МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения применению координатно-векторного метода при решении геометрических задач в ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
70,49 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
_____________ Шумакова Е.О.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513-086-5-1
Брюханова Екатерина Ивановна

Научный руководитель:
доцент, к.п.н., доцент кафедры МиМОМ
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Координатно-векторный метод является универсальным при решении геометрических задач, в частности 14 задачи Единого Государственного экзамена по математике профильного уровня. У данного способа значительное количество положительных сторон: не требует подробного описания каждого этапа, решение алгоритмизировано, нет необходимости построения сложных и неявно видимых сечений или плоскостей. Чаще всего координатно-векторный метод применяется, когда в условии дан прямоугольный параллелепипед. Это обосновано легкостью введения прямоугольной Декартовой системы координат. Однако этот способ эффективен и при решении задач, в которых даны пирамиды, прямоугольные призмы. Сложность заключается лишь в определении координат вершин.

В настоящее время существует несколько различных определений понятия вектора, введены операции над векторами, известна специфика задач, решаемых координатно-векторным методом, определены умения и навыки, необходимые для применения данного метода. Составлены различные методические пособия для обучения школьников векторам, а также координатно-векторному методу. Основная идея применения данного метода – с помощью средств алгебры решать геометрические задачи.

Однако, несмотря на обширность методических рекомендаций, у большинства учащихся, и даже преподавателей возникают сложности и затруднения в использовании координатно-векторного метода при решении стереометрических задач.

Также отметим, что данный метод обязателен для изучения в школьном курсе геометрии. Это связано с тем, что область применения координатно-векторного метода обширна, и его возможно использовать при решении большого количества задач. В частности, 14 задачи Единого Государственного экзамена (далее – ЕГЭ).

Поэтому необходима методика обучению координатно-векторному методу, позволяющая обучить учащихся применять его при решении стереометрических задач.

Всем вышесказанными определяется **актуальность** выбранной темы: «Методика обучения применению координатно-векторного метода при решении геометрических задач в ЕГЭ».

Цель исследования – разработать методические рекомендации по формированию знаний по теме «Координатно-векторный метод» в процессе обучения геометрии.

Объект исследования – процесс обучения геометрии учащихся общеобразовательной школы.

Предметом исследования является процесс формирования знаний по теме «Координатно-векторный метод».

Гипотеза исследования – если целенаправленно обучать школьников умениям и действиям, входящих в состав координатно-векторного метода, формулировать частные алгоритмы по решению отдельных типов задач, то это будет способствовать эффективному усвоению учащимися этого метода.

Для достижения поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы необходимо было решить следующие **задачи:**

1) на основе анализа психолого-педагогической, методической литературы и нормативных документов раскрыть роль и место координатно-векторного метода в школьном курсе геометрии, специфику его использования;

2) охарактеризовать этапы использования данного метода при решении задач;

3) охарактеризовать этапы формирования координатно-векторного метода и рассмотреть типы задач, обучающих координатно-векторному методу;

4) проанализировать эффективность разработанных методических рекомендаций на основе проведенного элективного курса занятий.

Данная работа состоит из двух глав. Впервой главе рассматриваются основные теоритические аспекты. Отражены роль и место данного метода в школьном курсе математики, а также специфика данного метода. Представлен теоритический материал, необходимый для освоения координатно-векторного метода. Проанализированы результаты ЕГЭ последних 4 года и выявлены основные ошибки учащихся при решении 14 задачи.

Во второй главе разработаны методические рекомендации обучения координатно-векторному методу. Выделены этапы формирования знаний у учащихся по данному методу. Составлен элективный курс и проанализированы результаты его проведения в 11 классе МАОУ «СОШ №104 г. Челябинска». В качестве проверки эффективности применения разработанных методических рекомендаций была проведена контрольная работа, а также пробный экзамен ЕГЭ.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

1.1 Роль и место координатно-векторного метода в школьном курсе математики

Важнейшим компонентом, содержащимся в обучении математике, являются практические задачи. В геометрии существует несколько подходов к решению задач. Однако наиболее эффективным является координатно-векторный метод. В основе данного подхода лежит введение прямоугольной декартовой системы координат и простые алгебраические вычисления. Применяя данный метод значительно сокращается время, затраченное на решение задачи.

В геометрических задачах применяются следующие методы:

1. Теоретический. Он основывается на различных теоремах, аксиомах и свойствах. Применяя данный метод, от ученика требуется умение мыслить последовательно и логично, а так же хорошо знать теоретический материал.

2. Координатно-векторный метод.

Решая задачи координатно-векторным методом, учащиеся применяют единый алгоритм, подходящий для каждой задачи. Ещё одним преимуществом данного подхода является отсутствие требований к построению сложных и неявных пространственных изображений.

Важнейшей целью математического образования является «формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики».

Большой вклад в геометрию был привнесен благодаря внедрению алгебры при изучении различных свойств фигур. А в дальнейшим сформировалась самостоятельная наука – аналитическая геометрия.

Основной отличительной чертой данного метода является определение геометрических фигур аналитическим методом. Это дает возможность проводить различные исследования, и находить решение задачи с помощью средств алгебры.

Целями изучения координатно-векторного метода являются:

- показать альтернативный способ решения и доказательств;
- продемонстрировать насколько взаимосвязаны между собой алгебра и геометрия;
- развивать вычислительные навыки, а также навыки математического моделирования.

В школьном курсе математике координатно-векторный метод изучается частично и поверхностно. Освоение данного метода осуществляется несколькими этапами.

На первом этапе формируются основные понятия. Данный этап изучается в 5-6 классах на уроках математики. В пятом классе вводится понятие координатного луча, что в дальнейшим приводит к изучению отрицательных чисел, а также формируется определение координатной прямой. В 6 классе, в связи с изучением рациональных чисел, расширяется понятие координатной прямой, приводящие к изучению координатной плоскости.

Во время второго этапа учащиеся впервые встречаются с уравнениями прямой и окружности. Данный теоретический материал содержится и в алгебре, и в геометрии, но он изучается с различных сторон, а вследствие чего теряется взаимосвязь, что приводит к плохому усвоению данного метода. Например, в курсе алгебры 7 класса понятие графика функции дается с помощью построения точек, координаты которых находятся аналитически. В геометрии уравнения прямой и окружности рассматриваются, как множество равноудаленных точек.

Применение координатно-векторного метода при решении задач рассматривается уже только в 9 классе. Вначале вводятся этапы и алгоритмы данного метода, а после иллюстрируется его применение демонстрацией решения типовых задач.

Завершающим этапом изучения координатного метода осуществляется в 11 классе, где данный подход к решению задач рассматривается в пространстве. Появляется большое количество разнообразных формул, а так же новые типовые задачи.

Стоит обратить внимание на то, что изучение темы «Векторы», а, вследствие, и векторный метод в математике школьного курса стала включено в программу относительно недавно, в начале 60-х годов XX века.

В каждом школьном учебнике изучение темы «Векторы» разделяется на два этапа:

1) применение метода в планиметрии;

2) применение метода в стереометрии.

Изучая тему «Координатно-векторный метод в пространстве», школьники расширяют свой кругозор и узнают, в каких сферах жизни человека применяются вектора. Формируют представление об истории становления аналитической геометрии. А также систематизируют свои знания и умения о векторах в пространстве, проводят аналогии между векторами в плоскости и пространстве. Учатся применять данный метод при решении стереометрических задач.

Изучением темы «Векторный метод решения задач» в разные периоды времени занимались многие ученые-физики, математики и методисты (К. Вессель, Р. Декарт, Ж. Арган, З.А. Скопец, А.Н. Колмогоров, А.Д. Александров, В.А Гусев, Ю.М Калягин, Т.А. Иванова). В настоящее время существует несколько подходов к определению понятию вектора, определены операции с векторами, очерчен круг задач, решаемых векторным методом, выделены умения, входящие в состав векторного метода. Разработаны частные методики по обучению учащихся векторам и, в частности, векторному методу. Все они основаны на идее основного назначения векторов – использование алгебраического аппарата для решения геометрических задач.

Не смотря на все это, многие специалисты отмечают, что некоторые учителя, студенты, а тем более школьники, затрудняются в применении векторного метода к решению содержательных задач.

Стоит отметить, что изучение метода координат является неотъемлемой частью школьного курса геометрии, так как его можно успешно применять при решении большого числа задач, в том числе, задач Единого Государственного экзамена (задания 14). А так как, эти задания – повышенной сложности, то они приносят учащимся хорошие баллы при сдаче ЕГЭ.

Векторно-координатный метод позволяет рассматривать множество самых трудных задач на вычисление всех видов углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) и любых расстояний (от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми). С тремя последними работать сложнее всего, ибо приходится затрагивать тему «уравнение плоскости».

Знание различных подходов к решению стереометрических задач позволяет выбрать предпочтительный для любого учащегося способ, то есть тот, которым ученик владеет уверенно, помогает избежать ошибок, приводит к успешному решению задачи и получению хорошего балла на экзамене. Координатно-векторный метод имеет преимущество перед другими способами в том, что его применение требует меньше стереометрических соображений и пространственного видения, а основывается на применении формул, у которых много планиметрических и алгебраических аналогий, более привычных для учащихся.

1.2 Специфика использования координатно-векторного метода в школьном курсе математики

Особую актуальность в современных условиях координатно-векторный метод решения стереометрических задач приобрел в связи с включением в содержание ЕГЭ по математике задачи 14. Существует три основных метода решения подобных задач. Условно назовем их «методом построений», «векторно-координатным методом» и «методом объемов». Каждый из них удобен в том или ином случае, поэтому лучше знать и уметь использовать все три.

Наиболее универсальным является «метод построений», с его помощью можно решить практически любую задачу по стереометрии из тех, что предлагаются в вариантах ЕГЭ по математике. Однако, он не всегда целесообразен с точки зрения временных и вычислительных затрат. Учащийся должен иметь хорошее пространственное воображение, помнить алгоритмы решения для каждого вида задач. Чтобы решать задачи этим методом необходимым (но, конечно, не достаточным) условием является безупречное знание и понимание основных теорем стереометрии, связанных с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, которые непременно сопровождают решение каждой геометрической задачи, без которых часть баллов за это задание на экзамене может быть потеряна.

Второй случай, когда не всегда целесообразно использовать «метод построений», связан с нахождением расстояний от точки до прямой или от точки до плоскости. Тогда на помощь приходят два оставшихся метода.

Векторно-координатный метод позволяют избежать такого рода трудностей. От учащегося требуются знания нескольких формул и навыки в решении простейших задач, основная нагрузка при решении задачи приходится на вычислительную часть.

Векторно-координатные приемы изучаются в школе в весьма ограниченном количестве. В базовый учебник стереометрии Л.С. Атанасяна включен целый параграф «скалярное произведение векторов» и даже отдельно рассматривается нахождение углов между объектами. Однако дальше темы «вычисление угла между прямыми» и осторожного намека на аналогичный алгоритм для прямой и плоскости материал не рассматривается. И даже не вводится такое понятие, как «нормаль».

Как правило, учитель выбирает одну из трех стратегий подготовки к 14 задаче на ЕГЭ:

1. Полный отказ от векторно-координатных приемов.
2. Изучение отдельных алгоритмов.
3. Демонстрация всех приемов (без доказательств) для самых сильных учеников.

Преимущество методов аналитической геометрии перед альтернативным решением средствами дополнительных построений состоит в том, что удается полностью отстраниться от чертежа и заниматься исключительно числами (координатами). Поэтому в определенных условиях подготовки к ЕГЭ по математике удается натаскать ученика на стандартные решения. Причем за весьма короткий срок и в обход большого количества тем.

Если у школьника имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, то можно построить работу на векторах и координатах. Особенно это актуально в условиях экстренной помощи, когда на подготовку к ЕГЭ отводится всего лишь 2-3 месяца. Если у преподавателя нет времени на неспешный комплексный подход, то лучше всего сразу обратиться к координатам.

О каких проблемных ситуациях необходимо помнить? Какие ошибки чаще всего допускаются школьниками?

Три проблемы векторно-координатного метода:

1. От того, что забывают алгоритм поиска нормали.

2. Путаются с введением системы координат или с определением координат у точек (задающих прямые и плоскости) в разных многогранниках.

3. Не справляются с вычислениями, если в координаты вершин попадают квадратные корни. Обычно эта ситуация возникает в треугольных пирамидах.

Третью проблему снять не удается. Пирамиду не переделаешь. А вот получить практику нахождения нормали и научиться определять координаты вполне реально.

Практика показывает, что учащиеся быстро осваивают метод координат, так как при его использовании необходимо придерживаться общего алгоритма: вычислить координаты необходимых точек, расположенных на многогранниках, и применить соответствующую формулу. Для некоторых задач дополнительно требуется умение составлять уравнение плоскости.

Какую подготовку к восприятию векторно-координатных приемов должен провести учитель?

Необходимо повторить следующие темы:

1. Координаты точки и координаты вектора.

2. Длина вектора.

3. Скалярное произведение векторов.

4. Координаты середины отрезка (на случай, если плоскость или прямая будут заданы серединами каких-нибудь диагоналей или ребер у пирамид).

Удачный выбор системы координат (некоторые вершины многогранника находятся на координатных осях) позволяет значительно упростить вычисления.

Векторно-координатный метод позволяет рассматривать множество самых трудных задач на вычисление всех видов углов (между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями) и любых расстояний (от точки до плоскости, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми). С тремя последними работать сложнее всего, ибо приходится затрагивать тему «уравнение плоскости».

1.3 Этапы использования координатно-векторного метода при решении задач

Координатно-векторный метод решения задач – очень популярный и эффективный метод в геометрии и не только. Однако его формальное применение может значительно затруднить решение даже самой простой задачи. Поэтому в данном параграфе мы рассмотрим эффективные приемы использования указанных методов и примеры решения задач. В данной работе приводятся важнейшие определения и формулы. Однако более детальное и подробное изложение материала без труда можно найти в школьном учебнике по геометрии.

Система координат – это способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Совокупность чисел или символов, определяющие положение конкретной точки, называется координатами этой точки. В математике координаты – совокупность чисел, сопоставленных точкам многообразия в некоторой карте определённого атласа. В элементарной геометрии координаты – величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве. На плоскости положение точки чаще всего определяется расстояниями от двух прямых (координатных осей), пересекающихся в одной точке (начале координат) под прямым углом; одна из координат называется ординатой, а другая – абсциссой. В пространстве по системе Декарта положение точки определяется расстояниями от трёх плоскостей координат, пересекающихся в одной точке под прямыми углами друг к другу, или сферическими координатами, где начало координат находится в центре сферы. Наиболее используемая система координат – прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат) [1].

Прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в определенном порядке. Точка пересечения осей называется началом координат, сами оси – координатными осями, первая из них – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Обозначаются, соответственно, O – начало координат, Ox, Oy, Oz. Если M – произвольная точка пространства, то проведя три плоскости перпендикулярные координатным осям, получим точки пересечения с осями: M_x,M_y,M_x (рисунок 1).

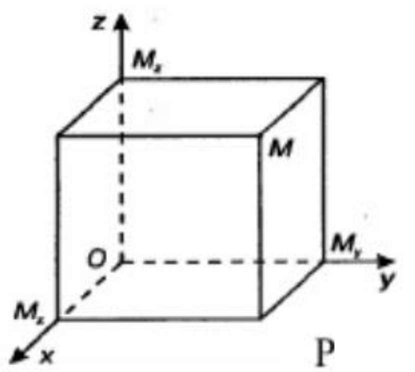

Рисунок 1 – Построение осей координат

Прямоугольными декартовыми координатами называются числа, определяемые формулой:

$$x = OM_x \text{ , } y = OM_y \text{ , } z = OM_z,$$

где OM_x, OM_y, OM_z – величины направленных отрезков OM_x, OM_y, OM_z. Число x называется первой координатой, y – второй, z – третьей.

Расстояние между двумя точками в пространстве можно определить по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В пространстве также можно использовать полярные, сферические и цилиндрические координаты. Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. Решая ту или иную математическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

Векторы в пространстве. Из курса планиметрии мы знаем, что вектор – направленный отрезок. Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Векторы, как и точки, в пространстве имеют свои координаты. Их несложно найти: если даны точки $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет следующие координаты $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\,, y_2 - y_1\,, z_2 - \ z_1)$. Частным случаем является радиус-вектор, точка приложения которого совпадает с началом координат. И для радиус-вектора координатами в этой системе будет проекция на координатные оси.

Таким образом, координаты точки M можно определять с помощью радиус-вектора. Радиус-вектором точки M называется вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M. Декартовыми прямоугольными координатами X, Y, Z вектора $\vec{r}$ называется его проекция на координатные оси $X = \text{пр}_x\vec{r}$, $Y = \text{пр}_y\vec{r}$, $Z = \text{пр}_x\vec{r}$. Если x, y, z – декартовые прямоугольные координаты точки M, то $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, т.е. координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны координатам точки М (рисунок 2).

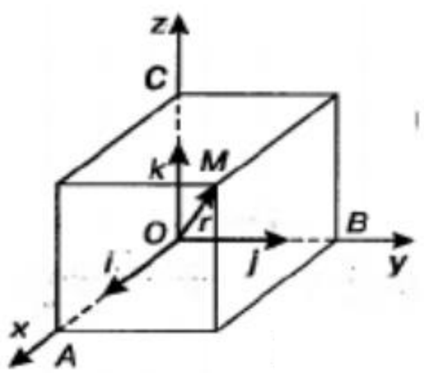

Рисунок 2 – Координаты радиус вектора

Введем в рассмотрение единичные векторы $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ координатных осей (их называют ортами) и векторы:

$$\overrightarrow{OA} = x_i, \overrightarrow{OB} = y_j, \overrightarrow{OC} = z_k,$$

где A, B, C – вершины прямоугольного параллелепипеда, для которого OM является диагональю.

По определению суммы $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, поэтому:

$$\vec{r} = x_i + y_j + z_k.$$

Эти формулы выражают расположение вектора $\vec{r}$ по базисным векторам. Векторы, стоящие в правой части формулы называются составляющими или компонентами вектора $\vec{r}$.

На основании теоремы о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда получаем формулу (1) выражающую *длину вектора* или через его координаты.

$$|\vec{r}\,| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{1}$$

Равные векторы имеют равные координаты, поэтому координаты вектора не зависят от точки его приложения. Координатами любого вектора называют его проекции на координатные оси.

Если даны векторы (т.е. известны их координаты) и указаны определенные соотношения между ними, то они равносильны аналогичным числовым соотношениям между координатами [2].

Коллинеарность векторов. Два вектора называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (обозначение: $\vec{a}||\vec{b}$). Есть два признака коллинеарности.

Первый признак: $\vec{a}||\vec{b}$, тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$. Используют в общем случае.

Если известны координаты векторов, то удобно использовать следующий признак.

Второй признак: $\vec{a}\|\vec{b}$ тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

где (a_1, a_2) – координаты первого вектора,

(b_1, b_2) – координаты второго вектора.

Координаты произведения на число. Пусть дан вектор:

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и число $\alpha \neq 0$. Координаты вектора $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, т.е. получим, что $\vec{b} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$.

Данные равенства выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты.

Координаты суммы (разности) двух векторов. Пусть даны два вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда x, y, z — координаты вектора суммы $\vec{a} + \vec{b}$:

$$x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2, z = z_1 + z_2,$$

$$x' = x_1 - x_2, y' = y_1 - y_2, z' = z_1 - z_2,$$

где x', y', z' — координаты разности данных векторов.

Координаты вектора, заданного двумя точками. Начало вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ находится в точке $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, конец — в точке $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Выражение для его координат через координаты точек M_1 и M_2:

$$x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1, z = z_2 - z_1.$$

Деление отрезка в данном отношении. Даны две точки в пространстве $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении l:

$$x = \frac{x_1 + l \cdot x_2}{1 + l}, y = \frac{y_1 + l \cdot y_2}{1 + l}, z = \frac{z_1 + l \cdot z_2}{1 + l}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяется формулами:

$$x = \frac{x_1 + l \cdot x_2}{2}, y = \frac{y_1 + l \cdot y_2}{2}, z = \frac{z_1 + l \cdot z_2}{2}.$$

Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе. Рассмотрим две декартовы прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабным отрезком и одинаковыми направлениями одноименных координатных оси. Начало новой системы координат находится в точке $O_1 = (a, b, c)$. Пусть M – произвольная точка пространства, x, y, z – ее координаты в старой системе координат, x', y', z' – в новой, тогда:

$$x = x' + a, y = y' + b, z = z' + c,$$

$$\text{или } x' = x = a - y' = y - b, z' = z - c.$$

Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя:

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\ 0,$$

т.е. скалярный квадрат его длины равен квадрату его длины.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) переместительности (коммутативности):

$$\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

2) сочетательности (ассоциативности) относительно числового элемента:

$$(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

3) распределительности (дистрибутивности) относительно суммы векторов:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 . x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2,$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат.

Косинус угла между векторами определяется формулой:

$$cos\,\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 . z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Поверхности и линии в пространстве. Уравнение поверхности и уравнение линии пространстве. Уравнение поверхности в фиксированной системе координат называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они.

Из этого определения вытекает способ решения следующей простой задачи: выяснить, лежит ли данная точка на поверхности, определяемой заданным уравнением. Для решения этой задачи необходимо подставить ее координаты в данное уравнение, если получается числовое равенство, то точка лежит на поверхности, в противном случае точка поверхности не принадлежит.

Всякое уравнение с тремя переменными x, y, z можно записать так:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – функция переменных x, y, z.

Из определения прямоугольного декартовых систем координат точки в пространстве следует, что координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz – определяются соответственно уравнениями: $x = 0, y = 0, z = 0$. Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей, поэтому она определяется двумя линиями. И координаты любой точки линии одновременно будет удовлетворять обоим уравнения.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется поверхностью n-го порядка. Например, сфера – поверхность второго порядка, так как ее уравнение является уравнением второй степени.

Различные виды уравнения плоскости. Плоскость в пространстве можно задать различными способами в зависимости этого рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору. Ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ плоскости, то ее уравнение имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Равенство выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$.

Общее уравнение плоскости. Уравнение первой степени относительно декартовых координат:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где одновременно в нуль не обращается, определяет плоскость в пространстве (рисунок 3).

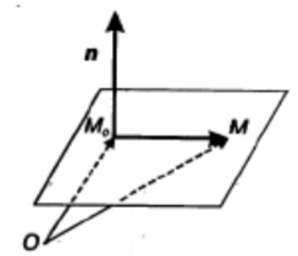

Рисунок 3 – Задание плоскости

Отметим частные случаи.

Если $D = 0$, то уравнение имеет вид: $Ax + By + Cz = 0$ и определяет плоскость, проходящую через начало координат.

Если $C = 0$, то уравнение принимает вид: $Ax + By + D = 0$ и определяет плоскость, параллельную оси Oz.

Если $C = 0$ и $D = 0$, то уравнение принимает вид: $Ax + By = 0$, и определяет плоскость, проходящую через ось Oz.

Если $C = 0$ и $B = 0$, то уравнение принимает вид: $Ax + D = 0$ или $x = a$ и определяет плоскость параллельную оси Oyz.

Если $C = 0, B = 0, D = 0$, то уравнение принимает вид: $Ax = 0$, или $x = 0$ и определяет плоскость Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если даны три точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид:

$$\begin{cases} A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D = 0, \\ A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C \cdot z_2 + D = 0, \\ A \cdot x_3 + B \cdot y_3 + C \cdot z_3 + D = 0, \end{cases}$$

Это равенство выражает компланарность трех векторов, следовательно, вместо трех точек мы можем использовать два вектора и одну точки или две точки и один вектор (рисунок 4).

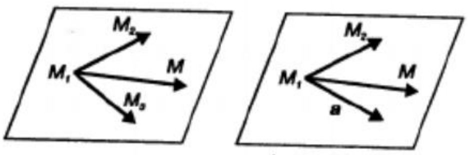

Рисунок 4 – Компланарные вектора

Различные виды уравнений прямой в пространстве. Прямую в пространстве можно задать различными способами.

Векторно-параметрическое уравнение прямой. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Если даны точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ прямой, то:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{a}t,$$

где $\vec{r} = OM$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$,

$\vec{r_0} = OM$ – радиус-вектор точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

t – переменная величина (параметр) (рисунок 5).

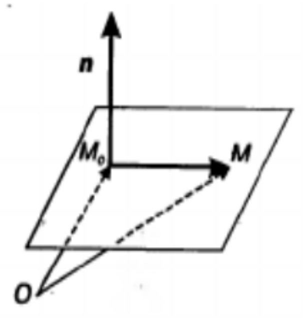

Рисунок 5 – Векторно-параметрическое задание прямой

Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

где $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – данная точка,

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$— направляющий вектор.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, поэтому уравнение примет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}.$$

Уравнение окружности. По определению, окружность представляет из себя множество точек плоскости, удаленных от данной точки О (центра окружности) на одинаковое расстояние R (радиус окружности). Получим уравнение окружности, считая, что ее центр – точка $O = (x_0, y_0)$, а радиус равен R.

Пусть $M = (x, y)$ – произвольная точка окружности. Выразим расстояние от М до центра окружности:

$$|MO| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Возведем теперь левую и правую части в квадрат, и, учитывая, что $MO = R$, получим уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Метод координат – способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Числа (символы), определяющие положение точки (тела) на прямой, плоскости, в пространстве, на поверхности и так далее, называются её координатами. В зависимости от целей и характера исследования выбирают различные системы координат.

1.4 Анализ ошибок учащихся при использовании координатно-векторного метода при решении задач

Задание 14 Единого государственного экзамена по математике с 2010 года представляет стереометрическую задачу на определение расстояний или углов в пространстве между объектами, связанными с некоторым многогранником. По результатам по ЕГЭ 2020 – только около 2,5 % представленных решений были оценены в два балла.

Основные проблемы: неумение строить линейные углы и проекции, ошибки в определении вида треугольника, непонимание нахождения угла между прямой и плоскостью, недостаточное представление о расположении перпендикуляра при нахождении расстояния от точки до прямой. Все отмеченное указывает на то, что учащиеся испытывают большие трудности при решении стереометрических задач. В отличие от планиметрии в стереометрии они не могут опереться на наглядность.

В 2020 году в ЕГЭ по математике приняли участие 362000 человек. Это на 10000 человек меньше чем в 2019.

Процент сдачи экзамена по математике профильного уровня в 2020 году составил 94,32 %.

В 2020 году количество участников набравших менее 27 баллов составило 5,68 % от общего числа сдававших.

Средний тестовый балл участников ЕГЭ по математике в Челябинской области – 54,47. Мы наблюдаем отрицательную динамику, так как в 2019 году составил 56,5. Количество учащихся, набравших на экзамене 100 баллов составляет 168 человек.

Контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике 2020 года включают в себя 19 задание. Из них 8 заданий (1-8) имеют базовый уровень сложности, 9 заданий (9-17) имеют повышенный уровень сложности, 2 задания (18, 19) имеют высокий уровень сложности. Результаты выполнения каждого задания представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Решаемость заданий по математике

№	Содержание	Уровень сложности	Максимальное количество баллов	Средний процент выполнения в 2020, %	Средний процент выполнения в 2019, %	Средний процент выполнения в 2018, %	Средний процент выполнения в 2017, %
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	Арифметические задачи	Б	1	88,9	95,5	91,0	93,27
2	Графики и диаграммы	Б	1	98,4	95,5	96,7	96,03
3	Наглядная геометрия	Б	1	89,8	87,2	89,8	90,10

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4	Теория вероятностей	Б	1	89,9	87,5	90,2	90,90
5	Простейшие уравнения	Б	1	96,1	93,4	92,4	93,13
6	Задачи по планиметрии	Б	1	76,8	78,2	65,6	74,80
7	Геометрический смысл производной	Б	1	63,0	47,9	55,2	54,87
8	Задачи по стереометрии	Б	1	63,8	52,8	57,5	59,00
9	Значения выражений	П	1	65,2	89,7	47,7	70,73
10	Задачи прикладного содержания	П	1	75,7	66,9	66,7	73,50
11	Задачи по составлению уравнений	П	1	57,0	61,2	36,5	56,80
1	Производная и	П	1	47,9	44,2	39,1	48,03

2	первообразная						
13	Уравнения и системы уравнений	П	2	34,9	28,7	31,9	35,30
14	Стереометрия	П	2	2,5	9,4	1,7	5,57
15	Неравенства и системы неравенств	П	2	14,8	12,6	12,4	15,27
16	Планиметрия	П	3	3,8	3,6	1,4	2,57
17	Задачи с экономическим содержанием	П	3	22,0	2,2	8,6	8,73
18	Задачи с параметрами	В	4	2, 4	1, 2	0, 38	1, 93
19	Арифметика и алгебра	В	4	10, 3	2, 5	0, 36	2, 02

На рисунке 6 графически представлена решаемость заданий.

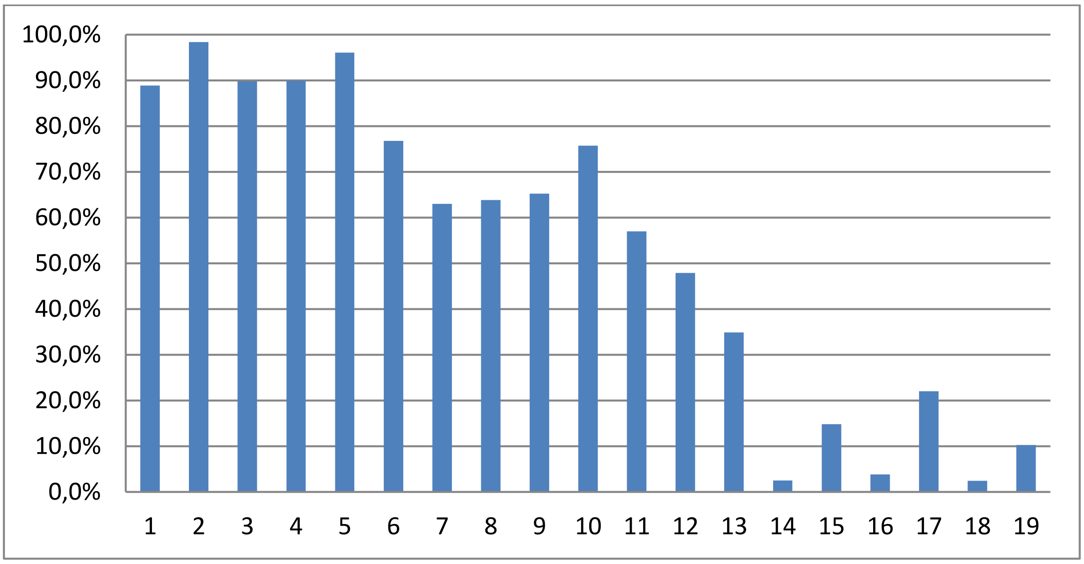

Рисунок 6 – Диаграмма решаемости заданий по математике

В Челябинской области в течение последних четырёх лет наблюдается колебание среднего тестового балла ЕГЭ по математике. В 2018 г. (по сравнению с 2017 г.) средний тестовый балл повысился на 2,7 балла, в 2019 г. (по сравнению 2018 г.) повысился на 6,7 балла, в 2020 г. (по сравнению с 2019 г.) понизился на 2,03 балла. Доля не набравших минимального количества баллов после стабильного снижения в период с 2017 по 2019 года в 2020 году возросла на 0,65 % (Таблица 2).

Таблица 2 – Сравнительная таблица результатов ЕГЭ по математике в Челябинской области за 2017-2020 г.г.

	2020 год	2019 год	2018 год	2017 год
Количество участников ЕГЭ по математике	362 000	19 674	421 000	391 981
Доля (%) от общего количества участников ЕГЭ	94,7	96,89	97,01	97,17
Средний тестовый балл	54,47	56,5	49,8	47,1
Минимальный первичный / тестовый балл	6 / 32	6 / 32	6 / 32	6 / 32
Доля (%) сдавших экзамен	94,2	94,85	93,00	85,66
Доля (%) не сдавших экзамен	5,8	5,15	7	14,34

Средний тестовый балл в 2020 году снизился на 2 в сравнении с аналогичным показателем 2019 году, но при этом остался существенно выше среднего балла 2018 года. Доля участников экзамена с результатами от 0 до 40 тестовых баллов выросла по сравнению с 2019 годом, но осталась заметно ниже соответствующей доли участников ЕГЭ 2018 года. Доля участников с результатами в диапазоне от 41 до 100 тестовых баллов несколько уменьшилась по сравнению с 2019 годом, но осталась выше соответствующей доли участников ЕГЭ 2018 года.

В Таблице 3 приведены данные о среднем тестовом балле и распределении участников по диапазонам тестового балла в 2018-2020 г.г.

Таблица 3 – Средний тестовый балл в 2018-2020 г.г.

Год	Средний тестовый балл	Диапазон тестовых баллов				
		0-20	21-40	41-60	61-80	81-100
2020	54,47	4,62	25,91	25,38	37,48	6,60
2019	56,5	3,84	21,57	26,61	40,91	7,08
2018	49,8	4,78	31,39	32,36	29,31	2,16

Как и в предыдущие годы, минимальный первичный балл, необходимый для того, чтобы выдержать экзамен на минимальном уровне, был равен шести первичным (27 тестовым) баллам. В 2020 г. не преодолели минимальной границы 5,8 % участников экзамена (в 2019 г. – 5,15 % участников; в 2018 г. – 7,0 %). Число и доля участников, набравших 100 баллов в 2020 г., несколько сократились в сравнении с аналогичными показателями 2019 г., но остались существенно выше соответствующего показателя 2018 г. Это объясняется тем, что на фоне общего роста качества математической подготовки школьников значительное число выпускников, имеющих право поступления на специальности «математика», «информатика», «физика», «экономика» и др. без вступительных испытаний, в этом году отказались от сдачи экзамена по математике. Это явление наиболее заметно в регионах, лидирующих по количеству дипломов заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников. При этом в других регионах наблюдается рост числа 100-балльников и высокобалльников, что, вероятно, связано с эффективностью самоподготовки высокомотивированных участников экзамена.

В 2020 году наблюдаются разнонаправленные отклонения доли выполнения заданий в отдельных линиях от результатов прошлого года. Несмотря на негативные факторы, сопутствующие подготовке к экзамену в 2020 году, отмечается заметный рост процента выполнения наиболее сложных заданий 17 и 19. Этот феномен также можно объяснить массовым переходом наиболее подготовленных категорий школьников на самостоятельную подготовку к экзамену.

Задания 14 и 16 относятся к повышенному уровню сложности. Эти задания решают в основном участники ЕГЭ, претендующие на высокий балл. Успешное выполнение этих заданий возможно только при систематическом изучении курса геометрии. Натаскивания на задания, встречавшиеся в прошлые годы, чем грешат многие учителя при подготовке к ЕГЭ, недостаточно. После такой «подготовки» старшеклассник, наученный решать прошлогодние задачи, встречается с задачей, которую он прежде не решал, и не может подойти к ней, поскольку у него отсутствуют навыки анализа условия и геометрической конфигурации, поиска и синтеза решения. Вместо этих важнейших навыков он имеет лишь навык узнавания знакомой задачи и следования заученному алгоритму.

Геометрическая задача 14 (стереометрия) повышенного уровня сложности имеет низкий процент выполнения (средний процент выполнения – 2,5 %), что свидетельствует о несформированности у большинства выпускников умения строить изображения многогранников и сечения многогранников плоскостями, комбинировать различные методы решения задач с использованием свойств фигур, пользоваться векторами и координатами для решения задач. Особо следует отметить массовые логические ошибки при доказательстве геометрических фактов.

Методика обучения старшеклассников решению стереометрических задач должна меняться за счет более широкого использования задач на построение, на доказательство на основе уверенного владения материалом курса планиметрии.

Средний процент решения задачи 16 по планиметрии (3,8 %) несколько выше, чем у стереометрической задачи 14. Наличие в части 2 профильного ЕГЭ задачи по геометрии повышенного уровня сложности и преемственность в геометрических частях ОГЭ и ЕГЭ привели к наметившемуся росту результатов выполнения планиметрической задачи на 16 линии профильного ЕГЭ.

Тем не менее, задачи 14 и 16 по геометрии до сих пор решают только наиболее подготовленные участники. У большинства участников экзамена трудности начинаются уже при построении и чтении чертежа: слабо развиты навыки поиска соотношений между элементами чертежа, школьники очень часто совершают ошибки в решении прямоугольных треугольников, отсутствуют необходимые навыки поиска нужных дополнительных построений.

Низкий процент выполнения геометрических заданий свидетельствует о сохраняющихся системных недостатках в преподавании геометрии. Одна из причин, как уже отмечалось, – рассмотрение лишь тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, вместо полноценного изучения геометрии.

Анализ данных о результатах выполнения ЕГЭ по математике 2020 года показывает, что необходим переход на разноуровневое математическое образование: школьнику должна предоставляться возможность выбора того уровня математических знаний, который потребуется ему в дальнейшей учебной деятельности и в жизни.

На ступени основной и средней (полной) общей школы при организации преподавания математики необходимы следующие меры.

1. Выделение трёх уровней математической подготовки школьников:

− уровень, необходимый для успешной жизни в современном обществе;

− уровень, необходимый для прикладного использования математики в дальнейшей учёбе и профессиональной деятельности;

− уровень, необходимый для творческой работы в математике.

2. В школе необходимо увеличить вес геометрии, анализа данных, статистики и логики. При изучении курса геометрии следует повышать наглядность преподавания, уделять повышенное внимание формированию конструктивных умений и навыков. При изучении тем по теории вероятностей и статистике необходимо ориентироваться на практическое применение решаемых задач.

3. Для эффективной реализации уровневого обучения в математике необходимо разработать задания для мониторинга индивидуальных учебных достижений школьников.

4. Следует обратить внимание на компенсирующую поддержку математического образования школьников во внеурочное время, своевременную ликвидацию пробелов в знаниях и умениях.

5. Необходимо уйти от принципа «прохождения программы», добиваясь качественного усвоения знаний и умений на выбранном уровне подготовки учащихся по математике.

Вывод по главе 1

Таким образом, сущность координатно-векторного метода как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры. Обратно, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и таким образом применять геометрию к решению алгебраических задач.

Координатно-векторный метод – это универсальный метод. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

Хорошо известны те трудности, которые испытывают учащиеся при решении геометрических задач, поэтому рассмотрение вопросов, связанных с координатно-векторным методом решения задач, имеет важное значение в математике.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ

2.1 Этапы формирования координатно-векторного метода

Для решения геометрических задач с помощью координатно-векторного метода нужно знание простых формул, алгоритма и правил. Преимущество этого метод, состоит в том, что он упрощает и сокращает решение задач. Он не требуют сложных посторенний в проекциях, так как сначала вводится декартовая система координат, затем производятся исчисления. Метод координат является сильным методом и с помощью него можно решить задачи разных уровней сложности. Но и у этого метода есть недостаток – большой объем вычислений.

Алгоритм применения метода координат состоит:

1. Выбор системы координат в пространстве.
2. Нахождение координат необходимых точек и векторов, или уравнения кривых и фигур.
3. Решение примера, используя ключевые задачи или формулы данной метода.
4. Переход от аналитических соотношений к метрическим.

Но этот алгоритм является общим, и для некоторых видов задач приходиться использовать дополнительные шаги для решения задач [8].

Основные этапы формирования координатно-векторного метода у обучающихся.

Подготовительный этап. Его цель – овладение перечисленными основными понятиями и основными действиями.

Мотивационный этап. Его задача – показать необходимость овладения этим методом и добиться осознания того факта, что на следующих этапах целью деятельности учащихся будет именно усвоение этого метода решения задач. Приём, используемый при этом, – решение таких задач, которые векторным методом решаются проще, чем любым другим, или другим вообще решить невозможно.

Ориентировочный этап. Его цель – разъяснить суть метода и выделить его основные компоненты на примере анализа решенной этим методом задачи.

Этап овладения компонентами метода. Цель – используя специально подобранные задачи, формировать отдельные компоненты метода (сначала задачи на формирование одного компонента, потом двух, трёх и т.д.).

Этап формирования метода «в целом». Цель – решение задач, в которых работают все или большинство компонентов метода (в том числе и на материале физики, химии и др. предметов).

Деление форматирования метода на этапы здесь условно, т.к. они тесно взаимосвязаны. Очевидно, не стоит разделять ученикам четко задачи на формирование компонентов, но сам учитель должен четко знать, какой компонент с помощью какой из задач он будет формировать у учащихся. Однако цель каждого этапа должна быть ясна и учителю, и учащимся

Первая группа подготовительных задач формулируется следующим образом.

Изобразите многогранник, указанную прямоугольную систему координат и определите координаты вершин многогранника.

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Начало координат – в точке A; прямая AD – ось x; прямая AB – ось y; прямая AA_1 – ось z.

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Начало координат – в точке A; прямая AC – ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AC, – ось y; прямая AA_1 – ось z.

3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Начало координат – в центре O шестиугольника $ABCDEF$; прямая CF – ось x; прямая, проходящая через

точку O в плоскости ABC перпендикулярно прямой CF – ось y; прямая OO_1 – ось z, где O_1 – центр шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

4. Правильная треугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат – в точке A; прямая AC – ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AC, – ось y; прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC, – ось z.

5. Правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат – в центре O квадрата $ABCD$; прямая, проходящая через точку O параллельно AD, – ось x; прямая OM – ось z.

6. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат – в центре O шестиугольника $ABCDEF$; прямая CF – ось x; прямая, проходящая через точку O в плоскости ABC перпендикулярно прямой CF, – ось y; прямая OM – ось z.

Рассмотрим следующий тип задач.

Задача 1. На прямой M_1M_2 лежит точка M, такая, что $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Точка O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OM_1} + +\lambda\overrightarrow{OM_2}$.

Задача 2. Пусть в некоторой системе координат известны координаты точек $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$. Зная, чему равно число λ, нужно вычислить координаты точки M.

Решим две задачи для выявления умений и навыков, которые пригодятся для использования координатного метода.

Пример 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 7) найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F−середины ребер A_1B_1 и B_1C_1соответственно [9].

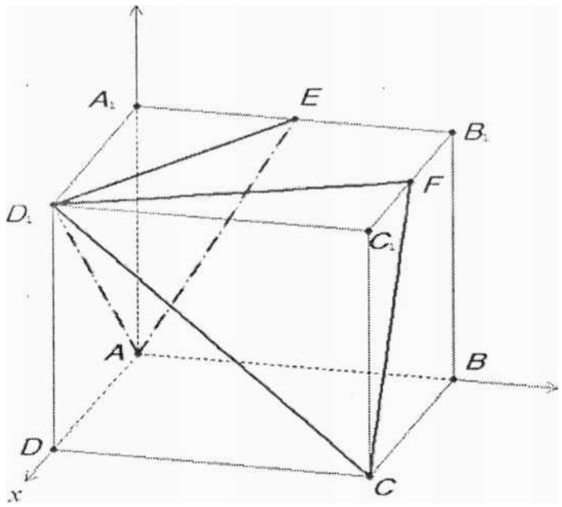

Рисунок 7 – Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Решение:

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $\text{A} = (0;\ 0;\ 0)$ (умение выбирать удобную нам систему координат).

2. Находим координаты точек, которые необходимы для составления уравнения плоскостей: $D_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $\text{E} = (0;\ 0,5;\ 1)$, $\text{C} = (1;\ 1;\ 0)$, $\text{F} = (0,5; 1; 1)$ (умение находить координаты необходимых точек и строить их по заданным координатам).

3. Составим уравнение плоскости (AD_1E), используя уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (умение составлять уравнения плоскости, прямой и пространственных кривых и фигур). Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot 0,5 + C \cdot 1 + D = 0. \end{cases}$$

Получим, что A =- C, B =- $2C$, D =0.

Таким образом, уравнение имеет вид:

$$x + 2y - z = 0,$$

следовательно $A_1 = 1, B_1 = 2, C_1 = -1$.

Составим уравнение плоскости ($\text{CF}D_1$), используя уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0, \\ A\cdot 0,5 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D = 0. \end{cases}$$

Получим, что $B = C$, $A = 2C$, $D = -3C$. Таким образом, уравнение примет вид:

$$2x + y + z - 3 = 0.$$

Значит, $A_2 = 2, B_2 = 1,\ C_2 = 1,\ D_2 = -3.$

4. По формуле (знания формул и умение их применять):

$$cos(\widehat{\alpha,\beta}) = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1+1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.

Разбирая данные задачи можно определить какие умения нужны для того, чтобы научиться использовать координатно-векторный метод. Итак:

1) переводить геометрический язык на аналитический;
2) строить точку по заданным координатам;
3) находить координаты заданных точек;
4) вычислять расстояние между точками, заданными координатами;
5) вычислять расстояние между прямой и плоскостью, прямыми и плоскостями;
6) вычислять угол между прямой и плоскостью, прямыми и плоскостями;
7) оптимально выбирать систему координат;
8) составлять уравнения заданных фигур (плоскости и прямые) и вычислять определитель;
9) видеть за уравнением конкретный геометрический образ;
10) выполнять преобразование алгебраических соотношений.

Следовательно, все задачи, которые развивают вышеуказанные умения, являются задачами, обучающими координатно-векторному методу.

2.2 Задачи, обучающие координатно-векторному методу

Для разработки методики формирования умения применять координатно-векторного метода важно выявить требования, которые предъявляет логическая структура решения задач мышлению решающего. Координатно-векторный предусматривает наличие у обучающихся умений и навыков, способствующих применению данного метода на практике. Проанализируем решение нескольких задач. В процессе этого анализа выделим умения, являющиеся компонентами умения использовать координатный метод при решении задач. Знание компонентов этого умения позволит осуществить его поэлементное формирование.

Рассмотрим задачи на нахождение расстояния от точки до прямой.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — единичный куб. Найти расстояние от точки A_1 до прямой B_1D (рисунок 8).

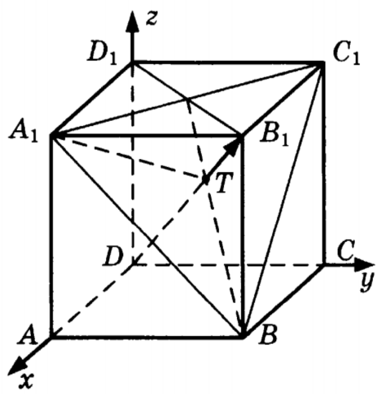

Рисунок 8 – Рисунок к задаче 1

Решение:

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и найдем координаты нужных нам точек:

$$B(1;\ 1;\ 0),\ A_1(1;\ 0;\ 1),\ C_1(0;\ 1;\ 1),\ D(0;\ 0;\ 0), B_1(1;\ 1;\ 1).$$

Нам необходимо найти расстояние от точки A_1 до точки пересечения прямой B_1D и плоскости β, проходящей через точку A_1 перпендикулярно этой прямой. Докажем, что $(A_1B\ C_1)\perp\ B_1D$.

Получим: $D_1D \perp (A_1\ B_1\ C_1)$ в данном кубе $\Rightarrow$ прямая B_1D_1- ортогональная проекция наклонной B_1D на $(A_1\ B_1\ C_1)$. А так как $B_1D_1 \perp A_1C_1$ (как диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$), то $B_1D \perp A_1C_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Аналогично $CD \perp (BB_1C_1)$ в данном кубе $\Rightarrow$ прямая B_1C- ортогональная проекция наклонной B_1D на (BB_1C_1). А так как $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата BB_1C_1C), то $B_1D \perp BC_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Учитывая, что прямые A_1C_1 и BC_1 пересекаются, приходим к выводу: $B_1D \perp (A_1B\ C_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Обозначим $T = B_1D \cap (A_1B\ C_1)$, тогда $A_1T = \rho(A_1;\ B_1D)$.

Найдем координаты точки T.

Вектор $\overrightarrow{DB_1} = (1;\ 1;\ 1)$ является направляющим для прямой B_1D и вектором нормали лдя плоскости $A_1B\ C_1$. Поэтому прямая B_1D может быть задана системой параметрических уравнений:

$$x\ =\ t,\ y\ =\ t, z\ =\ t,$$

а плоскость $A_1B\ C_1$ – уравнением:

$$(x\ -\ 1) + (y\ -\ 1) + (z\ -\ 0) =\ 0\ \Leftrightarrow\ x + y + z - 2\ =\ 0.$$

Решая систему из уравнения плоскости $A_1B\ C_1$ и уравнения прямой B_1D:

$$\begin{cases} x + y + z - 2\ =\ 0, \\ x\ =\ t, \\ y\ =\ t, \\ z\ =\ t, \end{cases}$$

находим: $t + t + t - 2\ =\ 0 \Rightarrow\ t\ =\ \frac{2}{3}$, откуда следует, что точка T имеет координаты: $T = \left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Тогда:

$$A_1T\ =\ \sqrt{\left(1\ -\ \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0\ -\ \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1\ -\ \frac{2}{3}\right)^2}\ =\ \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Это означает что $\rho(A_1;\ B_1D) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые ребра равны 11. Найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1 (рисунок 9).

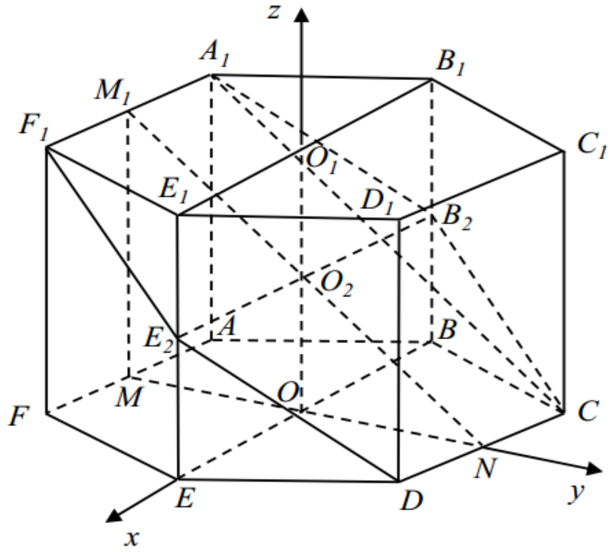

Рисунок 9 – Рисунок к задаче 2

Решение:

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и найдем координаты нужных нам точек:

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \sqrt{5^2 - (2{,}5)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$C\left(-\frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{3}}{2};\ 0\right), A_1\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{5\sqrt{3}}{2};\ 11\right), F_1\left(\frac{5}{2};\ -\frac{5\sqrt{3}}{2};\ 11\right).$$

Найдём длину сторон треугольника CA_1F_1, тогда:

$$CA_1 = 14,\ A_1F_1 = 5, CF_1 = \sqrt{221}.$$

Площадь треугольника CA_1F_1 найдем по формуле Герона, имеем $S = 35$.

С другой стороны, площадь треугольника CA_1F_1 равна $\frac{1}{2}h \cdot A_1F_1 \Rightarrow h = 14$. В нашем случае высотой является сторона треугольника CA_1F_1– CA_1.

Ответ: расстояние от точки C до прямой A_1F_1 равно 14.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все ребра которой равны 2, точка M – середина ребра AB, точка O – центр основания пирамиды, точка F делит отрезок OS в отношении 3: 1, считая от вершины пирамиды (рисунок 10).

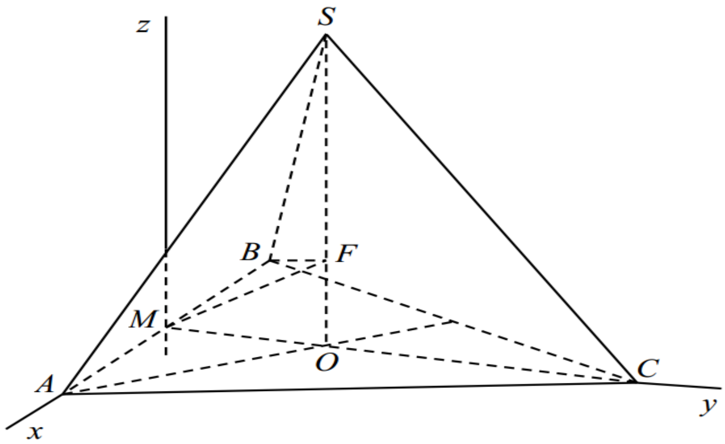

Рисунок 10 – Рисунок к задаче 3

1. Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC.

2. Найдите расстояние от точки С до прямой MF.

Решение:

Введем систему координат согласно рисунку 10. Тогда:

$$M(0,0,0),\ B(-1,0,0),\ MC = \sqrt{3},\ C(0,\sqrt{3},\ 0),\ O\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right).$$

1. Из треугольника SOC имееем:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$OF = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Исходя из найденных расстояний, вычисляем координаты точек:

$$F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ S\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Находим координаты векторов:

$$\overrightarrow{MF}\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \overrightarrow{SC}\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},-\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{MF}\ \cdot\ \overrightarrow{SC}\ =\ 0+\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\ =0.$$

Так как скалярное произведение равно 0, то прямые MF и SC перпендикулярны.

2. Находим длины отрезков:

$$MF\ =\ \sqrt{(0-0)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ -\ 0\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ -\ 0\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$CF\ =\ \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Искомым расстоянием будет являться высота треугольника CMF.

Найдем площадь треугольника CMF по формуле Герона. Получим что: $S_{\Delta}\ =\ \frac{\sqrt{2}}{4}$. С другой стороны, площадь треугольника CMF можно найти по формуле $S_{\Delta}\ =\ \frac{1}{2}\ h\cdot MF$. Подставляя значения, получаем $h=1$.

Ответ: 1. Прямая MF перпендикулярна прямой SC. 2. Расстояние от точки С до прямой MF равно 1.

Рассмотрим задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости.

Задача 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – единичный куб. Найти расстояние от точки A до плоскости BDC_1 (рисунок 11).

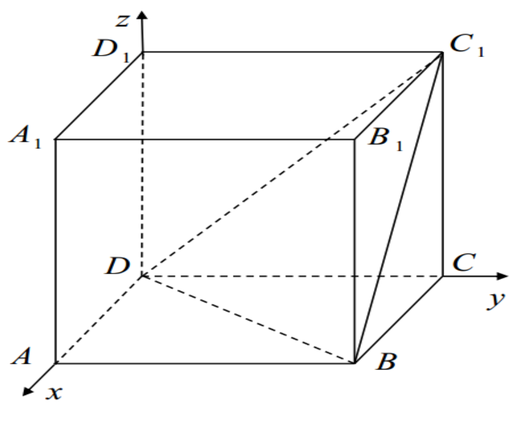

Рисунок 11 – Рисунок к задаче 4

Решение:

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так что:

$$A(1,0,0), B(1;\ 1;\ 0), D(0;\ 0;\ 0),\ C_1(0;\ 1;\ 1).$$

Запишем уравнение плоскости BDC_1. В общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D\ = 0$ подставим координаты точек $B(1;\ 1;\ 0), D(0;\ 0;\ 0),\ C_1(0;\ 1;\ 1)$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B + D\ = 0, \\ \qquad D\ = 0, \\ B + C + D\ = 0. \end{cases}$$

Ее решением является система чисел $A = 1,\ B = -1,\ C = 1,\ D\ = 0$. Тогда плоскость (BDC_1) имеет в данной системе координат уравнение:

$$x - y + z = 0.$$

Для определения расстояния от точки А до плоскости BDC_1 применим формулу:

$$\rho(A, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\rho(A, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от точки А до плоскости DEA_1 (рисунок 12).

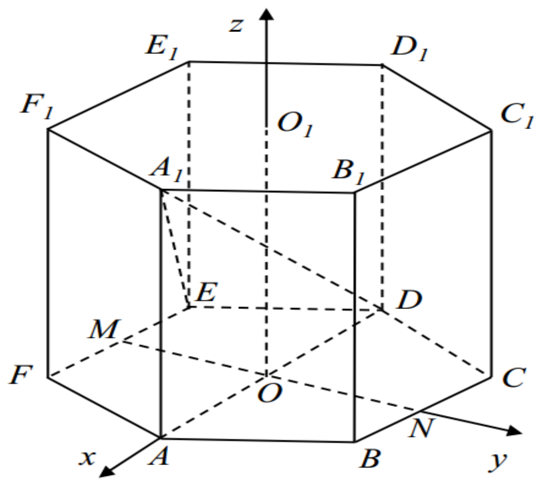

Рисунок 12 – Рисунок к задаче 5

Решение:

Введем прямоугольную декартову систему координат соответственно рисунку 12. Из прямоугольного треугольника ONB найдем:

$$ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = \sqrt{1^2 - (0,5)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдем координаты необходимых нам точек:

$$A(1,0,0),\ A_1(1;\ 0;\ 1),\ D(-1;\ 0;\ 0), E\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right).$$

Составим уравнение плоскости DEA_1. В общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ подставим координаты точек $A_1(1;\ 0;\ 1)$, $D(-1;\ 0;\ 0), E\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$ и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + C + D = 0, \\ -A + D = 0, \\ -\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B + D = 0. \end{cases}$$

Ее решением является система чисел $A = 1, B = -\frac{\sqrt{3}}{3}, C = -2, D = 1$.

Плоскость DEA_1 имеет в данной системе координат уравнение:

$$x - \frac{\sqrt{3}}{3}y - 2z + 1 = 0.$$

Для определения расстояния от точки A до плоскости DEA_1 применим формулу:

$$\rho(A,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|1 \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\rho(A,\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Задача 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – единичный куб. Найти расстояние между прямыми AB_1 и BD (рисунок13).

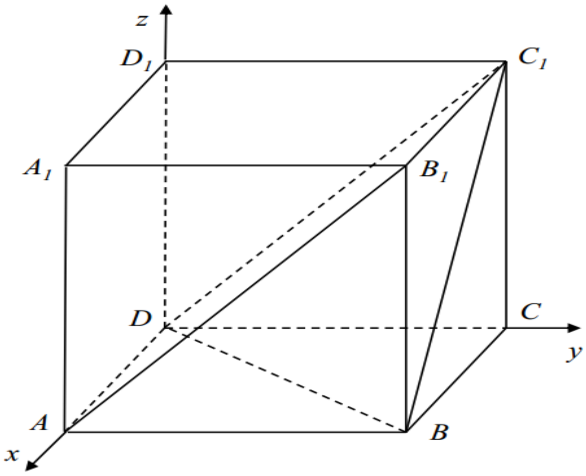

Рисунок 13 – Рисунок к задаче 6

Решение:

Прямые AB_1 и BD скрещиваются. Диагональ DC_1 параллельна прямой AB_1. Плоскость DC_1B параллельна прямой AB_1. Расстояние от прямой AB_1 до плоскости DC_1B определит искомое расстояние между прямыми AB_1 и BD.

Задача определения расстояния между прямыми AB_1 и BD сводится к нахождению расстояния от точки A до плоскости BDC_1. Это рассмотрено в задаче 4.

Ответ: $\rho(AB_1, BD) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми B_1C и A_1B (рисунок 14).

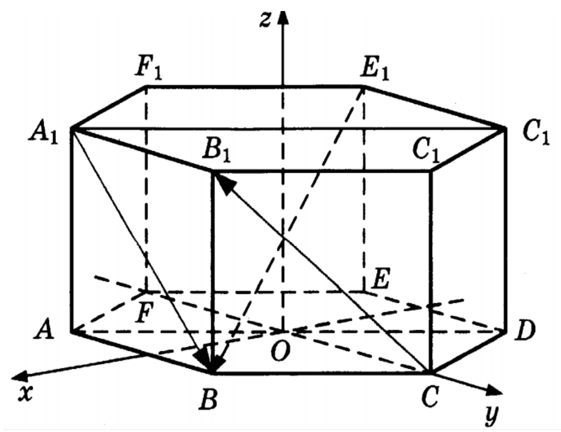

Рисунок 14 – Рисунок к задаче 7

Решение:

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так что:

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), C(0;\ 1;\ 0), B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Так как расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой, то для нахождения искомого расстояния $\rho(B_1C;\ A_1B)$ составим уравнение плоскости α, проходящей через прямую B_1C параллельно прямой A_1B.

Пусть вектор $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$ нормали плоскости α перпендикулярен направляющим векторам $\overrightarrow{CB_1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ и $\overrightarrow{A_1B}\ (0;\ 1;\ -1)$ прямых B_1C и A_1B соответственно. Найдем координаты вектора $\vec{n} = (a;\ b;\ c)$. Имеем:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{CB_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{A_1B}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{1}{2}b + c = 0, \\ b - c = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a - b + 2c = 0, \\ b = c. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\sqrt{3}a, \\ b = c. \end{cases}$$

Пологая $a = \sqrt{3}$, получаем: $b = c = -3$. Таким образом:

$$\vec{n} = \left(\sqrt{3};\ -3;\ -3\right).$$

Тогда плоскость α ($\mathrm{C} \in \alpha$) имеет уравнение:

$$\sqrt{3} \cdot (x - 0) - 3 \cdot (y - 1) - 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 3z + 3 = 0.$$

Теперь находим:

$$\rho(B_1C\ ;\ A_1B) = \rho(B, \alpha) = \frac{\left|\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 + 3\right|}{\sqrt{3+9+9}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Задача 8. В пирамиде $SABC$ известны длины ребер: $AB = AC = = SB = 10$, $BC = SA = 12$ (рисунок 15).

1. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

2. Найдите расстояние между прямыми SA и BC.

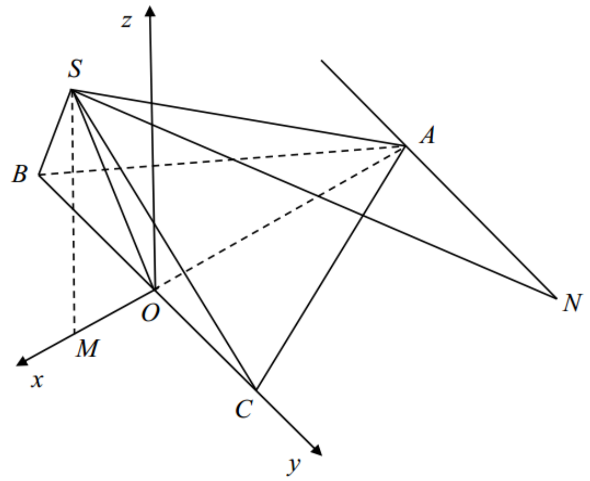

Рисунок 15 – Рисунок к задаче 8

Решение:

1. Треугольники ABC и SBC равнобедренные. Пусть O– середина стороны BC, тогда прямые SO и AO перпендикулярны к прямой BC. Следовательно, плоскость SOA удовлетворяет условиям задачи и треугольник SOA является требуемым сечением.

2. Свяжем с пирамидой прямоугольную декартову систему координат согласно рисунку 15.

Из прямоугольного треугольника AOC имеем $\mathrm{AO} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{OC}^2} = 8$. Аналогично находим $SO = 8$.

Из прямоугольного треугольника SMO имеем $SM^2 + MO^2 = SO^2$. Аналогично из треугольника SMA получаем $SM^2 + MA^2 = SA^2$. Подставляя данные, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} SM^2 + MO^2 = 64, \\ SM^2 + (MO+8)^2 = 144. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\mathrm{MO} = 1$, $SM = 3\sqrt{7}$.

В выбранной системе координат следующие точки и векторы имеют координаты:

$$M(1;\ 0;\ 0),\ S\left(1;\ 0;\ 3\sqrt{7}\right),\ A(-8;\ 0; 0),\ C(0;\ 6;\ 0),\ B(0;\ -6;\ 0),\ \overrightarrow{BC} = (0;\ 12;\ 0),\ \overrightarrow{AS} = \left(9;\ 0;\ 3\sqrt{7}\right).$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha + 12 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 0, \\ 9 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 3\sqrt{7} \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются координаты вектора:

$$\vec{n} = (\sqrt{7};\ 0;\ -3).$$

Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости SAN можно взять вектор $\vec{n} = (\sqrt{7};\ 0;\ -3)$. Запишем уравненпие плоскости, заданной точкой $A(-8;\ 0; 0)$ и нормальным вектором $\vec{n} = (\sqrt{7};\ 0;\ -3)$. Имеем $\sqrt{7}x - 3z + 8\sqrt{7} = 0$.

Для определения расстояния от точки O до плосксти SAN применим формулу:

$$\rho(O, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\sqrt{7} \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 8\sqrt{7}|}{\sqrt{7 + 9}} = 2\sqrt{7}.$$

Ответ: 1. Треугольник SOA. 2. $\rho(O, \pi) = 2\sqrt{7}$.

Рассмотрим задачи на нахождение угла между двумя прямыми.

Задача 9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10, найдите косинус угла между прямвми KM и BD_1, если известно, что точка K лежит на ребре AA_1 и $AK : A_1K = 4 : 6$, точка M лежит на ребре C_1D_1 и $MC_1 : MD_1 = 3 : 7$ (рисунок 16).

Решение:

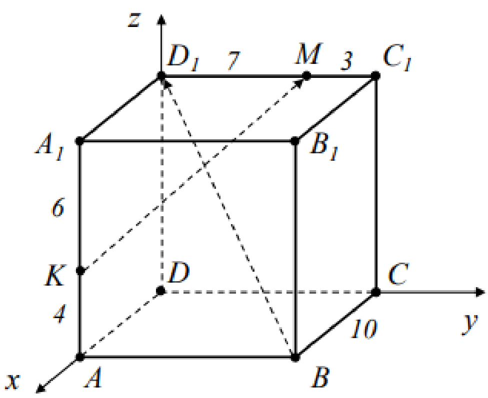

Рисунок 16 – Рисунок к задаче 9

Введем систему координат как показано на рисунке 16. Тогда имеем следующие координаты у точек и векторов:

$K(10;\ 0;\ 4)$, $M(0;\ 7;\ 10)$, $B(10;\ 10; 0)$, $D_1(0;\ 0; 10)$, $\overrightarrow{KM}(-10;\ 7;\ 6)$,

$$\overrightarrow{BD_1}(-10;\ -10;\ 10).$$

Находим через скалярное произведение косинус угла между векторами $\overrightarrow{KM} = (-10;\ 7;\ 6)$ и $\overrightarrow{BD_1} = (-10;\ -10;\ 10)$, имеем:

$$\cos\ \alpha\ = \frac{\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{KM}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}\ = \frac{9}{\sqrt{555}}.$$

Ответ: косинус искомого угла равен $\frac{9}{\sqrt{555}}$.

Задача 10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 (рисунок 17).

Решение:

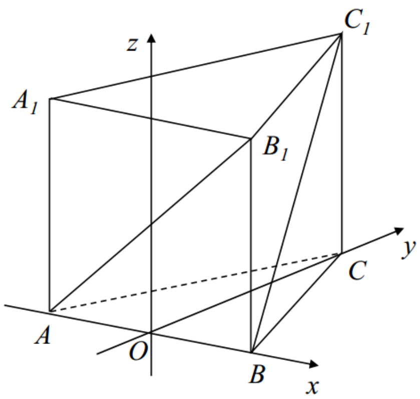

Рисунок 17 – Рисунок к задаче 10

Введем прямоугольную декартовую систему координат соответственно рисунку 17. Тогда имеем следующие координаты у точек и векторов:

$$A\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right), B\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right), B_1\left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right), C_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), \overrightarrow{AB_1}(1;\ 0;\ 1),$$

$$\overrightarrow{C_1B}\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ -1\right).$$

По свойству скалярного произведения векторов находим величину искомого угла. Имеем:

$$\cos\ \alpha\ = \frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{C_1B}}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\overrightarrow{C_1B}|}\ = \frac{1}{4}.$$

Ответ: косинус искомого угла равен $\frac{1}{4}$.

Рассмотрим задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью.

Задача 11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок18).

1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

2. Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

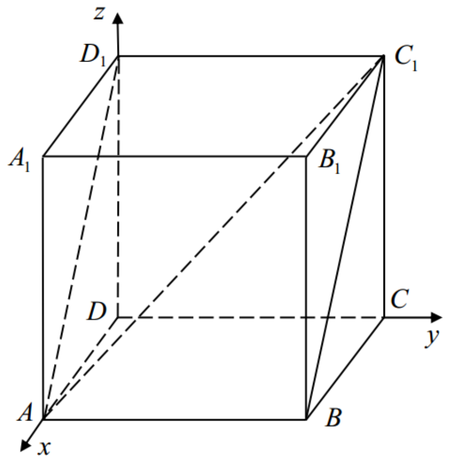

Рисунок 18 – Рисунок к задаче 11

Решение:

1. Прямая AD_1 параллельна прямой BC_1, следовательно, четырехугольник AD_1C_1B является искомым сечением.

2. Введем систему координат согласно рисунку 18. Примем сторону куба за единицу. Тогда имеем следующие координаты у точек и векторов:

$$D(0;\ 0;\ 0), A(1;\ 0;\ 0), C_1(0;\ 1; 1), \overrightarrow{AC_1}(-1;\ 1;\ 1).$$

Вектор $\overrightarrow{DC}(0;\ 1;\ 0)$ является нормальным вектором для плоскости BCC_1. Для определения угла применим формулу:

$$\sin\ \varphi\ = \frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \frac{|-1\cdot0+1\cdot1+1\cdot0|}{\sqrt{3}\cdot1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: 1. Сечением куба плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1, является четырехугольник AD_1C_1B. 2. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковые ребра равны 2, а стороны основания – 1 (рисунок 19).

1. Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины ребер AF и CD, перпендикулярна плоскости основания.

2. Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

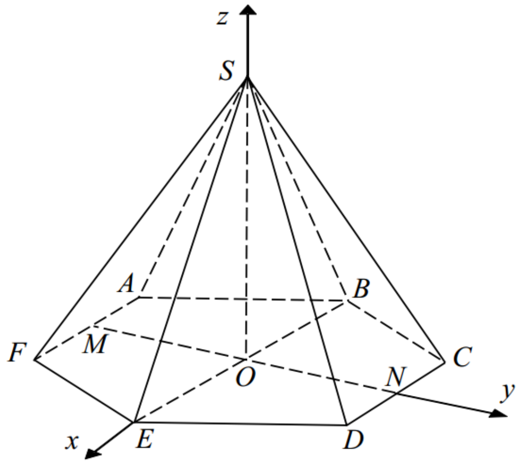

Рисунок 19 – Рисунок к задаче 12

Решение:

1. Пусть точки M и N – середины сторон AF и CD. Так как шестиугольник основания правильный, то прямая MN проходит через точку O – центр шестиугольника. Плоскость SMN содержит прямую SO, которая перпендикулярна к основанию. Следовательно, плоскость SMN и плоскость основания перпендикулярны.

2. Свяжем с пирамидой прямоугольную декартову систему координат согласно рисунку 19. Имеем:

$$ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, OS = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{3}.$$

Тогда имеем следующие координаты у точек и векторов:

$$A\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right), C\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right), F\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right), S(0;\ 0;\ \sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{AC}(0;\ \sqrt{3};\ 0), \overrightarrow{FS}\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{3}\right), \overrightarrow{AF}(1;\ 0;\ 0).$$

Пусть $\vec{n}(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$– вектор перпендикулярный к векторам $\overrightarrow{FS}\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{3}\right)$ и $\overrightarrow{AF}(1;\ 0;\ 0)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha + 0\cdot\beta + 0\cdot\gamma = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\cdot\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\beta + \sqrt{3}\cdot\gamma = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются координаты вектора:

$$\vec{n} = (0;\ -2;\ 1).$$

Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости SAF можно взять вектор $\vec{n} = (0;\ -2;\ 1)$.

Найдем:

$$\sin\ \varphi = \frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\left|0\cdot0-\sqrt{3}\cdot2+1\cdot0\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: 1. Плоскость SMN и плоскость основания перпендикулярны.

2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Задача 13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если AA_1=8, AB=6, BC=15 (рисунок 20).

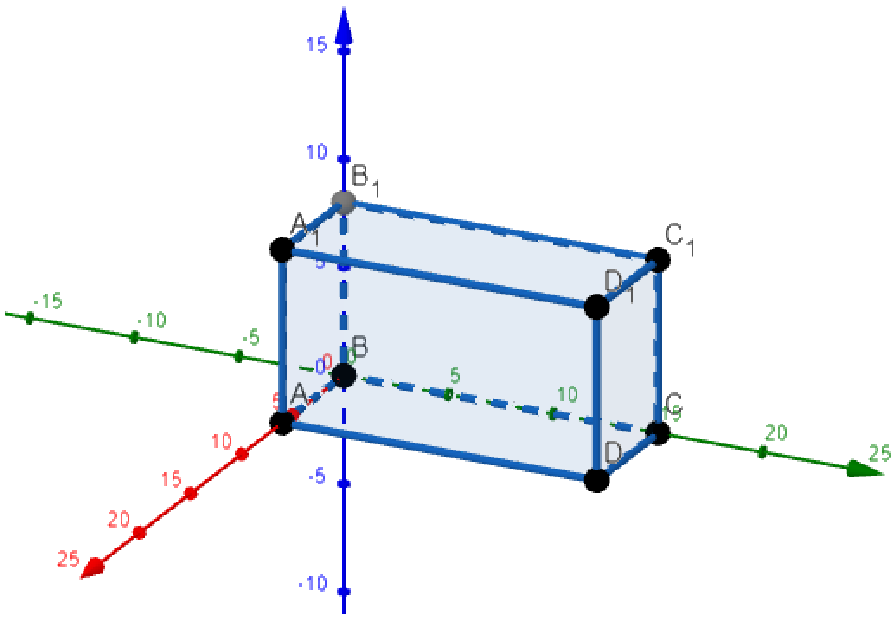

Рисунок 20 – Рисунок к задаче 13

Решение:

Введем прямоугольную систему координат.

Найдем координаты точек прямой BC_1 и плоскости A_1BC:

$$A_1(6,0{,}8),\ B(0{,}0{,}0),\ C(0{,}15{,}0),\ C_1(0{,}15{,}8).$$

Направляющий вектор прямой BC_1 будут иметь следующие координаты:

$$\vec{p} = (0{,}15{,}8).$$

Составим уравнение плоскости по трем точкам:

$$\begin{cases} D = 0, \\ 15B + D = 0, \\ 6A + 8C + D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0, \\ B = 0, \\ A = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Из системы следует, что уравнение плоскости A_1BC имеет вид:

$$4x - 3z = 0,$$

следовательно, направляющий вектор плоскости будет иметь следующие координаты:

$$\vec{n} = (4, 0, -3).$$

Тогда угол между плоскостью и прямой вычисляется по следующей формуле:

$$\sin\,\varphi\; = \frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \frac{|4\cdot0+0\cdot15+(-3)\cdot8|}{17\cdot5} = \frac{24}{85}.$$

Таким образом, угол между прямой и плоскостью будут равен:

$$\widehat{BC_1, (A_1}BC) = arcsin\frac{24}{85}.$$

Ответ: $\widehat{BC_1, (A_1}BC) = arcsin\frac{24}{85}.$

Рассмотрим задачи на нахождение угла между плоскостями.

Задача 14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C (рисунок 21).

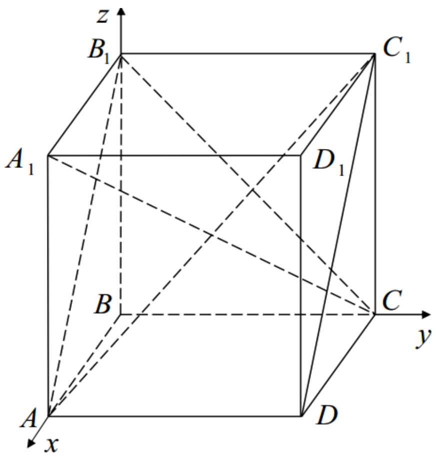

Рисунок 21 – Рисунок к задаче 14

Решение:

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так что:

$$A(1, 0, 0), C(0;\ 1;\ 0), B(0;\ 0;\ 0),\ C_1(0;\ 1;\ 1), D(1;\ 1;\ 0).$$

Чтобы определить угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C нужно найти нормальные векторы этих плоскостей и подсчитать угол между ними.

Векторы $\overrightarrow{B_1C_1}(0;\ 1;\ 0)$, $\overrightarrow{AB_1}(-1, 0, 1)$ не коллинеарны и параллельны плоскости AB_1C_1. Пусть $\vec{n}(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ – вектор перпендикулярный к векторам $\overrightarrow{B_1C_1}(0;\ 1;\ 0)$ и $\overrightarrow{AB_1}(-1, 0, 1)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha + 1\cdot\beta + 0\cdot\gamma = 0, \\ -1\cdot\alpha + 0\cdot\beta + 1\cdot\gamma = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются координаты вектора:

$$\vec{n} = (1;\ 0;\ 1)\,.$$

Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости AB_1C_1 можно взять вектор $\vec{n} = (1;\ 0;\ 1)$.

Векторы $\overrightarrow{B_1C_1} = (0;\ 1;\ 0)$, $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 0, 1)$ не коллинеарны и параллельны плоскости A_1B_1C. Пусть $\vec{m} = (\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ – вектор перпендикулярный к векторам $\overrightarrow{B_1C_1} = (0;\ 1;\ 0)$ и $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 0, 1)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot x + 1\cdot y - 1\cdot z = 0, \\ -1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются координаты вектора:

$$\vec{m} = (0;\ 1;\ 1).$$

Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости A_1B_1C можно взять вектор $\vec{m} = (0;\ 1;\ 1)$.

Найдем косинус угла между векторами $\vec{n} = (1;\ 0;\ 1)$ и $\vec{m} = (0;\ 1;\ 1)$, имеем:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 15. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC =$16. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P – середина ребра BB_1. Найти тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP (рисунок 22).

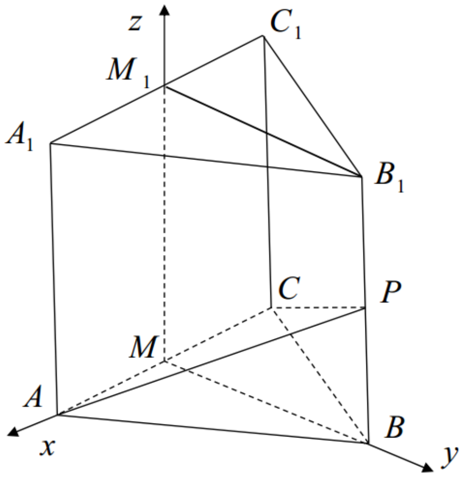

Рисунок 22 – Рисунок к задаче 15

Решение:

Введем прямоугольную декартовую систему координат.

$BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = 6$. Тогда имеем следующие координаты у точек и векторов:

$$P(0;\ 6;\ 12), A(8; 0;\ 0), C(-8;\ 0;\ 0), \overrightarrow{AP}(-8;\ 6; 12), \overrightarrow{AC}(-16;\ 0;\ 0).$$

Пусть $\vec{n} = (\alpha;\ \beta;\ \gamma)$– вектор перпендикулярный к векторам $\overrightarrow{AP}(-8;\ 6; 12)$ и $\overrightarrow{AC}(-16;\ 0;\ 0)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} -8 \cdot \alpha + 6 \cdot \beta + 12 \cdot \gamma = 0, \\ -16 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений являются координаты вектора:

$$\vec{n} = (0;\ -2;\ 1).$$

Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости APC можно взять вектор $\vec{n} = (0;\ -2;\ 1)$.

Найдем косинус угла между векторами $\vec{n} = (0;\ -2;\ 1)$ и $\overrightarrow{BP} =$ $= (0;\ 0;\ 12)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Далее находим $\mathrm{t}g\ \varphi = 2$.

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = 2$.

2.3 Элективный курс «Координатно-векторный метод решения стереометрических задач ЕГЭ»

Координатно-векторный метод решения задач на сегодняшний день самый мощный и при правильном подходе позволяет решить фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач. Но, к сожалению, координатно-векторный метод в рамках школьной программы используется достаточно неполно и ограниченно.

Данный элективный курс предназначен и рассчитан на выпускников средних общеобразовательных учреждений, которые желают углубить свои знания по стереометрии, качественно подготовиться к сдаче Единого государственного экзамена на профильном уровне. Он также полезен учащимся, которые планируют в дальнейшем работать по специальности, связанной с математикой.

Цель курса: научить выпускников использовать координатно-векторный метод при решении стереометрической задачи №14 из Единого Государственного Экзамена по математике профильного уровня.

Простой в применении координатно-векторный метод является необходимой составляющей решения задач различного уровня. В рамках данного элективного курса рассматриваются типовые стереометрические задачи из ЕГЭ, их решение с помощью координатно-векторного метода/

Задачи элективного курса:

– развитие пространственных представлений учащихся;

– знакомство учеников с разными типами стереометрических задач, с особенностями методики и способами их решения;

– обобщение изученного в базовой школе материала о векторах на плоскости, систематизация сведений о действиях с векторами в пространстве;

– формирование умений применять координатно-векторный метод к решению задач на нахождение углов между объектами в пространстве;

– формирование умений применять координатно-векторный метод к решению задач на нахождение расстояний и углов между объектами в пространстве.

В результате изучения данного курса учащийся должен:

1. Знать:

– теоретические основы векторного и координатного методов к решению геометрических задач;

– основные принципы математического моделирования;

– математический язык, математическую символику.

2. Уметь:

– разными способами задавать систему координат для данной задачи и находить координаты вершин многогранников;

– выполнять необходимые эскизы к решаемым задачам;

– приводить полные обоснования при решении задач, используя при этом изученные теоретические сведения, необходимую математическую символику;

– находить координаты вектора через координаты начала и конца;

– составлять уравнение плоскости по координатам трёх точек принадлежащих этой плоскости;

– находить расстояние между точкой и прямой, прямыми, плоскостями;

– находить углы между прямыми, плоскостями.

3. Владеть:

– определённым набором приёмов векторного и координатного методов решения геометрических задач;

– навыком составления математических моделей геометрических задач;

– навыком описания с помощью математической символики, формул общие свойства геометрических объектов и отношений между ними.

Формы контроля: домашние контрольные работы, зачеты, тестирование.

Организация учебного процесса

Программа рассчитана на половину года, два часа в неделю (всего 34 часа). Она состоит из трех разделов и содержит систему понятий из областей:

– системы координат,

– векторы и координаты в пространстве

– углы между прямыми,

–углы между плоскостями,

– расстояние от точки до плоскости,

– расстояние между двумя прямыми,

– расстояние от точки до прямой.

Каждый из разделов состоит из отдельных пунктов, в которых разбираются типовые задачи и задачи более высокого уровня сложности, затем даются задания для самостоятельного решения.

Элективный курс имеет практико-ориентированную направленность. Формы занятий разнообразны:

– семинары,

– практикумы,

– защита индивидуальных проектов.

Отработка и закрепление основных умений и навыков осуществляется при выполнении практических заданий, заданий из открытого банка заданий ЕГЭ. В рамках данного курса предполагается углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе изучения некоторых тем, учитывающих перспективы создания новых стандартов школьного математического образования в профильной школе.

Программа построена с учетом принципов системности, научности, наглядности, доступности и обеспечивает выполнение обязательных требований государственные стандартов.

В Таблице 4 представлен календарно-тематический план элективного курса.

Таблица 4 – Календарно-тематический план элективного курса

№ п/п	Тема	Количество часов	Тип урока	Содержание
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Декартовы координаты в пространстве (3 ч)				
1	Декартова система координат в пространстве	1	Лекция	Понятие системы координат и координаты точки в пространстве
2	Нахождение координат точек и длин векторов в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Координаты середины отрезка. Понятие вектора. Координаты вектора. Действия над векторами. Длина вектора. Скалярное произведение векторов.
Основы аналитической геометрии (6 ч)				
3	Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости	4	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм составления уравнения плоскости. Определение вектора нормали. Координаты вектора нормали

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*	*5*
4	Вычисление угла между векторами в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Формула нахождения угла между векторами в пространстве Использование
Использование координатно-векторного метода при решении стереометрических задач (23 ч)				
5	Способы задания прямоугольной системы координат в многогранниках	2	Семинар-практикум	Способы задания систем координат на многогранниках. Определение координат вершин многогранников
6	Решение задач на нахождение угла между прямыми в многогранниках и в пространстве	4	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между прямыми
7	Нахождение угла между прямой и плоскостью в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между прямой и плоскостью
8	Нахождение угла между плоскостями в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между плоскостями.
9	Нахождение расстояния от точки до плоскости.	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения расстояния от точки до плоскости
10	Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания. Формула нахождения угла между скрещивающимися прямыми

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*	*5*
11	Нахождение расстояния между плоскостями в пространстве	2	Лекционно-практическое занятие	Алгоритм выполнения задания
12	Решение задач 14 ЕГЭ профильного уровня	7	Практическое занятие	Решение стереометрических задач на нахождение геометрических величин ЕГЭ профильного уровня
13	Контрольная работа	1	Итоговая работа	
14	Итоговое занятие	1	Практическое занятие	
	Итого	34		

Приведем методические рекомендации к проведению элективного курса.

1. Декартовы координаты в пространстве – 3 часа.

Урок «Декартова система координат в пространстве» проводится в виде лекции. Учитель рассказывает об истории возникновения координатно-векторного метода, о видах систем координат, о применении координатно-векторного метода в жизни (астрономии, физике, математике).

Уроки «Нахождение координат точек и длин векторов в пространстве» проводятся в форме лекционно-практических занятий. Первый урок – повторение основных ключевых моментов: декартовы координаты и понятия, связанные с ними. Второй урок – практический, учащимся предлагается ряд заданий по этой теме. Для нахождения длин векторов целесообразно организовать практическую работу для отработки вычислительных умений.

На данных уроках можно рассмотреть следующие задачи.

Задача 1. Найдите координаты ортогональных проекций точек $A\ (1; 3; 4)$ и $B\ (5; -6; 2)$ на плоскости Oxy, Oyz и оси Ox, Oz.

Задача 2. Найдите координаты середины отрезка AB, если $A\ (1; 2; 4)$ и $B\ (-1; 0; 1)$.

Задача 3. Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}, \vec{b} = \vec{k} - \vec{\imath}$

Задача 4. Даны векторы: $\vec{a} = (3; -5; 2)$, $\vec{b} = (0; 7; -1)$. Найдите координаты векторов $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Подобные задачи можно найти в учебнике по геометрии Л.С. Атанасяна 10-11 классы (номера 402-440).

2. Основы аналитической геометрии – 6 часов.

Уроки «Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальный вектор плоскости». Данная тема является основой для решения стереометрических задач координатно-векторным методом. На этом уроке осуществляется отработка алгоритма по составлению уравнения плоскости.

На данных уроках можно рассмотреть следующие типы задач.

Задача 1. Даны 3 точки, не лежащие на одной прямой с координатами $A\ (-3; 2; -1)$, $B\ (-1; 2; 4)$, $C\ (3; 3; -1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через них.

Задача 2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A\ (-3; 2; -1)$, $B\ (-1; 2; 4)$ и начало координат.

Задача 3. Найти нормальный вектор плоскости $2x - 3y + 5z + 7 = 0$.

Задача 4. Составьте уравнение плоскости по точке $A\ (4; -2; 3)$ и вектору нормали $\vec{n} = (-1; 4; 0)$.

Задача 5. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A\ (2; 8; -5)$ параллельно плоскости $3x + y - 4z - 11 = 0$.

Уроки «Вычисление угла между векторами в пространстве». Проводятся в форме лекционно-практических занятий. Решение задач аналитического характера.

Задача 1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Их длины равны 3 и 6 соответственно, а скалярное произведение равно 9. Необходимо вычислить косинус угла между векторами и найти значение самого угла.

Задача 2. Даны $\vec{a} = (2; 0; -1)$ и $\vec{b} = (1; 2; 3)$. Необходимо определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Использование координатно-векторного метода при решении стереометрических задач – 23 часа.

Уроки «Способы задания прямоугольной системы координат в многогранниках» проводится в форме семинара-практикума. Для проведения данных уроков необходимо заранее определить учащихся по группам (или парам, в зависимости от количества учащихся) дать задание: пользуясь методическим материалом самостоятельно рассмотреть способы введения прямоугольных систем координат на различных многогранниках (вид многогранника распределяет учитель).

На первом уроке каждая группа (пара) отчитывается о проделанной работе в следующей форме: построение эскиза многогранника, рассмотрение способов введения системы координат, определение координат вершин многогранника.

На втором уроке учащиеся, работая индивидуально, выполняют практическую работу по введению прямоугольной системы координат и определению координат точек многогранника по готовым чертежам и по условиям различных стереометрических задач. Учитель выступает в роли консультанта.

Например, изобразите многогранник, указанную прямоугольную систему координат и определите координаты вершин многогранника.

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Начало координат – в точке A; прямая AD – ось x; прямая AB – ось y; прямая AA_1 – ось z.

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Начало координат – в точке A; прямая

AC – ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AC, – ось y; прямая AA_1 – ось z.

3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Начало координат – в центре O шестиугольника $ABCDEF$; прямая CF – ось x; прямая, проходящая через точку O в плоскости ABC перпендикулярно прямой CF, – ось y; прямая OO_1 – ось z, где O_1 – центр шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

4. Правильная треугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат – в точке A; прямая AC – ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AC, – ось y; прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC, – ось z.

5. Правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат – в центре O квадрата $ABCD$; прямая, проходящая через точку O параллельно AD, – ось x; прямая OM – ось z.

6. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равна a, а высота h. Начало координат – в центре O шестиугольника $ABCDEF$; прямая CF – ось x; прямая, проходящая через точку O в плоскости ABC перпендикулярно прямой CF, – ось y; прямая OM – ось z.

Уроки «Решение задач на нахождение угла между прямыми в многогранниках и в пространстве» проходят в виде лекционно-практических занятий.

На первом уроке с помощью наглядного пособия (презентация) необходимо рассмотреть взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве, изучить формулы нахождения углов в каждом из случаев, составить алгоритмы решения типовых задач.

Второй урок – отработка составленных алгоритмов при решении стереометрических задач ЕГЭ на нахождение угла между прямыми в многогранниках.

Третий урок посвящен решению задач на нахождение угла между прямыми, проходит в виде лекционно-практических занятий. На этом уроке повторяем способы взаимного расположения прямых в пространстве. Повторяются формулы нахождения угла между прямыми. Знакомятся с формулой канонического уравнения прямой в пространстве. Составляется алгоритм решения задач на нахождение угла между прямыми.

Четвертый урок – решение задач по данной теме.

Рассмотрим примеры задач на данную тему уроков.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10, найдите косинус угла между прямыми KM и BD_1, если известно, что точка K лежит на ребре AA_1 и $AK : A_1K = 4 : 6$, точка M лежит на ребре C_1D_1 и $MC_1 : MD_1 = 3 : 7$.

Задача 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Уроки «Нахождения угла между прямой и плоскостью в пространстве» проводятся в форме лекционно-практических занятий.

На первом уроке целесообразно вспомнить определение угла между прямой и плоскостью. Повторить определения направляющего вектора, нормального вектора, уравнения прямой в координатах, уравнения плоскости в координатах. Изучить формулы нахождения угла между прямой и плоскостью. Составить алгоритм решения задач данного типа.

На втором уроке закрепляется умение нахождения угла между прямой и плоскостью.

Рассмотрим примеры задач на данную тему уроков.

Задача 1. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$. Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, $SC = 25$. M – середина ребра SA, AN – высота треугольника ABC. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN.

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Уроки «Нахождение угла между плоскостями в пространстве» проходят в форме лекционно-практических занятий. На первом уроке вспоминаются основные определения, необходимые для изучения темы, составляется алгоритм решения задач.

Второй урок – практикум. Решение карточек-заданий.

Рассмотрим примеры задач на данную тему уроков.

Задача 1. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины ребер AA_1 и A_1C_1 соответственно. Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Задача 2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причем $BE = 1$. Найдите угол между плоскостями A_1C_1E и ABC.

Задача 3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите тангенс угла между плоскостями DB_1F_1 и ABC.

Уроки «Нахождение расстояния от точки до плоскости, находящейся в многогранниках» проводятся в форме лекционно-практических занятий.

На первом уроке вспомнить определение расстояния между объектами, изучить формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости. Составить алгоритм решения задач данного типа.

Второй урок − практикум.

Рассмотрим примеры задач на данную тему уроков.

Задача 1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Задача 2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$. Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

Задача 3. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки Р и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке М. Найдите расстояние от точки С до плоскости APQ.

Уроки «Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми в многогранниках» проводятся в форме лекционно-практических занятий.

На первом уроке повторить определения скрещивающихся прямых, расстояния между скрещивающимися прямыми, формулы координат середины отрезка, уравнение плоскости. С помощью системы наводящих вопросов составить алгоритм решения таких задач.

Второй урок – решение задач, с нарастающим уровнем сложности.

Рассмотрим примеры задач на данную тему уроков.

Задача 1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

Задача 2. Точка E – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD.

Задача 3. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Уроки «Нахождение расстояния между плоскостями в пространстве» проводятся в форме лекционно-практических занятий.

На первом уроке рассмотреть необходимый теоретический материал и составить алгоритм решения задач такого типа.

Второй урок – решение стереометрических задач под номером 14 из ЕГЭ.

Рассмотрим примеры задач на данную тему уроков.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Найдите расстояние между плоскостями A_1BD и B_1D_1C.

Задача 2. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен $60°$. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 1 : 2$. Расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP.

Уроки «Решение задач под номером 14 ЕГЭ профильного уровня» проводятся в виде практических занятий.

На первом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение угла между прямыми, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы.

На втором уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы.

На третьем уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение угла между плоскостями, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы.

На четвертом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы.

На пятом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение расстояния от точки до прямой, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы.

На шестом уроке закрепить умение решать стереометрические задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, для этого необходимо вспомнить алгоритм решения данных задач и основные формулы.

Заключительные уроки содержат достаточное количество стереометрических задач, большая часть из которых имеет сложность ЕГЭ профильного уровня.

Примеры задач к данным занятиям приведены выше в параграфе 2.2.

Далее представлен пример технологической карты заключительного урока.

Технологическая карта урока по геометрии

Предмет: геометрия.

Класс: 11 класс.

Тип урока: урок «обобщения изученного материала».

Тема урока: *«Решение задач под номером 14 ЕГЭ профильного уровня»*, седьмой урок темы.

Цели урока:

– *образовательная:* обобщить и систематизировать знания учащихся по элективному курсу;

– *развивающая:* развитие пространственного воображения, умения анализировать;

– *воспитательные:* формирование умения осмысленно слушать, высказывать собственную точку зрения, корректно аргументировать ее, привитие аккуратности в исполнении геометрического чертежа, воспитание честности.

Формировать УУД:

1. *Личностные:*

– проявлять критичность мышления;

– способность к самооценке на основе критерия успешности учебной деятельности.

2. *Регулятивные:*

– осознанно владеть логическими действиями определения понятий, обобщения, установления аналогий; вносить необходимые коррективы в действие после его завершения на основе его оценки и учёта характера сделанных ошибок; высказывать своё предположение;

– оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной оценки.

3. *Коммуникативные:* выстраивать аргументацию, участвовать в диалоге.

4. *Познавательные:*

– умение устанавливать причинно-следственные связи и аналогии; строить логическое рассуждение;

– делать умозаключения, формулировать выводы.

Формы урока: фронтальная и индивидуальная работа.

Методы обучения: наглядные, коммуникационные, частично-поисковые, проблемные.

Технологии:

– системно-деятельностный подход;
– критического мышления;
– информационные технологии обучения;
– элементы здоровье сберегающих технологий.

Оборудование: учебник, листы самооценки, презентация.

В Таблице 5 представлен ход урока.

Таблица 5 – Ход урока

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
1	*2*	*3*	*4*
Организационный момент	Учитель приветствует учащихся, предлагает проверить готовность к уроку, организует На доске девиз*: «С малой удачи начинается большой успех»* - Пожелаем удачи друг другу! - Начнём с самопроверки домашнего задания по образцу на экране(за каждое верно выполненное рядом ставьте плюс) - Посчитайте количество плюсов, оцените свою работу, отметку в лист самооценки.	Включаются в деловой ритм урока. Знакомятся с листом самооценки, Настраиваются на рабочий лад. *Выполняют самопроверку домашнего задания, корректировку и самооценку.*	*Регулятивные:* способность к рефлексии собственной деятельности *Личностные:* мотивация учения
Актуализация опорных знаний	На слайдах представлены формулы: расстояния между двумя точками; скалярного произведения векторов; уравнения прямой и плоскости: расстояния от точки до прямой, и от точки до плоскости; угол между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями. Задача учащихся заполнить пропуски	Фронтально повторяют изученный материал, связанный с координатно-векторным методом.	*Познавательные:* структурирование собственных знаний. *Регулятивные:* организовывать и планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками

	или исправить формулы		

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*
Вторичное закрепление изученного материала	Вместе с учителем решаются задачи 14 из ЕГЭ.	Обсуждают ход решения и записывают в тетрадях	*Познавательные:* умение находить и выделять необходимую информацию; умение делать предположения и обосновывать их; *Регулятивные:* проговаривание последовательность действий на уроке; формирование познавательной инициативы. *Коммуникативные:* умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении вопроса. Умение высказывать свою точку зрения и аргументировать ее.
Самостоятельная работа	Дается одна задача на самостоятельное выполнение. Затем сравниваются ответы и анализируются ошибки.	Ученики работают индивидуально, а затем заполняют листы самооценки	*Личностные:* формирование позитивной самооценки *Регулятивные:* умение самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить необходимые коррективы.

Домашнее задание	Учитель поясняет домашнее задание Подготовиться к итоговой контрольной работе.	Учащиеся записываю домашнее задание	

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*	*4*
Рефлексия		Ученики осуществляют самооценку своей работы на уроке, высказывают свое отношение к уроку	*Регулятивные:* оценивание собственной деятельности на уроке; рефлексия способов и условий действия, адекватное понимание причин успеха и неудач, контроль и оценка процесса и результатов деятельности.

2.4 Описание организации и результатов экспериментальной работы

Опытная проверка по разработанной системе уроков проводилась в 11 классе МАОУ «СОШ №104 г. Челябинска», во время прохождения производственной практики.

Цель опытной проверки: обосновать актуальность проводимого исследования; подтвердить или опровергнуть его гипотезу: «Если, начиная с первых уроков изучения темы «Векторы» целенаправленно обучать учащихся умениям, необходимым для решения задач векторным методом, то это будет способствовать эффективному усвоению учащимися этого метода».

Достижение поставленной цели реализовывалось в три этапа.

Цель первого, констатирующего этапа – обосновать актуальность проводимого исследования.

Для этого были выбраны следующие методы исследования: беседа с учителями математики, тестирование учащихся.

В результате беседы с учителями математики были выявлены следующие типы упражнений, характерные для темы «Векторы», при выполнении которых ученики испытывают трудности:

- представить геометрическое свойство фигуры на «векторный» язык;
- найти нормальный вектор;
- записать уравнение плоскости;
- решить содержательную задачу векторным методом.

Для получения более объективной информации среди учеников 11 класса была проведена входная диагностика в форме вводной контрольной.

Цель: выявить уровень знаний учащихся по теме «Координатно-векторный метод».

Приведем пример вводной контрольной работы.

Задача 1. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACA_1C_1 является квадратом. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

Задача 2. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковых ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки К и М так, что $AК : A_1К = 2 : 3$, $DM : D_1M = 4 : 1$. Найдите расстояние от точки A до плоскостиBKM, если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.

Задача 3. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб. Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Таким образом, контрольная работа включала в себя 3 задачи из ЕГЭ, каждая из которых соответствовал одному из двух уровней усвоения знаний:

1) понимание, умение применять теоретические факты в стандартных ситуациях;

2) умение применять «новые» факты в измененных ситуациях (умение применять векторный метод при решении содержательных геометрических задач).

Контрольную работу выполняли 12 учеников 11 класса, отсутствующих не было.

Приведем результаты проведенной контрольной (Таблица 6).

Таблица 6 – Результаты тестирования

Номер задания	Ответили верно	Ответили неверно	Не приступили к заданию
1	7	5	-
2	5	7	-
3	1	3	8

Анализ результатов тестирования позволил сделать следующие выводы:

1. Около половины учащихся смогли решить две задачи, применяя стандартный способ решения, основанный на теоремах и аксиомах.

2. Весь класса затрудняется в применении координатно-векторного метода к решению содержательных геометрических задач.

Таким образом, проведенный анализ результатов позволил выделить противоречие между необходимостью владения умениями, входящими в состав векторного метода и недостаточным уровнем их сформированности у учащихся в период изучения темы «Векторы в пространстве».

Выделенное противоречие позволило обосновать актуальность проводимого исследования и сформулировать его гипотезу, а именно: целенаправленное обучение школьников умениям, входящим в состав векторного метода, будет способствовать эффективному усвоению ими собственно векторного метода решения содержательных задач.

На втором, поисковом, этапе эксперимента решались следующие задачи:

1. Проведение логико-дидактического анализа темы «Векторы в пространстве» по учебному пособию [4].

2. Разработка методических рекомендаций по обучению школьников векторному методу, основанных на идее целенаправленной предварительной работы по формированию умений, необходимых для успешного овладения учащимися этого метода.

3. Разработка системы уроков по теме и составление календарно-тематического планирования элективного курса, а также пример технологической карты обобщающего урока (параграф 2.3).

4. На третьем, формирующем, этапе была осуществлена апробация разработанных методических рекомендаций в личном опыте при обучении учащихся 11 класса МАОУ «СОШ №104 г. Челябинска» теме «Координатно-векторный метод».

На этапе контролирующего эксперимента была проведена итоговая контрольная работа и пробный экзамен ЕГЭ по математике профильного уровня.

Приведем пример итоговой контрольной работы.

Задача 1. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро PA – $12\sqrt{2}$.Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K. Плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении $2 : 1$, считая от вершины P. Найдите расстояние между прямыми PH и BK.

Задача 2. Точки P и Q – середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно. Пусть H – проекция точки Q на прямую B_1P. Найдите PH, если $AB = 12$.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B – точка Q, причём $AP = BQ = SA$. Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

В результате проверки контрольной работы было выявлено, что большинство учащихся применили координатно-векторный метод и успешно справились с решением задач.

Таким образом, учащиеся в достаточной мере овладели умениями и навыками, необходимых при решении задач векторным методом, что способствовало значительному увеличению доли учащихся, решивших содержательную задачу векторным методом.

Содержание эксперимента и интерпретация его результатов позволили сделать вывод о правильности выдвинутой гипотезы: предложенные методические рекомендации по формированию у учащихся умений и навыков, входящих в состав векторного метода способствуют эффективному усвоению учащимися собственно векторного метода решения содержательных задач.

Вывод по главе 2

Таким образом, координатно-векторный метод – это мощный аппарат для решения многих геометрических задач. Он не требует рассмотрения сложных конфигураций, громоздких, трудно выполняемых построений. Выделим алгоритмы для решения стереометрических задач.

Общий алгоритм применения метода координат:

1) выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения;

2) находим координаты необходимых для нас точек;

3) решаем задачу, используя основные задачи метода координат;

4) переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми:

1) изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора);

2) вписываем фигуру в систему координат;

3) находим координаты концов векторов;

4) подставляем в формулу «косинус угла между векторами»;

5) после чего (если требуется в задаче) зная косинус, находим значение самого угла.

Алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью:

1) изображаем указанные в задаче прямую и плоскость (прямой придаем направление, т.е. вектор);

2) вписываем фигуру в систему координат;

3) находим координаты концов вектора прямой;

4) находим координаты вектора;

5) находим координаты вектора нормали к плоскости;

6) Подставляем в формулу «синус угла между прямой и плоскостью»;

7) после чего зная синус находим значение самого угла.

Алгоритм решения задач на нахождение расстояния от точки до плоскости:

1) на рисунке изображаем указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора);

2) вписываем фигуру в систему координат;

3) находим координаты точек (данной и трех точек плоскости);

4) составляем уравнение плоскости;

5) находим координаты вектора нормали плоскости;

6) подставляем в формулу «расстояние от точки до плоскости».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно сделать вывод, что цель работы достигнута – разработанные методические рекомендации способствуют эффектному усвоению материала, также мы убедились, что метод координат:

− является одним из основных методов при решении задач;

− имеет больше достоинств, чем недостатков;

− дает учащимся эффективный способ решения задач и доказательств;

− показывает тесную связь алгебры и геометрии;

− способствует развитию вычислительной и графической культуры учащихся.

Метод координат является необходимой составляющей при изучении геометрии в школе. Этот метод позволяет упростить процесс и сократить ход решения задачи, помогает учащимся при сдаче ЕГЭ, а, в дальнейшем, и при изучении математики в высших учебных заведениях.

В данной выпускной квалификационной работе:

− проанализированы учебники геометрии 10-11 классов;

− рассмотрен основной теоретический материал, необходимый для усвоения данного метода;

− рассмотрены метод координат, виды и этапы решения задач ЕГЭ данным методом;

− выделены основные умения, необходимые для овладения методом координат;

− разработана система уроков для изучения данного метода.

В процессе исследования, в соответствии с его целями и задачами, были получены следующие основные выводы и результаты:

1. Анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы показал, что для успешного овладения учащимися общего метода решения задач, необходимо обучать их умениям и действиям,

входящим в состав этого метода. К умениям и действиям, составляющих суть векторного метода относят:

- умение преобразовывать векторные выражения;
- умение переводить геометрическое свойство фигуры на векторный язык и обратно;
- умение выражать вектор через другие.

2. В выпускной квалификационной работе охарактеризованы этапы формирования координатно-векторного метода и рассмотрены задачи, обучающие координатно-векторному методу которые широко используются педагогами на этапах формирования и усвоения новых знаний.

3. В исследовательской работе предложенные методические рекомендации по формированию у учащихся умений и навыков, входящих в состав векторного метода способствуют эффективному усвоению учащимися собственно векторного метода решения содержательных задач.

Была осуществлена опытная проверка разработанных методических рекомендаций в 11 классе МАОУ «СОШ №104 г. Челябинска». В качестве проверки эффективности применения разработанных методических рекомендаций была проведена итоговая контрольная работа.

Содержание эксперимента и интерпретация его результатов позволили сделать вывод о правильности выдвинутой гипотезы.

Вышесказанное позволяет утверждать, что цель исследования достигнута, гипотеза подтверждена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Вольфсон, Б.И.** Геометрия. Все типы заданий ГИА-9 и ЕГЭ : учебное пособие / Б.И. Вольфсон. – Ростов-на-Дону : Легион, 2013. – 96 с. – ISBN 978-5-9966-0322-0. – Текст : электронный.
2. **Гельфанд, И.М.** Метод координат / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Кириллов. – [7-е изд.]. – Москва : МЦНМО, 2009. – 184 с. – ISBN 978-5-94057-533-7. –Текст : электронный.
3. **Гусак, А.А.** Справочник по высшей математике / А.А Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – [9-е изд.]. – Минск : ТеатрСистема, 2009. – 640 с. – Текст : электронный.
4. **Мельникова, Н.Б.** Стереометрия. Векторы и координаты в пространстве : методические рекомендации / Н.Б. Мельникова, В.Н. Литвиненко, Г.К. Безрукова. – Москва : ВАРСОН, 2007. – 20 с. – ISBN 978-5-98568-037-9. – Текст : электронный.
5. **Нейман, Ю.М.** Математика. ЕГЭ : учебно-справочные материалы / Ю.М. Нейман, Т.М. Королева, Е.Г. Маркарян. – Москва : Просвещение, 2011. – 287 с. – Текст : электронный.
6. **Понтрягин, Л.С.** Метод координат / Л. С. Понтрягин. – [2-е изд.]. – Москва : Едиториал УРСС, 2004. – 136 с. – ISBN 5-354-00615-5. – Текст : электронный.
7. **Садовничий, Ю.В.** ЕГЭ 2020. Математика: Профильный уровень. Задание 16. Планиметрия / Ю.В. Садовничий. – Москва : Экзамен, 2020. – 144 с. – Текст : электронный.
8. **Смоляков, А.Н.** ЕГЭ по математике: задания группы С. Теория, решения, ответы : учебное пособие / А.Н. Смоляков, В.И. Сидельников. – Москва : Илекса, 2013. – 140 с. – ISBN 978-5-89237-568-9. – Текст : электронный.
9. **Титаренко, А.М.** Математика. 5-11 классы : новейший полный справочник школьника / А.М.Титаренко, А.М. Роганин. – Москва : Эксмо,

2008. – 303 с. – ISBN 978-5-699-27430-7. – Текст : электронный.

10. **Шарыгин, И.Ф.** Математика для поступающих в вузы : учебное пособие / И.Ф. Шарыгин.– [6-е изд.]. – Москва : Дрофа, 2006. – 479 с. – ISBN 5-358-01163-3. – Текст : электронный.

11. **Шафаревич, И. Р.** Линейная алгебра и геометрия / И.Р. Шафаревич. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 512 с. – ISBN 978-5-9221-1139-3. – Текст : электронный.

12. **Ященко, И.В.** Подготовка к ЕГЭ по математике в 2018 году. Профильный уровень : методические указания / И.В. Ященко, С.А. Шестаков. – Москва : МЦНМО, 2018. – 240 с. – Текст : электронный.

13. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б Кадомцев [и др.] – [18-е изд.]. – Москва : Просвещение, 2009. – 255 с. – ISBN 978-5-09-020368-5. –Текст : электронный.

14. Геометрия 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / А.В. Погорелов. – [9-е изд.]. – Москва : Просвещение, 2009. – 175 с. – ISBN 978-5-09-021850-4. – Текст : электронный.

15. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник / Д.В. Беклемишев. – [13-е изд.]. – Москва : Лань, 2015. – 448 с. – ISBN 978-5-09-8114-1844-2. –Текст : электронный.

16. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И.Рыжик. – Москва : Просвещение, 2014. – 255 с. – ISBN 978-5-09-205109-6. –Текст : электронный.

17. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый уровень / Шарыгин И.Ф. – Москва : Дрофа, 2013. – 236 с. – Текст : электронный.

18. Использование метода координат в пространстве для решения заданий Единого государственного экзамена. – URL : http://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/ispolzovanie-metoda-koordinat-v-prostranstve-dlya-resheniya-zadaniy-s-2 (дата обращения: 07.06.021). Текст : электронный.

19. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2021 году Единого Государственного экзамена по математике. Профильный уровень. – URL : https://docviewer.yandex.ru/view/534836932 (дата обращения: 07.06.021). –Текст : электронный.

20. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования. – URL : http://fpu.edu.ru/fpu/722 (дата обращения: 07.06.021). – Текст : электронный.