)$ – стоимость товара на девятый день

2 способ

$1000 руб. - 100\%$
$x\ руб. - 80\%$

$x = 1000 \cdot 80 : 100 = 800 (руб.)$

Ответ: 800 руб.

Задача 4. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

Решение:

1 способ

Цена на футболку была снижена на $800 - 680 = 120$ руб. Разделим 120 на 800: $\frac{120}{800} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Значит, цена на футболку была снижена на 15%.

2 способ

Примем стоимость футболки в 800 рублей за 100%. Тогда после снижения цены стоимость футболки в 680 рублей составит $x\%$. составим пропорцию:

$800 руб. - 100\%$
$680 руб. - x\%$

$x = 680 \cdot 100 : 800 = 85\%$

Значит, цена футболки снижена на $100\% - 85\% = 15\%$

Ответ: 15%

Задача 5. Зонт стоил 360 рублей. В ноябре цена зонта была снижена на 15%, а в декабре еще на 10%. Какой стала стоимость зонта в декабре?

Решение:

1) $360 \cdot 0{,}85 = 306 (руб.)$ – стоимость зонта в ноябре

2) $306 \cdot 0{,}9 = 275{,}4 (руб.)$ – второе снижение цены

Ответ: 275,4 руб.

Задача 6. Торговая база закупила у изготовителя партию альбомов и поставила её магазину по оптовой цене, которая на 30% больше цены изготовителя. Магазин установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрёл альбом за 70,2 р.?

Решение:

Пусть a – цена изготовителя. Оптовая цена 1 альбома составит $1{,}3a$, т.к. она больше цены изготовителя на 30%. Находим розничную цену альбома: она на 20% выше оптовой. Тогда 1 альбом в магазине будет стоить $1{,}56a$ руб. На распродаже цена снизилась на 10%. т.е. на $0{,}156a$ руб.

Получаем цену альбома после снижения $1{,}404a$ руб., а это составляет 70,2 рубля.

Решив уравнение: $1{,}404a = 70{,}2$, получим $a = 50$. Т. е. цена изготовителя равна 50 руб.

Покупатель заплатил на 20,2 руб. больше по сравнению с ценой изготовителя.

Ответ: на 20,2 рубля.

Задача 7. Тетрадь стоит 24 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 60 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

Решение:

За 60 тетрадей покупатель заплатил бы $60 \cdot 24 = 1440$ рублей. Скидка составит 10%, т. е. 144 рубля. Значит, покупатель заплатит $1440 - 144 = 1296$ рублей.

Ответ: 1296

Задача 8. Располагая некоторой суммой денег, фирма могла купить 44 телевизора равной стоимости. Сколько телевизоров смогла бы купить фирма на эту сумму денег, если бы стоимость телевизоров была снижена на 12%.

Решение:

Пусть x *руб.* – стоимость одного телевизора;

$0{,}12x$ *руб.* – на столько снижена стоимость телевизоров;

$x - 0{,}12x$ – стал стоить один телевизор;

$44x$ *руб.* – стоили все телевизоры первоначально;

$44x : 0{,}88x = 50(шт.)$

Ответ: 50

Занятие 6. Задачи на концентрацию, смеси, сплавы, растворы

Задача 1. В растворе содержится 40% соли. Если добавить 120 г соли, то в растворе будет содержаться 70% соли. Сколько граммов соли было в растворе первоначально?

Решение:

Пусть x г весь первоначальный раствор, тогда

$0{,}4x$ г – соли в первоначальном растворе,

$(x + 120)$ г – стало раствора,

$(0{,}4x + 120)$ г – стало соли в растворе, которая теперь составляет 70% раствора, т.е. 0,7 от всего раствора, составляем уравнение:

$0{,}4x + 120 = 0{,}7(x + 120)$, решив которое получим

$x = 120$

В растворе содержится 40% соли, что составляет

$120 \cdot 0{,}4 = 48(г)$

Ответ: 48 г

Задача 2. Сколько граммов воды надо добавить к 50г раствора, содержащего 8% соли, чтобы получить 5% раствор?

Решение:

Решим эту задачу уравнением.

Пусть x – количество воды, которое надо добавить,

$(50+x)$ – новое количество раствора,

$50\cdot 0{,}08$ – содержание соли в исходном растворе,

$0{,}05(50+x)$ – содержание соли в новом растворе.

Так как количество соли от добавления не изменилось, то оно одинаково в обоих растворах – и в исходном, и в новом.

Получаем уравнение:

$$50\cdot 0{,}08=0{,}05(50+x)$$
$$50\cdot 8=5\cdot(50+x)$$
$$400=250+5x$$
$$5x=150$$

$x=30(г.)$ – воды надо добавить, чтобы получить 5% раствор

Ответ: 30 г

Задача 3. Свежие грибы по массе содержат 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

Решение: решим задачу с помощью таблицы и уравнения.

	% воды	Масса (кг)	% содержания сухого вещества	Масса сухого вещества
Свежие	90	22	10	$22\cdot 0{,}1=2{,}2$
Сухие	12	x	88	$0{,}88x$

Из таблицы видно, что:

$$0{,}88x=2{,}2$$

$x=2{,}5(кг)$ – сухих грибов

Ответ: 2,5 кг

Задача 4. В сплаве золота с серебром содержится 80 г золота. К сплаву добавили 100 г чистого золота. Содержание золота в сплаве повысилось на 20%. Сколько серебра было в сплаве?

Решение:

Пусть x г – серебра в сплаве, тогда $(x+80)$ г – масса первоначального сплава, $(x+180)$ г – масса нового сплава, $\frac{80}{x+80}г.$ – часть золота в первом сплаве, $\frac{180}{x+180}$ *г.*– часть золота во втором сплаве, т. к. содержание золота повысилось на 20% (т. е. на $\frac{1}{5}$), составляем уравнение: $\frac{180}{x+180}-\frac{80}{x+80}=\frac{1}{5}$, решая которое получим:

$$x^2-240x+14400=0$$

$$(x-120)^2=0$$

$$x=120$$

Ответ: 120 г.

Задача 5. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом – 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 10кг нового сплава, содержащего 27% олова?

Решение:

Заполним таблицу согласно условию задачи.

	1 сплав		2 сплав		новый сплав	
общая масса	x кг		y кг		10 кг	
олово	20%	$0{,}2x$ кг	30%	$0{,}3y$ кг	27%	$0{,}27\cdot 10$ кг

Пусть x кг – масса первого сплава, в котором содержится 0,2х кг олова, а y кг – масса второго сплава, в котором содержится $0{,}3y$ кг олова. Т.к. в смеси содержится олова $0{,}27\cdot 10$ кг, то имеем уравнение:

$$0{,}2x+0{,}3y=0{,}27\cdot 10 \quad (1)$$

Кроме этого, третий сплав – это смесь первого и второго сплавов, поэтому имеем второе уравнение: $x+y=10$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}2x+0{,}3y=2{,}7 \\ x+y=10 \end{cases}$$

Умножим обе части уравнения (1) на 10, тогда получим систему:

$\begin{cases} 2x+3y=27 \\ x+y=10 \end{cases}$, решением которой является $x=3$, $y=7$.

Ответ: 3 кг, 7 кг.

Задача 6. Имеются два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 30%, а во втором – 55% золота. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 40% золота.

Решение:

Пусть x – масса первого сплава, y – масса второго сплава. Тогда количество золота в первом сплаве составляет $0{,}3x$, а во втором сплаве $0{,}55y$. Масса нового сплава равна $x+y$, а количество золота в нем составляет $0{,}4(x+y)$.

Составим уравнение: $0{,}3x+0{,}55y=0{,}4(x+y)$. Преобразуем уравнение, получим:

$$30x+55y=40x+40y$$

$$6x+11y=8x+8y$$

$$3y=2x$$

$$x:y=3:2$$

Ответ: 3 : 2

Задача 7. В сосуд, содержащий 5 литров 12–процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение:

Концентрация раствора равна $C=\dfrac{V_{в-ва}}{V_{р-ра}}\cdot 100\%$.

$0{,}12\cdot 5=0{,}6$ литра составит объем вещества в исходном растворе.

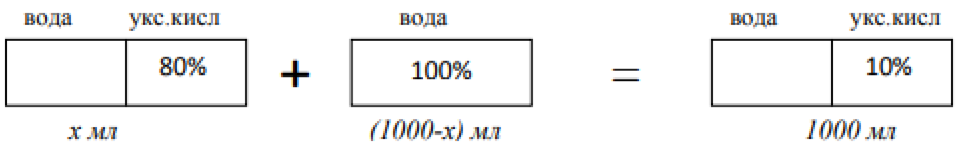
При добавлении 7 литров воды общий объем раствора увеличится, а объем растворенного вещества останется прежним. Таким образом, концентрация полученного раствора равна: $\dfrac{0{,}6}{5+7}\cdot 100\%=\dfrac{0{,}6}{12}\cdot 100\%=5\%$.

Ответ: 5

Задача 8. Для консервирования 10 кг баклажан необходимо 0,5л столового уксуса (10% раствор уксусной кислоты). У хозяйки имеется уксусная эссенция (80% раствор уксусной кислоты), из которой она готовит уксус, добавляя в нее воду. Сколько миллилитров уксусной эссенции понадобится хозяйке для консервирования 20 кг баклажан?

Решение:

Для консервирования 20кг баклажан понадобится 1л или 1000мл столового уксуса. Для получения его из x мл уксусной эссенции (80% раствор уксусной кислоты) необходимо добавить воду, тогда схема для решения задачи имеет вид:



Составим уравнение, подсчитав количество уксусной кислоты слева от знака неравенства, и приравняем его к количеству уксусной кислоты справа от него. Получаем уравнение $0{,}8x = 100$, $x = 125$. Значит, для приготовления 500мл маринада понадобится 125мл уксусной эссенции.

Ответ: 125

Занятие 7. Простые проценты, налоги

Задача 1. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких рубашек дороже куртки?

Решение:

Пусть цена одной рубашки Р, а цена куртки К.

$100\% - 8\% = 92\%$ составляет цена за 4 рубашки от цены за 1 куртку

Тогда в силу формул (*) имеем:

$4P = 0{,}92K$

$P = 0{,}23K$

$5P = 1{,}15K$, то есть 5 рубашек дороже куртки на 15%.

Ответ: 15%

Задача 2. Семья состоит из отца, матери и их дочери – студентки. Если бы зарплата отца увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата матери?

Решение:

Рассмотрим условия:

1) «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 67%» – оно означает, что зарплата отца составляет 67% дохода семьи.

2) «если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, доход семьи сократился бы на 4%» – означает, что $\frac{2}{3}$ стипендии составляют 4% дохода семьи, то есть вся стипендия дочери составляет 6% дохода семьи.

Таким образом, $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ будет составлять доход матери от дохода семьи.

Ответ: 27%

Задача 3. Семья Смирновых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

Решение:

1 способ

Если бы коммунальные платежи подорожали на 100%, то общая сумма увеличилась бы на 70%. Значит, доля коммунальных платежей в общей сумме составляет 70%. Если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма увеличилась бы на 20%. Значит, доля электричества в общей сумме составляет 20%. Оставшиеся 10% — расходы на телефон.

2 способ

Пусть плата за коммунальные услуги и электричество составляет x руб. в месяц, а за телефон – y руб. Если плата и за коммунальные услуги, и за электричество подорожают на 50%, эта часть оплаты составит $1{,}5x$ руб., что повлечет увеличение общей суммы платежа на 45%. Тогда

$$1{,}5x + y = 1{,}45 \cdot (x + y)$$

$$1{,}5x + y = 1{,}45x + 1{,}45y$$

$$0{,}05x = 0{,}45y$$

$$x = 9y$$

Следовательно, $x + y = 10y$, откуда $\frac{y}{x+y} = \frac{1}{10}$. Это означает, что на телефон приходится $\frac{1}{10}$ часть от общей суммы платежа, а это составляет 10%.

Ответ: 10%

Задача 4. По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

Решение:

В соответствии с прогнозом, через год цены на квартиры в Москве составят в рублях 0,8 части той, которая есть в текущем году, в евро – 0,6 части. Соответствующие цены в Сочи: 0,9 части в рублях и $(1 - 0{,}01x)$ части в евро, где x – падение цены в процентах. Курс рубля по отношению к евро в Москве и в Сочи считаем одинаковым, тогда составим пропорцию:

$$\frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{0{,}9}{1 - 0{,}01x}.$$

Откуда $\frac{4}{3} = \frac{90}{100 - x}$, $400 - 4x = 270$, $4x = 130$, $x = 32{,}5$.

Таким образом, цены на жилье в Сочи должны упасть на 32,5%.

Ответ: 32,5%

Вторая часть занятия посвящена применению понятия процент к расчетам налогов. Начать ее рекомендуется с рассмотрения трех опорных задач.

Задача 5. Зарплата работника составляет 35000 руб., налог на доходы физических лиц (НДФЛ) равен 13%. Сколько рублей останется у работника после уплаты налога?

Решение:

у работника останется 87% зарплаты или $\frac{35000 \cdot 87}{100} = 30450$ руб.

Задача 6. После уплаты 13% налога на доходы работник получил 26970 руб. Каков доход работника?

Решение:

работнику было начислено $26970 : 0{,}87 = 31000$ руб.

Задача 7. Какую зарплату необходимо начислить работнику, чтобы после уплаты 13% налога он получал 30 000 руб.?

Решение:

необходимо начислить $30000 : 0{,}87 \approx 34483$ руб., тогда работник получит 30 000 руб. 21 коп.

Задача 8. В некоторой стране подоходный налог начисляется следующим образом: с суммы, не превышающей 1000 денежных единиц, взимается 15%, с дохода от 1000 до 2000 денежных единиц с первой тысячи взимается 15%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с первой тысячи взимается 15%, со второй 25%, а с оставшейся суммы взимается 50%. Сколько процентов подоходного налога выплачивает гражданин этой страны, получающий после его выплаты зарплату в 2600 денежных единиц?

Решение:

Если после выплаты налога зарплата превышает 2000 денежных единиц, то до выплаты она тем более превышала 2000 единиц. Пусть зарплата до выплаты налога составляла $2000 + x$ денежных единиц. Тогда сумма выплаченного налога равна $1000 \cdot 0{,}15 + 1000 \cdot 0{,}25 + 0{,}5x = 400 + 0{,}5x$, откуда получим:

$$2600 + 400 + 0{,}5x = 2000 + x,$$

$0{,}5x = 1000$,

$x = 2000$.

Таким образом, зарплата гражданина до выплаты налога составляла 4000 денежных единиц, сумма выплаченного налога – 1400 денежных единиц, а выплаченный налог составляет $\left(\frac{1400}{4000}\right)\cdot 100 = 35\%$ заработка.

Ответ: 35%

Занятие 8. Сложные проценты, вклады

Задача 1. Миша и Маша положили на депозит одинаковые суммы под 10% годовых. Через год сразу после начисления процентов Миша снял со своего счета 5000 рублей, а еще через год снова внес 5000 рублей. Маша, наоборот, через год доложила на свой счет 5000 рублей, а еще через год сразу после начисления процентов сняла со счета 5000 рублей. Кто через три года со времени первоначального вложения получит большую сумму и на сколько рублей?

Решение:

Пусть для определенности Миша и Маша 15.01.12 положили в банк x рублей. Подготовим выписки из лицевых счетов Маши и Миши.

Выписка из лицевого счета Маши

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	X	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Принято от клиента	5000	$1{,}1x + 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2 x + 5500$
15.01.14	Выдано клиенту	5000	$1{,}1^2 x + 500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3 x + 550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3 x + 550$	0

Выписка из лицевого счета Миши

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	X	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Выдано клиенту	5000	$1{,}1x-5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x-5500$
15.01.14	Принято от клиента	5000	$1{,}1^2x-500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x-550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x-550$	0

Итак, нетрудно заметить, что Маша в окончательный расчет получила больше, чем Миша. Разница составляет:

$1{,}1^3x+550-1{,}1^3+550=1100$ (рублей).

Ответ: Маша, на 1100 руб.

Задача 2. Банк предлагает клиентам открыть два депозита сроком на 1 год: обычный и с капитализацией. Депозит «Добро» под 12,5% годовых, проценты начисляются в конце срока вклада. Депозит «Счастье» под 12% годовых, проценты по вкладу капитализируются (причисляются к сумме вклада) каждые три месяца. Какой из этих депозитов выгоднее?

Решение:

На депозит «Счастье» будет четырежды начислены проценты, каждый раз из расчета 3% за квартал. По формуле сложных процентов доход составит $1{,}03^4\approx1{,}1255$ или примерно 12,55% от начальной суммы. Тем самым, депозит «Счастье» выгоднее депозита «Добро» на 0,05 процентного пункта.

Ответ: депозит «Счастье»

Задача 3. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков новый процент годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере S под x% годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $S(1+0{,}01x)$.

После снятия четверти накопленной суммы на счете осталось $\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)$. С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01),$$

причем по условию задачи эта сумма равна $1{,}44S$. Тогда:

$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44S$, $(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}92$,

$(100+x)\cdot(100+(x+40))=19200$, $(100+x)\cdot(140+x)=19200$, $x=-120\pm\sqrt{19600}$,

$x=-120\pm 140 \underset{x>0}{\Rightarrow} x=20$.

После повышения на 40 процентных пунктов ставка достигла $20\%+40\%=60\%$.

Ответ: 60%

При решении задания 4–6 понадобятся формулы n-го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Задача 4. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Решение:

Поскольку каждый год прибыль увеличивалась на 300%, она увеличивалась в 4 раза по сравнению с предыдущим годом. Ищем четвертый член геометрической прогрессии: за 2003 год Бубликов заработал $5000\cdot 4^3=320000$ руб.

Ответ: 320000 руб.

Задача 5. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение:

Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счете компании «Альфа» была сумма $5000 \cdot 3^{2006-2001} = 5000 \cdot 3^5 = 1215000$ долларов.

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 400% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 500% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счете компании «Бета» была сумма $10000 \cdot 5^{2006-2003} = 10000 \cdot 5^3 = 1250000$ долларов.

Таким образом, капитал компании «Бета» был на 35000 долларов больше.

Ответ: капитал компании «Бета», на 35000 долларов

Задача 7. Вкладчик открыл счет в банке, внеся 2000 рублей на вклад, годовой доход по которому составляет 12%, и решил в течение шести лет не брать процентные начисления. Какая сумма будет лежать на счете через шесть лет?

Решение:

Решим эту задачу по формуле сложных процентов $S_n = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, где S_0 – первоначальный вклад, p – процент годовых, n – время размещения вклада в банке.

Применим эту формулу к нашей задаче:

первоначальный вклад – 2000,

процент годовых – 12,

n – 6 лет, значит $2000\cdot(1+0{,}12)^6=2000\cdot1{,}12^6=2000\cdot1{,}97382=3947{,}65$.

Через 6 лет на счете будет лежать сумма в виде 3947 руб. 65 коп.

Ответ: 3947 руб. 65 коп.

Задача 8. Начальный капитал акционерного общества составляет 15 миллионов рублей. Ежегодно капитал увеличивается на 25%. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал акционерного общества превысит 45 миллионов рублей.

Решение:

Применяя формулу сложных процентов, получаем неравенство:

$15\cdot(1+0{,}25)^n>45$, где через n обозначено искомое количество лет.

Решаем неравенство $1{,}25^n>3$; $n>\log_{1,25}3$.

Так как $1{,}25^4<3$, а $1{,}25^5>3$, то $n=5$.

Ответ: 5 лет

Задача 8. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение:

Обозначим через x – часть, на которую банк повышает сумму вклада. Тогда через два года на счету клиента А. будет $6200(1+x)(1+x)$ рублей, а у клиента Б. через год – $6200(1+x)$ рублей.

Согласно условию задачи составим уравнение $6200(1+x)^2-6200(1+x)=682$ или $100(1+x)^2-100(1+x)-11=0$. Сделаем замену

$100(1+x)=t$, тогда уравнение примет вид $\frac{t^2}{100}-t-11=0$ или $t^2-100t-1100=0$. Находим корни $t_1=110$ и $t_2=-10$ последнего уравнения. Для положительного корня рассмотрим уравнение $100(1+x)=110$. Отсюда $x=0{,}1$. Следовательно, банк начисляет $0{,}1\cdot 100=10\%$ годовых по вкладам.

Ответ: 10%

Занятие 9. Банковские задачи, кредиты

Задания 1, 2 и 3 об аннуитетных платежах, задания 4,5 и 6 о дифференцированных платежах и сравним эти схемы выплат в задании 7.

Задача 1. 31 декабря 2014 года бизнесмен взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем бизнесмен переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы бизнесмен выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение:

Пусть x – один из трех разовых платежей.

Тогда сумма долга после оплаты в первом году составит: $9930000\cdot 1{,}1-x$.

После внесения второго платежа сумма долга станет равной $(9930000\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x$.

Долг после третьего платежа: $((9930000\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x$.

Третьим платежом бизнесмен должен погасить долг, то есть долг станет равным нулю, откуда получаем уравнение:

$$((9930000\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x=0$$

$$9930000\cdot 1{,}1^3-1{,}1(1{,}1x+x)-x=0$$

$$9930000\cdot 1{,}1^3-3{,}31x=0$$

$$x=\frac{9930000\cdot 1{,}1^3}{3{,}31}=3993000(руб.)$$

Ответ: 3993000 руб.

Задача 2. 1 января 2015 года бизнесмен взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем бизнесмен переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев бизнесмен может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение:

1 способ

Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 220 тыс. рублей. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчетов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Месяц	Долг на первое число месяца (тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Заметим, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

2 способ

Если бы банк не брал процентов, кредит можно было бы вернуть за 5 месяцев. За эти 5 месяцев проценты по кредитам не превысят 0,05 исходной суммы или 55 тысяч рублей. Таким образом, за шестой месяц можно выплатить банку проценты за пользование кредитом, и эта сумма не превысит 220 тыс. руб.

При решении задачи 1 были получены формулы, связывающие данные в условии величины. Заметим, что в нашей задаче после предпоследней выплаты величина S_{n-1} может быть не только равной ежемесячной выплате x, но и оказаться меньше нее: $S_{n-1} \le x$: и в том, и в другом случае кредит будет погашен последним платежом.

Поэтому верно неравенство $m^n \ge \dfrac{x}{x - S_0(m-1)}$.

Подставляя данные из условия, получаем показательное относительно n неравенство: $1{,}02^n \ge \dfrac{220}{220 - 1100 \cdot 0{,}02} = \dfrac{220}{198} = 1{,}11...$

Требуется найти наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее неравенству, это можно сделать перебором. Другой путь – свести показательное неравенство к логарифмическому: $n \ge \log_{1{,}02} \dfrac{220}{198} = \log_{1{,}02} 1{,}088... > 5{,}3$, откуда $n = 6$.

Ответ: 6 месяцев

Задача 3. 31 декабря 2015 года Дмитрий взял в банке 4290000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение:

Составим таблицу.

Дмитрий взял в банке кредит 4 290 000 рублей.

№ года	Остаток после начисления процентов и платежа
0	$4290000\,руб.$

1	$(4290000 \cdot 1{,}145 - x)\,руб.$
2	$((4290000 \cdot 1{,}145 - x) \cdot 1{,}145 - x)\,руб.$

Дмитрий выплатил кредит за два года, поэтому сумма долга в конце второго года равна 0. Получим уравнение:

$$(4290000 \cdot 1{,}145 - x) \cdot 1{,}145 - x = 0$$

$$4290000 \cdot 1{,}145^2 - 2{,}145x = 0$$

$$2145x = 4290000 \cdot 1145 \cdot 1{,}145$$

$$x = (4290000 \cdot 1145 \cdot 1{,}145) : 2145$$

$$x = 2000 \cdot 1145 \cdot 1{,}145$$

$x = 2622050\,руб.$ – сумма платежа.

Ответ 2622050 руб.

Задача 4. Бизнесмен взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную бизнесменом. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная банку сверх кредита?

Решение:

Общая сумма, уплаченная банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки. В первом месяце эта часть заплаченной суммы составляла $0{,}12S_0$, далее она равномерно уменьшалась, составляя во втором месяце $0{,}12 \cdot \frac{8}{9}S_0$, в третьем – $0{,}12 \cdot \frac{7}{9}S_0$, …, в последнем – $0{,}12 \cdot \frac{1}{9}S_0$. Всего за 9 месяцев:

$$0{,}12S_0 \cdot \left(1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \ldots + \frac{1}{9}\right) = 0{,}12S_0 \cdot \frac{1 + \frac{1}{9}}{2} \cdot 9 = 0{,}12S_0 \cdot \frac{9+1}{2} = 0{,}6S_0.$$

Тем самым, сверх кредита бизнесмен выплатил 60% суммы кредита.

Ответ: 60%

Задача 5. 15 – го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1 – го числа каждого месяца долг возрастет на q% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2 – го по 14 – е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 – го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 – е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите q.

Решение:

Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда выплата процентов за первый месяц равна $\frac{q}{100}S_0$, и эта величина каждый месяц равномерно уменьшается на $\frac{1}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0$: $\frac{q}{100}S_0, \frac{18}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0, ..., \frac{2}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0, \frac{1}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0.$

Поэтому полная величина переплаты равна

$$\frac{q}{100}S_0\left(1+\frac{18}{19}+...+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=\frac{q}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{19}}{2}\cdot 19=\frac{q}{10}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда: $0{,}1qS_0=0{,}3S_0 \Leftrightarrow q=3$.

Ответ: $q=3$

Задача 6. Александр взял в банке кредит на 50000 рублей на 3 месяца, причем выплачивать кредит он должен ежемесячными выплатами так, чтобы сумма долга каждый месяц уменьшалась на одну и ту же величину. Сколько рублей составит переплата Александра по кредиту, если процентная ставка в банке 10%?

Решение:

Т.к. кредит взят на 3 месяца, то после первой выплаты долг должен составить $A-\frac{1}{3}A=\frac{2}{3}A$, после второй $\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}A$, а после третьей – $\frac{1}{3}A-\frac{1}{3}A=0$ рублей. Составим таблицу, производя все вычисления в тыс. рублей:

Месяц	Сумма долга до начисления %	Сумма долга после начисления %	Сумма долга после выплаты	Выплата
1	50	$50+0{,}1\cdot 50$	$\frac{2}{3}\cdot 50$	$0{,}1\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50$
2	$\frac{2}{3}\cdot 50$	$\frac{2}{3}\cdot 50+0{,}1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50$	$\frac{1}{3}\cdot 50$	$0{,}1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50$
3	$\frac{1}{3}\cdot 50$	$\frac{1}{3}\cdot 50+0{,}1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50$	0	$0{,}1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50$

Таким образом, всего Александр заплатил банку

$\left(0{,}1\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50\right)+\left(0{,}1\cdot\frac{2}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50\right)+\left(0{,}1\cdot\frac{1}{3}\cdot 50+\frac{1}{3}\cdot 50\right)$ тыс. руб.

Перегруппируем слагаемые и вынесем за скобки общие множители:

$$0{,}1\cdot 50\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}\cdot 50=0{,}1\cdot 50\cdot 2+50\,.$$

Для того, чтобы найти переплату по кредиту, необходимо из того, что он в итоге заплатил банку, отнять сумму кредита:

$(0{,}1\cdot 50\cdot 2+50)-50=10$ тыс. руб.

Таким образом, его переплата составила 10000 рублей.

Ответ: 10000 руб.

Задача 7. Бизнесмен хочет взять в кредит 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Сравните выплаты по схеме аннуитетных и дифференцированных платежей.

Решение:

Пусть x руб. – сумма ежемесячных выплат при аннуитете. Полная сумма выплат равна $3x$, где $x = \frac{m^n(m-1)}{m^n - 1} S_0$. Тогда $3 \cdot \frac{1{,}1^3(1{,}1-1)}{1{,}1^3 - 1} \cdot 331000 = 399300$ руб. – сумма выплат, 68300 руб. – переплата.

Для дифференцированных платежей $П = \frac{q}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0 = 66200$ руб.

Ответ: Разность переплат составляет 2100 руб. или примерно 0,6% суммы кредита.

Занятие 10. Задачи на оптимальный выбор (задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения)

Задача 1. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение:

Если Алексей продаст бумагу в течение k – го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(2k+5)\cdot 1{,}1^{20-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k = (2k+5)\cdot 1{,}1^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$b_k = a_k - a_{k-1} = 1{,}1^{30-k}\left(2k+5-1{,}1\cdot\left(2(k-1)+5\right)\right) = 1{,}1^{30-k}(1{,}7-0{,}2k).$$

Отсюда $b_k > 0$ при $k \le 8$ и $b_k < 0$ при $k > 8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k = 8$. Продать бумагу следует в течение восьмого года.

Ответ: в течение 8 – го года

Задача 2. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение:

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается величиной $px - \left(0{,}5x^2 + x + 7\right) = -0{,}5x^2 + (p-1)x - 7$.

Это выражение является квадратным трёхчленом, оно достигает своего наибольшего значения $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$ при $x = p - 1$. Прибыль составит не менее 75 млн рублей, если $\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \ge \frac{75}{3} \Leftrightarrow (p-1)^2 \ge 64 \Leftrightarrow (p-9)(p+7) \ge 0$, то есть при $p \ge 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, искомая наименьшая цена составляет 9 тыс. руб.

Ответ: 9

Задача 3. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение:

Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $4t^2$ у. е. Тогда на второй объект будет направлено $(24 - x)$ рабочих, их суточная заработная плата $(24 - x)^2 = \left(576 - 48x + x^2\right)$ (у. е.). В день начальник будет должен платить рабочим $\left(5x^2 - 48x + 576\right)$ у. е.

Рассмотрим функцию $f(x)=5x^2-48x+576$, причём $0<x<24$, $x\in N$. Функция квадратичная, старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0=4{,}8$. Заметим, что точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наименьшего значения в точке 4 или в точке 5. Найдем и сравним эти значения: $f(4)=5\cdot16-48\cdot4+576=16(5-12+36)=16\cdot29=16\cdot30-16=464$,

$f(5)=125-240+576=461$.

Тем самым, на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5. Поэтому необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих – на второй объект. Зарплата рабочих составит 461 у. е.

Ответ: 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих – на второй объект. Зарплата рабочих – 461 у. е.

Задача 4. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Он может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого Вася может снимать квартиру (стоимость аренды – 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц после уплаты арендной платы сумму, которая останется от его возможного платежа банку по первой схеме. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение:

Сумма, которую необходимо будет выплатить банку при покупке квартиры в кредит, на 180% превышает исходные 3 млн руб., поэтому она равна $3\cdot2{,}8=8{,}4$ млн руб. Кредит должен быть погашен за 20 лет то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Поэтому величина ежемесячного платежа равна 35 тыс. руб.

Если Вася будет снимать квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 20 тыс. руб., чтобы их накопить 3 млн понадобится 150 месяцев или 12,5 лет.

Ответ: 12,5 лет

Задача 5. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение:

Пусть в отеле будет x номеров площадью 27 кв. м и y номеров площадью 45 кв. м. Тогда $27x+45y\leq 981$ или $3x+5y\leq 109$ (*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $2000x+4000y$ или $2000(x+2y)$. Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $x+2y$. Пусть $s=x+2y$, тогда $x=s-2y$, откуда, подставляя в (*), получаем:

$$3(s-2y)+5y\leq 109$$

$$3s\leq y+109.$$

В случае равенства $3s=y+109$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наибольшее значение величины y. В случае неравенства необходимо найти наибольшее возможное значение y и проверить меньшие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наибольшее возможное значение y равно 21. Поскольку $981=45\cdot 21+36$, в гостинице можно открыть 21 номер люкс и 1 стандартный номер, которые будут приносить предпринимателю доход $2000(1+2\cdot 21)=86000$ руб. в сутки. При этом останется 9 кв. м. незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество люксов. Если в гостинице 40 люксов и 3 стандартных номера, незанятого пространства не остается: $981 = 27 \cdot 3 + 45 \cdot 20$. В этом случае доход тот же $2000 \cdot 3 + 4000 \cdot 20 = 86000$ руб. Дальнейшее уменьшение количества люксов в пользу стандартных номеров приведет к уменьшению прибыли.

Ответ: 86000 руб.

Задача 6. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта – по 30 руб., третьего сорта – по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2 – го сорта меньше массы яблок 3 – го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1 – го сорта меньше массы яблок 2 – го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение:

Пусть x кг – масса яблок 1 – го сорта, y кг – масса яблок 2 – го сорта, оставшиеся $91-(x+y)$ кг – масса яблок 3 – го сорта. Для величины выручки имеем: $40x + 30y + 20 \cdot (91 - x - y) = 2170$, $2x + y = 35$, откуда $y = 35 - 2x$ (*).

Поскольку масса яблок 1 – го сорта меньше массы яблок 2 – го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 2 – го сорта меньше массы яблок 3 – го сорта имеем:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{91-(x+y)}.$$

Подставим условие (*) в полученную пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{35-2x} = \frac{35-2x}{x+56} \underset{0<x<17,5}{\Leftrightarrow} x(x+56) = (35-2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 196x + 1225 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = \dfrac{175}{3} \end{array}\right. \underset{x<17,5}{\Leftrightarrow} x = 7.$$

Садовод продал 7 кг яблок первого сорта и, следовательно, $35-14=21$ кг яблок второго сорта.

Ответ: 21 кг

Задача 7. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 млн рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение:

Пусть на первом заводе рабочие трудятся x^2 часов, а на втором – y^2 часов. Тогда на первом заводе они произведут $3x$ единиц продукции, а на втором – $4y$. Наша задача – максимизировать выражение $3x+4y$. Если Григорий платит 5 млн в неделю, и в то же время 500 руб/час, то $x^2+y^2=10000$. Будем решать задачу через производную.

Выразим y из последнего выражения: $y=\sqrt{10000-x^2}$. Тогда $f(x)=3x+4y=3x+4\sqrt{10000-x^2}$. Чтобы найти максимум, возьмем производную и приравняем к нулю:

$$f'(x)=3+\frac{4\cdot(-2x)}{2\sqrt{10000-x^2}}=\frac{3\sqrt{10000-x^2}-4x}{\sqrt{10000-x^2}}$$

Чтобы дробь была равна 0, нужно, чтобы числитель дроби был равен нулю. Приравниваем числитель к нулю:

$$3\sqrt{10000-x^2}-4x=0$$

$$9\left(10000 - x^2\right) = 16x^2$$

$$25x^2 = 90000$$

$$x^2 = 3600$$

$$x = 60.$$

Тогда $y = \sqrt{10000 - 3600} = \sqrt{6400} = 80$.

$3x + 4y = 3 \cdot 60 + 4 \cdot 80 = 180 + 320 = 500$ ед. товара можно произвести за неделю на этих двух заводах.

Ответ: 500

Занятие 11. Итоговая контрольная работа

Задача 1. В лесу 800 деревьев. Сосны составляют 25% всех деревьев. Сколько сосен в лесу?

Решение:

Пользуясь правилом нахождения процента от числа, найдем сколько сосен растет в лесу: $800 : 100 \cdot 25 = 200$.

Ответ: 200 сосен

Задача 2. Студент, готовясь к сдаче экзамена решил 43 задачи из пособия для самоподготовки. Что составляет 20% числа всех задач в пособии. Сколько всего задач собрано в этом пособии для самоподготовки?

Решение:

Известно, что 43 задачи составляют 20% от общего их количества, нужно найти число по его проценту.

$43 : 20 \cdot 100 = 215$ задач всего в пособии.

Ответ 215 задач

Задача 3. Швейная фабрика должна была за месяц выпустить 2000 изделий, а выпустила 2150 изделий. На сколько процентов фабрика перевыполнила план?

Решение:

Сначала найдём сколько процентов составляет фактический выпуск изделий по сравнению с плановым

$1) 2150 : 2000 \cdot 100 = 107{,}5\%$

Найдём на сколько процентов перевыполнен план

$2) 107{,}5 - 100 = 7{,}5\%$

Ответ: на 7,5%.

Задача 4. Андрей положили 100000 рублей в банк под 10% годовых на 6 лет. Какая сумма будет у него через 6 лет?

Решение:

Рассчитаем по формуле сложного процента:

$$S_6 = 100000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 10)^6 = 100000 \cdot 1{,}1^6 = 177156{,}1 \text{ рублей.}$$

Ответ: 177156,1 руб.

Задача 5. Оля хочет взять в кредит 100000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

Решение:

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a = 1{,}1$. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
0	100000	–
1	$100000 \cdot 1{,}1 = 110000$	$110000 - 24000 = 86000$
2	$86000 \cdot 1{,}1 = 94600$	$94600 - 24000 = 70600$
3	$70600 \cdot 1{,}1 = 77660$	$77660 - 24000 = 53660$
4	$53660 \cdot 1{,}1 = 59026$	$59026 - 24000 = 35026$
5	$35026 \cdot 1{,}1 = 38528{,}6$	$38528{,}6 - 24000 = 14528{,}6$
6	$14528{,}6 \cdot 1{,}1 = 15981{,}46$	$15981{,}46 - 15981{,}46 = 0$

Значит, Оля погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6 лет

Теоретический вопрос: Чем отличаются аннуитетные платежи от дифференцированных?

Ответ: Если по аннуитетным платежам сумма выплаты в течение всего срока кредитования не изменяется, то при дифференцированных взносах сумма постепенно снижается, и к окончанию срока кредитования становится минимальной.