Н.А. ДЕГТЯРЕВА, Ю.В. ЛЫСЕНКО

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЧЕЛЯБИНСК
2022

УДК 336(021)

ББК 65.26я73

Д 26

Дегтярева, Н.А. Модели финансовых расчетов [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / Н.А. Дегтярева, Ю.В. Лысенко – Челябинск: Изд- во ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2022. – 102 с.

Учебное пособие содержит краткое изложение теоретического материала по использованию моделей и методов финансовых расчетов, методические указания по решению типовых расчетных задач, приведены задачи для тренировочной, самостоятельной и контрольной работы студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений очной и заочной форм обучения.

Рецензенты:

А.С. Кутузов, к.физ.-мат.н., доцент.

Н.А. Берг, к.экон.н., доцент.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие в нашей стране проблеме повышения финансовой грамотности населения уделяется большое внимание, так как это способствует развитию экономики, возрастанию уровня жизни граждан и повышению общественного благосостояния за счёт притока средств граждан в экономику страны и, как следствие, укрепления финансовой стабильности. Грамотный потребитель финансовых услуг меньше страдает от мошеннических действий в области финансов [1,22].

Финансовая грамотность населения в области финансового рынка и финансовых инструментов становится необходимым условием для успешного решения государством социально-экономических задач [11,14].

Актуальность обучения методам финансовых расчетов продиктована особенностями развития финансового рынка на современном этапе.

Любая финансовая, кредитная или коммерческая *операция* предполагает совокупность условий, согласованных с ее участниками. К таким условиям относятся следующие количественные данные: сумма кредита (займа или инвестиций), сроки (временные параметры), процентные ставки, способы начисления процентов и погашения долга и т.д. Каждая из перечисленных характеристик может быть представлена самым различным способом [20,21,4]. Например, платежи могут быть разовыми или в рассрочку, постоянными или переменными во времени; существует более десятка видов процентных ставок и методов начисления процентов;

время устанавливается в виде фиксированных сроков платежей, интервалов поступления доходов и т.д.

Совместное влияние на финансовую операцию многих факторов делает ее конечный результат неочевидным, поэтому для его оценивания применяется специальный количественный финансовый анализ [22,25].

Совокупность методов количественного финансового анализа составляет предмет финансовых расчетов. Также предметом изучения финансовых расчетов являются деньги, ценные бумаги, различные операции с ними на финансовом рынке, а методы расчетов взяты из различных разделов математики [11,13,14,15].

Основу количественного финансового анализа составляют финансовые вычисления, необходимые для анализа сделок. Основными понятиями, которыми оперируют в финансовых вычислениях, являются – размер платежа, срок и ставка процентов (учетная ставка, современная или текущая стоимость платежа, методы наращения и дисконтирования платежей, принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, современная практика расчетов).

Количественный финансовый анализ предназначен для решения разнообразных задач: от элементарного начисления процентов до анализа сложных кредитных и коммерческих операций. К этому кругу задач можно отнести [9,25]:

-расчет конечных финансовых результатов операции (сделки, контракта) для каждой из участвующих в ней сторон;

-сравнение эффективности различных операций или вариантов;

-выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, сделки, контракта;

-разработка планов выполнения финансовых операций;

-расчет параметров эквивалентного изменения условий контракта.

Данный перечень не является исчерпывающим. Современная практика финансовых расчетов ставит новые задачи. Область приложения методов количественного анализа финансовых операций последовательно расширяется.

1 МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ОПЕРАЦИЙ ПО СХЕМЕ ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ. РАСЧЕТЫ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

1. Основные понятия и показатели

Получение кредита – распространенная финансовая операция [19,22]. В своей простейшей форме она подразумевает двух лиц – кредитора и дебитора (заемщика) – и однократное представление денежной ссуды. При этом дебитор обязан вернуть полученную ссуду через точно оговоренный срок и уплатить ее в соответствии с установленным в договоре процентом или процентной ставкой. В финансовой практике в договоре указывают обе даты – даты выдачи и погашения кредита.

Основными понятиями кредитной операции являются: капитал, кредитор, заемщик, доход кредитора, «цена долга» заемщика, процентная ставка, процентные платежи, срок ссуды.

Кредитная операция с количественной стороны характеризуется следующими **временными параметрам** и **денежными величинами**:

t_0 – дата выдачи ссуды;

T – срок ссуды или период начисления, т.е. интервал времени, к которому относится процентная ставка.

t_0+T – дата погашения ссуды;

P – величина выданной ссуды;

$I(t_0;T;P)$ – плата за ссуду, процент, процентный доход кредитора или абсолютное приращение начального капитала P.

Наращенная сумма ссуды (долга, депозита и т.д.) - это первоначальная сумма плюс начисленные к концу срока ссуды проценты: $\boldsymbol{S = P + I}$ («Цена долга» заемщика) где S – наращенная сумма ссуды;

P – первоначальная сумма ссуды;

I – начисленные к концу срока ссуды проценты.

Процентной ставкой наращения (эффективностью вложения, интересом) называется отношения приращения ссуженной суммы *за год* к начальной сумме P (иначе отношение процентов I за год к сумме долга P):

$$i = \frac{S - P}{P} = \frac{I}{P}$$

Относительной скидкой (или **дисконтом)** называют отношения приращения ссуженной суммы за год к наращенной сумме:

$$d = \frac{S - P}{S} = \frac{I}{S}$$

Отношение величины ссуды к наращенной сумме называют **дисконт – фактором:**

$$v = \frac{P}{S}$$

2. Наращение на основе простой процентной ставки

Рассмотрим модель развития операции вложения денег в банк под простые проценты и модель расчета.

Кредитор и заемщик договариваются о величине кредита P (первоначальная денежная сумма), размере годовой процентной ставки (i%), сроке кредита и длительности периода начисления процентов.

По модели простых процентов происходит накопление общей суммы долга S за счет периодического (ежегодного) начисления процентных денег (I).

Начисленные проценты за один год равны $I = Pi$, а за n лет (за весь срок) равны $\boldsymbol{I = Pni}$**,** где n –срок ссуды в годах; i – *простая* годовая ставка наращения.

Простая процентная ставка наращения – ставка, при которой *база начисления* всегда остается *постоянной* (за базу берется первоначальная сумма долга Р).

В соответствии с этим *в конце первого года* наращения сумма будет равна: $S_1 = P + \mathbf{Pi} = P(1+ i)$

к концу второго года – $S_2 = S_1 + \mathbf{Pi} = P(1+ i) + Pi = P(1+ 2 i)$;

к концу третьего года – $S_3 = S_2 + \mathbf{Pi} = P (1+ 2 i) + Pi = P(1+ 3 i)$;

к концу n-го года – $S_n = P(1+ n\,i)$

Модель накопления капитала по схеме простых процентов (формула наращения по простым процентам, или формула простых процентов):

$$S_n = P\,(1+ n\,i)$$

где P – первоначальная сумма долга;

S – наращенная сумма, т.е. сумма в конце срока;

i – простая годовая ставка наращения процентов

n – срок ссуды в годах.

Множитель $1+ n\,i$ называется ***множителем наращения простых процентов***, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы, т.е. $\boldsymbol{k_н = 1+i\,n = S/P}$**.**

Начисления простых процентов используется в случаях:

1) при выдачи краткосрочных ссуд на срок менее года;

2) когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору заемщиком в конце каждого конверсионного периода;

3) при сберегательных вкладах с ежемесячной выплатой процентов и т.д.

Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд. Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому *при продолжительности ссуды менее года* необходимо выяснить, какая часть годового процента уплачивается кредитору. В этом случае срок ссуды рассчитывается по формуле:

$$n = t/K,$$

где n – срок ссуды, в долях года;

t – число дней ссуды;

K – число дней в году (360, 365, 366) или *временная база начисления процентов*.

Тогда приведенную модель ***накопления капитала по схеме простых процентов*** можно записать в другом виде:

$$S = P(1 + i*t/K).$$

Существует несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы К и способов измерения срока пользования ссудой.

При расчете процентов применяются две временные базы: К = 360 дней (12 месяцев по 30 дней) или К = 365, 366 дней.

Если К = 360 – приближенное ***число дней в году,*** то говорят вычисляют *обыкновенный* или *коммерческий* процент (ordinary interest); *Если К = 365,366 - действительное число дней в году,* то говорят рассчитывают *точный* процент (exact interest).

Число дней ссуды также можно измерить *приближенно и точно.* В первом случае продолжительность ссуды определяется из условия, согласно которому любой месяц принимается равным 30 дням. В свою очередь точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения. В обоих случаях *день выдачи и день погашения считаются за один день*.

3. Реинвестирование по простым процентам

Операция, состоящая в том, что в момент каждого изменения ставки наращенная к этому моменту сумма вкладывается вновь под новый простой процент, называется **реинвестированием или капитализацией процентов.**

Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована под эту или другую процентную ставку. *Процесс реинвестирования* иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока N. В случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N = $\sum n_t$ находится по формуле:

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\ldots(1+n_m i_m),$$

где: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m$ - продолжительности последовательных периодов реинвестирования;

$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m$ – ставки, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени, то

$$S = P(l+ni)^m$$

где: m – количество повторений реинвестирования.

4. Наращение процентов в потребительском кредите

В потребительском кредите проценты, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита.

Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита. *Наращенная сумма кредита* равна:

$$S = P\ (l + ni),$$

а *величина разового погасительного платежа* составит

$$R = S/nm,$$

где: n – срок кредита в годах;

m – число платежей в году.

В связи с тем, что проценты здесь начисляются на первоначальную сумму долга, а его фактическая величина систематически уменьшается во времени, действительная стоимость кредита заметно превышает договорную процентную ставку.

5.Начисление по простым процентам в условиях инфляции

Если наращенная за n лет сумма денег составляет S, а индекс цен равен I_p, то *реальная стоимость С* с суммы S, обесцененной во времени за счет инфляции (реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности) составляет: $C = S/I_p$.

Пусть ожидаемый средний годовой *темп инфляции* (характеризующий относительный прирост цен за год) равен $\boldsymbol{h = I_p - 1}$, обычно он измеряется в процентах. Тогда годовой *индекс цен составит* $\boldsymbol{I_p = 1 + h}$.

Индекс цен за несколько периодов n, следующих друг за другом, вычисляется по формуле:

$$I_p = \prod_{t=1}^{n}(1 + h_t)$$

где t – номер периода; h_t - темп инфляции в периоде t.

Если ожидаемый темп инфляции – *величина постоянная* в течении n периодов, то индекс цен вычисляется по формуле:

$$I_p = (1+h)^n$$

Средние за период индекс цен $\overline{I_{p,t}}$ и темп инфляции $\overline{h_t}$ находятся по формулам:

$$\overline{I_{p,t}} = \sqrt[n]{I_p} \qquad \overline{h_t} = \sqrt[n]{I_p} - 1 = \overline{I_{p,t}} - 1$$

Если наращение производится *по простой ставке* в течение n лет, то реальное наращение при темпе инфляции h (обесцененная инфляцией сумма) составит:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}\frac{1+ni}{I_p} = P\frac{1+ni}{(1+\overline{h_t})^n}$$

Из формулы следует, что увеличение наращенной суммы имеет место при выполнении соотношения: $1+ni > I_p$

Процентная ставка i^* (которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию), при которой наращение равно потерям из – за инфляции, определяется из равенства **С=Р:** $i^* = (I_p - 1)/n$.

Один из способов компенсации обесценивания денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой *инфляционной премии.* Скорректированная таким образом ставка называется ***брутто-ставкой.***

Брутто-ставка, которую обозначим ***r,*** *находится* из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителю наращения по реальной ставке процента: $(1+nr)/I_p = 1+ni$ откуда находим: $r = \lfloor (1+ni)I_p - 1 \rfloor / n$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

1. ***Кредит выдан в момент t_0 на срок $T = 2$ года в сумме $S(0) = 3$млн. руб. с условием возврата S (2) = 6 млн. руб. Чему равна ставка процента и дисконт?***

   $i(t_0,T) = I/S(t_0) = S(2)\text{-}S(0)/S(0) = 6\text{-}3/3 = 3/3 = 1$, $i_2 = 100\%$

   $d(t_0,T) = S(2) - S(0)/S(2) = 6 - 3/6 = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$, $d_2 = 50\%$

2. ***Кредит выдан на сумму $S(0) = 2$ млн. руб. на срок $T = 1$ год под ставку $i_1 = 80\%$. Сколько нужно будет вернуть денег?***

   $S(t_0+T) = S(t_0)\times\cdot(1+i(t_0,N))$; $S(1) = S(0\cdot)\times(1+i_1) = 2\times(1+0{,}80) = 2\times(1{,}8) =$
   $= 3{,}6$млн. руб.

3. ***Кредит выдан на срок $T = 1$ год с условием возврата $S(1) = 5$ млн. руб. и дисконтом $d_1 = 30\%$. Чему равен дисконт-фактор; какую сумму получит дебитор?***

$V_1 = 1 - d_1 = 100\% - 30\% = 70\%$; $S(0) = S(1)\times\cdot V_1 = 5\times\cdot{*}0{,}70 = 3{,}5$млн.руб.

4. ***В момент $t_0 = 0$ выдан кредит $S(0) = 4$ млн.руб. на срок $T = 0{,}5$ года за плату $I(0{,}5) = 2{,}2$ млн.руб. Чему равна полугодовая процентная ставка?***

$I_{0,5} = I/S(0) = 2{,}2/4 = 0{,}55$; $i_{0,5} = 55\%$

5 Клиент сделал вклад в банк на депозит в сумме НС = 280 млн. руб. под $i = 3\%$ годовых сроком на 3 года. Требуется определить сумму денег, которую клиент будет иметь в банке через 3 года.

$БС_n = НС(1+n\times i_n/100) = 280(1+3\times3\%/100) = 280\times\cdot(1+3{*}0{,}03) = 280\times1{,}09$
$= 305{,}20$ млн. руб.

6. ***Акционерное общество получило в банке ссуду в размере НС = 300 млн. руб. под $i_n = 40\%$ годовых на срок с $t_1 = 10$ февраля до $t_2 = 10$ апреля***

включительно. Требуется определить сумму денег, которую необходимо возвратить банку к t_2 = 10 апреля.

$БС_n = НС(1+t/К\times i_n/100)$

$БС_n = 300(1+60/365\times 40\%/100) = 300(1=60/365\times 0,40) = 300(1+24/365) =$

$= 300(365+24/365) = 319,73$ м лн .руб.

7. 100 млн. руб. положены 1-го января на месячный депозит под 20% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

$S = P(1+n_1i_1)(1+n_2i_2)\ldots(1+n_mi_m)$

Если начислят точные проценты(365/365), то

$S =100(1+31/365\times 0.2)(1+28/365\times 0.2)(1+31/365\times 0.2) =105.013$*млн руб.*

Начисление обыкновенных процентов (360/360) при реинвестировании дает: $S =100(1+30/360\times 0.2)^3 = 105.084$*млн руб.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Клиент сделал вклад в банк на депозит в сумме 14 тыс.руб. под *8* % годовых (простые проценты) сроком на *5* лет. Требуется определить сумму денег, которую клиент будет иметь банке через *5* лет.

2. Акционерное общество получило в банке ссуду в размере 44 тыс.руб. под *8* % годовых на срок с *15/04* до *22/08*. Требуется определить сумму денег, которую необходимо возвратить банку 22/08. (Три варианта расчёта).

3. В некотором банке следующие условия выдачи ссуды в сумме 32 тыс.руб: за первые *120* дней ссудный процент равен *16* %; за следующие *64* дней – *11,5* %. Требуется определить сумму, возвращаемую банку. (Временная база равна 365 дней).

2 МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ОПЕРАЦИЙ ПО СХЕМЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ. РАСЧЕТЫ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИИ

1. Наращение на основе сложной процентной ставки

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга, т.е. начисляемый процент I – (доход от капитала) суммируется с исходным капиталом P, и на следующем интервале начисления процент начисляется уже от всей образовавшейся суммы (P + I).

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют *капитализацией процентов* или *реинвестированием,* или *проценты на проценты*.

По модели сложных процентов происходит накопление общей суммы за счет ежегодного начисления процентных денег на сумму предыдущего года. При этом применяется сложная процентная ставка наращения.

Сложная процентная ставка наращения – ставка, при которой база начисления является переменной, т.е. проценты начисляются на проценты.

В этом случае сумма накопленного капитала составит:

к концу первого года: $S_1 = P + I = P + \mathbf{Pi} = P\,(1 + i)$;

к концу второго года: $S_2 = S_1 + \mathbf{S_1\, i} = S_1\,(1 + i) = P\,(1 + i)\,(1 + i) = P\,(1 + i)^2$

к концу n - го года: $S_n = P\,(1 + i)^n$

Таким образом, получена **формула наращения для сложных процентов**: $\boldsymbol{S = P\,(1+i)^n}$ ***или*** $\boldsymbol{S = P(1+i)^{t/K}}$

где S – наращенная сумма,

P – первоначальная сумма,

i – годовая ставка сложных процентов,

n – срок ссуды,

t – срок ссуды в днях,

K –временная база, обычно - 365/365.

$\boldsymbol{k_{нс} = (1+i)^n}$ – множитель наращения по сложным процентам.

2. Формула наращения по сложным процентам при изменении ставки во времени

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени (*плавающая* ставка), формула наращения имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{S = P(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \ldots (1 + i_m)^{n_m}}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ – последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_m$ соответственно, m – число периодов (интервалов) начисления.

3.Формулы удвоения суммы

В целях оценки своих перспектив кредитору и должнику интересно знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Для этого приравняем множитель наращения величине N, в результате получим:

а*) для простых процентов,* $(1 + ni_{пр}) = N$, тогда

$$n = (N-1)/i_{пр};$$

б) *для сложных процентов* $(1+i_{сл})^n = N$, тогда

$$n = \ln N / \ln(1+i_{ck}).$$

Для случая **N=2** эти формулы называются **формулами удвоения** и принимают следующий вид:

а) *для простых процентов:* $n = 1/i_{пр}$;

б) *для сложных процентов:* $n = \ln 2 / \ln(1 + i_{сл})$

При небольших ставках процентов (мене 10%) вместо формулы $n = \ln 2 / \ln(1 + i_{сл})$ можно использовать более простую приближенную: $n \approx 0{,}7 / i$.

4.Формула наращения по сложным процентам при вкладах с многоразовым вложением денег

Пусть клиент делает вклады с многоразовым вложением денег в конце каждого года по схеме**:**

```
                ВКЛ1              ВКЛ2                    ВКЛn
-|---------------|-----------------|-----------------------------------
 0               1                 2                          n
```

Чтобы определить сумму, которую будет иметь клиент к началу (n+1)-го года, нужно воспользоваться формулой:

$$S_n = ВКЛ(\frac{(1 + i_c)^n - 1}{i_c})$$

5. Наращение процентов несколько раз в году. Номинальная и эффективная ставки

1. Номинальная ставка

Часто в финансовых операциях в качестве периода наращения процентов используется не год, а месяц, квартал, полугодие и т.д. В этом случае говорят, что проценты начисляются m раз в году. При этом в контрактах фиксируется не ставка за период, а годовая ставка, которая в этом случае называется **номинальной.**

Сложная процентная ставка наращения является частным случаем номинальной при начислении процентов один раз в году. Если номинальную ставку обозначить через j, а число периодов начисления в году m, то проценты за один период начисляются по ставке j/m, а количество начислений равно mn.

Наращенная сумма при использовании номинальной процентной ставки производится по формуле:

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{N},$$

где j - ставка на периоде начисления;

m – количество интервалов начисления за год (число периодов);

n – срок контракта в годах (срок ссуды);

$N = m \bullet n$ - количество интервалов начисления за весь срок контракта (за n лет).

2. Эффективная ставка

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_э)^n = (1+{}^{j}\!/_{m})^{mn},$$

где $i_э$ – эффективная ставка, а j – номинальная.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением: $i_э = (1+{}^{j}\!/_{m})^{m} - 1$,

Обратная зависимость имеет вид: $j = m\left[(1+i_э)^{1/m} - 1\right]$.

Эффективная ставка при m > 1 больше номинальной.

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. *Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.*

6.Начисление по сложным процентам в условиях инфляции

Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуды с учетом падения покупательной способности денег (обесцененная инфляцией сумма) составит:

$$C = P\frac{(1+i)^n}{I_p} = P(\frac{1+i}{1+\overline{h_t}})^n$$

В этом случае падение покупательной способности денег компенсируется при ставке *i*= *h*, обеспечивающей равенство С = Р. Если h > i, то наблюдается «эрозия» капитала – его реальная сумма будет меньше первоначальной. Только в ситуации, когда h < i, происходит реальный рост, реальное накопление

Применяются *два способа компенсации потерь* от снижения покупательной способности денег при начислении *сложных процентов*:

1. Корректировка ставки процента, по которой производится наращение, т.е. увеличение ставки на величину инфляционной премии. Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, является *брутто-ставкой (r).*

Определим брутто – ставку при условии полной компенсации инфляции. Считая, что годовой темп инфляции равен h, можем написать равенство соответствующих множителей наращения: $(1+r)/(1+h) = 1+i$, где *i* – реальная ставка.

Отсюда находим: брутто - ставка $r = i + h + ih$ **,** а инфляционная премия составляет **h+ih.**

На практике скорректированную по темпу инфляции ставку часто рассчитываю проще, а именно: ***r* = *i* +*h***

2. Индексация первоначальной суммы Р. В этом случае сумма Р корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда получаем:

$$S = PI_p(1+i)^n$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

1. *Какой величины достигает долг равный 1 млн. руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 15,5 % годовых*?

Решение:

$S = P(1+i)^n$

$S = 1000000(1+0.155)^5 = 205546422$ руб.

2. Пусть начальный вклад НС = 250 тыс. руб. вложен на 4 года под сложные проценты при ставке 100 % годовых. Проследить за ростом вклада по годам.

Решение:

$БС_1 = 250 \cdot 10^3 \cdot \left(1 + 1 \cdot \frac{100\%}{100}\right) = 250 \cdot 10^3 \cdot 2 = 500 \cdot 10^3$ тыс. руб. $k_н = 2$

$БС_2 = 250 \cdot 10^3 \cdot \left(1 + 1 \cdot \frac{100\%}{100}\right)^2 = 250 \cdot 10^3 \cdot 2^2 = 1000 \cdot 10^3$ тыс. руб. $k_н = 4$

$БС_3 = 250 \cdot 10^3 \left(1 + 1 \cdot \frac{100\%}{100}\right)^3 = 250 \cdot 10^3 \cdot 2^3 = 2000 \cdot 10^3$ тыс. руб. $k_н = 8$

$БС_4 = 250 \cdot 10^3 \cdot 2^4 = 4000 \cdot 10^3$ тыс. руб. $k_н = 16$

При i= 100 % рост происходит очень быстро.

3.Какова сумма долга через 25 месяцев, если его первоначальная величина 500 тыс. руб., проценты сложные, ставка 20 % годовых, начисление поквартальное.

Решение: N = 25:3 = $8\frac{1}{3}$ - число периодов начисления.

1) *Общий метод наращения*

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} \qquad S = 500\cdot\left(1+\frac{0.2}{4}\right)^{8\frac{1}{3}} = 750.84004 \text{тыс. руб.}$$

2) *Смешанный метод наращения*

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{a}\cdot\left(1+\frac{b\cdot j}{m}\right) \qquad S = 500\cdot\left(1+\frac{0.2}{4}\right)^{8}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{0.2}{4}\right) = 751.03985 \text{тыс. руб.}$$

4.Размер ссуды, предоставленной на 28 месяцев, равен 20 млн. д.е. Номинальная ставка равна 60 % годовых; начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях:

- ***на дробную часть начисляются сложные проценты;***
- ***на дробную часть начисляются простые проценты;***
- ***дробная часть не учитывается.***

Результаты расчетов сравнить.

Решение:

Всего $28/3$ периодов начисления, т.е. 9 кварталов и 1 месяц

1) $S = 20\cdot\left(1+\frac{0.6}{4}\right)^{28/3} = 73.713$ млн. ден.ед.

2) $S = 20\cdot\left(1+\frac{0.6}{4}\right)^{9}\cdot\left(1+\frac{0.6}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) = 73.875$ млн. ден.ед.

3) $S = 20\cdot\left(1+\frac{0.6}{4}\right)^{9} = 70.358$ млн. ден.ед.

Таким образом, для ссудодателя выгоднее второй вариант, так как итоговая сумма получается максимальной, а для заемщика предпочтительнее третий вариант, так как итоговая сумма минимальна.

5.Банк начисляет сложные проценты на вклад, исходя из годовой номинальной ставки 0,12. Вычислить эффективную годовую процентную ставку при ежемесячной и ежеквартальной капитализации процентов.

Решение:

$$i_{ý} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12} - 1 = 1.192 - 1 = 0.192$$

$$i_{ý} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4} - 1 = 1.125 - 1 = 0.1255$$

6.В банк помещен вклад в сумме НС = 1 млн. руб. под $\mathbf{i_c}$ = 100% годовых сроком на n = 5 лет. Ожидаемый в течение этого периода темп инфляции оценивается величиной h = 50 % в год. Требуется определить реальную сумму, которую будет иметь клиент по истечении пяти лет.

Решение:

$$БС_{n} = НС \cdot \left(1+\frac{i_{c}}{100}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{h}{100}}\right)^{n}$$

$$БС_{n} = 1 \cdot \left(1+\frac{100}{100}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{50}{100}}\right)^{5} = 1 \cdot (1+1)^{5} \cdot \left(\frac{1}{1+0.5}\right) = 1 \cdot 2^{5} \cdot 0{,}67^{5} = 4{,}32 \text{ млн. руб.}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Банк взимает за выданную сроком на 5 лет ссуду в сумме 10 млн.руб. под 13 % годовых по сложной ставке за первые два года. Начиная с третьего года, данная ставка возрастает за каждый последующий год на 0,7 %. Требуется определить сумму, возвращаемую банку.

2.Вкладчик может поместить деньги на депозит сроком на два года в два различных банка. Один из этих банков предлагает депозит под 13 % годовых с ежемесячным начислением процентов, другой банк под 13 % годовых, но с ежеквартальным начислением процентов. В какой банк вкладчику выгоднее обратиться, если он располагает суммой 55 млн.руб. в течение 2-х лет. На сколько больше будет, полученная через два года сумма в этом банке, по сравнению с другим банком?

3.Клиент делает вклады в банк на депозит в сумме 60 млн.руб. под i % = 15,5% годовых в конце каждого года. Требуется определить, какую сумму будет иметь клиент к началу третьего года.

4.Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 12% реальная ставка оказалась *6*%?

5.В банк помещён вклад в сумме 20 млн.руб. под 9,8% сложных годовых. Ожидаемый в течение этого периода темп инфляции оценивается величиной *13%* в год. Требуется определить реальную сумму, которую будет иметь клиент по истечении *3* лет.

6. На сумму 1,5 млн.руб. в течение трёх месяцев начисляются простые проценты по ставке *28*% годовых. Ежемесячная инфляция характеризуется темпами *2,5; 2; 1,8* %. Требуется определить реальную сумму, которую будет иметь клиент (число дней в году принять 360).

3 МОДЕЛИ ОПЕРАЦИЙ ДИСКОНТИРОВАНИЯ ПО ПРОСТЫМ И СЛОЖНЫМ ПРОЦЕНТАМ

1. Дисконтирование по простым процентным ставкам

Дисконтирование связано с распространенным в коммерческой сфере утверждением *«время – это тоже деньги»,* что обусловлено неравноценностью одинаковых по абсолютной величине сумм денежных средств сегодня и через некоторое время в будущем.

Дисконтирование позволяет учитывать в операциях фактор времени.

В финансовой практике рассматривают задачу, обратную наращению процентов: по заданной сумме S, соответствующей концу финансовой операции (которую следует уплатить через некоторое время n), необходимо определить исходную сумму P (сумму полученной ссуды). Этот расчет называют **дисконтированием** суммы S.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, *называют современной стоимостью (или современной величиной) а иногда – текущей (или капитализированной) стоимостью* будущего платежа S.

Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S *удерживаются вперед*, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды.

Проценты в виде разности **D = S – P** называются *дисконтом,* или *скидкой.* Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Процесс начисления процентов и их удержания вперед называют *учетом*.

Необходимость дисконтирования возникает, *например,* при покупке краткосрочных обязательств, оплата которых должником произойдет в будущем.

Дисконтирование позволяет учитывать фактор времени. Величина Р эквивалентна сумме S, в том смысле, что через определенный период времени и при заданной процентной ставке она в результате наращения станет равной S. Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие приведения несколько шире, чем дисконтирование. *Приведение* – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования – *математическое дисконтирование* и *банковский (коммерческий) учет*. В первом случае применяется ставка наращения, во втором – учетная ставка.

Математическое дисконтирование. Оно представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды. Задача, в этом случае формируется так: какую первоначальную сумму Р ссуды нужно выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму S, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i?

Решив относительно Р уравнение $S = P\,(1 + n\,i)$, находим:

$$P = \frac{S}{1+ni}$$

где n = t/K – срок ссуды в годах.

P - *современная величина* суммы S, которая будет выплачена спустя n лет.

1/(1+ni) - *дисконтный* или *дисконтирующий множитель* (коэффициент дисконтирования (приведения) по простой ставке процентов).

Дисконтный множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга.

Банковский учет (учет векселей). Операция учета, в том числе учета векселей заключается в следующем. Банк (или другое финансовое учреждение) до наступления срока платежа по векселю (или иному платежному обязательству) приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом.

Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. В свою очередь владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объёме, однако, ранее указанного на нем срока.

При учете векселя применяется *банковский* (или *коммерческий)* учет. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. Для расчета процентов при учете векселей применяется *учетная ставка* d. Размер дисконта, или суммы учета, удерживаемого банком $\mathbf{D = \mathit{Snd}}$.

Тогда, $P = S – D = S - Snd = S(1\text{-}nd)$ или $\boldsymbol{P = S(1\text{-}nd)}$

где n - срок от момента учета до даты погашения векселя;

d - простая годовая *учетная ставка,* $\mathbf{d} = \frac{S-P}{Sn}$

1 – nd - *д*исконтный множитель

Учет посредством учетной ставки чаще всего *осуществляется при временной базе, К = 360 дней, число дней ссуды обычно берется точным*, АСТ/360.

2. Наращение по учетной ставке

Наращение по учетной ставке. Простая учетная ставка иногда применяется и при расчете наращенной суммы, т.е. для расчета S по P В частности, в этом возникает необходимость при определении суммы, которую надо проставить в вексель, если задана текущая сумма долга. ***Наращенная сумма*** в этом случае:

$$S = P\frac{1}{1-nd}$$

где *1/(1-nd) - множитель наращения.*

Наращение не пропорционально ни сроку, ни ставке. Заметим, что при n>1/d расчет лишен смысла, т.к. наращенная сумма становится бесконечно большим числом. Такая ситуация не возникает при математическом дисконтировании: при любом сроке современная величина платежа больше нуля.

3. Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке

В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи: определить конечную сумму долга на момент его погашения; рассчитать сумму, полагаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга с применением учетной ставки, действующей в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2 = P_1(1+n_1 i)(1-n_2 d),$$

где P_1 – первоначальная сумма ссуды;

P_2 – сумма, полученная при учете обязательства;

n_1 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты;

n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

4.Дисконтирование по сложной ставке

Как и в случае простых процентов, рассмотрим два вида учета – математический и банковский.

Математическое дисконтирование (учет). В этом случае, решается задача, обратная наращению по сложным процентам. При дисконтировании суммы S, которая будет выдана через срок n по ставке дисконтирования i, вычисляется современная величина (стоимость) P суммы S.

Запишем исходную формулу для наращения: $S = P(1+i)^n$ из нее найдем P.

Дисконтированное значение будущей суммы вклада по сложной ставке процентов равно:

$$P = S/(1+i)^n = S\upsilon^n \quad \text{или} \quad \text{P} = \frac{S}{(1+i)^{t/K}}, \quad \text{если n} = t/K$$

где $\upsilon^n = 1/(1+i)^n = (1+i)^{-n}$ - *учетный*, или *дисконтный множитель.*

Дисконтный множитель показывает, во сколько раз первоначальная сумма меньше наращенной.

Разность $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S} - \mathbf{P} = S\,(1 - \upsilon^{n})$ называют ***дисконтом с суммы S***.

Если проценты начисляются m раз в году, то

$$P = S/(1+ {}^{j}\!/_{m})^{mn} = S\upsilon^{mn}$$

где $\upsilon^{mn} = 1/(1+ {}^{j}\!/_{m})^{mn} = (1+ {}^{j}\!/_{m})^{-mn}$ - дисконтный множитель.

Величину P, полученную дисконтированием S, называют ***современной,*** или ***текущей стоимостью,*** или ***приведенной величиной*** *S*. Современная стоимость может быть рассчитана на любой момент до выплаты суммы S.

Банковский учет. Банковский учет заключается в покупке денежных обязательств, например, векселя банком по цене, которая меньше номинальной указанной в нем суммы. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки, которая применяется к сумме, уже дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Поэтому ***сумма, выдаваемая банком при учете векселя*** (дисконтирование по сложной учетной ставке), рассчитывается по формуле:

$$P = S(1 - d_{сл})^{n},$$

где $d_{сл}$ – *сложная годовая* ***учетная*** *ставка*; $d_{сл} = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}$

Дисконт определяется, как $D = S - P = S - S(1 - d_{сл})^{n} = S\left[1 - (1 - d_{сл})^{n}\right]$.

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, т.к. учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Номинальная учетная ставка процентов

В тех случаях, когда *дисконтирование применяют m раз в году,* используют ***номинальную учетную ставку f.*** Тогда в каждом периоде, равном 1/m части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m. Процесс дисконтирования по этой сложной учетной ставке описывается формулой:

$$\boldsymbol{P = S\,(1 - f/m)^N}$$

где N = mn – общее число периодов дисконтирования;

f - номинальная годовая учетная ставка.

Эффективная учетная ставка

Под ***эффективной учетной ставкой*** понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе m дисконтирований в году.

В соответствии с определением *эффективной учетной ставки,* найдем ее *связь с номинальной* из равенства дисконтных множителей:

$$(1 - f/m)^{mn} = (1 - d_{сл})^n,$$

из которого следует, что эффективная учетная ставка равна:

$$\boldsymbol{d_{сл} = 1 - (1 - f/m)^m.}$$

В свою очередь**:** $\boldsymbol{f = m(1-\sqrt[m]{1-d}\,)}$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной (m>1).

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

1.Сумма в 5 млн. руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых.

Решение:

Дисконтный множитель для данных условий составит: $v^5 = 1{,}12^{-5} = 0{,}56574$, т.е. первоначальная сумма сократилась почти на 44%. Современная величина равна: $P = S\,(1+i)^{-n}$

$$P = 5000 * 1{,}12^{-5} = 2837{,}1 \text{ тыс.руб.}$$

2.Долговое обязательство на сумму 5 млн. руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)?

Решение:

$P = 5000(1 - 0{,}15)^5 = 2218{,}5$; $D = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5$.

Если применить простую учетную ставку того же размера, то:

$P = 5000(1 - 5*{,}015) = 1250$; $D = 5000 - 1250 = 3750$.

3.Операция, связанная с покупкой и последующей продажей облигации, должна принести через 3 года прибыль в 100 000 руб. Определите современную стоимость этой суммы по сложной годовой учетной ставке **d = *30%.***

Решение:

S = 100 000 руб., $d = 0{,}3$, $n = 3$

$P = S(1 - d)^n = 100\,000(1 - 0{,}3)^3 = 34\,300$ руб.

4. ***Клиент имеет вексель на 10 000 руб., который он хочет учесть 01.03.2000. в банке по сложной учетной ставке равной 7%. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2000?***

Решение:

Срок от даты учета до даты погашения векселя равен:

t = 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1 - 1 = 153 дням;

$P = S(1 - d)^{t/k} = 10\,000(1 - 0{,}07)^{153/365} = 9\,700$ руб. 38 коп.

5.Определим сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15%, и эффективную учетную ставку. Имеем f = 0,15 m = 4, mn =20, P = 500 тыс.руб.

Решение:

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^N \qquad P = 500\left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{20} = 2328{,}0 \text{ тыс. руб.}$$

Эффективная учетная ставка составит $d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m$ $d = 1 - \left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^4$ = 0,14177 или 14,177%

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Необходимо определить вложенную на депозит сумму при условии, что вкладчик получит 25 млн.руб. через 5 лет. Банк производит начисления за внесенную сумму по сложной процентной ставке, равной *5* % в год. Требуется определить два варианта начисления - ежегодное и ежеквартальное.

2. Долговое обязательство на ссуду в сумме 1 млн.руб. предусматривает начисление процентов в размере *12,5* % годовых.

Срок погашения долгового обязательства через *90* дней. Владелец обязательства собирается учесть его в банке за *10* дней до наступления срока по простой учетной ставке *15* %. Определить полученную сумму.

3.Контракт на получение ссуды в сумме 15 млн.руб. предусматривает возврат долга через *90* дней в сумме 15,8 млн.руб. Требуется определить простую учетную ставку, которую использует банк.

4.Владелец векселя номинальной стоимостью 5 млн.руб. и периодом обращения $n = 3$ предложил его сразу банку для учета, т.е. за $n = 3$ лет до погашения. Банк согласился учесть этот вексель по сложной учетной ставке $d = 10{,}5\%$ годовых. Требуется определить дисконт, полученный банком, и сумму, полученную владельцем векселя.

5.Вексель учтён за год до даты его погашения по учётной ставке 15% Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки?

4.ФИНАНСОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ И КОНВЕРСИЯ ПЛАТЕЖЕЙ

1.Финансовая эквивалентность обязательств

На практике нередко возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, например с более отдаленным сроком платежа, *объединить несколько платежей в один* (***консолидировать платежи***) и т.п. Такие изменения не могут быть произвольными. Общепринятым принципом, на котором должны базироваться изменения условий контрактов, является ф*инансовая эквивалентность обязательств*. **Эквивалентными** считаются *платежи, которые, будучи «приведенными» к одному моменту времени, оказываются равными.* Приведение осуществляется путем дисконтирования (приведение к более ранней дате) или, наращения суммы платежа (если эта дата относится к будущему). Если при изменении условий контракта принцип финансовой эквивалентности не соблюдается, то одна из участвующих сторон терпит ущерб, размер, которого можно заранее определить.

Применение принципа финансовой эквивалентности не ограничено рамками задач изменения контрактов. Он лежит в основе преобладающего числа методов количественного финансового анализа.

Консолидирование (объединение) задолженности

Принцип финансовой эквивалентности платежей применяется при различных изменениях условий выплат денежных сумм: их объединении, изменении сроков и т.п.

Общий метод решения таких задач заключается в разработке *уравнения эквивалентности*, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных обязательств, приведение осуществляется на основе простых ставок, для средне- и долгосрочных – с помощью сложных процентных ставок.

Одним из распространенных случаев изменения условий контрактов является **консолидация (объединение) платежей**. Пусть платежи $S_1, S_2, \dots, S_m$ со сроками $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним в сумме S_0 и сроком n_0. В этом случае, возможны две постановки задачи:

1) если задается срок n_0, то находится сумма S_0;

2) если задана сумма консолидированного платежа S_0, то определяется срок n_0.

Рассмотрим обе постановки задачи.

1) Определение размера консолидированного платежа

При решении этой задачи уравнение эквивалентности имеет вид *. В общем случае, когда $n_1<n_2<\dots< n_m$, искомую величину находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей.

А) *при применении простых процентных ставок* получим

$$* \quad S_0 = \sum_j S_j\left(1+t_j i\right) + \sum_k S_k\left(1+t_k i\right)^{-1},$$

где S_j – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$, S_k – размеры платежей со сроками $n_k > n_0$,

$$t_j = n_0 - n_j, \quad t_k = n_k - n_0.$$

Б) *при применении сложных процентных ставок.*

Когда $n_1<n_0<n_m$ получим: $S_0 = \sum S_j (1+i)^{t_j} + \sum S_k (1+i)^{-t_k}$.

2) *Определение срока консолидированного платежа*

Если при объединении платежей задана величина консолидированного платежа S_0, то возникает проблема определения его **срока** $\boldsymbol{n_0}$**.** В этом случае *уравнение эквивалентности* удобно представить в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей. Так

А) *при применении простой ставки* это равенство имеет вид:

$$S_0 (1+n_0 i)^{-1} = \sum_j S_j (1+n_j i)^{-1},$$

откуда

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j (1+n_j i)^{-1}} - 1\right).$$

Очевидно, что решение может быть получено при условии, что $S_0 > \sum S_j (1+n_j i)^{-1}$, иначе говоря, размер заменяющего платежа не может быть меньше суммы современных стоимостей заменяемых платежей. Заметим также, что искомый срок пропорционален величине консолидированного платежа.

Б) перейдем к определению срока консолидированного платежа *на основе сложных процентных ставок.* Уравнение эквивалентности запишем следующим образом

$$S_0 (1+i)^{-n_0} = \sum_j S_j (1+i)^{-n_j} .$$

Для упрощения дальнейшей записи примем

$$Q = \sum S_j (1+i)^{-n_j} .$$

После чего находим

$$** \ n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Как видим, решение существует, если $S_0 > Q$. Для частного случая, когда $S_0 = \sum S_j$, при определении срока консолидированного платежа иногда вместо ** применяют средний взвешенный срок:

$$n_0 = \frac{\sum S_j n_j}{S_0}.$$

2.Общая постановка задачи изменения условий контракта

Общие случаи изменения условий выплат, предусматриваемых в контрактах, для которых решение нельзя получить простым суммированием приведенных на некоторую дату платежей, основываются на принципе эквивалентности платежей до и после изменения условий. Метод решения заключается в разработке соответствующего уравнения эквивалентности. Если приведение платежей осуществляется на некоторую начальную дату, то получим следующие уравнения эквивалентности, в общем виде:

А) $\sum_j S_j (1 + n_j i) = \sum_k S_k (1 + n_k i)$ - *при использовании простых процентов,*

Б) $\sum_j S_j v^{n_j} = \sum_k S_k v^{n_k}$ - *при использовании сложных процентов.*

где S_j и n_j – параметры заменяемых платежей;

S_k и n_k – параметры заменяющих платежей.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

Определение размера консолидированного платежа

1.Два платежа 1 и 0,5 млн. руб., и со сроками уплаты соответственно 150и 180дней объединяются в один со сроком 200 дней. Стороны согласились на применении при конверсии простой ставки, равной 20%. Какова консолидированная сумма долга?

Решение:

при применении простых процентных ставок:

$$* \ S_0 = \sum_j S_j\left(1 + t_j i\right) + \sum_k S_k\left(1 + t_k i\right)^{-1},$$

где S_j – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$, S_k – размеры платежей со сроками $n_k > n_0$,

$$t_j = n_0 - n_j, \quad t_k = n_k - n_0.$$

<u>200-150</u>. <u>200-180.</u>

S_0 = 1000(1 + 365 *0,2)+500(1 + 365 *02) $^{-1}$ = 1532,87 тыс. руб.

2.Платежи в 1 и 2 млн. руб. и сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20%. Искомая сумма составит

при применении сложных процентных ставок, когда $n_1<n_0<n_m$:

$$S_0 = \sum S_j\left(1 + i\right)^{t_j} + \sum S_k\left(1 + i\right)^{-t_k}$$

S_0 = 1000,0 * $1{,}2^{0,5}$ + 2000,0 * $1{,}2^{-0,5}$ = 2921,187 тыс. руб.

Определение срока консолидированного платежа

1.Суммы в размере 10 ,20 и 15 млн. руб. должны быть выплачены через 50,80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом в 50 млн. руб. Чему равна современная стоимость

заменяемых платежей (обозначим эту величину через Р) при условии, что i=10% и К=365?

Решение:

$$Đ=\sum_j S_j\left(1+n_j i\right)^{-1}$$

Р = 10(1 + $\frac{50}{365}$ * 0,1)$^{-1}$ + 20(1 + $\frac{80}{365}$ * 0,1)$^{-1}$ + 15(1 + $\frac{50}{365}$ * 0,1)$^{-1}$ = 43,844 млн. руб.

$n_0=\frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum S_j\left(1+n_j i\right)^{-1}}-1\right)$ = 1/0,1 * ($\frac{50}{43{,}844}-1)=1{,}404$ года, или 512 дней.

2. Воспользуемся данными задачи 1 и определим срок консолидированного платежа в сумме 3 млн руб.

Решение:

$Q=\sum S_j\left(1+i\right)^{-n_j}$ = 1 * 1,2^{-2} + 2 * 1,2^{-3} = 1,8518 После чего находим

$$n_0=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln\left(1+i\right)} = \frac{\ln(\frac{3}{1{,}8518})}{\ln 1{,}2}$$ =2,646 года

Приближенное решение дает 2,667 года.

Изменение условий контрактов

1.Две суммы 10 и15 млн. руб. должны быть выплачены 1 ноября и 1 января следующего года. Стороны согласились пересмотреть поря док выплат: должник 1 декабря выплачивает 6 млн. руб., остаток долга гасится 1 марта. Необходимо найти сумму остатка при условии, что пересчет осуществляется по ставке простых процентов, равной 20% (К=365).

Решение:

Возьмем за базовую дату, допустим, момент выплаты 5 млн. руб. Уравнение эквивалентности в этом случае выглядит следующим образом:

$$\sum_j S_j\left(1+n_j i\right)=\sum_k S_k\left(1+n_k i\right)$$ - *при использовании простых процентов*,

10(1+$\frac{61}{365}$* 0,2) + 5 = 6(1+ $\frac{31}{365}$ * 0,2) + **S** (1+ $\frac{59}{365}$*0,2)$^{-1}$

Находим S = 9,531 млн. руб.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Имеется обязательство уплатить 10 млн. руб. через 4 месяца и 7 млн. руб. через 8 месяцев после некоторой даты. По новому обязательству необходимо выплату произвести равными суммами через 3 и 9 месяцев. Изменение условий осуществляется с использованием простой ставки, равной 10% (К=360).

2.Существует обязательство уплатить 100 тыс. руб. через 5лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через два года выплачивается 30 тыс. руб., а оставшийся долг – спустя 4 года после первой выплаты. Необходимо определить сумму последнего платежа.

5 ПОСТОЯННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

1.Виды потоков платежей и их основные параметры

Часто в контрактах финансового характера предусматривают не отдельные разовые платежи, а серию платежей, распределенных во времени. *Примерами* могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется фонд определенного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда и др [31,15,16].

Ряд последовательных выплат и поступлений называют ***потоком платежей***. *Выплаты* представляются *отрицательными* величинами, *а поступления – положительными.*

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенной суммой потока платежей называется сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого–либо другого фонда или общую сумму задолженности к концу срока, накопленный денежный резерв и т.д.

Современная величина потока платежей - сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

*Например, с*овременная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки, чистую приведенную прибыль от реализации проекта и т.д.

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы - постоянны, называют ***финансовой рентой*** или ***аннуитетом.***

Финансовая рента имеет следующие **параметры:**

- ***член ренты*** — величина каждого отдельного платежа;
- ***период ренты*** — временной интервал между двумя соседними платежами;
- ***срок ренты*** — время от начала первого периода ренты до конца ее последнего периода;
- ***процентная ставка*** — ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;
- ***число платежей в году* -** один раз в год (*годовые)* или p – раз в год (*p – срочные).;*
- ***число начислений процентов в году* -** ренты с начислением процентов один раз в году, m - раз или непрерывно;
- ***моменты платежа внутри периода ренты.***

Рассмотрим ***виды финансовых рент***. **Классификация финансовых рент** производится по различным признакам.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года ренты делят на ***годовые (***выплата раз в году***)*** и ***p – срочные (*** *p* – число выплат в году).

По числу начислений процентов различают ***ренты с начислением один раз в году, m - раз или непрерывно***. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов ренты различают ***постоянные*** (с равными членами) и ***переменные ренты.***

По вероятности выплат ренты делятся на ***верные*** и ***условные***. Верные ренты подлежат безусловной уплате (*например,* при погашении кредита). Число членов такой ренты заранее известно. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, поэтому число ее членов заранее неизвестно (*например,* число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера).

По числу членов различают ренты с конечным числом членов, или ***ограниченные ренты*** (их срок заранее оговорен) и ***бесконечные*** или ***вечные ренты.*** В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на ***немедленные*** и ***отложенные*** (или *отсроченные)*. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных - сдвигается на определенное время.

Ренты различают *по моменту выплаты платежей*. Если платежи осуществляются *в конце* каждого периода, то такие ренты называются *обычными,* или ***постнумерандо***. Если же выплаты производятся *в начале* каждого периода, то ренты называются ***пренумерандо*** (или *авансированными*). Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

2.Формулы наращенной суммы постоянной ренты постнумерандо

Наращенная сумма является обобщением всех членов потока в виде одного числа, однако эта оценка приурочена *к концу срока*. Получим формулы для всех видов постоянных рент.

1) Годовая рента

Пусть в конце каждого года в течение *n* лет на расчетный счет вносится по *R* рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке *i*. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму *R* проценты начислялись в течение $(n - 1)$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т. д. На последний взнос проценты не начисляются.

Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1}$$

в которой первый член равен *R,* знаменатель — (1 + i), число членов – *n.*

Эта сумма равна: $$\mathbf{S = R}\ \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}\ ,$$

где $\mathbf{s}_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ называется *коэффициентом наращения ренты,* который зависит только от срока ренты *n* и уровня процентной ставки *i*.

2)Годовая рента с начислением процентов m раз в году

Предположим, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют *m* - раз в году. Это означает, что каждый раз применяется ставка *j/m,* где *j* - *номинальная ставка процентов*. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид:

$$R(1+j/m)^{m(n-1)},\ R(1+j/m)^{m(n-2)},\dots,R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то видно, что это геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателем – $(1+ j/m)^m$, число членов – *n.* Сумма членов этой прогрессии будет наращенной суммой ренты. Она равна:

$$\mathbf{S = R}\ \frac{(1+{}^{j}\!/\!{}_{m})^{mn}-1}{(1+{}^{j}\!/\!{}_{m})^{m}-1} = \mathbf{Rs}_{mn;j/m}$$

3) Рента p – срочная, m = 1

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается *p* - раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R— годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке:

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-{}^{1}\!/\!{}_{p}},\ \frac{R}{p}(1+i)^{n-{}^{2}\!/\!{}_{p}},\ \frac{R}{p}(1+i)^{n-{}^{3}\!/\!{}_{p}},\dots,\ \frac{R}{p}$$

у которой первый член R/p, знаменатель — $(1 + i)^{1/p}$. общее число членов – *np.*

Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической профессии:

$$\mathbf{S =}\ R\frac{(1+i)^{n}-1}{p((1+i)^{{}^{1}\!/\!{}_{p}}-1)} = Rs^{(p)}{}_{n;i}\ ,$$

где $s^{(p)}_{n;i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{p((1+i)^{1/p} - 1)}$, *коэффициент наращения р - срочной ренты* при $m = 1$.

4) Рента р - срочная, р = т

В контрактах наиболее часто встречаются случаи, когда число выплат в году равно числу начислений процентов: ***р = т***. Для получения необходимой формулы воспользуемся наращенной суммой годовой ренты: $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, в которой i заменим на j/m, а вместо числа лет берется число периодов выплат ренты – np, член ренты равен R/p. Поскольку $p = m$, то в итоге формула расчета наращенной суммы примет вид:

$$\mathbf{S = R}\ \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{j}.$$

Все параметры в этой формуле характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

5)Рента р - срочная, р ≥ 1, т ≥ 1(р ≠ т)

Это общий случай p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем возможно $p \neq m$. Первый член ренты R/p, уплаченный спустя $1/p$ года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами:

$$\frac{R}{p}(1+j/m)^{m(n-1/p)} = \frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-m/p}$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до $\dfrac{R}{p}(1+j/m)^{m(n-2/p)} =$

$\dfrac{R}{p}(1+j/m)^{mn-2(m/p)}$ и т.д.

Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен *R/p,* ее знаменатель - $(1 + j/m)^{m/p}$, число членов— *mp.* В результате получаем наращенную сумму:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}\,\frac{(1+{}^{j}\!/_{m})^{mn}-1}{p[(1+{}^{j}\!/_{m})^{{}^{m}\!/_{p}}-1]}$$

б). Непрерывное начисление процентов

Перепишем в обратном порядке ряд платежей с начисленными непрерывными процентами. Пусть это будут ***а) ежегодные платежи постнумерандо***. Получим: $R, Re^{\delta}, Re^{2\delta}, \ldots, Re^{(n-1)\delta}$.

Сумма членов прогрессии равна: $\mathbf{S} = \boldsymbol{R}\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta n}-1} = Rs_{n;\delta}$

Аналогично, ***б) для p-срочной ренты*** находим:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{R}\frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\delta/p}-1)} = Rs^{(p)}{}_{n;\delta}$$

3.Формулы современной величины постоянной ренты постнумерандо

Под современной стоимостью потока платежей понимают сумму дисконтированных членов этого потока на некоторый *предшествующий* момент времени. Вместо термина ***современная стоимость*** (***современная величина***) ***потока платежей*** употребляют термины ***капитализированная стоимость*** или ***приведенная величина.*** Современная стоимость потока платежей эквивалентна в финансовом смысле всем платежам, которые охватывают поток. В связи с этим данный показатель находит широкое применение в разнообразных финансовых расчетах, таких как планирование погашения долгосрочных займов, реструктурирование долга, оценка и сравнение эффективности производственных инвестиций и т.д.

Рассмотрим методы расчета современных стоимостей финансовых рент.

1) Годовая рента

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты *n*. Тогда дисконтированная величина первого платежа R/(1+i)=Rυ, где $\upsilon = \frac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rυ^2 и т. д. Таким образом, приведенные величины образуют геометрическую профессию: Rυ, Rυ^2 ¸Rυ^3¸..., Rυ^n, сумма которой равна **современной величине:**

$$\mathbf{A = R}\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i},$$

где $a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ - *коэффициент приведения ренты.*

Коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты *n* и процентной ставки *i*. Поэтому его значения представлены в *табличном виде*.

2) Годовая рента, начисление процентов m – раз в году

В формуле $\mathbf{A = R}\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, заменим дисконтный множитель $(1+i)^{-n}$ на эквивалентную величину $(1+j/m)^{-mn}$, соответственно , i заменим на $(1+ j/m)^m -1$, после чего имеем:

$$\mathbf{A = R}\ \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m - 1} = Ra_{mn;j/m},$$

3) Рента р – срочная (m = 1)

Если платежи производятся не один, а *р* – раз в году, то коэффициенты приведения находятся также, как и для годовой ренты. Только теперь размер платежа равен *R/p* , а число членов составит *np*. Сумма дисконтированных платежей в этом случае равна:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)} = Ra_{n;i}^{(p)}$$

4) Рента р - срочная, р = m

Число выплат в году здесь равно числу начислений процентов; величина члена ренты составит R/m. В итоге:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\ \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j} = Ra_{mn;j}$$

5) Рента р - срочная, р≥1, m≥1

Аналогично можно получить формулу для расчета современной величины ренты в общем случае для произвольных значений *p* и *m:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\frac{1-(1+{}^{j}/_{m})^{-mn}}{p((1+{}^{j}/_{m})^{m/p}-1)} = Ra_{mn;j/m}^{(p)}$$

6) Ренты с непрерывным начислением процентов

Пусть, ряд состоит ***из ежегодных*** *платежей*, равных R, однако проценты начисляются непрерывно, сила роста равна δ. При дисконтировании по этой ставке всех членов ряда получим геометрическую прогрессию с первым членом *R* и знаменателем $e^{-\delta}$ Сумма членов прогрессии находится следующим образом: **A = R** $\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1} = Ra_{n;\delta}$

Если имеет место ***р-срочная рента*** с непрерывным начислением процентов, то

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\frac{1-e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p}-1)} = Ra^{(p)}{}_{n;\delta}$$

4. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть **А** — современная величина годовой ренты постнумерандо, а **S** — ее наращенная стоимость к концу срока n, $\boldsymbol{p = 1, m = 1}$.

Наращение процентов на сумму А за n лет дает сумму, равную S:

$$\mathbf{S} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}$$

Отсюда следует, что дисконтирование S дает *A:* $S\,\upsilon^n = A$

Коэффициент приведения (дисконтирования) и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i}, \quad s_{n;i}\,\upsilon^n = a_{n;i}$$

Для рент с начислением процентов m раз в году имеем: $A(1+j/m)^{mn} = S$, $\quad S(1+j/m)^{-mn} = A$.

5. Определение параметров финансовой ренты

Иногда, при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости *A* остальных параметров ренты: ***R, n, i, p, m***. Такие параметры, как *m* и *p,* обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры *R, n, i*. Два из них задаются, а третий рассчитывается.

а) Определение размера ежегодной суммы платежа R

В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана, S или *A* и набор параметров, кроме R, возможны два варианта расчета: 1) за обусловленное число лет необходимо создать фонд в сумме S путем систематических постоянных взносов. Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов, то платеж:

R = $\frac{S}{s_{n;i}} = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}$ (*) или 2) пусть условиями договора задана современная стоимость. Если рента годовая (m=1), то платеж: **R** = $\frac{A}{a_{n;i}} = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$ (**).

Таким образом, если ставится задача накопить за определенный срок некоторую сумму S, то прибегают к формуле (*), если же речь идет о погашении задолженности в сумме A, то пользуются формулой (**).

Аналогичным образом можно определить R и для других условий ренты.

б) Определение срока постоянной ренты

Рассмотрим обычную годовую ренту с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для S и A относительно срока *n,* получим, соответственно, следующие два выражения:

из **S** = $R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ и **A = R** $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, получаем:

$$n = \frac{\ln(\frac{S}{R}i + 1)}{\ln(1+i)} \quad \text{и} \quad n = \frac{-\ln(1 - \frac{A}{R}i)}{\ln(1+i)} \ \text{при } R > Ai$$

Аналогичным образом определяются сроки и для других видов рент.

При расчете срока ренты необходимо принять во внимание следующие моменты.

1. Расчетные значения срока будут, как правило, дробные. В этих случаях для годовой ренты в качестве *n* часто удобно принять ближайшее целое число лет. У *p-срочной ренты* результат округляется до ближайшего целого число периодов *np. Например*, пусть для квартальной ренты получено n = 6,28 лет, откуда *np* = 25,12 кварталов. Округляем до 25, в этом случае n = 6,25 лет.

2. Если округление расчетного срока производится до меньшего целого числа, то наращенная сумма или современная стоимость ренты с таким сроком оказывается меньше заданных размеров. Возникает необходимость в соответствующей компенсации. *Например*, если речь идет о погашении задолженности путем выплаты постоянной ренты, то компенсация может быть осуществлена соответствующим платежом в начале или конце срока, или с помощью повышения суммы члена ренты.

Обсудим еще одну проблему, связанную со сроком ренты. Пусть A — текущее значение долга. Если он погашается с помощью постоянной ренты, то долг может быть погашен за конечное число лет только при условии, что $R > Ai$. Аналогичные неравенства можно найти и для других видов рент. Если условия ренты таковы, что имеет место равенство, *например*, $R = Ai,$ то $n = \infty$, т.е. рента окажется вечной и долг практически не может быть погашен.

в) Определение размера процентной ставки

Необходимость в определении величины процентной ставки возникает всегда, когда речь идет о выяснении эффективности (доходности) соответствующей финансово-банковской или коммерческой операции.

Для того чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (речь идет о *постоянной годовой ренте постнумерандо*) следующего вида:

$$\mathbf{S} = R\frac{(1+i)^n-1}{i} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \mathbf{R}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим: $\mathbf{s}_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ или

$a_{n;i} = \frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка *i*. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона — Рафсона и др. Методом линейной интерполяции найдена следующая формула:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_{\text{н}} + \frac{S - S_{н}}{S_{в} - S_{н}} (\mathbf{i}_b - \mathbf{i}_{\text{н}}),$$

где *Sн* и *Sв* – значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок $i_{н}$ и $i_{в}$ соответственно.

Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с левой частью. Если достигнутая точность недостаточна, то повторно применяют эту формулу, заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения).

6. Наращенные суммы и современные стоимости других видов постоянных рент

Рассмотрим методики расчета наращенных сумм и современных стоимостей для некоторых разновидностей дискретных постоянных рент.

а) Ренты пренумерандо

Каждый член ренты пренумерандо «работает» на один период больше, чем в ренте постнумерандо. Отсюда **наращенная сумма**

ренты пренумерандо $\ddot{s}$, больше в (1+i) раз аналогичной ренты постнумерандо:

$$\ddot{s} = \mathbf{S(1 + i)},$$

где коэффициент наращения годовой ренты *пренумерандо* - $\ddot{s}_{n;i} = s_{n;i}(1+i)$

Наращенная сумма ***для годовой ренты с начислением процентов m раз в году:***

$$\ddot{s} = \mathbf{S(1 + j/m)^m}$$

Наращенная сумма ***для p - срочных рент,*** у которых ***m =1 и m≠p***:

$$\ddot{s} = \mathbf{S\,(1 + \boldsymbol{i})^{1/p}} \quad \textbf{и} \quad \ddot{s} = \mathbf{S\,(1 + j/m)^{m/p}}$$

Точно такая же зависимость наблюдается и между современными стоимостями и коэффициентами приведения рент постнумерандо и пренумерандо:

$$\mathbf{\ddot{A} = A\,(1+\boldsymbol{i}); \quad \ddot{a}_{n;i} = a_{n;i}\,(1+ \boldsymbol{i})} \text{ и т.д.}$$

б) ренты с выплатами в середине периодов

Важной для практики является ***рента с платежами в середине периодов***. *Например*, в случаях, когда поступления от производственных инвестиций распределяются более или менее равномерно, применение рент пренумерандо или постнумерандо для описания таких потоков может привести к некоторым смещениям в значении получаемых показателей. В таких ситуациях для уменьшения погрешности рекомендуется суммы поступлений за период относить к середине периодов. Наращенные суммы и современные стоимости таких рент находим умножением соответствующих обобщающих характеристик рент постнумерандо на множитель наращения за половину периода.

Для **современных стоимостей** справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{A_{½} = A\,(1 + i)^{1/2}} \qquad \textbf{\textit{при p = 1, m = 1,}}$$

$$\mathbf{A_{½} = A\,(1 + i)^{1/2p}} \qquad \textbf{\textit{при p > 1, m = 1,}}$$

$$\mathbf{A_{½} = A(1 + j/m)^{m/2}} \qquad \textbf{\textit{при p = 1, m > 1,}}$$

$$\mathbf{A_{½} = A(1 + j/m)^{m/2p}} \qquad \textbf{\textit{при p > 1, m > 1.}}$$

в) Отложенные ренты. Начало выплат у отложенной (*отсроченной*) ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени. *Например,* погашение задолженности планируется начать спустя обусловленный срок (льготный период). Сдвиг во времени никак не отражается на величине наращенной суммы. Иное дело современная стоимость ренты.

Пусть рента выплачивается спустя t лет после некоторого начального момента времени. Современная стоимость ренты на начало выплат (современная стоимость немедленной ренты) равна А. Современная стоимость на начало периода отсрочки в t лет очевидно равна дисконтированной на этот срок величине современной стоимости немедленной ренты.

Для годовой ренты **современная стоимость** $_t$**А** ***отложенной на t лет ренты*** равна:

$${}_t\mathbf{A} = \mathbf{A}\boldsymbol{v}^t = \mathbf{R}\mathbf{a}_{n;i}\,\boldsymbol{v}^t, \quad \text{где } a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}; \; v^t = (1+i)^{-t}.$$

Современная стоимость отложенной ренты используется чаще всего в расчетах, связанных с выплатами различного рода накоплений. *Например,* пусть годовая ограниченная рента постнумерандо делится по времени между двумя участниками (речь идет о передачи собственности). Рента имеет параметры: *R, n*.

Условия деления: а) каждый участник получит 50% капитализированной стоимости ренты; б) рента выплачивается последовательно - сначала первому участнику, затем второму. Рассчитать срок получения ренты первым участником-n_1; вторым участником-n_2.

Итак, первый участник получит немедленную ренту, второй – отложенную. Из принятых условий деления ренты следует: $A_1 = {}_{n_1}A_2$; $Ra_{n_1;i} = Ra_{n_2;i}\ v^{n_1}$. После ряда преобразований, с учетом, что $n_2 = n - n_1$. получим: $n_1 = \frac{-\ln((1+(1+i)^{-n}):2)}{\ln(1+i)}$, т.е. результат зависит только от общего срока ренты и процентной ставки, которая учитывается в расчете.

г) Вечная рента. Под вечной рентой понимается ряд платежей, количество которых не ограниченно – теоретически она выплачивается в течение бесконечного числа лет.

В практике иногда сталкиваются со случаями, когда есть смысл прибегнуть к такой абстракции, *например,* когда, предполагается, что срок потока платежей очень большой и конкретно не оговаривается. *Примером* могут служить некоторые виды облигаций.

Наращенная сумма *вечной ренты* равна бесконечно большой величине. А **современная величина** *вечной ренты* есть конечная величина, зависящая от размера члена ренты и процентной ставки:

$$\mathbf{A}_\infty = \frac{R}{i}$$

Из этой формулы получим: $\mathbf{R} = \mathbf{A}_\infty \cdot \boldsymbol{i}$, т.е. **член** *вечной ренты* равен проценту от её капитализированной стоимости.

Для других видов рент **современная стоимость** *вечной ренты* равна: $A_\infty = \dfrac{R}{p((1+i)^{1/p}-1)}$ ***при p > 1, m = 1;***

$$\mathbf{A}_\infty = \mathbf{R/j} \quad \textit{при } p = m > 1.$$

д) Рента с периодом платежей, превышающим год. В анализе производственных инвестиционных проектов иногда встречаются с рентами, члены которых выплачиваются с интервалами, превышающими год. Определим наращенную сумму и современную стоимость таких рент.

Пусть ***r*** – временной интервал между двумя членами ренты, проценты начисляются раз в году. В этом случае современная стоимость первого платежа составит на начало ренты величину $\mathbf{T}v^r$, второго - $\mathbf{T}v^{2r}$, последнего члена - $\mathbf{T}v^n$, где **T** – величина члена ренты, ***n***-срок ренты, кратный r. Последовательность дисконтированных платежей представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $\mathbf{T}v^r$, знаменателем v^r и числом членов n/r. Сумма членов такой прогрессии при условии, что T = 1, равна:

$$\mathbf{a_{r;i}} = \frac{a_{n,i}}{s_{r,i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1},$$ где r – целое число лет.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

Обычная годовая рента

1. В течение 3 лет на специальном расчетном счете АО в коммерческом банке в конце каждого года поступает по 10 млн. ден. ед., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке

10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. Используя формулу: $S = \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}$

$$S = 10 \cdot \frac{1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 33{,}1 \text{ млн/ден. ед.}$$

Годовая рента с начислением процентов m раз в году

1. Несколько изменим условия задачи 2. Пусть теперь проценты начисляются поквартально, а не раз в году. Какова величина фонда на конец срока.

Решение. Имеем j/m = 18,5/4, mn = 20:

$$\mathbf{S = R}\ \frac{(1+{}^{j}\!/\!_{m})^{mn} - 1}{(1+{}^{j}\!/\!_{m})^{m} - 1}$$

$$S = \frac{4\,(1+0{,}185/4)^{20} - 1}{(1+0{,}185/4)^{4} - 1} = 29{,}663 \text{ млн. руб.}$$

Рента *p* – срочная (*p* ≠ *m*)

1. Пусть в ренте, наращенная сумма которой определялась в предыдущей задаче, начисление процентов производится ежемесячно. Определить наращенную сумму.

Решение.

$$S = \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{p\,[(1+j/m)^{mp} - 1]}$$

$$S = 4\ \frac{(1+0{,}185/12)^{12*5}}{4[(1+0{,}185/12)^{12/4} - 1]} = 32{,}025 \text{ млн. руб.}$$

Непрерывное начисление процентов

1.Пусть в условии задачи 2, вместо ежегодного начисления процентов предусматривается непрерывное их начисление, причем сила роста равна 18,5% . Определить наращенную сумму ренты.

а) ежегодные платежи постнумерандо:

$$S = R\,\frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}$$

$$S = 4 * \frac{e^{0,185*5} - 1}{e^{0,185} - 1} = 29{,}955 \text{ млн руб.}$$

б) *ежеквартальные выплаты членов ренты*

$$S = R\,\frac{e^{\delta n} - 1}{p\ (e^{\delta/p} - 1)}$$

$$S = 4 * \frac{e^{0,185 * 5} - 1}{4\ (e^{0,185/4} - 1)} = 32{,}150 \text{ млн. руб.}$$

Заметим, что непрерывное начисление процентов членов дискретной ренты дает в итоге такую же сумму, что и наращение по дискретной ставке *i* или *j*, если сила роста эквивалентна этим.

Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

1. Годовая рента постнумерандо характеризуется параметрами: R = 4 млн. руб., n = 5. При дисконтировании по сложной процентной ставке процента, равной 18,5 % годовых, получить современную стоимость этой ренты.

Решение.

$$\mathbf{A = R}\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}\text{, где } a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ - *коэффициент приведения ренты.*

$$A = 4a_{5;18,5} = 4 * \frac{1 - 1{,}185^{-5}}{0{,}185} = 4 * 3{,}092 = 12{,}368 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, все будущие платежи оцениваются в настоящий момент в сумме 12,368 млн. руб. Иначе говоря, 12,368 млн. руб, размещенных под 18,5% годовых, обеспечивают ежегодную выплату по 4 млн. руб. в течение 5 лет.

2. ***Для условий задачи 1 при δ = 0,185 найти современную стоимость ренты, p = 1***

Решение.

$$\mathbf{A = R}\frac{1-\mathring{a}^{-\delta\grave{o}}}{p(\mathring{a}^{\delta/p}-1)} = Ra^{(p)}{}_{n;\delta}$$

$$A = 4\ \frac{1 - e^{-0,185*5}}{e^{0,185} - 1} = 11,878 \text{ млн. руб.}$$

Рента *p* – срочная, *p ≥ 1, m ≥ 1*

1.*Найти современную стоимость для варианта ренты p = m = 4, взяв за основу R = 31,785; j = 0,185; n = 5.*

Решение. *По формуле:*

$$A{=}R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)} \qquad A = 31,785\ \frac{1-(1+0,185/4)^{-4\cdot 5}}{4((1+\frac{0,185}{4})^{4/4}-1)} = \quad ? \text{ млн. руб.}$$

Определение параметров финансовой ренты

1. Известно, что принц Чарльз при разводе с Дианой выплатил последней 17 млн. ф.ст. Как сообщалось, эта сумма была определена в расчете на то, что принцесса проживает еще 50 лет (увы, это не сбылось). Указанную сумму можно рассматривать как современную стоимость постоянной ренты. Определить размер члена этой ренты при условии, что процентная ставка равна 10%, а выплаты производятся помесячно.

Решение. По условию задачи: А =17 млн.ф.ст., *n* = 50, p = 12, *i* = 10%.

Для *ренты постнумерандо с* указанными параметрами можно записать:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)} = Ra_{n;i}{}^{(p)} \qquad 17\ 000 = R\ \frac{1-1{,}1^{-50}}{12(1{,}1^{1/12}-1)},$$

Ежемесячная выплата составит R/12 = 135,6 тыс. ф.ст.

2. Вкладчик желает накопить в течении двух лет в банке 30 000 руб., производя ежемесячные равные вклады по сложной номинальной годовой ставке 12%. Определите сумму ежемесячного вклада при условии, что проценты начисляются ежемесячно.

Решение.

S = 30000; n = 2 ; j = 12%; ic = 0,01.

Сумма ежемесячного вклада составит: R = $\frac{S}{s_{n;i}} = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}$

R $\frac{S * i_c}{(1+\ i_c)^n - 1} = \frac{30\ 000 \cdot 0{,}01}{(1+0{,}01)^2 - 1}$ = 1112руб. 20 коп.

Определение размера процентной ставки

1. ***Для проведения замены оборудования предприятию необходимо за 10 лет накопить 2 млн. ден. ед. Ежегодно она может вносить в банк для этой цели 100 000 ден. ед. на специальный счет. Под какую ставку сложный процентов необходимо вкладывать эти деньги, чтобы накопить требуемую сумму, в указанный срок?***

Решение.

$S_{n;\,i} = [(1+ i)^n - 1] / i$ = S/R = 2 000 000/ 100 000 = 20

Определим $S_{n;\,i}$ для нескольких произвольных значений процентных ставок. Так

для i = 0,14 $s_{10;\,0,14} = [(1+i)^n -1] / i = [(1+0{,}14)^{10} - 1] / 0{,}14 = 19{,}26$.

для i = 0,15 $s_{10;0,15} = [(1+i)^n -1] / i = [(1+0{,}15)^{10} - 1] / 0{,}15 = 20{,}33$.

Действительное значение процентной ставки лежит в интервале 0,14 < i < 0,15, так как 19,26 < 20 < 20,33.

По формуле $i = i_н + \frac{S - S_í}{S_â - S_í}$ и найдем действительное значение процентной ставки: i = 0,14 + (20 – 19,26) (0,15-0,14) / (20,33 – 19,266) = 0,1469 или i =14,69%.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течении 5 лет. Размер разового платежа 4 млн. руб. на поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5% годовых. Какова величина фонда на конец срока?

2. Вкладчик в конце каждого месяца вкладывает в банк 1000 руб. Проценты начисляются помесячно по номинальной годовой ставке сложных процентов, составляющей 12%. Определите наращенную сумму на счете вкладчика через 2 года.

3.Вкладчик намерен положить в банк сумму, чтобы его сын в течение пятилетнего срока обучения мог снимать в конце каждого года по 10 000 руб. и израсходовать к концу учебы весь вклад. Определите сумму вклада, если годовая ставка сложных процентов – 12%.

4.Заемщик получил кредит 3 млн. руб. на 5 месяцев с условием гашения долга в конце каждого месяца равными срочными платежами. На величину долга начисляются сложные проценты по ставке 5 % за месяц. Определить сумму срочного платежа.

5. Какой необходим срок для накопления 100 млн. руб. при условии, что ежемесячно вносится по 12 млн. руб., а на накопления начисляются проценты по ставке 25% годовых?

6 ПЕРЕМЕННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

В практике встречаются случаи, когда *размеры членов потока платежей изменяются во времени*. Такие изменения могут быть связаны с какими-либо обстоятельствами объективного порядка (*например,* условиями производства и сбыта продукции), а иногда и случайными факторами. Частным случаем такого потока является ***переменная рента.*** *Члены переменной ренты изменяются по каким-то установленным* (принятым, оговоренным и т.д.) *законам или условиям развития.*

Рассмотрим переменные ренты:

а) Ренты с постоянным абсолютным изменением членов во времени. Изменения размеров членов ренты происходят здесь согласно арифметической прогрессии с первым членом R и разностью a, иначе говоря, они образуют последовательность

$$R, R+a, R+2a, ..., R+(n-1)a.$$

Величина *t-го* члена ренты равна $R+(t-1)a.$

Современная стоимость *для ренты годовой постнумерандо:*

$$A=\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n;i}-\frac{nav^n}{i},$$

где $\boldsymbol{v}$ — дисконтный множитель по ставке i;

$\boldsymbol{a}$ – прирост ренты;

$\boldsymbol{a_{n;i}}$ – современная стоимость постоянной ренты постнумерандо с членом, равным1;

$\boldsymbol{(R+a/i)}$ – член постоянной ренты.

Наращенная сумма *ренты годовой постнумерандо*:

$$S=\left(R+\frac{a}{i}\right)s_{n;i}-\frac{na}{i}.$$

Определим теперь *влияние на современную стоимость ренты абсолютного прироста платежей*, для этого в формуле (1) раскроем скобки и сгруппируем члены с величиной абсолютного прироста *a:*

$$A = Ra_{n;i} + \frac{a_{n;i} - nv^n}{i} a.,$$

т.е. ***A* линейно зависит от *a*.**

Определим влияние на наращенную сумму ренты абсолютного прироста платежей, для этого в формуле (2) раскроем скобки и сгруппируем члены с величиной абсолютного прироста *a:*

$$S = Rs_{n;i} + \frac{(s_{n;i} - n)}{i} a.,$$

т.е. **S линейно зависит от а.**

Современная стоимость и наращенная сумма *для рент пренумерандо:*

$$A = \left[\left(R + \frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n;i} - \frac{nav^n}{i}\right](1+i) =$$

$$= \left(R + \frac{a}{i}\right)\ddot{a}_{n;i} - \frac{nav^{n-1}}{i},$$

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right)\ddot{s}_{n;i} - \frac{na}{i}(1+i).$$

где $\ddot{a}_{n;i}, \ddot{s}_{n;i}$ — коэффициенты приведения и наращения дискретной постоянной ренты пренумерандо.

Иногда при анализе переменных рент может возникнуть *обратная задача*: ***определение первого члена ренты R или ее прироста a*** по всем остальным заданным параметрам ренты. *Например,* когда известна сумма, которую нужно аккумулировать за *n* лет, и необходимо разработать конкретный план реализации этой задачи.

Для годовых рент постнумерандо* первый член ренты *R вычисляется по формулам:

$$R=\frac{A+\frac{nav^n}{i}}{a_{n;i}}-\frac{a}{i},$$

$$R=\frac{S+\frac{na}{i}}{s_{n;i}}-\frac{a}{i}$$

Размер прироста а *при заданном R,* то

$$a=\frac{(A-Ra_{n;i})i}{a_{n;i}-nv^n},$$

$$a=\frac{(S-Rs_{n;i})i}{s_{n;i}-n}.$$

б) Переменная р-срочная рента с постоянным абсолютным приростом.

Пусть **R** — базовая величина разовой выплаты, ***а*** — годовой прирост выплат. В этом случае последовательные выплаты равны:

$$R, R+\frac{a}{p}, R+2\frac{a}{p}, ..., R+(pn-1)\frac{a}{p}.$$

Отдельный член этого ряда находится как

$$R_t=R+(t-1)\frac{a}{p}, \quad t=1,...,pn$$

Современная стоимость и наращенная сумма *для ренты постнумерандо при начислении процентов р раз в году:*

$$A=\sum\nolimits_{t=1}^{pn}\left(R+\frac{at}{p}\right)v^{t/p},$$

$$S=\sum\nolimits_{t=1}^{pn}\left[R+\frac{a}{p}(t-1)\right](1+i)^{n-t/p}.$$

8. Ренты с постоянным относительным приростом платежей

Рассмотрим ситуацию, когда *платежи изменяют свои размеры во времени с постоянным относительным ростом*, т.е. следуют геометрической прогрессии. Поток таких платежей состоит из членов $R, Rq, Rq^2, ..., Rq^{n-1}$ (***q*** — знаменатель прогрессии или темп роста).

Пусть этот ряд представляет собой **а)** ***ренту постнумерандо***. Тогда ряд дисконтированных платежей состоит из величин $R\nu, Rq\nu^2, ..., Rq^{n-1}\nu^n$. Получена геометрическая прогрессия с первым членом $R\nu$ и знаменателем $q\nu$. Сумма членов этой прогрессии равна:

$$A = R\nu\frac{q^n\nu^n - 1}{q\nu - 1} = R\frac{(q\nu)^n - 1}{q - (1+i)}.$$

Пусть теперь ***q*=1+*k*,** где ***k*** — темп прироста платежей. Тогда **современная стоимость** ***ренты годовой постнумерандо*** находится как: $A = R\dfrac{1 - \left(\dfrac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}.$

Наращенная сумма ***ренты годовой постнумерандо*** находится как:

$$S = A(1+i)^n = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} = R\frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i}.$$

Современная стоимость для годовых ***рент пренумерандо:***

$$\ddot{A} = R\frac{(q\nu)^n - 1}{q\nu - 1}(1+i) = R\frac{1 - \left(\dfrac{1+k}{1+i}\right)^n}{k-i}(1+i),$$

Наращенная сумма ***ренты годовой пренумерандо***:

$$\ddot{S} = R\frac{(q\nu)^n - 1}{q\nu - 1}(1+i)^n = R\frac{1 - \left(\dfrac{1+k}{1+i}\right)^n}{k-i}(1+i)^{n+1}.$$

б) Рента р-срочная с постоянными относительными изменениями членов.

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году постнумерандо, проценты начисляются раз в году по ставке i. В этом случае последовательность платежей представляет собой геометрическую прогрессию $R, Rq, ..., Rq^{np-1}$, где q — темп роста за период. Начислим проценты и суммируем результат, получим **наращенную сумму** *ренты:*

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}.$$

Современная величина такой *ренты* равна:

$$A = R\frac{q^{np}v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}}.$$

Во всех рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно – через фиксированные интервалы времени (периоды ренты).

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

Ренты с постоянным абсолютным приростом платежей

1.Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15 млн. руб. Последующие платежи увеличиваются каждый раз на 2 млн. руб. Начисление процентов производиться по 20% годовых. Срок выплат – 10 лет. Найти A и S.

Решение:

$A = \left(R + \frac{a}{i}\right)a_{n;i} - \frac{nav^n}{i}$, A= (15+2/0.2)4.192472-(10 * 2 * 0,161505)/0.2=88,661 млн. руб.

$S = Rs_{n;i} + \frac{(s_{n;i} - n)}{i}a.$, S=15$s_{10;20}$ + (($s_{10;20}$-10)/0,2)*2 = 389,380 + 159,585 = 548,965 млн. руб.

2.***Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться в течении 2 лет – каждый квартал на 25 млн. руб. Первоначальный объем сбыта за квартал 500 млн. руб. Определить наращенную сумму к концу срока при условии, что деньги за продукцию поступают постнумерандо.***

Решение:

По условию задачи R = 500, *a/p* = 25, *i* = 20%, *pn* = 8.

Наращенная сумма к концу года составит:

S = $\sum_{t=1}^{pn}\left[R + a/p*(t-1)\right]*(1+i)^{n-\frac{t}{p}}$ S = $\sum_{t=1}^{8}\left[15 + 20*(t-1)\right]*1{,}2^{2-\frac{t}{4}}$ = 4865 млн. руб.

Ренты с постоянным относительным приростом платежей.

3. Изменим условия примера 1. Пусть теперь члены ренты увеличиваются каждый год на 12% (к=0,12). Найти A и S.

Решение:

A = R $\dfrac{1-\left(\dfrac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}$, A = 15* $\dfrac{1-\left(\dfrac{0{,}12}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-0{,}12}$ = 93,448 млн. руб.

S = R $\dfrac{(1+k)^n-(1+i)^n}{k-i}$, S = 15 $\dfrac{1{,}12^{10}-1{,}2^{10}}{1{,}12-1{,}2}$ = 578,604 млн. руб.

Допустим теперь, что платежи уменьшаются во времени с темпами прироста минус 10% в год (к = -0,1), тогда

A= 15* $\dfrac{1-\left(\dfrac{0{,}9}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-(-0{,}1)}$ = 47,184 млн. руб. S= 47,184 * $1{,}2^{10}$ = 292,151 млн. руб.

4. Пусть R = 15 млн. руб., n = 10 млн. руб., i = 20%. Положим, что платежи увеличиваются с каждым полугодием на 6%. Найти наращенную сумму и современную стоимость ренты постнумерандо.

Решение:

$q = 1+k = 1+0,06 = 1,06$

$S = R\ \dfrac{q^{pn} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)^{1/p}}$, $S = 15\ \dfrac{1,06^{20} - 1,2^{10}}{1,06 - 1,2^{0,5}}$ = 1263,052 млн. руб.

$A = R\ \dfrac{q^{pn} v^{n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}}$, $A = 15\ \dfrac{1,06^{20} * 1,2^{10} - 1}{1,06 - 1,2^{0,5}}$ = 203,990 млн. руб.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.За какой срок наращенная сумма ренты вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов, если последние осуществляется непрерывно и равномерно в пределах года? На взносы начисляются проценты, сила роста 8%.

2.Ожидается, что доходы от эксплуатации место нахождения полезных ископаемых составляет 1млрд. руб. в год, продолжительность разработки 10 лет, отгрузка и реализация продукции непрерывны и равномерны. Какова капитализированная стоимость дохода при дисконтировании по ставке 10%?

3.За какой срок наращенная сумма ренты вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взносов, если последние осуществляется непрерывно и равномерно в пределах года? На взносы начисляются проценты, сила роста 8%.

4.Какова доходность инвестиций, измеренная в виде силы роста, если затрачено 100 млн. руб., годовая отдача ожидается в размере 200 млн. руб., равномерно в пределах года, срок отдачи -8 лет.

7 КОНВЕРСИЯ РЕНТ

1.Виды конверсий

В практике сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты, то есть *конвертировать условия предусматриваемых при выплате финансовой ренты*. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом *(выкуп ренты*), или наоборот, замена разового платежа рентой *(рассрочка платежа).* К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну – *консолидация рент*. Общий случай конверсии – замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, *например*, немедленной ренты на отложенную, годовой – на ежеквартальную и т.д. Предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон, то есть конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности.

Конверсия рент широко применяется при *реструктурировании задолженности*.

Рассмотрим несколько основных случаев конверсии рент.

1.Выкуп ренты - вид конверсии, который сводится к замене ренты единовременным платежом. Решение проблемы: искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты. Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. При этом процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

2.Рассрочка платежей. Обсудим теперь задачу, обратную выкупу ренты. Если есть обязательство уплатить некоторую сумму и стороны согласились, что задолженность будет погашена частями – в рассрочку, то последнее удобно осуществить в виде выплаты постоянной ренты.

Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой производится рассрочка, сумме долга. Задача обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты – члена ренты или ее срока – при условии, что остальные параметры заданы.

3.Объединение (консолидация) рент. Оно заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$\boldsymbol{A = \sum_q A_q},$$

где $\boldsymbol{A}$ – современная стоимость заменяющей ренты,

$\boldsymbol{A_q}$ – современная стоимость q-й заменяемой ренты.

Объединяемые ренты могут быть любыми: *немедленными и отсроченными, годовыми и p-срочными и* т.д. Что касается заменяющей ренты, то следует четко определить ее вид и все параметры, кроме одного. Далее, для получения строгого баланса условий, необходимо рассчитать размер неизвестного параметра. Обычно в качестве неизвестного параметра принимается **член ренты**

или ее срок. Так, ***если заменяющая рента постнумерандо*** является *немедленной и задан ее срок* n, то из формулы, следует:

$$\boldsymbol{R = \frac{\sum A_q}{a_{n;i}}}$$

В свою очередь, если задается сумма платежа (размер члена заменяющей ренты) и его периодичность, то отыскивается срок новой ренты. Обычно задача сводится к расчету n по заданному значению $a_{n;i}$. Необходимая для расчета величина коэффициента приведения определяется условиями задачи. Для ***немедленной ренты постнумерандо*** имеем:

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum_q A_q}{R}$$

Если $\sum_q A_q$ известно, то величина n равна:

$$n = \frac{-\ln(1 - \frac{\sum_q A_q}{R} i)}{\ln(1+i)}$$

Для того чтобы задача имела решение, необходимо соблюдать условие:

$$\frac{i \sum A_q}{R} < 1$$

Рассмотрим один частный случай. Пусть член заменяющей ренты равен сумме членов заменяемых рент: $R = \sum_q R_q$. *Все ренты годовые, постнумерандо*. Если процентная ставка у всех рент одинаковая, то в силу (1) получим:

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum R_q \, [1-(1+i)^{-n} \;]^q}{i},$$

где ***n*** – срок заменяющей ренты.

После преобразований находим:

$$n = \frac{\ln R - \ln \sum R_q (1+i)^{-nq}}{\ln(1+i)}.$$

Рассмотренные варианты объединения рент, естественно, не охватывают все возможные случаи, с которыми можно столкнуться на практике. Отправляясь от равенства современных стоимостей консолидируемых и заменяющей рент, легко вывести соответствующую формулу для решения конкретной задачи.

2.Изменение параметров рент

Изменение хотя бы одного условия ренты по существу означает замену одной ренты другой. Как уже отмечалось выше, такая замена должна базироваться на принципе финансовой эквивалентности. Из этого следует равенство современных стоимостей обеих рент. Что касается процентной ставки, то она может быть сохранена или изменена. *Например,* кредитор в обмен на увеличение срока может потребовать некоторого ее увеличения. Отправляясь от указанного равенства, нетрудно определить параметры заменяющей ренты. Рассмотрим несколько случаев такой замены.

1.Замена немедленной ренты на отсроченную

Пусть имеется немедленная рента постнумерандо с параметрами R_1, n_1, процентная ставка равна i. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. Иначе говоря, немедленная рента заменяется на отсроченную с параметрами R_2, n_2, t(t не входит в срок ренты). Здесь возможны разные постановки задачи в зависимости от того, что задано для новой ренты. Если задан срок, то определяется R_2, и наоборот. Рассмотрим *первую задачу* **1)** при условии, что $\boldsymbol{n_2 = n_1 = n}$. Для этого случая, справедливо следующее равенство:

$$R_1 a_{n;i} = R_2 a_{n;i} v^t.$$

Откуда**:** $\boldsymbol{R_2 = R_1(1 + i)^t}$**.** Иначе говоря, *член новой ренты равен наращенному за время t члену заменяемой ренты.*

В общем случае **2),** когда $\boldsymbol{n_2 \neq n_1}$, из равенства $A_1 = A_2$ следует

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n1;i}}{a_{n2;i}} (1 + i)^t,$$

где $\boldsymbol{t}$ – продолжительность отсрочки.

Определим теперь **срок новой ренты** при условии, что *размер члена ренты остается без изменений*. Пусть выплата ренты откладывается на t лет. Тогда из равенства

$Ra_{n1;i} = Ra_{n2;i}v^t$ находим :

$$\boldsymbol{n_2 = \frac{-\ln\{1-[1-(1+i)^{-n}](1+i)^t\}}{\ln(1+i)}}.$$

2.Замена годовой ренты на р-срочную

Пусть годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1 заменяется на p-срочную с параметрами R_2, n_2, p. Если заданы срок заменяющей ренты, ее периодичность и ставка, то

$$\boldsymbol{R_2 = R_1 \frac{a_{n1;i}}{a_{n2}^{(p)}}}.$$

Причем, ***если*** $\boldsymbol{n_2 = n_1 = n}$**,** то

$$\boldsymbol{R_2 = R_1 \frac{p[(1+i)^{1/p} - 1]}{i}}.$$

Замена годовой ренты на p-срочную может быть осуществлены и при условии, что заданным является размер члена ренты. Определяется ее срок. В общем случае для этого сначала находим: $a_{n2;i}^{(p)} = \frac{A}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} a_{n1;I}$

Далее определим $n_2 = \dfrac{\ln(1 - \frac{A}{R}((1+\frac{j}{m})^m - 1))^{-1}}{m \ln(1+\frac{j}{m})}$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

1. Три ренты постнумерандо – немедленные, годовые - заменяются одной отложной на три года ренты постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: R_q= 100; 120; 300 тыс. руб., сроки этих рент: 6; 11 и 8 лет. Если в расчете принять ставку сложных процентов равную 20%, то сумма современных стоимостей этих рент составит немного более 2002,9 тыс. руб. (см. табл. 1).

Таблица 1 – Определение члена заменяющей ренты

Рента (q)	R_q	n_q	I	a_{n_q}	$Ra_{n_q;20}$
1	100	6	20	3,32551	332,551
2	120	11	20	4,32706	519,572
3	300	8	20	3,83716	1151,148
Итого	**520**				**2002,946**

Размер члена заменяющей ренты равен: R = $\frac{\sum \grave{A}_q}{a_{n;i}\, v^n}$,

R=$\frac{2002{,}946}{a_{7;20} v^3}$= $\frac{2002{,}946}{3{,}60459 * 1.2^{-3}}$ = 960,189 тыс. руб.

Если бы заменяющая рента была немедленной, то R = $\frac{\sum A_q}{a_{n;i}}$,

R = $\frac{2002{,}946}{3{,}60459}$= 555,665 тыс. руб.

Пусть теперь заданным является не срок, а сумма годового платежа, скажем 1500 тыс. руб., и необходимо найти срок заменяющей ренты.

Ход *решения:* определяется современная стоимость немедленной ренты, затем рассчитывается ее срок.

A = 2002,946 * 1,2^3 = 3461,091 тыс. руб.

n = $\frac{-\ln\left(1-\frac{\sum A_q}{R} i\right)}{\ln(1+i)}$, n= $\frac{-\ln\left(1-\frac{3461{,}091}{1500} * 0{,}2\right)}{\ln 1{,}2}$ = 3,395 года

2. Консолидируются ренты, предусматривающие годовые платежи в суммах 0,5; 1,5; 3 тыс. руб.; сроки этих рент 10, 15 и 12 лет, процентная ставка у заменяющей ренты 5% годовых. Если выплаты определены в размере R=5 тыс. руб., то

$$N = \frac{\ln R - \ln \sum R_q (1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}, \quad n = \frac{\ln 5 - \ln(0{,}5 * 1{,}05^{-10} + 1{,}5 * 1{,}05^{-15} + 3 * 1{,}05^{-12})}{\ln 1{,}05}$$

=12,64 года

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями R_1 = 2 млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока самой ренты. Процентная ставка, принятая для пролонгирования, - 20% годовых. Вычислить член новой ренты.

2. Рента с условиями R = 2 млн. руб., n = 5 лет, i = 8% откладывается на три года без изменения сумм выплат. Необходимо найти новый срок и сбалансировать результат.

3.Пусть R_1 = 2, n_1 = n_2 = n. Если годовая рента постнумерандо заменяется, скажем, на квартальную, то при неизменности срока ренты эквивалентность замены достигается только за счет корректировки размера выплат. При условии, что i =20%.

8 МОДЕЛИ ОПЕРАЦИЙ С ЦЕННЫМИ БУМАГАМИ

1.Облигации

Одним из *важнейших инструментов для инвестиций в промышленность и сельское хозяйство является рынок ценных бумаг [8,6,18],* в том числе выпуск (эмиссия) облигаций, гарантирующих получение дохода и высокую надежность.

Кроме государства, облигации может выпускать также региональная власть (муниципалитеты), банки и корпорации.

Облигация - вид ценной бумаги, по которой ее владельцу выплачивается ежегодный доход, размер которого заранее установлен в форме определенного процента к номиналу облигации или же выплачивается в виде выигрышей, разыгрываемых в тиражах.

На облигации указываются *номинальная стоимость*, а также *выкупная цена,* которая может отличаться от номинальной стоимости, или формула, по которой выкупная цена рассчитывается. Кроме того, указываются срок выкупа эмитентом (предприятием, выпустившим облигацию), норма доходности и сроки выплаты процентов. Обычно проценты выплачиваются ежегодно, по полугодиям или поквартально.

По методу обеспечения различают ***государственные и региональные облигации*** выпускаются под гарантии государства и местной власти, ***облигации корпораций*** выпускаются под залог имущества.

По сроку погашения различают ***краткосрочные облигации*** (несколько недель) ***среднесрочные*** (до 7 лет) и ***долгосрочны***е (свыше 7 лет). Выпускаются облигации и без указания срока погашения. Такие облигации могут быть выкуплены в любой момент.

По сроку – ***облигации с фиксированной датой погашения*** и без указания даты погашения или ***бессрочные***.

По методу выплаты дохода - выплачиваются только проценты, срок выкупа не оговаривается – ***бессрочные облигации***; выплата процентов не предусматривается – так называемые ***облигации с нулевым купоном;*** проценты выплачиваются вместе с номиналом в конце срока; периодически выплачиваются проценты, а в конце срока номинал или выкупная цена.

Процентная ставка обычно постоянная. Возможна также плавающая процентная ставка в зависимости от уровня ссудного процента.

Для защиты от инфляции практикуется индексирование номиналов облигаций пропорционально индексу потребительских цен.

Для облигаций без выплаты процентов выкупная цена устанавливается ниже номинальной и доход выплачивается при погашении облигаций.

Облигации являются важным объектом долгосрочных инвестиций. С момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются на кредитно – денежном рынке *по рыночным ценам.* Рыночная цена в момент выпуска может быть равна номиналу, ниже номинала или с дисконтом и выше номинала или с премией (премия – это переплата за будущие высокие доходы, а дисконт – скидка с цены, связанная с низкими доходами от облигации).

Доходом от облигаций являются фиксированные проценты в сумме с разностью между номинальной стоимостью облигации и ценой ее покупки, а также доходом от реинвестиций процентных денег.

Под курсом облигации ми ценой ее покупки, а также доходом от реинвестиций процентных денег.

Под **курсом облигации p_K%** понимаются отношение цены P, по которой продается облигация, к номинальной стоимости облигации N в процентах:

$$p_K\% = \frac{P}{N} \bullet 100\%$$

Несмотря на более низкий доход по сравнению с другими видами ценных бумаг, облигации - более надежный метод инвестиций капитала и поэтому находят широкое применение в финансовой практике, являясь обязательной составляющей активов страховых, инвестиционных и пенсионных фондов, финансовых компаний.

2.Облигации без выплаты процентов

Прибыль от облигации представляет собой разность между номинальной стоимостью и ценой.

Пусть **N** – номинальная стоимость облигации, **P** - продажная цена облигации, **D** – доход от продажи облигации, тогда

$$\boldsymbol{D = N\text{-}P}$$

т.к. $P = p_K\%\ N / 100\%,$ тогда

$$D = N - P = N - p_K\%N/100\% = N(1 - p_K\%/100\%)$$

У таких облигаций обычно короткий срок погашения (до года). Определим *доходность покупки облигации по ставке простых процентов*:

$$S = P(1 + i_э t / K) = p_K \% N / 100\%(1 + i_э t / K)$$

где S – наращенная сумма;

t/K – срок, на который выпущена облигация;

$i_э$ - эффективная ставка простых процентов.

Доход от покупки облигации составит:

$\boldsymbol{D = S - P}$ или $\boldsymbol{D = N\,(1 - p_K\% / 100\%)}$ (1)

$\boldsymbol{i_э = K\,(100\% - p_к\%) / tp_K\,\%}$

Определим *доходность покупки облигации по ставке сложных процентов*:

$$S = P(1 + i_э)^{t/K}, D = S - P = (1 + i_{эс})^{t/K} - P,$$

где $i_{эс}$ - эффективная ставка сложных процентов.

С учетом $p = p_K\% \cdot N / 100\ \%$, доход

$$D = [(1 + i_{э,с})^{t/K} - 1] p_K \% N / 100\% \qquad (2)$$

Приравнивая правые части выражений (1) и (2), найдем:

$$i_{эс} = (100\%/p_K\,\%)^{K/t} - 1$$

3.Облигация с выплатой процентов в конце срока погашения

Обычно такие облигации выпускаются на продолжительный срок. Прибыль на них состоит из процентов, рассчитанных по ставке сложных процентов, и разности между номинальной стоимостью и ценой покупки. *Доходность облигации* с номинальной стоимостью N, сложной процентной годовой ставкой i_c и ценой продажи P составляет:

$$D = N - Đ + N(1+i_c)^n - N$$

где выражение $N(1+i_c)^n - N$ - процентные деньги, $P = Np_K\% /100\%$.

Тогда

$$D = N[(1+i_c)^n - p_k\% \backslash 100\%]$$

Выведем выражение для определения *эффективной годовой ставки сложных процентов* $i_{э,с}$, учитывая, что срок погашения облигации $n = t/K$ и $p_к\%/100\% = p/N$.

$P(1+j_{э,с})^{t/K} - p = N[(1+i_c)^n - p_K\% /100\%]$,

$(1+i_{э,с})^{t/K} = \{N[(1+i_c)^n - p_K\% /100\%]/p\} +1$,

$i_{э,с} = \{\{[(1+i_c)^n - p_K\%/100\%] / p / N\} +1\}^{1/n} -1 =[(1+i_c) / (p_K\% / 100\%)^{1/n}]-1$

4.Акции

Акции - представляют собой долевые ценные бумаги, свидетельствующие об участии их владельца в собственном капитале компании.

Акции выпускаются только негосударственными предприятиями и организациями; они бывают ***простыми и привилегированными***.

По простым акциям размер дивидендов заранее не фиксируется и не гарантируется. Величина дивидендов определяется общим собранием акционеров по итогам хозяйственной деятельности акционерного общества за истекший период. Простые акции дают право на участие в управлении акционерным обществом по принципу: одна акция – один голос.

Владельцы *привилегированных акций* имеют преимущественное право на получение дивидендов, гарантированный фиксированный процент, долю в остатке активов при ликвидации компании.

Под *курсовой стоимостью акции* (***курсом акции***) понимается цена акции, складывающаяся на фондовом рынке при ее покупке или продаже. Владелец акции может продать ее по курсовой стоимости, которая зависит от многих факторов, и в первую очередь от рентабельности предприятия.

Под *номинальной стоимостью акции* (***номинал***) понимается указанная на акции цена, по которой она продается при первичном размещении акционерного капитала. Номинальная цена акции на рынке ценных бумаг значение не имеет.

Акции могут быть как ***именными***, наименование владельца которых указано на бланке акции, так и ***на предъявителя*** без указания имени владельца. Именные акции могут быть проданы другому владельцу, но при этом делается запись в книге учета акций и отметка на обратной стороне акции.

Источником дохода от покупки акции является разница между ценой продажи акции через какой - то период времени и ценой покупки плюс дивиденды.

Величина дивидендов от простых акций определяется общим собранием акционеров, в связи с чем, производимые расчеты, являются ориентировочными.

5. Доходы от привилегированных акций

Доход от привилегированных акций (**D**) равен процентным деньгам (**D %**) плюс разность между ценой, по которой акции проданы через некоторое время **p'**, и ценой покупки акции **p**:

$$\mathbf{D = D\% + p' - p}$$

Без реинвестиций $\mathbf{D\% = Nn}\rho$

где ρ - процентная ставка по привилегированным акциям;

n – срок в годах от покупки до продажи;
N – номинальная стоимость акции.

Если процентные деньги вновь инвестируются под процентную ставку сложных процентов i_c, то наращенная сумма представляет собой сумму финансовой ренты:

$$D\% = N\rho\ [(1+i_c)^n - 1] / i_c$$

Доходность от вложения денег в привилегированные акции найдем с использование ***эффективной ставки сложных процентов*** ($j_{эс}$):

$$\mathbf{D} = \rho\ (\mathbf{1+i_{эс}})^{\mathbf{n}} - \mathbf{p},$$

$$i_{эс} = \sqrt{(D+p)/\rho} - 1$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ

Доходность облигаций

1. Вечная рента, приносящая 4,5 % дохода, куплена по курсу 90. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются раз в году, поквартально (p=4)?

$$i_t = \frac{g}{K} \cdot 100 \qquad i = i_t = \frac{0{,}045}{90} \cdot 100 = 0{,}05;$$

$$i = \left(1 + \frac{i_t}{p}\right)^p - 1 \qquad i = \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}0509.$$

2. Корпорация X выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 5 лет. Курс реализации 45. Определить доходность облигации на дату погашения:

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \qquad i = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{45}{100}}} - 1 = 0{,}17316,$$

т.е. облигация обеспечивает инвестору 17,316 % годового дохода.

3. Облигация, приносящая 10 % годовых относительно номинала, куплена по курсу 65, срок до погашения 3 года. Если номинал и проценты выплачиваются в конце срока, то какую полную доходность для инвестора она составит?

$$i = \frac{1+g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \qquad i = \frac{1{,}1}{\sqrt[3]{0{,}65}} - 1 = 0{,}26956,$$ или 26,956 %.

Оценивание займов и облигаций

1.Пусть некоторый источник дохода постоянно приносит 8 % годовых. Каков расчетный курс данных инвестиций при условии, что доход будет поступать достаточно продолжительное время, а ставка помещения берется на уровне 12 %?

$$K = \frac{g}{i} \cdot 100 \qquad K = \frac{8}{12} \cdot 100 = 66{,}67.$$

Для того чтобы обеспечить доходность на заданном уровне, курс должен быть равен расчетной величине.

2. Пусть текущий доход от облигации выплачивается вместе с номиналом в конце срока; n=5, g=8 % (начисление процентов поквартальное), Каков расчетный курс данных инвестиций при условии, что доход будет поступать достаточно продолжительное время, а ставка помещения берется на уровне 12 %?

$$K = \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n \cdot 100 \qquad K = \left(\frac{(1+0{,}08/4)^4}{1+0{,}12}\right)^5 \cdot 100 = 84{,}32.$$

Характеристика сроков поступления средств и измерение риска.

А) средний арифметический срок

Найти средний арифметический срок для двух облигаций с выплатами по купонам 5 и 10 % от номинала, срок облигаций 10 лет.

По формуле $T=\dfrac{\dfrac{g(n+1)}{2}+1}{g+\dfrac{1}{n}}$ получим:

$T_1=\dfrac{\dfrac{0{,}05\times 11}{2}+1}{0{,}15}=8{,}5;\quad T_2=\dfrac{\dfrac{0{,}1\times 11}{2}+1}{0{,}2}=7{,}75$ года.

Б) модифицированный средний срок дисконтированных платежей

Для облигации было найдено: D=4,12 года, i=19,62 %. Откуда

$MD=\dfrac{4{,}12}{1+0{,}1962}=3{,}44$.

Используем полученный параметр для оценки влияния на цену облигации ожидаемого повышения рыночного процента с 19,62 до 20 %. Найти ΔK.

$\Delta K=-0{,}01MD\cdot K\cdot\Delta i$ $\qquad\qquad$ $\Delta K=-0{,}01\cdot 3{,}44\cdot 65\cdot 0{,}38=-0{,}85,$

т.е. при указанном повышении ставки курс облигации составит $65-0{,}85=64{,}15.$

$n_k\%=\dfrac{P}{N}\cdot 100\%$ $\qquad$ Из формулы следует, что $\quad p_k\%=\dfrac{950}{1000}\cdot 100\%=95\%.$

Акции

1.Фирма приобрела 20 привилегированных акций номиналом по 200 тыс. ден. ед. с фиксированной процентной ставкой 20 % в год. Стоимость этих акций ежегодно возрастает на 5 % относительно номинальной. Полученные проценты вновь инвестируются под 10 % годовых. Определить ожидаемый доход и доходность продажи акций через два года.

Решение:

Процентные деньги от 20 акций за год составят (без реинвестиций):

$D_1\% = 0{,}2 \cdot 200 \cdot 20 = 800$ тыс. ден. ед. $D = Nng$

Доход от реинвестиций с учетом:

$D\% = D_1\%\left[(1+i_{сл})^n - 1\right]/i_{сл} = 800 \cdot \left[(1+0{,}1)^2 - 1\right]/0{,}1 = 1680$ тыс. ден. ед.

Цена покупки акций:

$p = 200 \cdot 20 = 4000$ тыс. ден. ед.

Стоимость акций через два года:

$p' = 200 \cdot 20 + 0{,}05 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 2 = 4400$ тыс. ден. ед.

Ожидаемый доход (доход от привилегированных акций D):

$D = D\% + p' - p,$

где $D\%$ – процентные деньги

p' – стоимость акций через некоторое время

p – цена покупки акций.

$D = 1680 + 4400 - 4000 = 2080$ тыс. ден. ед.

Эффективная процентная ставка доходности сделки по формуле составит:

$i_{эф.сл} = \sqrt{(D+p)/p} - 1 = \sqrt{(2080+4000)/4000} - 1 = 0{,}2329$ $i_{эф.сл} = 23{,}29\%.$

2.Предприниматель выделил некоторую сумму на приобретение акций трех фирм. Эффективные процентные ставки доходности этих акций фирм составляют 15,17 и 18 %. Сравнить выгодность покупки этих акций для трех вариантов:

1) акции первой фирмы куплены на 50 %, второй – на 30 %, третьей – на 20 % выделенной суммы;

2) соответственно, на 40, 30 и 30 %;

3) соответственно, на 30, 40 и 30 %.

Решение:

Обозначим выделенную предпринимателем сумму на приобретение акций S. Доходы по вариантам составят:

$$D_1 = 0{,}5S \cdot 0{,}15 + 0{,}3S \cdot 0{,}17 + 0{,}2S \cdot 0{,}18 = 0{,}162S$$
$$D_2 = 0{,}4S \cdot 0{,}15 + 0{,}3S \cdot 0{,}17 + 0{,}3S \cdot 0{,}18 = 0{,}165S$$
$$D_3 = 0{,}3S \cdot 0{,}15 + 0{,}4S \cdot 0{,}17 + 0{,}3S \cdot 0{,}18 = 0{,}167S$$

Таким образом, предпринимателю выгоднее покупать акции третьей фирмы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 8 %, куплена по курсу 65. Определить текущую и полную доходности облигации.

2.Номинальная стоимость облигации 1000 ден. ед. Продается она по цене 950 ден. ед. Определить курс облигации.

3.Инвестиционная компания купила 50 облигаций номинальной стоимостью 50 тыс. ден. ед. каждая по курсу 95 %. Срок погашения – 4 месяца. Определить эффективную ставку прибыли по простым и сложным процентам и прибыль от сделки.

4. Инвестиционная компания приобрела 20 облигаций по 150 тыс. ден. ед. со сроком погашения 2 года. Облигации, выпущенные под процентную ставку сложных процентов 8 % годовых, приобретены по курсу 98 %. Определить прибыль от покупки и эффективную ставку сложных процентов.

9 ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ (ЭКЗАМЕНУ)

1. Фирме выделен банковский кредит на срок с 3 января по 12 марта под простые проценты с процентной ставкой 12 % годовых. Сумма кредита — 80 млн. ден. ед. Определить тремя методами коэффициент наращения и наращенную сумму.

2. Сберегательный банк принимает вклад «до востребования» под процентную ставку i% = 4,8 % (проценты простые). В году К= 365 дней. Через сколько дней вклад в 4,5 млн. ден. ед. нарастет до 5 млн. ден. ед.

3. Фирма взяла в коммерческом банке кредит на сумму 600 млн. ден. ед. сроком на 4 года. Согласно договору, за первый год процентная ставка составила 14 % и с учетом инфляции каждый последующий год повышалась на 2,5 пунктов. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму и доход банка.

4. Банки принимают у населения денежные средства на срочные вклады. Клиент хочет внести в банк денежную сумму 8 млн. ден. ед. на 3 месяца с таким расчетом, чтобы наращенная сумма была не менее 10 млн. ден. ед. Какой должна быть годовая процентная ставка?

5. Ссуда в размере 50000 ден. ед. выдана на полгода по простой ставке процентов 20% годовых. Определить наращенную сумму.

6. Кредит в размере 100000 ден. ед. выдан 2 марта до 11 декабря под 18 % годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для различных вариантов (обыкновенного и точного) расчета процентов.

7. Кредит в размере 200000 ден. ед. выдается на 3,5 года. Ставка процентов за первый год - 15 %, а за каждое последующее полугодие она увеличиваемся на 4 %. Определить множитель наращения и наращенную сумму.

8. Определить период начисления, за который первоначальный капитал в размере 25 000 ден. ед. вырастает до 15 000 ден. ед., если используется простая ставка процентов 12% годовых.

9.Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 24 000 ден. ед. достигнет 30 000 ден. ед. через 100 дней. К=365 дней.

10.Кредит выдается под простую ставку 18 % годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, получаемую кредитором, и сумму процентных денег, если величина кредита составляет 40000 ден. ед.

11.Кредит выдается на полгода по простой учетном ставке 10 % годовых. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и величину дисконта, если требуется возвратить 300 000 ден. ед.

12. Кредит в размере 100 000 ден. ед. выдается по учетней ставке 12 % годовых. Определить срок, на который предоставляется кредит, если заемщик желает получить 130 000 ден. ед.

13. Рассчитать учетную ставку, которая обеспечивает доход в 60 000 ден. если сумма в 50 000 ден. ед. выдается в ссуду на полгода.

14.Банк принимает валютные вклады физических лиц «до вос-требовании» по поминальной процентной ставке 5 %. Клиент внес 200 долл. США. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму при сроке вклада 12 месяцев. Проценты сложные начисляются: один раз в год в полугодие, поквартально, ежемесячно.

15. Клиент внес в коммерческий банк вклад «до востребования» в сумме 20 000 ден. ед. под номинальную процентную ставку 10 %. Начисление процентов ежемесячно. Вклад внесен 23 января и получен 4 августа. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму и доход клиента.

16.При вкладе «до востребования» банк, согласно договору, имеет право изменить процентную ставку. Клиент внес в коммерческий банк 50 000 ден. ед. Первый месяц номинальная процентная ставка составляла 6 %, последующие 2 месяца — 7 %, следующим месяц — 8 % и последние 3 месяца — 10 %. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму и доход клиента по приведенным ставкам для сложных и простых процентов. Начисление процентов ежемесячное.

17.Три коммерческих банка предложили возможным клиентам следующие условия: первый банк предлагает на валютные вклады простые проценты из расчета 8 % годовых, второй — по номинальной ставке 7 % при ежемесячном начисление процентов, третий — по номинальной ставке 9% и поквартальном начислении процентов. В какой банк клиенту выгоднее вкладывать деньги?

18.Годовая процентная ставка коммерческого банка «до востребования» - 4 %. Начисление процентов ежемесячное, проценты сложные. На какой минимальный срок нужно поместить клиенту вклад 30 000 ден. ед., чтобы наращенная сумма была не менее 40 000 ден. ед.? Принять К = 365 дней в году.

19. Для совершения сделки через три месяца клиенту необходимо иметь 500 000 ден. ед. В наличии у него -150 000 ден. ед. Какой должна быть минимальная номинальная ставка процентов коммерческого банка, чтобы наращенная сумма была не менее 500 000 ден. ед. при условии, что начисление процентов ежемесячное.

20. Коммерческий банк принимает вклады населения сроком на 90 дней при условии 10 % годовых. Годовой ожидаемый уровень инфляции составляет 8 %. Определить простую процентную ставку с: учетом инфляции и коэффициент наращения, приняв К - 365 дней.

21. Фирма договорилась с банком о выделении кредита 6 млн. ден. ед. на год без учета инфляции. Ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 10 %. Определить процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращения.

22. На сумму 20 000 ден. ед. начисляются сложные проценты в течении 3 лег по годовой процентной ставке 0,08 %. Темп прироста инфляции 0,03 % в год. Определить:

а) наращенную сумму без учета инфляции; (25194,24)

б) реально наращенную сумму с учетом инфляции; (23056,3)

в) брутто-ставку; (0,1124)

г) наращенную сумму по брутто-ставке. (27530,43)

23. АО создает благотворительный фонд, для чего в конце каждого года в банк делается взнос в размере 40000 ден. ед. На собранные деньги банк начисляет сложные проценты по годовой ставке 15 %. Определить размер фонда через 10 лет. (812266)

24.Господин Иванов желает за 8 лет накопить к юбилею 50000 ден. ед., делая в конце каждого года равные вклады в банк , на которые начисляет проценты по годовой ставке 5 %. Какую сумму он должен вкладывать ежегодно? (5236,1)

25. Господин Иванов желает положить в банк, который выплачивает 10% сложных годовых, такую сумму, чтобы его сын, студент 1-го курса, мог снимать с этого счета ежегодно 10000 ден. ед., исчерпав весь вклад к концу пятилетнего срока учебы. Какую сумму должен положить в банк господин Иванов? (37907,87)

26. Каждый член ренты 500 ден. ед., выплачиваемый в конце года, дисконтируется сложными процентами по годовом ставке 0,06. Определить современную величину ренты при условии, что срок ренты равен 10 лет. (3680)

27. Определить размер одинаковых взносов в конце года при начислении на них сложных процентов по годовой ставке 0.08 для создания к концу 5-го года фонда, равного 1 000 000 ден. ед. (170 456,48)

28.Кредитное соглашение промышленного предприятия с банком предусматривает, что за первый год предприятие уплачивает 20 % годовых. В каждом последующем полугодии ставка повышается на 1 процентный пункт. Срок сделки 2,5 года. Сумма кредита 5 млн. ден ед. Проценты обыкновенные с приближенным сроком кредита. Определить сумму возврата кредита через 2,5 года, а также доход банка. (7, 550 млн.; 2, 650 млн.)

29.Акционерное общество (АО) для погашения задолжностей по счетам поставщиков считает возможным взять краткосрочный кредит в банке под 15 % годовых.. Год не високосный. Кредит на 100 млн. ден ед. планируется с 20 января по 5 марта включительно. (101, 808)

Определить возможные варианты долга по точным процентам с точным числом дней кредита; по обыкновенным процентам с точным числом дней кредита; по обыкновенным процентам с приближенным числом дней кредита. Какой вариант сделки выгоднее АО, какой –банку .(101,883 ; 101,875)

30. На сумму 100 тыс. ден. ед. начисляется 10 % годовых. Проценты простые точные Какова наращенная сумма, если операция реинвестирования проводится ежемесячно в течение 1 квартала? Принять К= 365 дней.

31.Определить современную величину банковского депозита, если вкладчик через 10 лет должен получить 2 млн. ден. ед. при условии, что банк производит начисление на внесенную сумму по сложной ставке 20 % годовых и в случае, если начисление процентов производится ежеквартально.

32.Какую сумму необходимо проставить в договоре, если заемщику предоставлен кредит в 500 тыс. ден. ед. со сроком погашения 1,5 года, а наращение процентов производится по сложной годовой учетном ставке 20 % и в случае ежеквартального наращения? (698,8 тыс., 680,19 тыс.)

33.Предполагается, что темп инфляции составит 20 % в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия? (32 %, 22%)

34. Для создания страхового фонда фирма ежегодно выделяет в конце года но 100 тыс. ден. ед., которые вкладываются в банк. Определить сумму, накопленную в страховом фонде через 6 лет, если начисляются сложные проценты по годовой станке 12 %. (811,52 тыс.)

35. Имеется денежная сумма в рублях, которую предполагается положить на полгода в банк. Обменный курс в начале операции 20 руб. за усл. ед. валюты, ожидаемый курс обмена и конце операции — 26 руб. за усл. ед. Годовая ставка простых процентов по рублевым вкладам 15 %, по валютным вкладам — 5 %. Как выгоднее разместить вклад: рублевый или через конверсию в валюту?

36. Ссуда в размере 500 тыс. ден. ед. выдана 5 января на год и 6 месяцев. На протяжении этого срока в счет погашения задолжности предусматриваются платежи в банк: 5 апреля в размере 15 тыс. ден. ед.; 5 июля и 15 октября по 100 тыс. ден. ед.; 5 января в размере 50 тыс. ден. ед. Банком предусматривается начисление простых процентов по ставке 12 % годовых. Рассчитать контур финансовой операции для актуарного метода и метода торговца, определить размер последнего погасительного платежа для окончательного расчета в обоих методах. Результаты расчета сравнить.

37. В 1995г. в России состоялся аукцион по первичному размещению государственных краткосрочных облигаций со сроком обращения 36 дней. Минимальная цена продажи составляла 93,92 % от номинала. Определить доходность покупки облигаций по минимальной цене.

38. Фирма приобрела 10 привилегированных акций номиналом по 100 тыс. ден, ед. с фиксированной процентной ставкой 40 % в год. Стоимость этих акций ежегодно возрастает на 8% относительно номинальной.

Полученные проценты вновь инвестируются под 30 % годовых. Определить ожидаемый доход и доходность продажи через три года.

39. Предприниматель выделил некоторую сумму, на которую предполагает приобрести акции четырех фирм. Эффективны процентные ставки доходности фирм составляют 16, 20, 24 и 12 %. Сравните выгодность покупки акций для трех вариантов:

1. Акций первой фирмы куплено на 50%, второй — на 15%. третей — на 15 % и четвертой — на 20 % выделенной суммы.
2. Акций первой фирмы куплено на 30%, второй — на 20%, третей — на 20 % и четвертой — на 20 % выделенной суммы.
3. Акций первой фирмы куплено на. 20%. второй — на 30 %, третей — на 15 % и четвертой — на. 35 % выделенной суммы.

40. Ожидается, что доходы от эксплуатации место нахождения полезных ископаемых составляет 1млрд. руб. в год, продолжительность разработки 10 лет, отгрузка и реализация продукции непрерывны и равномерны. Какова капитализированная стоимость дохода при дисконтировании по ставке 10%?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Богдашевский, А. Основы финансовой грамотности [Электронный ресурс] : краткий курс / А. Богдашевский. – М. : ООО «Альпина Паблишен», 2018. – 304 с. http://znanium.com/catalog/product/1002829.

2. Дегтярева Н.А. Исследование экономических процессов с применением сетевых моделей: монография / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера», 2019.- 160 с.

3. Дегтярева Н.А. Принятие управленческих решений на основе адаптивных моделей / Н.А. Дегтярева, Д.С. Гордеева // Экономика образования.– 2021, № 3(124).– С. 86-91.

4. Дегтярева Н.А. Принятие эффективных управленческих решений на основе эконометрического прогнозирования. / Н.А. Дегтярева, Н.А. Берг // Вестник Челябинского государственного университета. Серия: «Экономические науки». - № 4 (414) 2018. вып. 61. – С. 176-183.

5. Дегтярева Н.А. Эконометрическое моделирование производственной эффективности [Текст] / Н.А. Дегтярева, Д.С. Гордеева, Матвеева П.А., Матвеев В.В., Борисенко Я.М. Федосеев // Азимут научных исследований. Серия: «Экономика и управление». – 2019. – Т. 8, № 2 (27). – С.133–135.

6. Дегтярева, Н.А. Введение в экономическую теорию. Практикум по дисциплине «Экономика» [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2020. – 75 с.

7. Дегтярева, Н.А. Исследование зависимости количества безработных от социально-экономических факторов на основе модели множественной регрессии // Фундаментальная и прикладная наука. – Челябинск: Из-во Челяб.гос.пед.ун-та. - 2016. - № 2. - С. 13-17.

8. Дегтярева, Н.А. Макроэкономика. Практикум по дисциплине «Экономика» [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2020. – 90 с.

9. Дегтярева, Н.А. Микроэкономика. Практикум по дисциплине «Экономика» [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2020. – 77 с.

10. Дегтярева, Н.А. Модели анализа и прогнозирования на основе временных рядов: монография / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера», 2018.- 160 с.

11. Дегтярева, Н.А. Практикум по экономико-математическим методам и моделям [Текст]: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера», 2019.- 97 с.

12. Дегтярева, Н.А. Применение статистических методов исследования в сельском хозяйстве / Н.А. Дегтярева, Н.А.Берг // Известия высших учебных заведений. Уральский регион. – 2017. - № 1. – С.42-47.

13. Дегтярева, Н.А. Сборник задач по статистике [Текст]: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Цицеро, 2017. – 90 с.

14. Дегтярева, Н.А. Сборник задач по экономико-математическим методам и моделям [Текст]: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Цицеро, 2017. – 77 с.

15. Дегтярева, Н.А. Экономико-математические методы и модели. Конспекты лекций [Текст]: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера», 2019.- 82 с.

16. Дегтярева, Н.А. Эконометрические модели анализа и прогнозирования: монография / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Цицеро, 2017. - 170 с.

17. Дегтярева, Н.А. Повышение экономической эффективности функционирования крестьянских (фермерских) хозяйств в условиях рынка: диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук / Дегтярева Н.А.; Челябинская государственная агроинженерная академия. - Челябинск, 2000. - 218 с.

18. Журавлева, Г. П. Экономическая теория: микроэкономика-1, 2, мезоэкономика [Электронный ресурс] : учебник / Г. П. Журавлева [и др.] ; под общ. ред. Г. П. Жу-равлевой ; Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова. – 7-е изд. – М.

19. Малыхин, В. И. Финансовая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2018. – 237 с. – URL: http://znanium.com/catalog/product/884299.

20. Нешитой, А. С. Финансовый практикум [Электронный ресурс] / А. С. Нешитой, Я. М. Воскобойников. – 10-е изд. – М. : Дашков и К, 2017. – 212 с. – URL: http://znanium.com/catalog/product/415192.

21. Нешитой, А. С. Финансы [Электронный ресурс] : учебник / А. С. Нешитой, Воскобойников, Я. М – 11-е изд. – М. :Дашков и К, 2018. – 352 с. URL: http://znanium.com/catalog/product/415523.

22. Основы финансовых вычислений: методические указания / составители Н. Б. Пименова, О. И. Рыжкова. – Ижевск: Ижевская ГСХА, 2020. — 27 с. https://e.lanbook.com/book/17803

23. Практикум по финансовой грамотности: учебно-методическое пособие / составитель И. В. Блохин. – Глазов: ГГПИ им. Короленко, 2021. – 175 с. https://e.lanbook.com/book/17784

24. Чепига, Ю. В. Основы финансовых вычислений: учебное пособие / Ю. В. Чепига. — Новосибирск: СГУПС, 2019. – 149 с.

25. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: Учебник. – М.: Дело, 2019. – 400 с.

26. Чумаченко, В.В Основы финансовой грамотности: методические рекомендации / В.В Чумаченко., А.П. Горяев – М.: Просвещение, 2018. – 80 с.

27. Чумаченко, В.В. Основы финансовой грамотности: рабочая тетрадь / В.В Чумаченко., А.П. Горяев – М.: Просвещение, 2018. – 47 с.

28. Юрченко, Н. А. Экономическое поведение и финансовая грамотность населения : учебное пособие / Н. А. Юрченко. – Екатеринбург : УрГАУ, 2020. – 60 с.

Учебное издание

НИНА АДАМОВНА ДЕГТЯРЕВА
ЮЛИЯ ВАЛЕНТИНОВНА ЛЫСЕНКО

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Изд – во ЗАО «Библиотека А.Миллера»,
454080, г. Челябинск, Свердловский пр., 60

Подписано к печати 11.09.2022
Формат 60x84 1/16 Объем 6,3 уч-изд.л.
Заказ № 537 Тираж 100 экз
Отпечатано на ризографе в типографии ФГБОУ ВО ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69