МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

«Формирование умений исследовательской деятельности обучающихся при изучении темы «Объемы многогранников» в старшей школе»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований: 68,53 % авторского текста Работа рекомендована к защите рекомендована/не рекомендована « » 29.03.2019 г. И.о. зав. кафедрой МиМОМ Шумакова Е.О.	Выполнил: Студент группы ОФ-513/086-5-1 Карпова Кристина Александровна Научный руководитель: доцент, кандидат педагогических наук Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В современном информационном обществе жизнь течет и изменяется с огромной скоростью, поэтому человек должен уметь адаптироваться к новым ситуациям, принимать быстрые и нестандартные решения, видеть проблему и самостоятельно ее решать. Образовательные стандарты ориентируют на развитие познавательной самостоятельности учащихся, на формирование у них умений научно–исследовательской деятельности. Обучающиеся должны основательно обдумывать изучаемую проблему, находить пути ее решения и строить план своей работы, уметь слушать и слышать собеседника, обосновывать свою позицию и высказывать своё мнение. Достичь этой цели можно вооружив учащихся исследовательскими умениями.

Огромное значение для изучения геометрических вопросов, для искусства и для исследований в различных областях науки имеет теория многогранников. Тема «Объемы многогранников» одна из основных в школьном курсе стереометрии и представляет чрезвычайно содержательный предмет исследования, выделяясь среди всех тел многими интересными свойствами, специально к ним относящимися теоремами и задачами.

Изучению многогранников и их объемов должно быть уделено больше внимания, потому что многогранники дают особенно богатый материал для развития пространственного и логического мышления, умения применять полученные знания в реальной жизни, освоение способов вычисления практически важных геометрических величин. В этом учителю могут помочь современные средства обучения: компьютер, мультимедиа проектор, интерактивная доска, а также учебно-методическая литература. Сейчас существует большое количество учебных комплексов, помогающих учителю при подготовке и проведении уроков стереометрии. Например, программа «Poly», комплекс «Живая геометрия», обучающая программа «Стереометрия. Открытая математика», программа «Репетитор по математике» и другие.

Тема научно-исследовательской деятельности школьников и ее применение на уроках математики является одной из самых актуальных. В соответствии с этим были выделены объект, предмет исследования, цель работы, задачи и гипотеза.

Объектом выпускной квалификационной работы является процесс обучения стереометрии в старшей школе.

Предмет исследования – изучение объемов многогранников в курсе стереометрии.

Цель работы – разработать элективный курс по геометрии на тему «Увеличение объема выпуклых многогранников» и апробировать его среди старших классов.

Гипотеза данного исследования состоит в следующем: разработанный курс по геометрии на тему «Увеличение объемов выпуклых многогранников» повышает качество знаний и интерес к предмету, развивает исследовательские умения учащихся.

Для проверки выдвинутой гипотезы решались следующие **задачи:**

1. Изучить литературу по исследуемой теме;
2. Проанализировать ряд учебников по геометрии;
3. Разработать элективный курс по геометрии по теме «Увеличение объема выпуклых многогранников».
4. Практическое преподавание.

Основное содержание работы изложено в двух главах. Первая глава состоит из теоретических сведений о многогранникахи основ научно-исследовательской деятельности учащихся. Во второй главе приводится анализ учебников по геометрии и программа элективного курса занятий для старших классов на тему «Увеличение объема выпуклых многогранников», которая может быть использована в учебном процессе.

ГЛАВА I. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МНОГОГРАННИКОВ

§1. Основные метрические характеристики многогранников

История правильных многогранников берет свое начало с древних времен. Изучением многогранников занимались многие ученые, такие как Фалес из Милета, Пифагор из Южной Италии, греческий математик Теэтет афинский. Платон в своем трактате «Тимей» изложил учение о правильных многогранниках. Евклид доказал, что правильных многогранников пять. Затем Архимед построил 13 полуправильных выпуклых многогранников, которые получили название архимедовых. Позже на основе архимедовых тел Эжен Шарль Каталаном были получены 13 каталановых. Звездчатые многогранники открыл Иоганн Кеплер.А в 1957 году российским математиком В. Г. Ашкинузе был найден четырнадцатый полуправильный многогранник [16].

Многогранник – это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. Многогранники делятся на выпуклые (тело полностью расположено только по одну сторону плоскости, на которой лежит одна из граней) и невыпуклые (звездчатые).

Выпуклые многогранники состоят из следующих классов: классические - параллелепипед, призма, пирамида; правильные (Платоновы тела) – куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр; полуправильные (Архимедовы тела).Звёздчатые многогранники, грани которых пересекаются друг с другом, могут быть образованы путём слияния двух правильных трёхмерных тел либо в результате продолжения их граней. Например, это такие многогранники как звёздчатые формы октаэдра, додекаэдра, икосаэдра, кубооктаэдра, икосододекаэдра. Первоначальное представление об объеме фигуры связывается у учащихся с подсчетом числа кубиков, длина ребра которых равна линейной единице измерения, заполняющих эту фигуру. Такое представление об объеме позволяет посмотреть в школьном курсе геометрии вопрос об объеме прямоугольного параллелепипеда, вывести формулу для его нахождения. Далее изучается объем призмы, затем объем пирамиды, далее объемы других многогранников и фигур вращения [18].

1.1. Параллелепипед

Параллелепипед — многогранник, у которого шесть граней и каждая из них параллелограмм.

Прямоугольный параллелепипед — это параллелепипед, у которого все грани прямоугольники.

Свойства параллелепипеда:

1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
2. Диагонали пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений, то есть ${BD_1}^2 = AB^2 + BC^2 + {BB_1}^2$

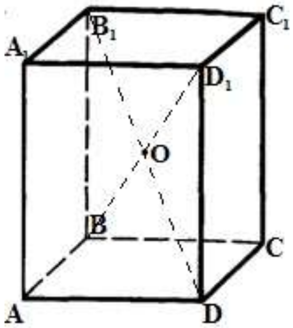


Рис.1 – Параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. Объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту[21].

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = S \cdot h$$

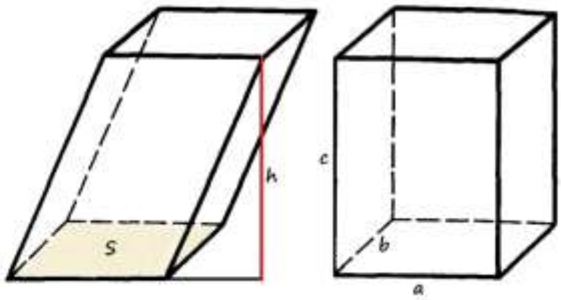


Рис.2– Наклонный и прямоугольный параллелепипед

1.2. Прямая и наклонная призма

Призма — многогранник, две грани которого являются конгруэнтными (равными) многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны основанию, то призма называется прямой, в противном случае – наклонной.

Свойства призмы:

1. Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях;
2. Боковые грани призмы – параллелограммы, грани прямой призмы могут быть прямоугольниками или квадратами;
3. Боковые ребра призмы параллельны и равны между собой;
4. Высота прямой призмы равна длине бокового ребра;
5. Высота наклонной призмы всегда меньше длины ребра.

Объем призмы равен произведению площади основания призмы (S) на ее высоту (h):

$$V = S \cdot h$$

В прямой призме роль высоты выполняет боковое ребро[21].

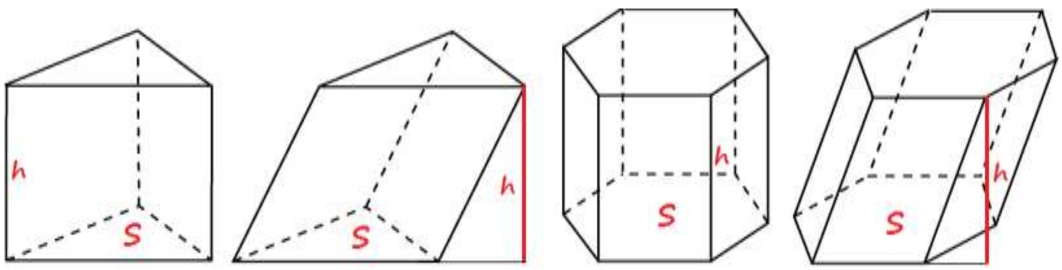


Рис. 3 – Прямая и наклонная треугольная и шестиугольная призмы

1.3. Пирамида

Пирамида — многогранник, одна из граней которого (называемая основанием) — произвольный многоугольник, а остальные грани (называемые боковыми гранями) — треугольники, имеющие общую вершину.

Правильная пирамида - это пирамида, в которой основой является правильный многоугольник, а высота опускается в центр основания.

Свойства пирамиды:

1. Если все боковые ребра равны, то они наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами,и вокруг основания пирамиды можно описать окружность, причем вершина пирамиды проецируется в ее центр. Также верно и обратное, то есть если боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы или если вокруг основания пирамиды можно описать окружность, причем вершина пирамиды проецируется в ее центр, то все боковые ребра пирамиды равны.

Свойства правильной пирамиды:

1. Вершина пирамиды равноудалена от всех углов основания.
2. Все боковые ребра равны и наклонены под одинаковыми углами к основанию.
3. Апофемы всех боковых граней равны.
4. Площади всех боковых граней равны.
5. Все грани имеют одинаковые двугранные (плоские) углы.
6. Вокруг пирамиды можно описать сферу. Центром описанной сферы будет точка пересечения перпендикуляров, которые проходят через середину ребер.
7. В пирамиду можно вписать сферу. Центром вписанной сферы будет точка пересечения биссектрис, исходящие из угла между ребром и основанием.

8. Если центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы, то сумма плоских углов при вершине равна π или наоборот, один угол равен $\frac{\pi}{n}$, где n - это количество углов в основании пирамиды.

Объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания пирамиды (S) на ее высоту (h):

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

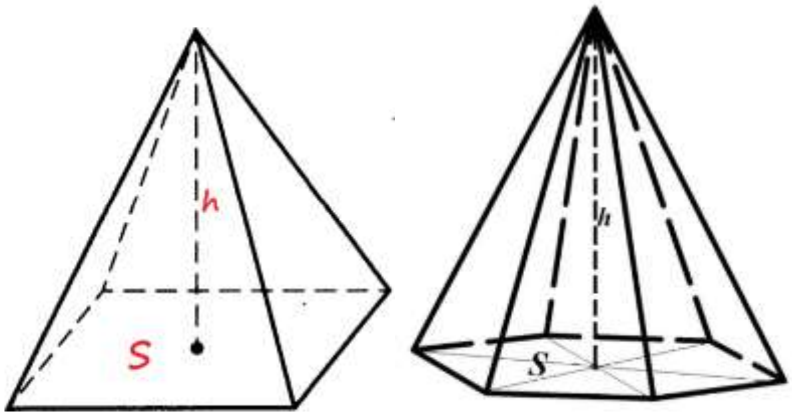


Рис. 4 – Правильные четырехугольная и шестиугольная пирамиды

Усеченная пирамида — многогранник, образованный пирамидой и её сечением, параллельным основанию. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

Объем усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны Sи S_1, вычисляется по формуле [2]:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right)$$

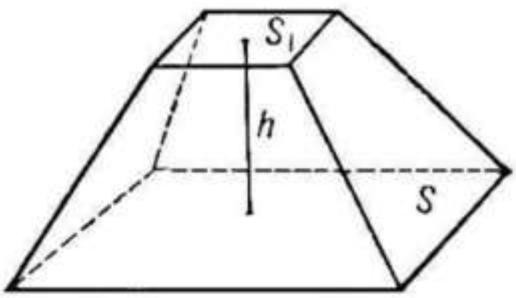


Рис.5 – Усеченная пирамида с основаниями Sи S_1

1.4. Куб

Куб или гексаэдр– правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб является частным случаем параллелепипеда и призмы.

Свойства куба:

1. Все рёбра куба равны и лежат в параллельных плоскостях по отношению друг к другу.
2. Все грани – равные квадраты (всего в кубе их 6), любой из которых может быть принят за основание.
3. Все двугранные углы куба равны $90°$.
4. Куб имеет четыре равные диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
5. Куб имеет 9 осей симметрии, которые все пересекаются в точке пересечения диагоналей гексаэдра, именуемой центром симметрии.
6. Длина d диагонали куба с ребром a находится по формуле: $d = a\sqrt{3}$ [10].

Объем куба с ребром aвычисляется по формуле:

$$V = a^3$$

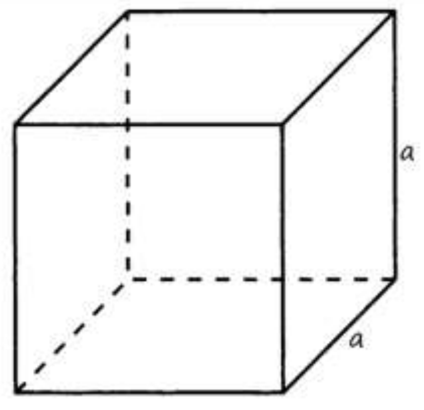


Рис.6– Куб

1.5. Тетраэдр

Тетраэдром называется треугольная пирамида, т.е. в основании пирамиды лежит треугольник.

Свойства тетраэдра:

1. Все четыре грани тетраэдра – равные между собой равносторонние треугольники.

2. Сумма плоских углов при каждой вершине равна $180°$ [1].

Объем тетраэдра с ребром a вычисляется по формуле:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

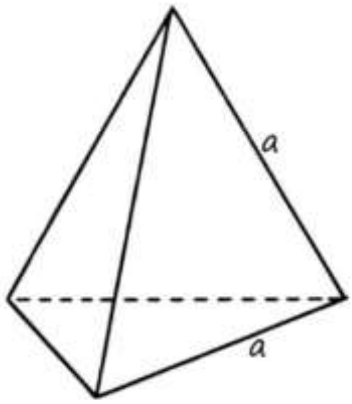


Рис.7– Тетраэдр

1.6. Октаэдр

Октаэдр — правильный многогранник, составленный из восьми равносторонних треугольников.

Свойства октаэдра:

1. Грани правильного октаэдра — восемь равносторонних треугольников.

2. Сумма плоских углов при каждой вершине равна $240°$[7].

Объем октаэдра с ребром aвычисляется по формуле:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

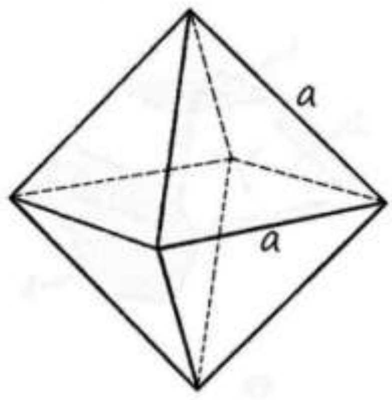


Рис.8– Октаэдр

1.7. Додекаэдр

Додекаэдр – правильный многогранник, составленный из 12 правильных пятиугольников.

Свойства додекаэдра:

1. Все грани равны и имеют одинаковую длину рёбер, а также равную площадь.
2. В каждой вершине пересекаются по три грани, следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324°.
3. У додекаэдра 15 осей и плоскостей симметрии, причём любая из них проходит через вершину грани и середину противоположного ей ребра[7].

Объем додекаэдра с ребром aвычисляется по формуле:

$$V = \frac{a^3}{4} \cdot \left(15 + 7\sqrt{5}\right) \approx 7{,}66 \cdot a^3$$

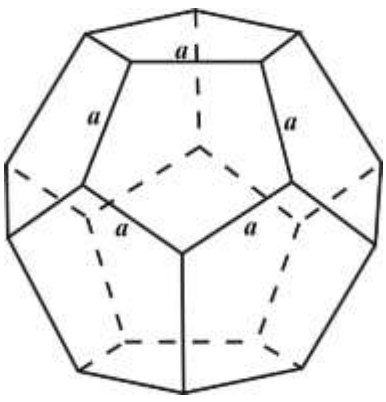


Рис. 9 – Додекаэдр

1.8. Икосаэдр

Икосаэдр – правильный многогранник, составленный из 20 равносторонних треугольников.

Свойства икосаэдра:

1. Все грани равны и имеют одинаковую длину рёбер, а также равную площадь.

2. В каждой вершине пересекается по пять граней, следовательно, сумма плоских углов при вершине равна 300°.

3. У икосаэдра 15 осей и плоскостей симметрии. Плоскости симметрии проходят через четыре вершины, которые лежат в одной плоскости, и середины противоположных параллельных ребер[9].

Объем икосаэдра с ребром a вычисляется по формуле:

$$V = \frac{5}{12} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot a^3 \approx 2{,}18 \cdot a^3$$

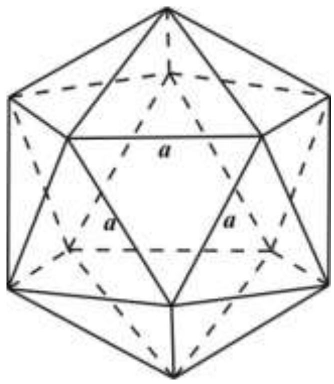


Рис.10 – Икосаэдр

§2. Теорема Эйлера для многогранников

Теорема Эйлера — математическое утверждение, связывающее между собой число ребер, граней и вершин многогранников. Историки математики называют ее первой теоремой топологии — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими. Соотношение Эйлера $\text{В} + \Gamma - \text{Р} = 2$ для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. При этом $\chi = В + Г - Р$ называется эйлеровой характеристикой. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Имеется много доказательств теоремы Эйлера, например, в одном из них используется формула суммы углов для многоугольника, ононе приводится в школьных учебниках по геометрии. Рассмотрим это доказательство [8].

Теорема. Для любого выпуклого многогранника сумма числа его вершин В и числа его граней Г без числа рёбер Р равна двум, то есть

$$В + Г - Р = 2$$

Доказательство: Проверим данное соотношение на пяти правильных многогранниках, для этого составим таблицу:

Таблица 1 — Проверка выполнения условия теоремы Эйлера для правильных многогранников

Название многогранника	Число вершин	Число граней	Число ребер	Соотношение $В + Г - Р$
Куб	8	6	12	2
Тетраэдр	4	4	6	2
Октаэдр	6	8	12	2
Додекаэдр	20	12	30	2
Икосаэдр	12	20	30	2

Из таблицы видно, что для каждого правильного многогранника соотношение теоремы Эйлера выполняется. Докажем условие теоремы для любого выпуклого многогранника.

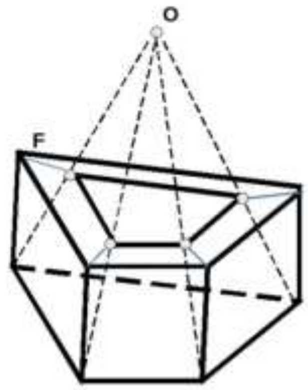


Рис.11 – Выпуклый многогранник с проекциями остальных граней на грань F из центра O.

1) Возьмем снаружи многогранника точку O вблизи от какой-либо грани F и спроектируем остальные грани на F из центра O. Их проекции образуют разбиение грани F на многоугольники.

2) Подсчитаем двумя способами сумму α углов всех полученных многоугольников и самой грани F. Сумма углов n-угольника равна $\pi(n-2)$. Сложим эти числа для всех граней (включая грань F). Сумма членов вида πnравна общему числу сторон всех граней, то есть $2P$, так как каждое из P ребер принадлежит двум граням. Всего Г слагаемых, поэтому $\alpha = \pi(2\text{Р} - 2\Gamma)$.

3) Теперь найдем сумму углов при каждой вершине разбиения и сложим эти суммы. Если вершина лежит внутри грани F, то сумма углов вокруг нее равна 2π. Таких вершин В-k, где k – число вершин самой грани F, а значит, их вклад равен $2\pi(\text{В} - k)$. Углы при вершинах F считаются в сумме дважды (как углы F и как углы многоугольников разбиения); их вклад равен $2\pi(k-2)$.

Таким образом, $\alpha = 2\pi\,(\text{В} - k) + 2\pi\,(k-2) = 2\pi\,(\text{В} - 2)$. Приравнивая два результата и сокращая на 2π, получаем требуемое равенство $\text{Р} - \Gamma = \text{В} - 2$.

§3. Основы научно-исследовательской деятельности обучающихся

Развитие современного образования диктует новые способы организации урочной и внеурочной деятельности обучающихся. Изменения в обществе требуют развития новых способов обучения, педагогических технологий, нацеленных на творческую инициативу и развитие личности. Сегодня учитель обязан научить,не только ставить и решать учебные задачи, но и научить мыслить, добывать и применять знания, взаимодействовать в разнообразных группах, развивать творческий потенциал ученика, быть открытым к новым знаниям и социальным связям.

Этим и было обусловлено введение в образовательный процесс методов и технологий на основе научно-исследовательской деятельности обучающихся. Рассмотрим подробнее виды научно-исследовательской деятельности школьников. Исследовательскую работу можно разделить на несколько групп:

1. Научно-исследовательская деятельность;
2. Проектная деятельность обучающихся;
3. Проектно-исследовательская деятельность.

Научно-исследовательская деятельность обучающихся— деятельность учащихся, связанная с решением творческой, исследовательской задачи с заранее неизвестным решением. Исследовательская работа состоит из основных этапов, присущих исследованию из любой области науки: постановку проблемы, изучение теории, посвященной данной проблематике, подбор методик исследования и практическое овладение ими, сбор собственного материала, его анализ и обобщение, научный комментарий, собственные выводы.

Проектная деятельность обучающихся — совместная учебно-познавательная, творческая или игровая деятельность учащихся, имеющая общую цель, методы и способы, направленная на достижение общего результата деятельности. Главным критерием проектной деятельности является наличие предварительно выработанных представлений о конечном продукте деятельности, этапов проектирования и реализации проекта, включая его осмысление и рефлексию результатов деятельности.

Проектно-исследовательская деятельность — деятельность по проектированию собственного исследования, предполагающая выделение целей и задач, принципов отбора методик, планирование хода исследования, определение ожидаемых результатов, оценка реализуемости исследования, определение необходимых ресурсов[14].

Далее рассмотрим особенности организации научно-исследовательской деятельности школьников.

Главной особенностью исследования школьников является то, что оно учебное, то есть не требует больших научных открытий, а предполагает развитие исследовательских навыков как таковых, умений самостоятельно отобрать и изучить учебный материал, а также расширить свой кругозор и развить творческий потенциал. Учитель в данном случае выступает как наставник, человек, координирующий и направляющий деятельность ученика. Педагогу важно помнить о том, что научной деятельностью могут заниматься не все школьники, так как в исследовании нужно мыслить креативно и нестандартно. При этом общий уровень успеваемости обучающегося не отражает в полной мере реальные возможности ученика к проведению исследовательской работы.

Существует большое количество методик, ориентированных на определение у учеников способностей к творческой и поисковой деятельности. Это ряд простых, но эффективных заданий, помогающих на первом этапе оценить творческий потенциал и выявить нестандартный тип мышления. Пример таких заданий представлен в ПРИЛОЖЕНИИ 10. При анализе ответов учитель должен оценивать быстроту воображения, оригинальность, заинтересованность ученика в такой работе, фантазию. Если обучающийся вообще не проявляет интереса к такой работе или его ответы «сухие» и не отличаются оригинальностью, то это не значит, что он не сможет заниматься научно-исследовательской деятельностью. В этом случае все будет зависеть от желания, ответственности, трудолюбия и любознательности ученика, а также от того, насколько правильно учителем будет организована работа учащихся[12].

Цель научно-исследовательской работы школьников – поэтапное и самостоятельное освоение учащимися познавательного процесса.

Отсюда мы можем сформулировать задачи научно-исследовательской деятельности обучающихся.

1. Развитие коммуникативных способностей.

В процессе осуществления научно-исследовательской деятельности развивается образное мышление,память, логика и умение четко и ясно излагать свои мысли.

2. Развитие учебно-информационных умений и самостоятельности.

К ним относятся умения работать с литературой, самостоятельно выделять и анализировать важную информацию при решении учебных задач.

3. Развитие организаторских умений.

Предполагают целеполагание, планирование, организацию, контроль и анализ результатов своей деятельности.

4. Самореализация и самосовершенствование.

Научно-исследовательская работа помогает оценить свои возможности, развить творческий потенциал и открыть новые знания.

Поводом для ученического исследования может послужить любое явление, которое заинтересовало учащихся; вопрос, возникший на уроках или во внеурочное время; информация, услышанная по телевидению или сети Интернет. Именно это и будет являться проблемой исследования, исходя из которой, формулируется тема исследования. Итак, написание научно-исследовательской работы разбивается на следующие этапы:

1. Выбор темы.
2. Формулировка целей и задач исследования.

Цель формулируется кратко и четко, выражая то, что намеревается сделать исследователь. Цель конкретизируется и разбивается на более мелкие задачи [15].

3. Работа с источниками.

Источником ученического исследования могут быть исторические факты, теоремы и аксиомы, научные статьи, различная литература, документы, фотографии т.д. Источник исследования должен быть понятен для ученика. Задача учителя — научить работать с источником, задача ученика — видеть в нем материал для исследования.

4. Сбор, изучение, обработка и систематизация материала.
5. Написание работы.
6. Собственные выводы.

При этом научно-исследовательская работа обучающегося должна иметь определенную и четкую структуру. Рассмотрим требования к содержанию исследовательской работы.

1. Титульный лист.

Содержит ФИО автора и научного руководителя, наименование учебного заведения, тему, город и год.

2. Оглавление.

Наименование всех глав работы с номерами страниц.

3. Введение (от 1 до 3-х страниц).

Включает в себя актуальность работы, цели, задачи, методы исследования, источники и методику работы.

4. Основная часть.

Содержит главы (разделы) теоретического и практического материала.

5. Выводы (заключение).

Краткие выводы по результатам выполненной работы, состоящие из нескольких пунктов.

6. Список литературы.

Перечень источников, использованных при написании работы, записанный в алфавитном порядке.

Заключительным и одним из самых важных этапов является представление своей работы. Публичное выступление может проходить в различных формах. Например, доклад перед классом или учителями, дискуссия, спор с оппонентами и т.д. Но особое место занимает ученическая научная конференция, которая проводится на разных уровнях (неделя науки в школе; городская, областная и всероссийская научно-практическая конференция). Каждому исследователю важно услышать мнение оппонентов, коллег и просто слушателей. Также «защита» своей работы перед аудиторией имеет множество положительных моментов, особенно для школьников: учат не бояться аудитории, быть уверенным и смелым, вести дискуссию и аргументировать свою точку зрения, а также обмениваться научными знаниями и опытом [23].

§4. Теоремы об увеличении объема выпуклых многогранников

В 40-х годах XX века фирма Тэтра Пак изобрела картонные пакеты для молока, которые имели форму тетраэдра. Позже возник вопрос можно ли из этого же куска картона сделать пакет с большим объемом? Если перевести на язык математики, то вопрос звучит так: можно ли из развертки тетраэдра сделать многогранник с большим объемом?

Сначала этот вопрос рассматривал российский математик Александр Данилович Александров и доказал теорему, что из развертки выпуклого многогранника нельзя сделать также выпуклый многогранник с большим объемом. Может можно сделать невыпуклый многогранник с большим объемом?

В 1996 году американец Дэвид Бликер доказал теорему о том, что из развертки выпуклого многогранника с треугольными гранями можно сделать невыпуклый с большим объемом, и привел алгоритм построения такого многогранника. Приведем описание преобразований Бликера над разверткой тетраэдра:

1. Разведём грани и на каждой добавим дополнительные вершины и рёбра. Возьмём центральный правильный треугольник, определённый соотношением, что его сторона в два раза больше расстояния от его вершины до стороны грани, проведём дополнительные рёбра. Те же построения сделаем на каждой грани.

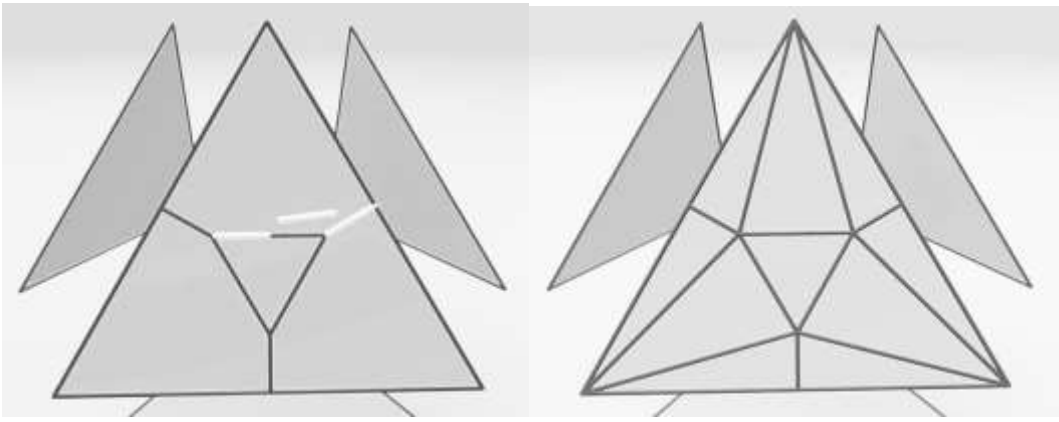


Рис.12 – Грань тетраэдра с дополнительными построениями

2. Изогнём каждую грань следующим образом: углы и середины сторон в сторону центра, а центральный треугольничек — от центра.

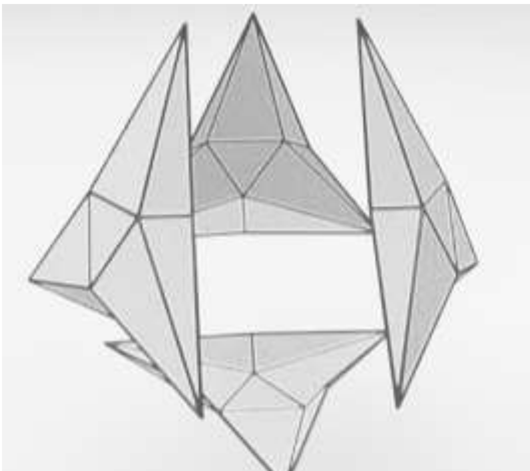


Рис.13– Изгибание граней

3. Все грани изогнуты одинаково, и их можно склеить в многогранник. Некоторые новые грани лежат в одной плоскости, и рёбра между ними исчезают.

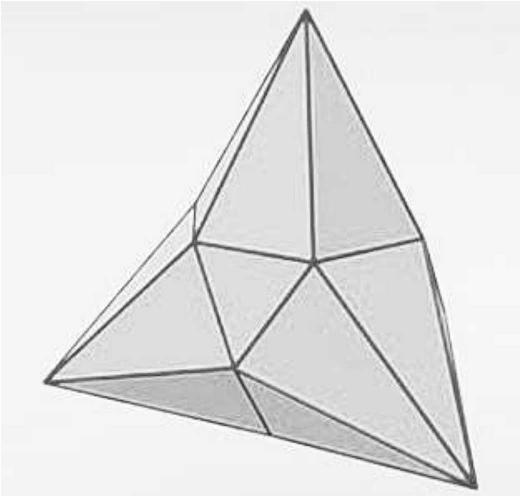


Рис.14– Построенный невыпуклый многогранник.

Полученный многогранник имеет объем больше объема тетраэдра примерно на 37,7%. Но Дэвид Бликер рассмотрел не только тетраэдр, но и другие многогранники — куб и додекаэдр. Объем невыпуклых многогранников, полученных из разверток куба и додекаэдра, также оказался больше, чем изначальный.

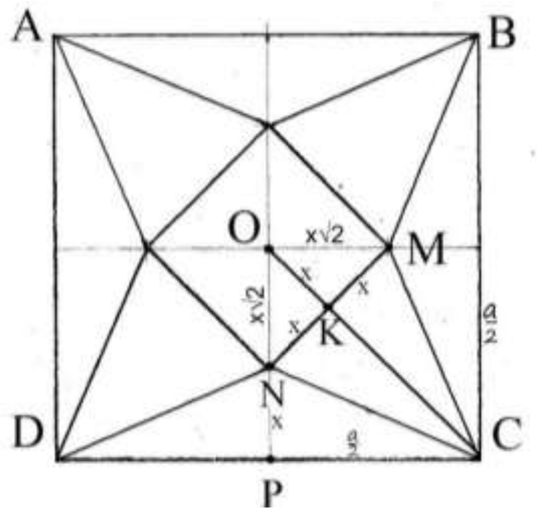


Рис.15 – Грань куба с дополнительными построениями.

В 2006 году двумя математиками Гурием Самариным и Игорем Паком отдельно друг от друга было доказано, что теорема Бликера верна. Условие треугольности граней было не так важно, оно только позволило Бликеру доказать свою теорему, но теорема верна и без этого условия.

Теорема: Из развёртки любого выпуклого многогранника всегда можно сложить невыпуклый многогранник с большим объемом [11, 26].

ГЛАВА II. ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

§1. Методические подходы к изучению объемов многогранников в учебниках по геометрии

Учебник [2] является продолжением учебника для 7-9 классов тех же авторов. Понятие многогранника вводится в 3 главе, в ней же изучаются правильные многогранники, призма и пирамида. Тема «Объемы тел» дана самой последней главой и на ее изучение отводится 22 часа. Эта глава представлена четырьмя параграфами: §1.Объем прямоугольного параллелепипеда, §2.Объем прямой призмы и цилиндра, §3.Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса, §4.Объем шара и площадь сферы. После каждого параграфа даны задачи на отыскание объемов тел. Система упражнений последовательна, содержит задачи разного уровня сложности, примеры решения наиболее важных и трудных задач, которые потребуются ученикам как опорные, при доказательстве теорем и их следствий. В конце главы учащимся предлагаются 23 дополнительные задачи, разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар, а также задачи для повторения и задачи повышенной трудности. Для решения этих задач учащимся понадобятся знания не только изученной главы, но и знания, умения и навыки, полученные ранее.

Понятие объема вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры, и формулируются свойства объемов. Существование и единственность объема тела принимается без доказательства.Объем прямоугольного параллелепипеда выводится с использованием свойств объема и знаний учащихся о предельном переходе. С помощью формулы объема прямоугольного параллелепипеда выводится формула объема треугольной пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник. С использованием этого факта и свойств объема выводится формула объема прямой призмы. Объемы наклонной призмы и пирамиды выводятся с использованием определенного интеграла.

В учебнике [17] тема «Объемы многогранников» дана в параграфе 7 после параграфа «Тела вращения». Параграф состоит из 10 пунктов: понятие объема, объем прямоугольного параллелепипеда, объем наклонного параллелепипеда, объем призмы, равновеликие тела, объем пирамиды, объем усеченной пирамиды, объемы подобных тел, контрольные вопросы, задачи. Материал изложен четко, без лишних слов, что позволяет учащимся пользоваться этим учебником как справочником при подготовке к ЕГЭ.

Отличительной особенностью этого учебника является то, что сначала идет доказательство теоремы, а затем формулируется сама теорема. После каждого пункта приводится пример решения одной задачи на пройденный материал. В конце всего параграфаданы 49 задач на отыскание объемов многогранников различного уровня сложностиотдельно для каждого пункта.

По этому учебнику понятие объема и его свойства изучаются на ознакомительном уровне с опорой на наглядные представления и жизненный опыт учащихся. При выводе формул объемов прямоугольного параллелепипеда, пирамиды широко привлекаются интуитивные представления учащихся о предельном переходе. Вывод формулы объема наклонного параллелепипеда имеет вспомогательный характер, с его помощью выводится формула объема призмы. Объем пирамиды выводится с помощью теоремы о равновеликих телах.

Учебник [20] двухуровневый: если рассматривать параграфы со звездочкой, то учебник профильного уровня, без них — базового. Направлен на повышение математической культуры учащихся, интеллектуальное развитие личности ученика, его творческих способностей, формирование представлений и роли математики в жизни. Особенностью данного учебника является то, что в каждом параграфе размещены нестандартные и исследовательские задачи, исторические сведения. Это повышает интерес учащихся к изучению математики, расширяет кругозор и дает богатый материал для размышлений.

Изучение многогранников начинается в IV главе, при этом в отличие от других учебников для профильного уровня подготовки предлагается рассмотреть параграфы о полуправильных, звездчатых многогранниках и кристаллах. Также в этой главе под звездочкой дана теорема Эйлера, которая доказывается с помощью растяжения поверхности многогранника.

Тема «Объем и площадь поверхности» раскрывается в VI главе. Здесь автор предлагает изучить при базовом уровне подготовки принцип Кавальери, который в большинстве учебников представлен со звездочкой. В этой главе даются формулы объемов основных многогранников. Большое внимание уделено использованию средств наглядности: изображению пространственных фигур, различным способам их моделирования; приведены соответствующие рисунки, чертежи, модели, иллюстрации, компьютерная графика.

Учебник И.Ф. Шарыгина [24] характеризуется отказом от аксиоматического метода построения материала и обращает свое внимание на использование наглядных методов в процессе изучения геометрии. В этом учебнике реализовано дифференцированное изучение материала: знаком звездочка отмечен материал для углубленного изучения, специально выделены полезные (П), важные (В) и трудные (Т) задачи.

Учебник очень иллюстративный, и теоремы в нем нацелены не столько на прохождение программы, сколько на создание необходимого запаса сведений для решения задач, приобретение практического опыта, также большое внимание уделено развитию навыков у учащихся правильного построения чертежа.

Изучение темы «Объемы» начинается с начала 11 класса. Этот раздел изложен весьма интересно, в нем имеются теоремы, не рассматриваемые в школе. Например, такие, как «Принцип Кавальери», «Сапог Шварца», «Ограниченность числа видов правильных многогранников», «Взаимосвязь между всеми правильными многогранниками». Доказательства этих теорем поучительны сами по себе, а владение ими дает запас фактов и приемов, позволяющих решать довольно трудные задачи.

§2. Элективный курс по геометрии «Увеличение объема выпуклых многогранников»

Пояснительная записка

Актуальность курса обусловлена тем, что стереометрия является одним из главных разделов геометрии и предполагает систематическое изучение свойств многогранников, развитие пространственного и логического мышления. Данный курс рассчитан на 20 часов и предполагает четкое изложение теории вопроса, практикум и итоговую контрольную работу. Содержание курса можно варьировать с учетом интересов и уровня знаний учащихся.

Цели курса: систематизировать знания учащихся о свойствах геометрических тел; показать способы увеличения объема для тетраэдра и куба при сохранении площади их поверхности и выяснить, насколько увеличивается объем невыпуклого многогранника, сложенного из развертки тетраэдра и развертки куба; освоить базу научно-исследовательской деятельности.

Задачи курса:

— расширение и углубление базовых знаний по геометрии, открытие новых знаний;

— развитие интереса к предмету и возможности овладения им с другой научной точки зрения;

— развитие пространственных представлений учащихся при составлении моделей многогранников и навыков грамотного построения чертежа.

Требования к уровню подготовки обучающихся:

По окончании изучения элективного курса «Увеличение объема выпуклых многогранников» учащиеся должны:

— знать и распознавать на рисунках и чертежах геометрические фигуры и тела;

— решать простейшие геометрические задачи в пространстве;

— уметь находить объемы нестандартных геометрических тел (тел, составленных из нескольких выпуклых многогранников);

— решать задачи на доказательство, опираясь на свойства геометрических тел;

— уметь составлять модели многогранников из их разверток и делать над ними преобразования;

— уметь находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять её в понятной форме;

— уметь самостоятельно выдвигать гипотезы, ставить цели и составлять алгоритмы решения задач;

— уметь выбирать наиболее подходящие пути решения задач и достижения целей;

— уметь создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебно-познавательных задач;

— уметь использовать математические средства наглядности (чертежи, схемы, рисунки) для аргументации и интерпретации;

— устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и выводы;

— сформировать/развитьспособности в области научно-исследовательской деятельности;

— уметь использовать компьютерные технологии в обучении;

— уметь грамотно и четко излагать свои мысли устно и письменно, адекватно оценивать результаты своей деятельности;

— творчески мыслить, быть инициативными и находчивыми в решении учебных и других задач.

Таблица 2 — Тематическое планирование

№ п/п	Тема	Количество часов		
		Всего	Лекция	Практикум
1	Основные виды многогранников и их свойства	3	3	
2	Теорема Эйлера	1	1	
3	Изготовление моделей многогранников из разверток	5		5
4	Решение задач на вычисление объемов многогранников	2		2
5	Основы исследовательской деятельности	2	1	1
6	Преобразования над разверткой тетраэдра и куба.	3	1	2
7	Нахождение объема невыпуклого многогранника, полученного из тетраэдра	3		3
8	Итоговое занятие	1		1
	Итого	20	6	14

Основное содержание

Тема 1. Основные виды многогранников и их свойства. 3ч

Параллелепипед. Куб. прямая и наклонная призма. Пирамида. Тетраэдр. Октаэдр. Додекаэдр. Икосаэдр.

Тема 2. Теорема Эйлера. 1ч

Теорема Эйлера: история и доказательство. Решение задач с использованием теоремы Эйлера.

Тема 3. Изготовление моделей многогранников из разверток. 5ч

Параллелепипед и куб. Треугольная и пятиугольная призмы. Четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Тетраэдр и октаэдр.Икосаэдр и додекаэдр.

Тема 4. Решение задач на вычисление объемов многогранников. 2ч

Решение простейших задач на отыскание объемов выпуклых многогранников. Решение задач повышенной сложности.

Тема 5. Основы исследовательской деятельности. 2ч

Научно-исследовательская деятельность обучающихся: определение, виды, структура исследовательской работы. Тест на определение способностей к творческой и поисковой деятельности.

Тема 6. Преобразования над разверткой тетраэдра и куба. 4ч

История вопроса и теоретическое обоснование. Проведение дополнительных построений на развертках тетраэдра и куба, получение невыпуклых многогранников.

Тема 7. Нахождение объема невыпуклого многогранника, полученного из тетраэдра. 3ч

Практические занятия, на которых нахождение объема невыпуклого многогранника разбивается на несколько этапов.

Тема 8. Итоговое занятие. 2ч

Подведение итогов проделанной работы, защита докладов.

Методические рекомендации

На первом занятии учащимся предлагается объяснить тему элективного курса. Затем поставить перед классом вопрос «Знаете ли вы какие-либо способы увеличения объема выпуклых многогранников без разрезов?». Этот вопрос вызовет затруднение у учащихся. Далее класс стоит познакомить с целями и задачами курса и акцентировать внимание на том, что ответ на данный вопрос будет найден в процессе изучения тем данного элективного курса. Это будет являться своего рода мотивацией учащихся к более углубленному изучению геометрии.

Тема 1. Основные виды многогранников и их свойства.

Данная тема предполагает повторение определения многогранника, рассмотрение их классификации, основных видов многогранников, их свойств, формул нахождения объемов геометрических тел. На этом этапе обязательно изображение учащимися рисунков и чертежей каждой пространственной фигуры. При изучении темы для развития пространственного мышления и привития устойчивого интереса к геометрии учителем могут быть использованы возможности программы «Живая математика» или презентационный материал.

Тема 2. Теорема Эйлера.

Данный урок можно построить в форме деловой игры. Для этого составляется план работы на уроке, и класс делится 3 на разноуровневые группы. Группа №1 – биографы, они должны будут рассказать краткую биографию Леонарда Эйлера. Группа №2 – историки должны рассказать о разделе топологии. Группа №3 – исследователи формулируют теорему Эйлера и проверяют ее для известных им выпуклых многогранников. Первая часть урока будет посвящена поиску и отбору информации, подготовке к выступлению (20 мин), вторая часть – представлению результатов работы в группах (15 мин). Во время поиска информации учитель обязательно контролирует работу учащихся и по необходимости отвечает на вопросы. На втором этапе работы спикеры от каждой группы представляют свой проект всему классу. После этого необходимо проанализировать информацию, обменяться мнениями и подвести итоги работы. Также учителю можно подобрать некоторые упражнения на теорему Эйлера, проверяющие насколько хорошо усвоен учебный материал учащимися.

Тема 3. Изготовление моделей многогранников из разверток.

При изучении данной темы рекомендуется, чтобы каждый учащийся распечатал себе развертки выпуклых многогранников (ПРИЛОЖЕНИЯ 1-10) и склеивал их на уроке вместе с учителем. При изготовлении моделей многогранников развивается мелкая моторика, пространственное мышление, также эти модели можно использовать при решении различных задач.

Тема 4. Решение задач на вычисление объемов многогранников.

На первом занятии по теме используются простейшие задачи на понимание формул объемов выпуклых многогранников [3, 4]. Примеры задач:

1. Дан куб с ребром 3 см. Найдите его объем.
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите объем данной призмы.
3. Как изменится объем прямого параллелепипеда, если одно из его измерений увеличить в 2 раза, 3 раза, n раз?
4. Найдите высоту правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 20 см и объем 4800 см^3.
5. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 3 см, а высота 5 см.

На втором занятии можно решить несколько задач повышенной трудности, в которых проделывается несколько действий. Приведем примеры таких задач:

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. найдите ребро равновеликого ему куба.
2. Основание наклонного параллелепипеда – квадрат, сторона которого равна 1 м. одно из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.
3. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. найдите объем призмы.
4. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см, 8 см. все боковые ребра равны 9 см. найдите объем пирамиды.
5. Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

Тема 5. Основы исследовательской деятельности.

На первом лекционном занятии учитель должен рассказать, что такое научно-исследовательская деятельность учащихся, ее цели, задачи, на какие этапы разбивается проведение исследования, а также требования к содержанию исследовательской работы. На втором практическом занятии можно предложить учащимся выполнить задания на определение способностей к творческой и поисковой деятельности (ПРИЛОЖЕНИЕ 11)

Тема 6. Преобразования над разверткой тетраэдра и куба.

В начале изучения данной темы следует показать учащимся сюжет новостей первого канала о пакетах молока в форме тетраэдра, которые появились в СССР в 60-х годах. Затем задать учащимся вопрос «Как вы думаете, можно ли из этого же куска картона сделать пакет, в который вместится больше молока, чем изначально?». После изложения ответов учеников, попросить их переформулировать вопрос на язык математики и рассказать об ученых, которые занимались изучением этой задачи.

На практических занятиях следует рассмотреть преобразования Дэвида Бликера над развертками тетраэдра и куба и провести их вместе с учащимися, составить модели получившихся невыпуклых многогранников. Обязательно акцентировать внимание класса на том, что многогранник невыпуклый.

Развертки невыпуклых многогранников, полученных из разверток тетраэдра и куба, представлены в ПРИЛОЖЕНИЯХ 12-13.

Тема 7. Нахождение объема невыпуклого многогранника, полученного из тетраэдра.

Нахождение объема невыпуклого многогранника разбивается на несколько этапов:

1. Работа с разверткой геометрической фигуры;
2. Разбиение полученного невыпуклого многогранника на несколько выпуклых многогранников;
3. Нахождение объемов выпуклых многогранников и, как следствие, объема всего невыпуклого многогранника.
4. Нахождение отношения объемов исходного тетраэдра и невыпуклого многогранника.
5. Вывод из проделанных расчетов.

Рассмотрим примерное оформление данных расчетов и найдем объем тела, полученного по алгоритму, описанному выше.

Чтобы посчитать объем получившегося многогранника разобьем его на части. Полученный многогранник состоит из четырёх одинаковых шестиугольных пирамидок и фигуры, которая является усечённым тетраэдром. Чтобы проще посчитать объем, добавим усеченные у тетраэдра углы — маленькие тетраэдры, а от получившегося значения объема отнимем объем добавленных кусочков.

Рассмотрим одну грань невыпуклого многогранника.

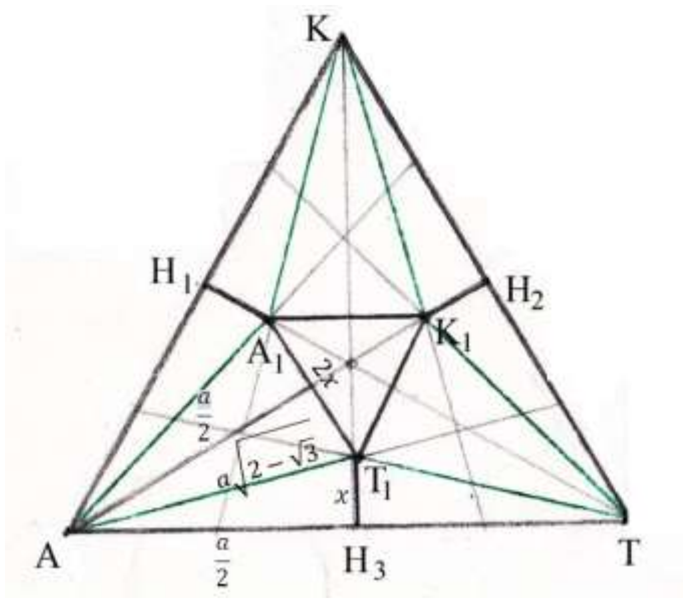


Рис.16 – Грань невыпуклого многогранника, полученного из тетраэдра.

I. Найдем объем исходного тетраэдра, где a – длина его ребра.

$V_{\text{тетр}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}(a = 1 \Rightarrow V_{\text{тетр}} = 0.1178511301977578)$

II. Рассмотрим ΔAPT_1иΔAT_1H_3:

1) AT_1– общая сторона;

2) $A_1T_1 \parallel KT$ (поусловию), $AH_2 \perp KT \Rightarrow A_1T_1 \perp KT \Rightarrow \angle APT_1 = \angle AH_3T_1 = 90°$;

AF– биссектриса$\angle H_2AT \Rightarrow \angle H_2AF = \angle FAT = 15°$

ВΔAT_1H_3: $\angle AT_1H_3 = 180° - \angle T_1H_3A - \angle T_1AH_3 \Rightarrow \angle AT_1H_3 = 180° - 90° - 15° = 75°$

Такимобразом, $\angle AT_1H_3 = \angle AT_1P$

3) $PT_1 = T_1H_3 = x$ (по условию)

Таким образом, $\Delta APT_1 = \Delta AT_1H_3 \Rightarrow AP = AH_3 = \frac{a}{2}$ (ПРИЛОЖЕНИЕ 12)

III. Рассмотрим ΔAH_2T – прямоугольный

$KT = a \Longrightarrow H_2T = \frac{a}{2}$ (так как ΔАКТ– равносторонний $\Longrightarrow$ АН$_2$– медиана, биссектриса, высота)

По теореме Пифагора: $AH_2 = \sqrt{AT^2 - H_2T^2} \Rightarrow AH_2 = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ПРИЛОЖЕНИЕ 12)

IV. В ΔAKT: $\frac{AO}{OH_2} = \frac{2}{1}$ (свойство биссектрис треугольника) $\Rightarrow$ AO $= \frac{a\sqrt{3}}{3}, OH_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$OP = r$ (радиус вписанной окружности $\Delta A_1K_1T_1$)

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$AO = AP + PO \Rightarrow PO = AO - AP \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$= \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{6} \Rightarrow x = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$$

$A_1T_1 = 2x = 2 \cdot \frac{a(2-\sqrt{3})}{2} = a(2-\sqrt{3})$ (ПРИЛОЖЕНИЕ 12)

V. Найдем объем шестиугольной пирамиды. Ее основанием является правильный шестиугольник со стороной $A_1T_1 = 2x = a(2-\sqrt{3})$. Обозначим объем V_1.

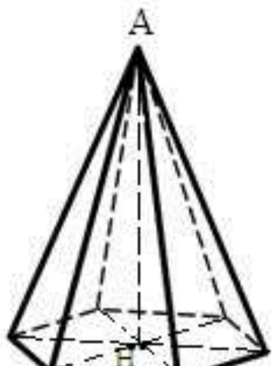


Рис.17 – Правильная шестиугольная пирамида, отсекаемая от невыпуклого многогранника.

$$S_{осн} = \frac{{A_1T_1}^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})^2}{2}$$

Рассмотрим ΔAT_1H_3: $AH_3 = \frac{a}{2}, T_1H_3 = x = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$, $\angle AH_3T_1 = 90°$

По теореме Пифагора: $AT_1 = \sqrt{{T_1H_3}^2 + {AH_3}^2} = \sqrt{\frac{a^2(2-\sqrt{3})^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2(8-4\sqrt{3})}{4}} = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$A_1T_1 = T_1H$ (так как основание – правильный шестиугольник)

$B\Delta AHT_1$: $AH = h = \sqrt{{AT_1}^2 - {HT_1}^2} \Rightarrow h = \sqrt{a^2(2-\sqrt{3}) - a^2(2-\sqrt{3})^2} = a\sqrt{3\sqrt{3}-5}$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})^2}{2} \cdot a\sqrt{3\sqrt{3}-5} = \frac{a^3\,(2-\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{9\sqrt{3}-15}}{2}$$

$$4 \cdot V_1 = 2a^3\,(2-\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{9\sqrt{3}-15}$$

VI. Найдем объем треугольной пирамиды, отсекаемой от тетраэдра. Обозначим его V_2. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной $A_1T_1 = a(2-\sqrt{3})$.

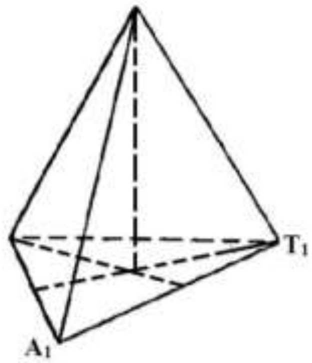


Рис.18 – Правильная треугольная пирамида (тетраэдр), отсекаемая от исходного тетраэдра.

$$V_2 = \frac{{A_1T_1}^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V_2 = \frac{a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

$$4 \cdot V_2 = \frac{4a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Найдем объем тетраэдра, от которого отсекаются треугольные пирамиды. Обозначим его V_3.Основанием тетраэдра является равносторонний треугольник со стороной $3 \cdot A_1K_1 = 3a(2-\sqrt{3})$.

$$V_3 = \frac{(3 \cdot A_1K_1)^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

$$V_3 = \frac{27a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Найдем объем усеченного тетраэдра (от тетраэдра отсекли 4 треугольные пирамиды). Обозначим его V_4.

$$V_4 = V_3 - 4 \cdot V_2$$

$$V_4 = \frac{27a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} - \frac{4a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{23a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

VII. Найдем объем V невыпуклого многогранника.

$$V = 4 \cdot V_1 + V_4$$

$$V = 2a^3\,(2-\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{9\sqrt{3}-15} + \frac{23a^3(2-\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

$$= a^3 \cdot \left[2\sqrt{3}(7-4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3\sqrt{3}-5} + \frac{23\sqrt{2} \cdot (26-15\sqrt{3})}{12}\right]$$

$$a = 1 \Rightarrow V = 0{,}16229774799201$$

VIII. Найдем отношение объемов Vи $V_{\text{тетр}}$

$\frac{V}{V_{\text{тетр}}} = \frac{0{,}16229774799201}{0{,}1178511301977578} \approx 1{,}3771 \Rightarrow$ объем увеличился примерно 37,7 %.

После проделанных расчетов учитель может предложить одному ученику провести исследование: рассчитать объем невыпуклого многогранника, полученного из развертки куба; оформить исследовательскую работу и рассказать о своих результатах на итоговом занятии. Другим ученикам также предложить темы для коротких докладов (ПРИЛОЖЕНИЕ 14).

Далее приведем пример расчетов для нахождения объема невыпуклого многогранника, полученного из развертки куба, на которые может опираться учитель.

Чтобы посчитать объем получившегося многогранника разобьем его на части. Полученный многогранник состоит из восьми одинаковых шестиугольных пирамидок и фигуры, которая является усечённым октаэдром. Чтобы проще посчитать объём, добавим усечённые у октаэдра углы — правильные четырехугольные пирамиды, а от получившегося значения объёма отнимем объём добавленных кусочков.

Рассмотрим одну грань невыпуклого многогранника.

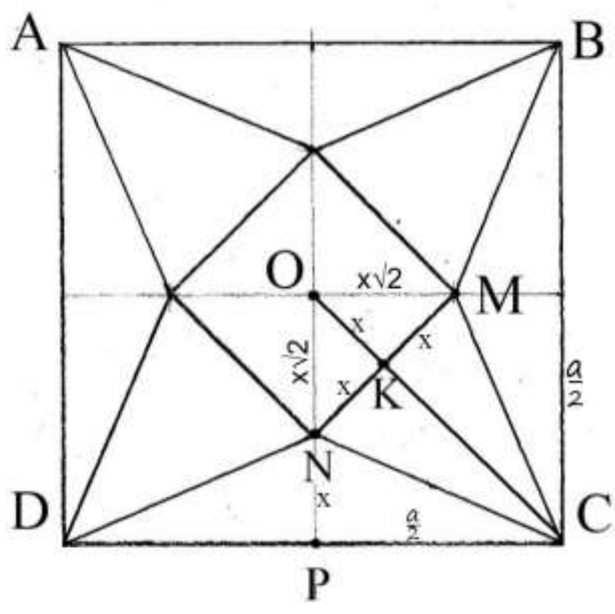


Рис.19 – Грань невыпуклого многогранника, полученного из куба.

I. Найдем объем исходного куба, где a – длина его ребра.

$V_{\text{куба}} = a^3$ $(a = 1 \Rightarrow V_{\text{куба}} = 1)$

II. РассмотримΔMON: $\angle OMN = \angle MNO = 45° \Longrightarrow OM = ON$

$NP = x, MN = 2x$ (по условию)

$$sin45° = \frac{OM}{MN} \Longrightarrow OM = MN \cdot sin45° = 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2} = ON$$

$OP = ON + NP, OP = \frac{a}{2}$

$$x\sqrt{2} + x = \frac{a}{2} \Rightarrow x(\sqrt{2}+1) = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$MN = 2x = 2 \cdot \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2} = a\left(\sqrt{2}-1\right)$ (ПРИЛОЖЕНИЕ13)

III. Найдем объем шестиугольной пирамиды.

В ΔMH_1N: $MN = MH_1 = H_1N = 2x = a(\sqrt{2}-1)$

(так как основанием пирамиды является правильный шестиугольник)

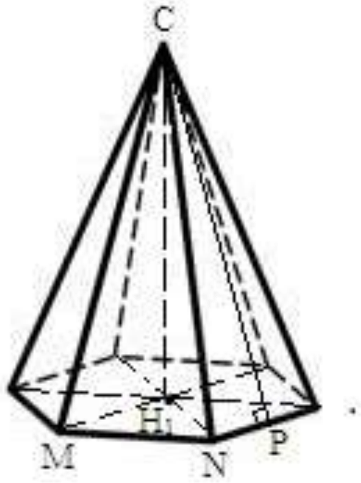


Рис.20 – Правильная шестиугольная пирамида, отсекаемая от невыпуклого многогранника.

ΔCPN – прямоугольный $\Longrightarrow CN = \sqrt{CP^2 + NP^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2})^2}$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$= a\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ΔCH_1N – прямоугольный $\Rightarrow CH_1 = \sqrt{CN^2 + H_1N^2}$

$$= \sqrt{a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2} - 3 + 2\sqrt{2}\right)}$$

$$= a\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2} = a\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4}{2}} = h_1$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot MN^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

Обозначим объем шестиугольной пирамиды V_1.

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \cdot a\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4}{2}} = \frac{a^3\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^2\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^3\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)^2\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{4}$$

$$8 \cdot V_1 = 8 \cdot \frac{a^3\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)^2\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{4} = 2a^3\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \cdot \sqrt{3\sqrt{2}-4}$$

IV. Найдем объем октаэдра, от которого отсекаются четырехугольные пирамиды. Обозначим его V_2.

$$V_2 = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}, \text{где } b = 6x = 3a(\sqrt{2}-1)$$

$$V_2 = \frac{27a^3(\sqrt{2}-1)^3\sqrt{2}}{3} = 9a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3$$

V. Найдем объем четырехугольных пирамид, отсекаемых от октаэдра. Обозначим его V_3.

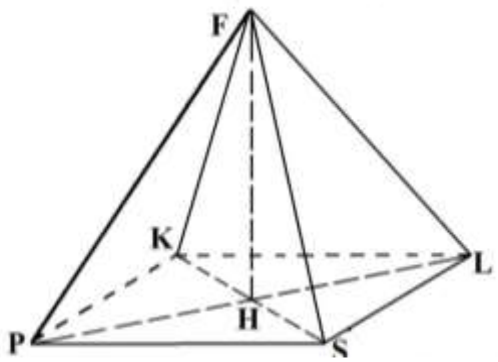


Рис.21 – Правильная четырехугольная пирамида, отсекаемая от октаэдра.

$PK=KL=LS=PS=2x$

ΔPKS – прямоугольный (так как основанием пирамиды является квадрат) $\Rightarrow KS = \sqrt{PK^2+PS^2} = \sqrt{4x^2+4x^2} = \sqrt{8x^2} = 2x\sqrt{2}$

$$HS = \frac{1}{2}\,KS = x\sqrt{2}$$

$$FK=FP=FS=FL=2x$$

$$\Delta FHS \text{ – прямоугольный} \Rightarrow FH = \sqrt{FS^2 + HS^2} = \sqrt{4x^2 - 2x^2} = \sqrt{2x^2}$$

$$= x\sqrt{2} \;\Rightarrow\; FH = h_3 = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$S_{\text{осн}} = PS^2 = a^2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h_3$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\cdot a^2(\sqrt{2}-1)^2\cdot\frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3}{6}$$

$$6\cdot V_3 = 6\cdot\frac{a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3}{6} = a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3$$

VI. Найдем объем усеченного октаэдра. Обозначим его V_4.

$$V_4 = V_2 - 6\cdot V_3 = 9a^3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^3 - a^3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = 8a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3$$

VII. Найдем объем V невыпуклого многогранника.

$$V = V_4 + 8\cdot V_1 = 8a^3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3 + 2a^3\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\sqrt{3\sqrt{2}-4} =$$

$$= a^3\cdot\left[8\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-7\right) + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3\sqrt{2}-4}\right] =$$

$$= a^3\cdot\left[8\cdot\left(10-7\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^3}\right]$$

VIII. Найдем отношение объемовV и $V_{\text{куба}}$

$$\frac{V}{V_{\text{куба}}} = 8\cdot\left(10-7\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(3\sqrt{2}-4\right)^3} = 1{,}2180745618338 \Rightarrow$$

объем увеличился примерно 21,8 %.

Тема 8. Итоговое занятие.

Итоговое занятие рекомендуется провести в форме конференции, прослушать доклады, а также обсудить результаты проделанной работы и выслушать мнение учеников о данном элективном курсе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проделанной работы, исходя из поставленной цели и задач, можно сделать следующие выводы:

При написании работы было изучено и проанализировано множество учебников и статей по геометрии, методических пособий и сборников о научно-исследовательской деятельности школьников;

Разработан элективный курс на тему «Увеличение объема выпуклых многогранников», который прошел апробацию в МОУ «СОШ №6» города Южноуральска среди обучающихся 11 «А» класса.

Учащиеся данной школы с удовольствием посещали занятия по данному элективному курсу. Такие уроки были для них чем-то новым и нестандартным и позволили им почувствовать себя в новой роли первооткрывателя и исследователя. Можно сделать вывод о том, что гипотеза была подтверждена. Открытие новых знаний о многогранниках, развитие исследовательских умений и навыков учащихся помогает достичь определенных целей: развитию пространственного мышления и навыков моделирования и конструирования пространственных фигур, способствует повышению интереса у учащихся к геометрии и тем самым повышает качество знаний. Все это дает возможность им развивать свои творческие и исследовательские способности и увидеть их применение на практике, ощутить взаимосвязь разных наук.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров, А. Д. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.

2. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — 18-е изд. — М.: Просвещение, 2013.— 255 с.

3. Глазков, Ю.А. ЕГЭ 2012. Математика [Текст]: сборник заданий и методических рекомендаций ЕГЭ / Ю.А, Глазков, И.К. Варшавский, М.Я. Гаиашвили. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 367 с.

4. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения [Текст] / Э.Г. Готман. – М.: МЦНМО, 2007. – 160 с.

5. Гурвич, Е.М. Исследовательская деятельность детей как механизм формирования представлений о поливерсионности мира создания навыков исследования ситуаций [Текст] / Е.М. Гурвич // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. — М.: Народное образование, 2001. — С. 68-80

6. Демин, И. С. Применение информационных технологий в учебно-исследовательской деятельности [Текст] / И.С. Демин // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник. — М.: Народное образование, 2001. — С. 144-150.

7. Долбилин, Н.П. Жемчужины теории многогранников [Текст] / Н.П. Долбилин. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.

8. Калинин, А.Ю. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Ю. Калинин, Д.А. Терешин. – новое изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2011. – 640 с., ил.

9. Кац, Е.А. Искусство и наука — о многогранниках вообще и усеченном икосаэдре в частности [Текст] / Е.А. Кац // Энергия: экономика, техника, экология. — 2002. — № 10 с.42-47; №11, с.45-50; №12, с.56-60

10. Киселев, А.П. Геометрия [Текст] / А.П. Киселев — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 328 с.

11. Математические этюды [Электронный ресурс] : база данных содержит этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и её приложениях — Электрон. дан. — Москва, Фонд «Математические этюды», 2002—2019. — Режим доступа: http://www.etudes.ru/. — Загл. с экрана

12. Меренкова, О.Ю. Научно-исследовательская работа в школе [Текст]: в помощь учителю, классному руководителю. Методическое пособие. / О.Ю. Меренкова — М.: УЦ Перспектива, 2011. – 48с.

13. Обухов, А.С. Развитие исследовательской деятельности учащихся [Текст] / А.С. Обухов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Национальный книжный центр, 2015. — 280 с.

14. Пахомова, Н.Ю. Метод учебного проекта в образовательном учреждении [Текст]: пособие для учителей и студентов педагогических вузов / Н.Ю. Пахомова. — М.: АРКТИ, 2005 — 112 с.

15. Пахомова, Н.Ю. Обучение ученика целеполаганию: психологическое обоснование методики. Смыслы и цели образования: инновационный аспект. [Текст] / Н.Ю. Пахомова // Сб. научных трудов / Под ред. А.В. Хуторского. – М.: Научно - внедренческое предприятие «ИНЭК», 2007. — С. 164-168.

16. Пиковер, К. Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики [Текст]: научно-популярное издание / К. Пиковер: пер. с англ. С.А. Иванова — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 539 с.: ил.

17. Погорелов, А. В. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни / А.В. Погорелов. — 13-е изд. — М.: Просвещение, 2014. — 175 с.: ил.

18. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 класс [Текст]: учеб.для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 2-е изд., испр. – М.: Дрофа, – 2013. – 368 с.

19. Смагулова, Ш. Ж. Многогранники в геометрии [Текст]: методические указания по математике / Ш.Ж. Смагулова – Павлодар, 2008. – 35 с.

20. Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 класс [Текст]: учеб.для учащихся общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 288 с.

21. Смирнов В. А. Геометрия. Стереометрия [Текст]: пособие для подготовки к ЕГЭ / под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с.

22. Смирнов, В.А. Наглядная геометрия [Текст]: пособие для учащихся средней школы / В.А. Смирнов, И.М. Смирнова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2013. — 273 с.

23. Степанова, М.В. Учебно-исследовательская деятельность школьников в профильном обучении [Текст]: учебно-методическое пособие для учителей / Под ред. А.П. Тряпицыной. — СПб.: КАРО, 2006 — 96 с.

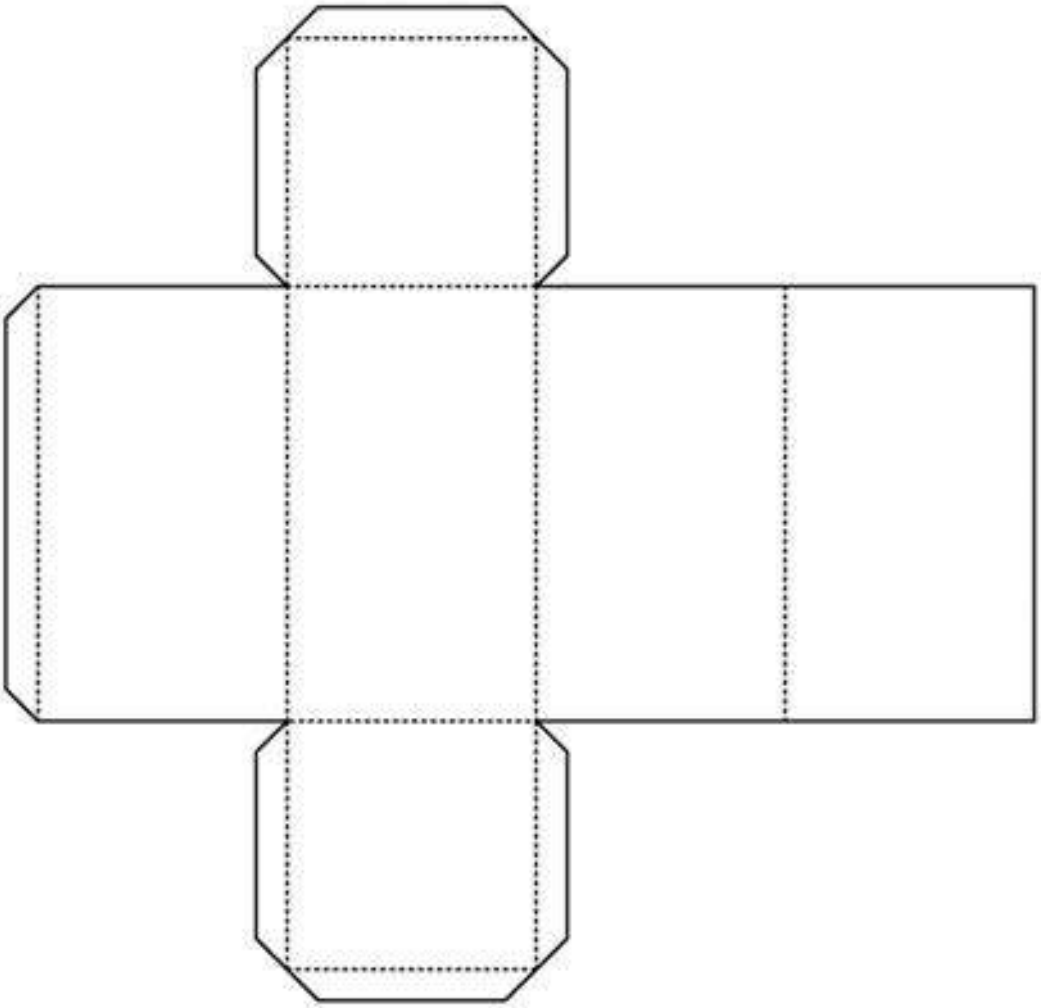
24. Шарыгин, И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы [Текст]: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений: базовый уровень / Шарыгин И.Ф. — М.: Дрофа, 2013 — 240 с.

25. Яровенко, В.А. Поурочные разработки по геометрии: 11 класс [Текст] / В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010. – 336 с.

26. David D. Bleecker. Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra // Journal Differential Geometry. 1996. V. 43. P. 505—526.

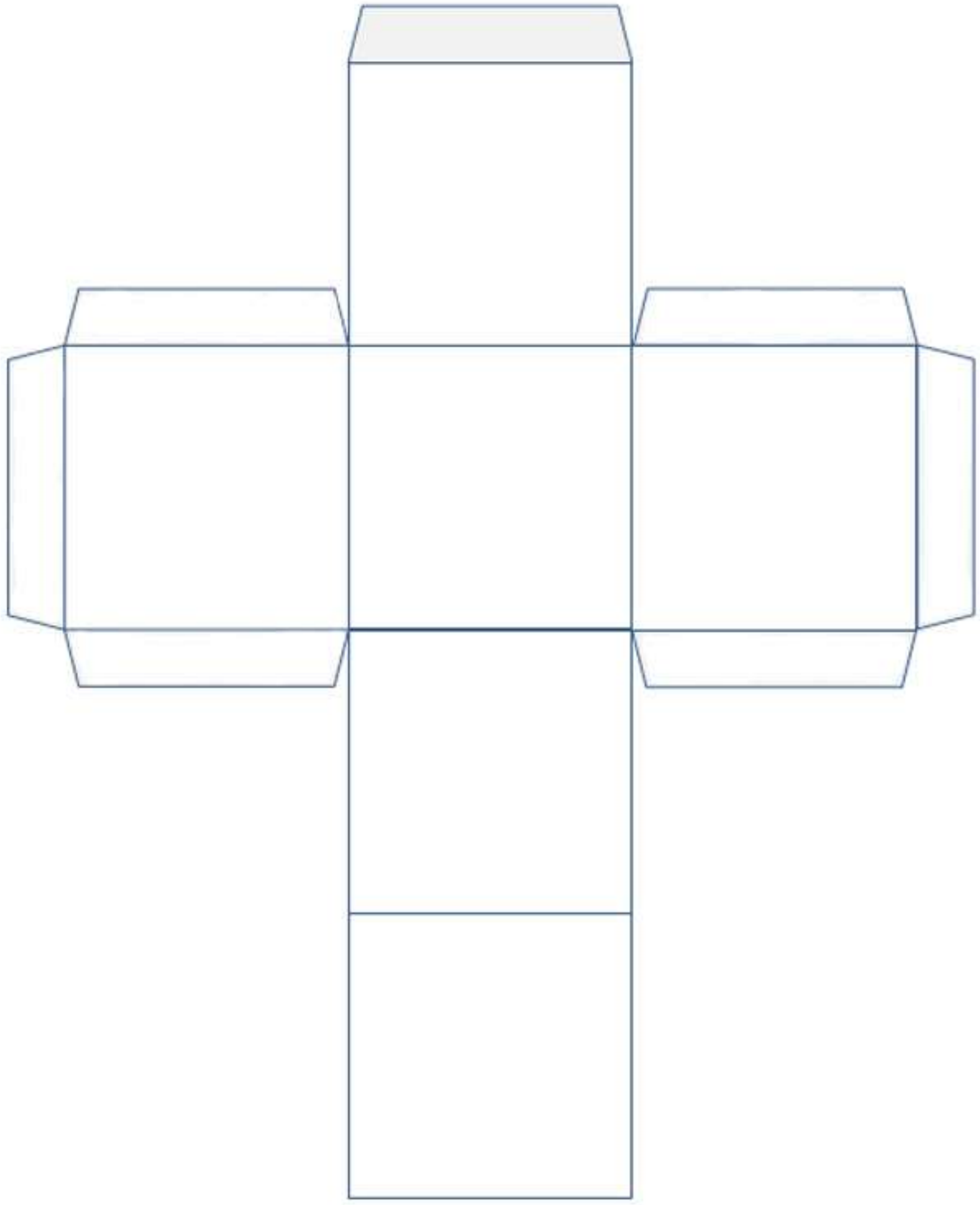
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Развертка параллелепипеда



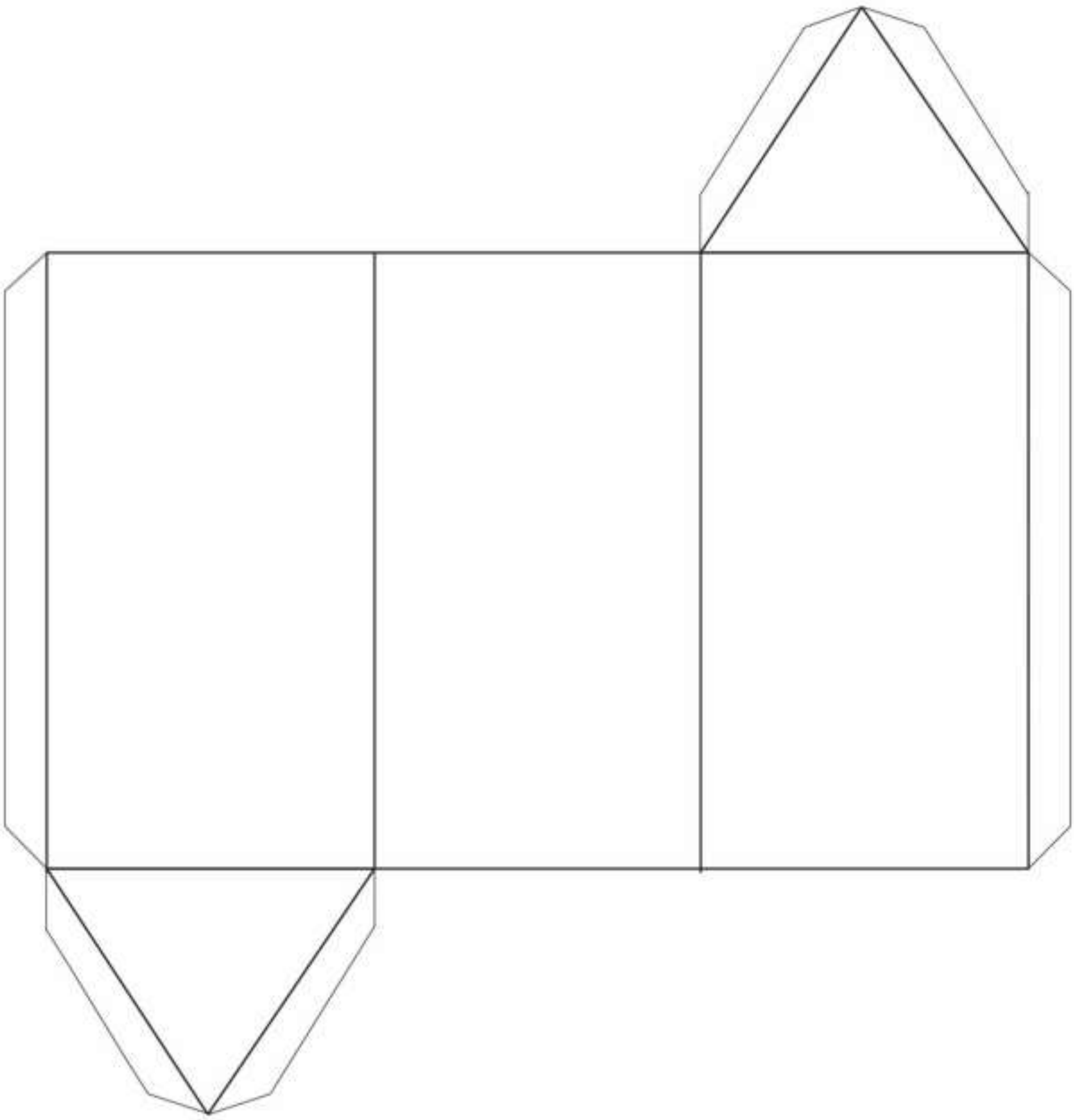
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Развертка куба



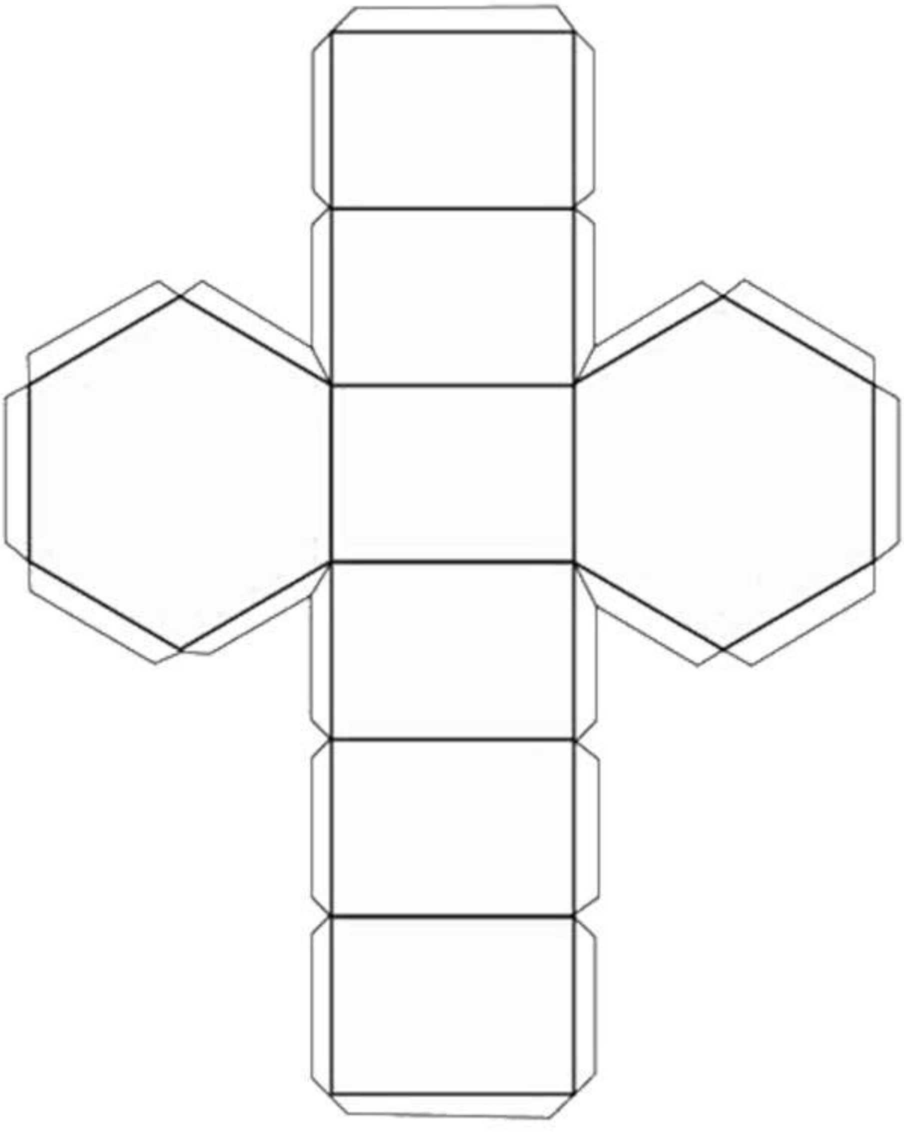
ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Развертка треугольной призмы



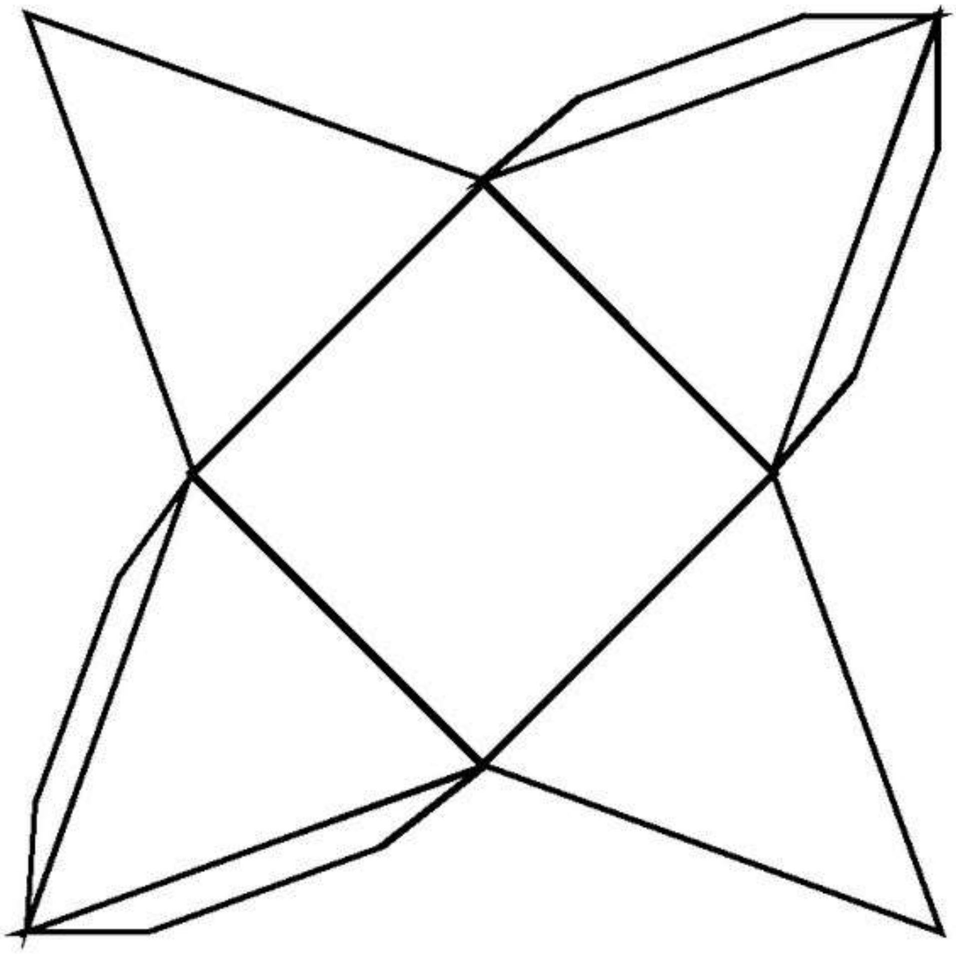
ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Развертка шестиугольной призмы



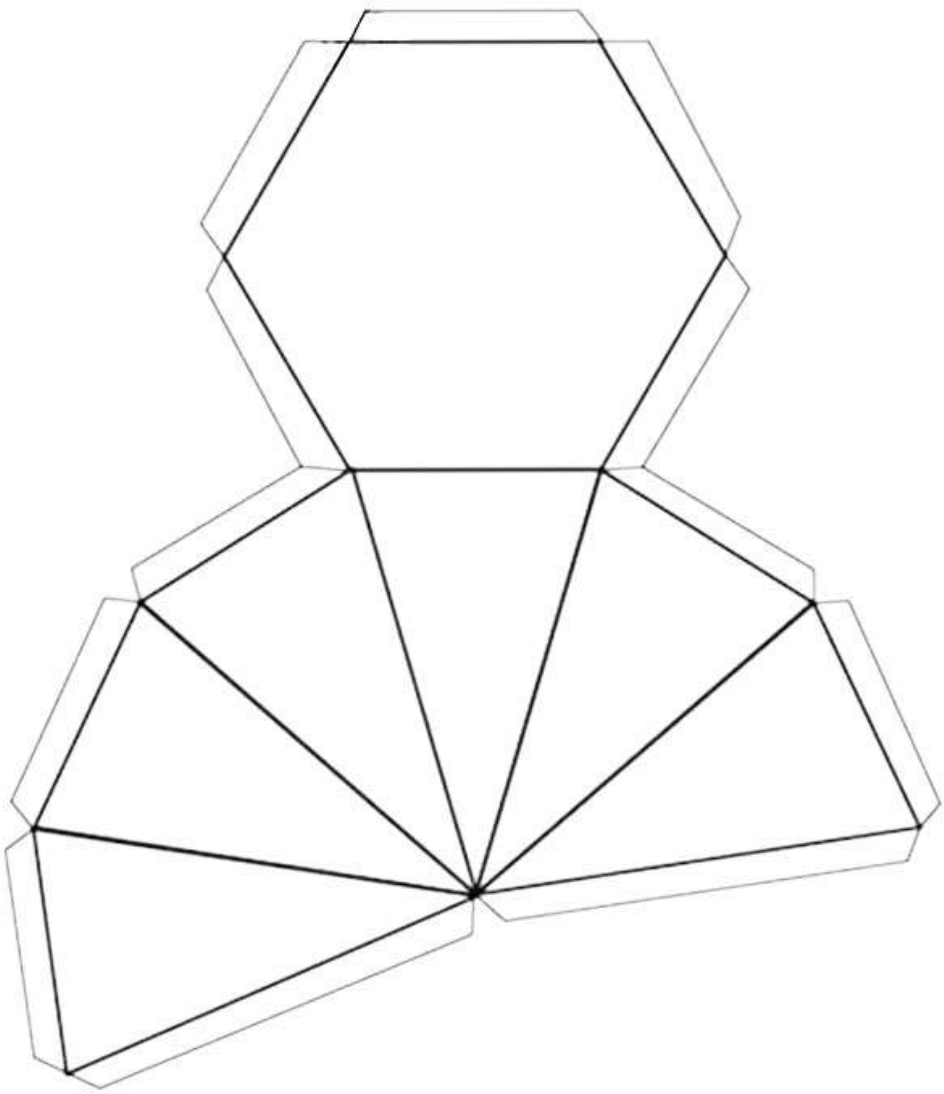
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Развертка четырехугольной пирамиды



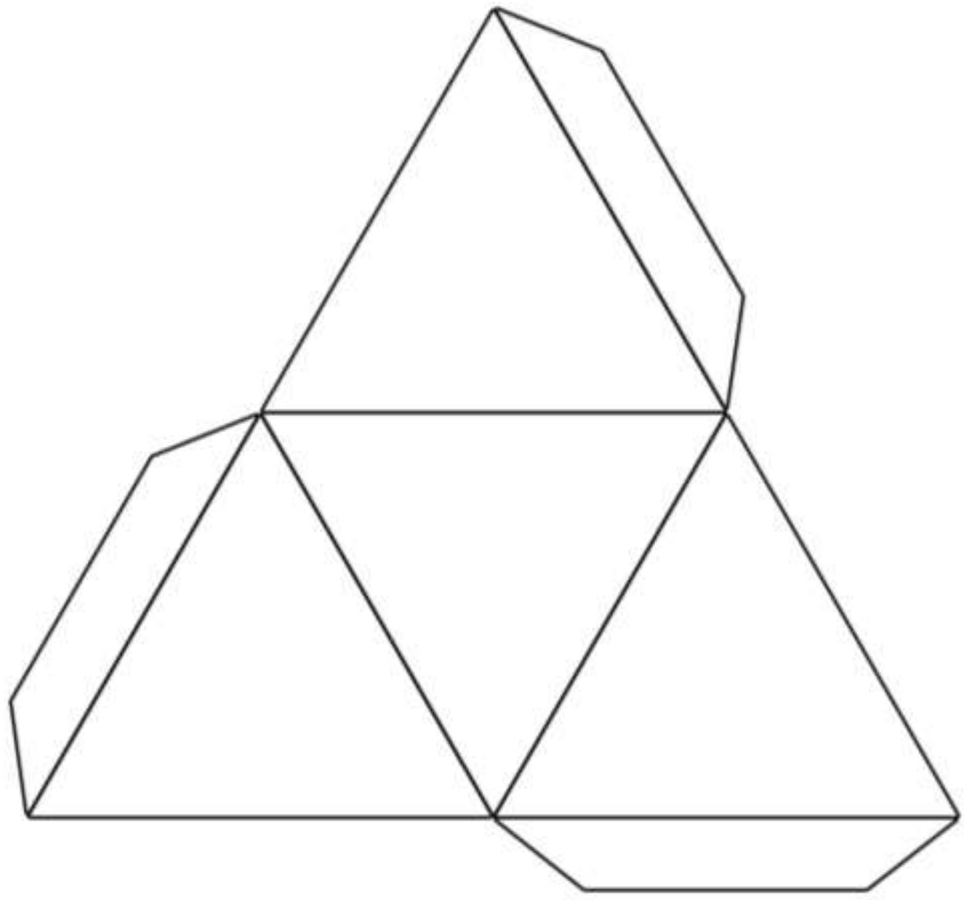
ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Развертка шестиугольной пирамиды



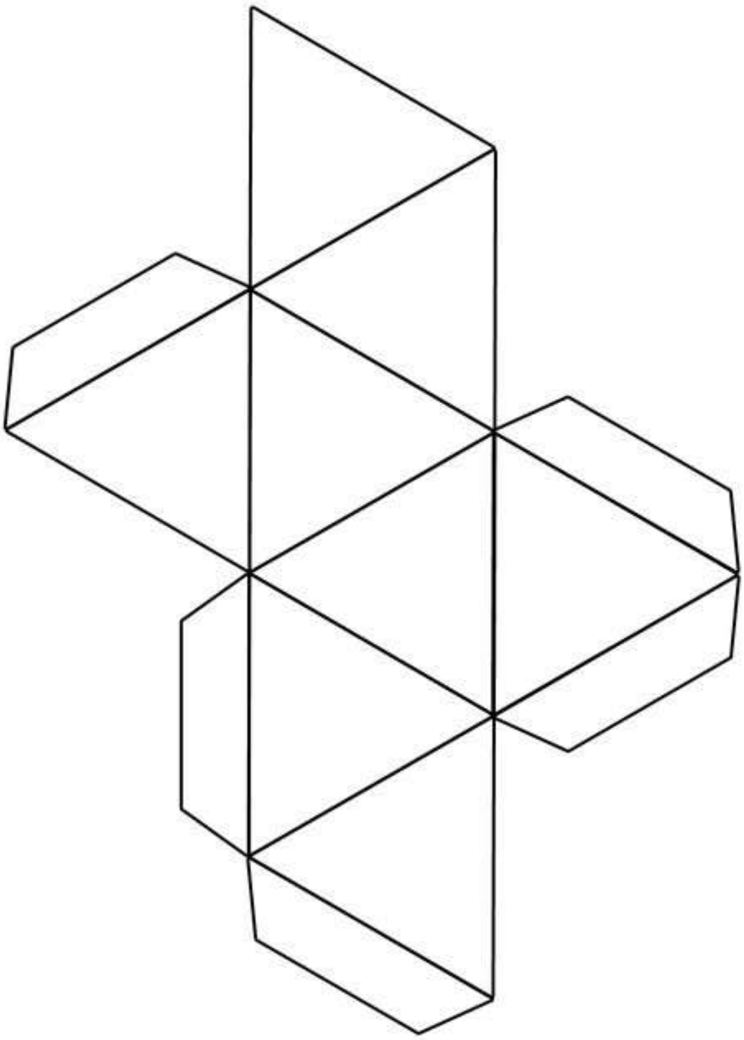
ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Развертка тетраэдра



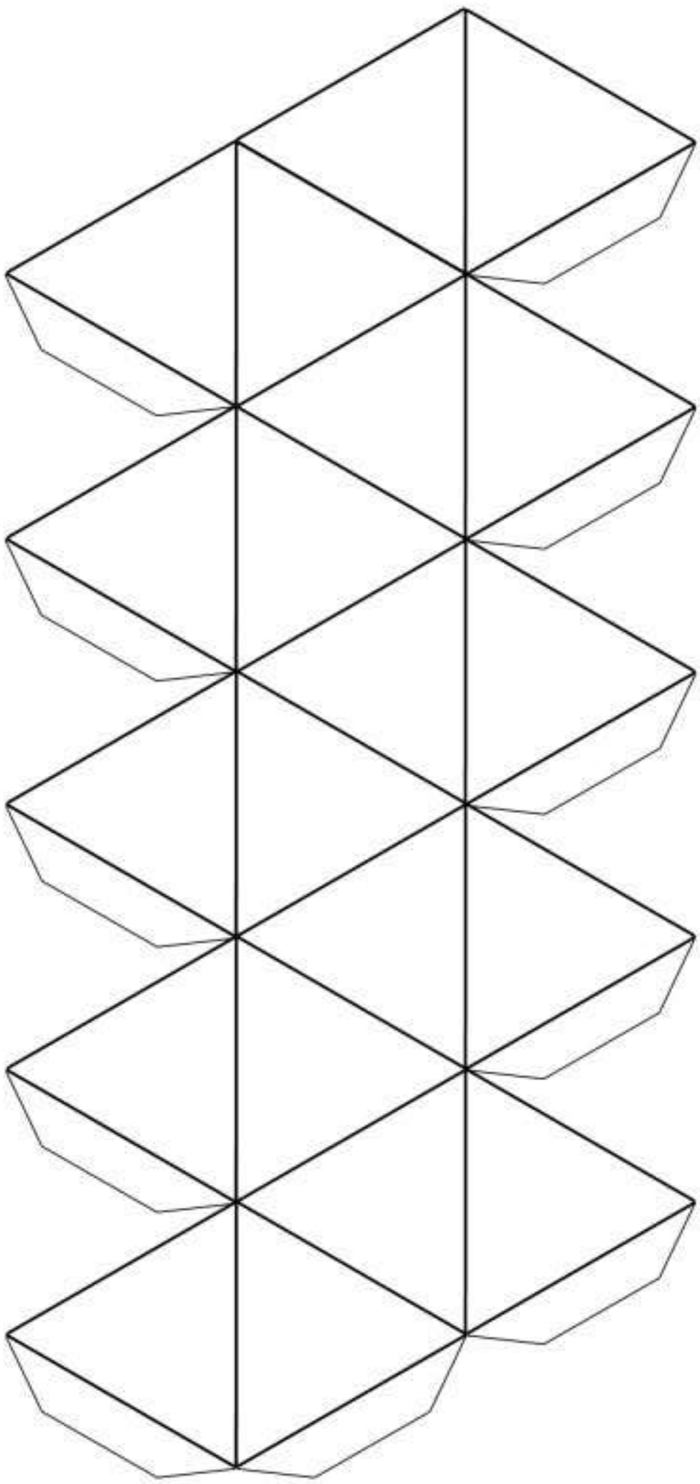
ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Развертка октаэдра



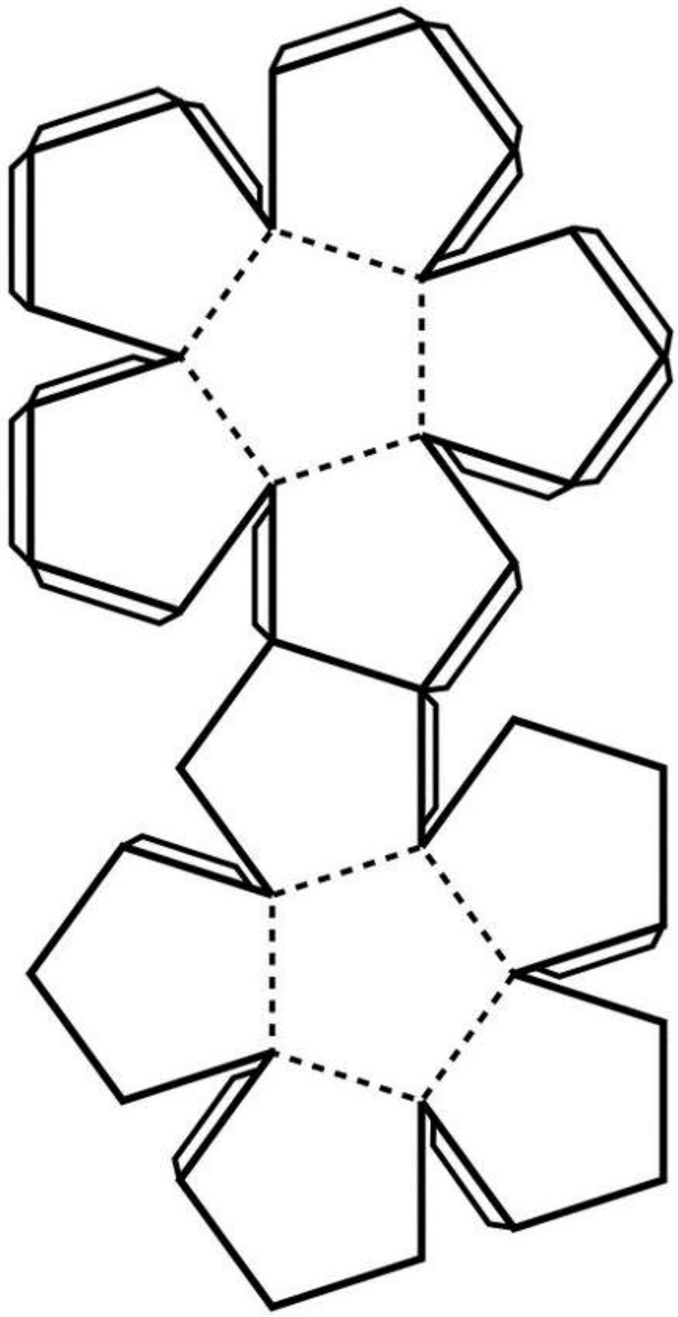
ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Развертка икосаэдра



ПРИЛОЖЕНИЕ 10

Развертка додекаэдра



ПРИЛОЖЕНИЕ 11

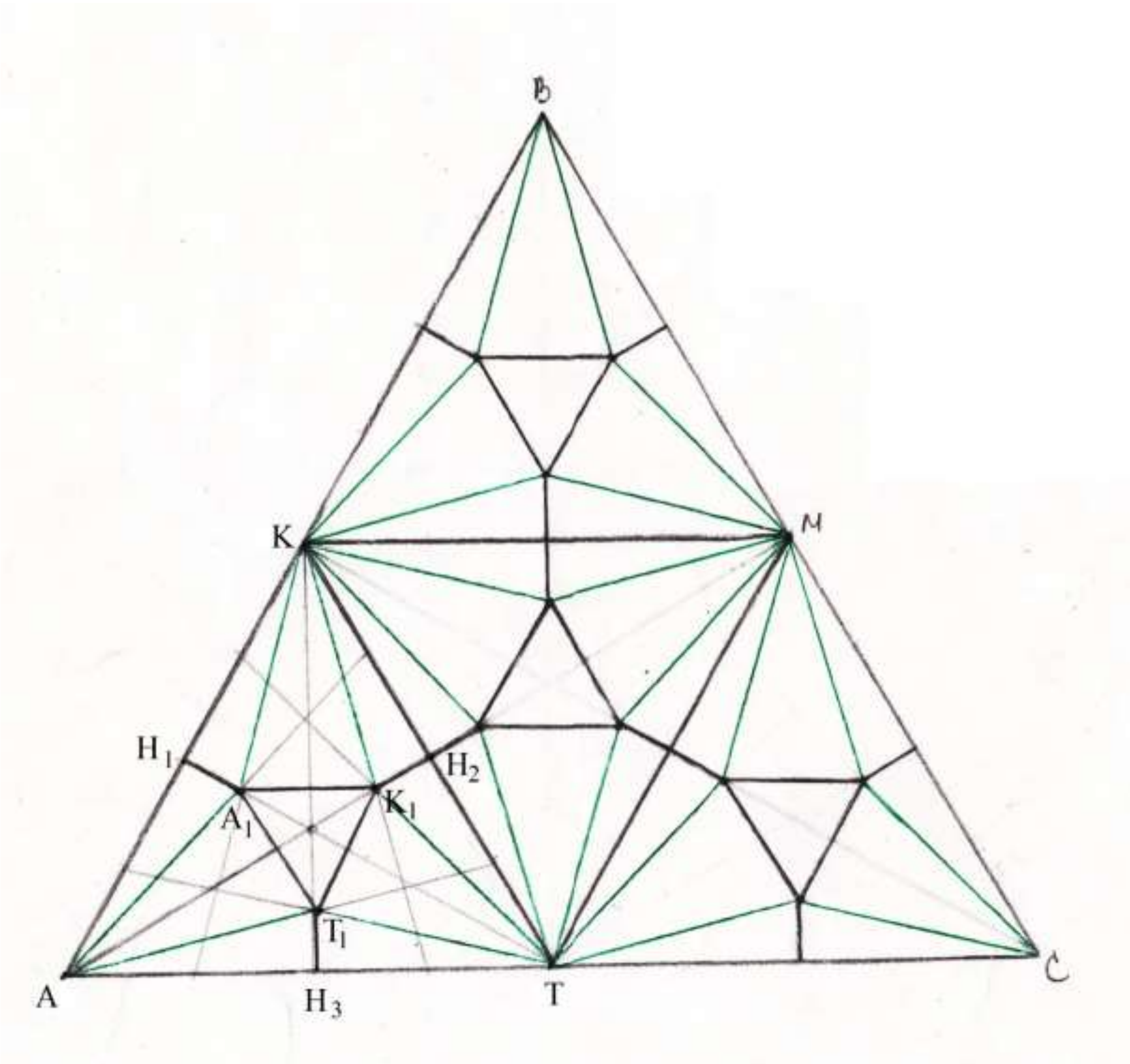
Задания, направленные на определение способностей к творческой и поисковой деятельности

Учитель предлагает учащимся выполнить следующие задания:

1. В 5-10 предложениях описать пейзаж за окном, рассказать, что там происходит.
2. Придумать и нарисовать в течение 5-7 минут на альбомном листе карандашами любую картину.
3. Привести ассоциации с каким-либо словом или картинкой.
4. Придумать и нарисовать на альбомном листе цветными карандашами новое, несуществующее животное, описать его качества и назвать.
5. Расшифровать поговорку или пословицу.

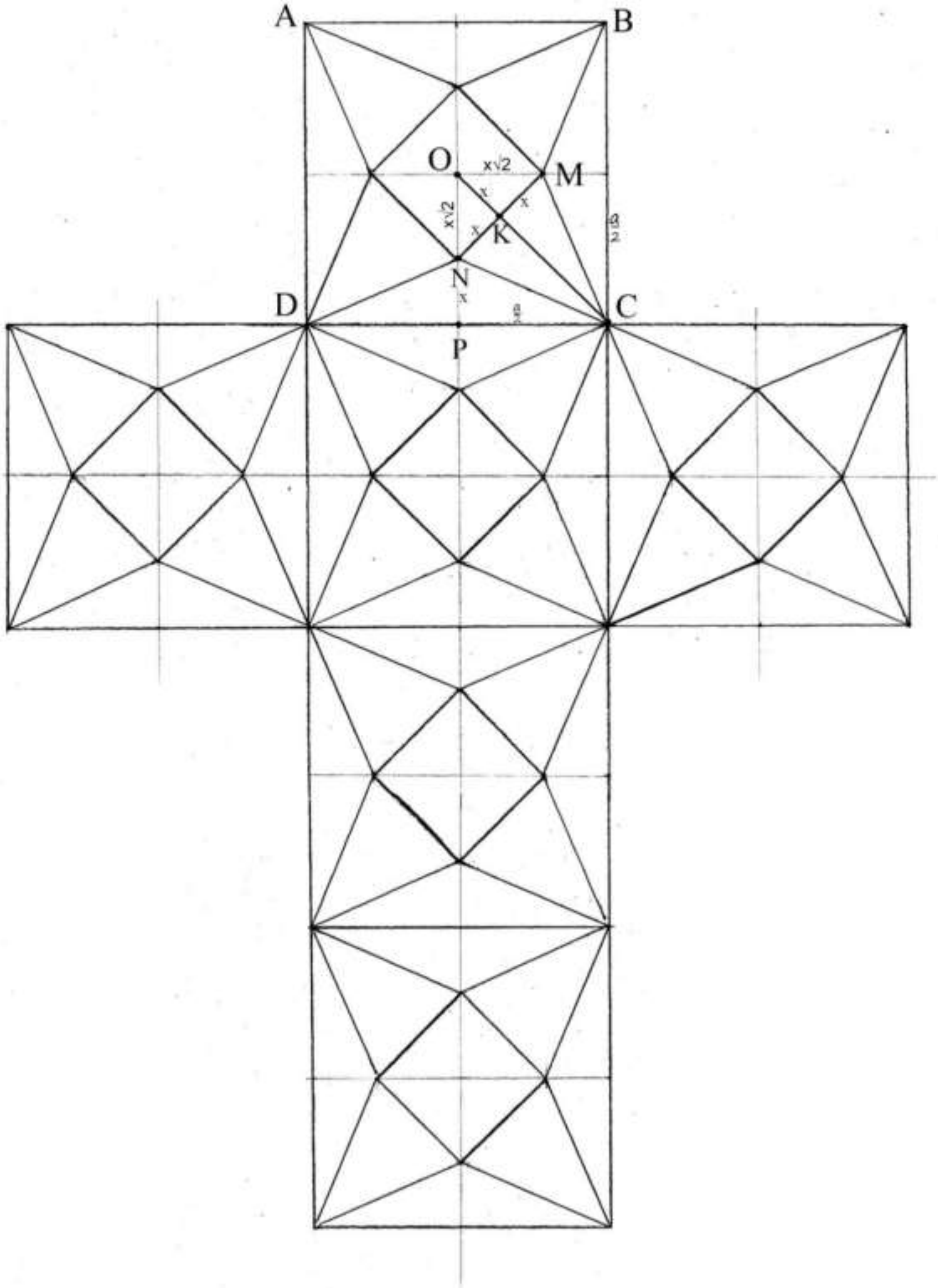
ПРИЛОЖЕНИЕ 12

Развертка невыпуклого многогранника, полученного из развертки тетраэдра



ПРИЛОЖЕНИЕ 13

Развертка невыпуклого многогранника, полученного из развертки куба



ПРИЛОЖЕНИЕ 14

Темы докладов

1. История появления многогранников
2. Звездчатые многогранники
3. Многогранники в архитектуре
4. Гармония правильных многогранников
5. Додекаэдр Штейнгауза
6. Архимедовы тела (полуправильные многогранники)
7. Научные достижения Леонарда Эйлера

Рекомендуемая литература

1. Башмаков, М.И. Математика[Текст]: учебник для учреждений нач. и сред.проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2012.
2. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — 18-е изд. — М.: Просвещение, 2013.— 255 с.
3. Гиндикин, С. Г. Рассказы о физиках и математиках [Текст] — 3-е изд., расш. — М.: МЦНМО, 2001.
4. Долбилин, Н.П. Жемчужины теории многогранников [Текст] / Н.П. Долбилин. – М.: МЦНМО, 2000. – 40 с.
5. Кац, Е.А. Искусство и наука — о многогранниках вообще и усеченном икосаэдре в частности [Текст] / Е.А. Кац // Энергия: экономика, техника, экология. — 2002. — № 10 с.42-47; №11, с.45-50; №12, с.56-60
6. Смирнов, В.А. Наглядная геометрия [Текст]: пособие для учащихся средней школы / В.А. Смирнов, И.М. Смирнова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2013. — 273 с.
7. Математические этюды [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://www.etudes.ru/