ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МОЛЕКУЛ И КРИСТАЛЛОВ
УФИМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

Сборник тезисов
(оз. Банное 12 – 16 марта 2018 г.)

УФА 2018

УДК 51
ББК 22.1
М43

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 18-01-20008 -г

Международная научная конференция "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения": сборник тезисов (г. Уфа, 12 – 16 марта 2018 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. – 92 с.

В сборнике представлены тезисы докладов участников международной научной конференции "Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения"

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

Ответственный редактор:
канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник **Р.Н. Гарифуллин**

ISBN 978-5-906958-41-9

**INSTITUTE OF MATHEMATICS WITH COMPUTING CENTRE
OF UFRC OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MOLECULE AND CRYSTAL PHYSICS
OF UFRC OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
BASHKIR STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY NAMED
AFTER M. AKMULLA
ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF
BASHKORTOSTAN**

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE ON “COMPLEX ANALYSIS, MATHEMATICAL PHYSICS AND NONLINEAR EQUATIONS”

BOOK OF ABSTRACTS

Bannoe Lake, Russia
March 12 - 16, 2018

UFA - 2018

UDC 51
BBK 22.1

The Conference is sponsored
by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR)
Grant № 18-01-20008

International Scientific Conference "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations". Book of Abstracts. Ufa, Russia: Publishing house BSPU, 2018. – 92 p.

The book contains abstracts of the talks at International Scientific Conference "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations".

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

ISBN 978-5-906958-41-9

Содержание

Задача типа Коши для линейного уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Римана — Лиувилля

Авилович А.С., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, L, M — линейные замкнутые плотно определенные в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ операторы, действующие в банахово пространство $\mathfrak{Y}$. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ обозначим банаховы пространства линейных ограниченных операторов на $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно. Обозначим также $\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$.

По определению $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ [1], если

(i) существуют $a_0\geq 0$ и $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$ такие, что для всех $\lambda\in S_{a_0,\theta_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta_0,\mu\neq a_0\}$ $(\lambda^\alpha L-M)^{-1}L\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $L(\lambda^\alpha L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$;

(ii) при любых $a>a_0$, $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ существует такая константа $K=K(a,\theta)>0$, что для всех $\mu\in S_{a,\theta}$

$$\max\{\|(\mu^\alpha L-M)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})},\|L(\mu^\alpha L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\}\leq\frac{K(a,\theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu-a)|}.$$

Рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t)=Mx(t),\quad t\geq 0. \tag{1}$$

Функция $x\in C(\overline{\mathbb{R}}_+;D_M\cap D_L)$, для которой $g_{m-\alpha}*x\in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{X})$, $g_{m-\alpha}*Lx\in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathfrak{Y})$, называется решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}x(0)=x_k,\quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1), если для нее выполняются равенства (1), (2).

Теорема 1. *Пусть $\alpha>0$, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $x_k\in\mathfrak{X}$,*

$$X_{\alpha-m+k}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\mu^{m+k-1}(\mu^\alpha L-M)^{-1}Le^{\mu t}d\mu,\quad k=0,1,\ldots,m-1.$$

Тогда функция $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}X_{\alpha-m+k}(t)x_k$ является решением задачи типа Коши (1), (2), аналитическим в секторе $\{t\in\mathbb{C}:|\arg t|<\theta_0-\pi/2\}$.

[1] Федоров В.Е., Романова Е.А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

Групповая классификация уравнений самогравитирующего газа

Адарченко В.А.[1], Воронин С.М.[2], Панов А.В.[2], Клебанов И.И.[3]

[1]РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина, г.Снежинск, Россия
[2]Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия
[3]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассматривается система уравнений, описывающая динамику самогравитирующего газа[1]

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\overrightarrow{v}) = 0, \\ \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\nabla)\overrightarrow{v} + \nabla\Phi + \nabla p/\rho = 0, \\ \Delta\Phi = 4\pi G\rho, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \overrightarrow{v}\nabla p + A(\rho,p)\nabla\overrightarrow{v} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Φ–гравитационный потенциал. Для данной системы выполнена групповая классификация по функциональному параметру $A(\rho,p)$, задающему уравнение состояния газа. Получена группа Ли G, допускаемая системой при любом значении параметра. Найдены значения параметра, группа симметрий которых расширяет группу G.

[1] Зельдович Я., Новиков И. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1975.

A method for the detection and computation of nonlinear modes in NLS-type models

Alfimov G. L.[a,c], Fedotov A. P.[a], Zezyulin D. A.[b,c], Barashenkov I. V.[d,e]

[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[b] ITMO University, St. Petersburg, Russia;
[c] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia;
[d] University of Cape Town, Rondebosch, South Africa;
[e] Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, USA

We present a method for the detection and numerical computation of stationary nonlinear modes in vector nonlinear Schrödinger-type systems. These nonlinear modes are described by the vector ODE

$$\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{A}(x)\mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u},\mathbf{u};x)\mathbf{u} + \mathbf{h}(x) = 0. \tag{1}$$

Here $\mathbf{u}(x)$ is an n-component real vector function; $\mathbf{A}(x)$ is an $n \times n$ real matrix-valued function of x; $\mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; x)$ is a diagonal $n \times n$ real matrix where the entries $B_{k,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; x)$, $k = 1, \ldots, n$, are bilinear forms of n-component vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ with the coefficients dependent on x; $\mathbf{h}(x)$ is an n-component vector real-valued function of x.

We prove that under physically relevant assumptions the generic solutions of (1) have singularities (i.e., blow up) on the real axis. Our approach consists in the systematic elimination of blowing up solutions with eventual selection of non-singular modes. The method is illustrated with two examples. One of those is the Gross-Pitaevskii equation with the PT-symmetric complex potential $V(x) = V_1(x) + iV_2(x)$ [2],

$$u_{xx} + (\mu - V(x))u - |u|^2 u = 0, \tag{2}$$

where $V_1(-x) = V_1(x)$ and $V_2(-x) = -V_2(x)$. This equation describes the elongated Bose-Einstein condensate with repulsive interparticle interactions. The second example is the equation

$$u_{xx} - u \pm |u|^2 u = -i\gamma u + h. \tag{3}$$

It describes the nonlinear waves in the pumped optical cavity and corresponds to steady-states of the Lugiato-Lefever equation [2].

Novel nonlinear modes are found and described.

[1] V. V. Konotop, J. Yang, D. A. Zezyulin, Nonlinear waves in PT-symmetric systems, Rev. Mod. Phys. 88, 035002 (2016).

[2] L. A. Lugiato, R. Lefever, Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems, Phys. Rev. Lett. **58**, 2209 (1987).

Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential

Alfimov G. L.[a,c], Gegel L. A.[a], Lebedev M. E.[c], Zezyulin D. A.[b,c], Malomed B. A.[b,d]

[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

[b] ITMO University, St. Petersburg, Russia;

[c] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia;

[d] Faculty of Engineering, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel

We study nonlinear modes (NLMs) of the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation with potential $V(x)$ and periodically modulated coefficient in front of the cubic term (a nonlinear lattice pseudopotential) $P(x)$,

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + V(x)\Psi - P(x)\Psi|\Psi|^2, \quad V(x), P(x) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

From the physical viewpoint, the equation describes a cigar-shape cloud of Bose-Einstein condensate confined by a trap $V(x)$ and handled by optically induced Feshbach resonance. The NLMs are of the form $\Psi(x,t)=e^{-i\mu t}u(x)$ where μ is a real parameter and $u(x)$ satisfies the equation

$$u_{xx}+(\mu-V(x))u+P(x)|u|^2u=0, \tag{2}$$

under the boundary conditions $u(x)\to 0$ as $x\to\pm\infty$. We studied two cases: (i) $V(x)=0$ and (ii) $V(x)=x^2$.

In the case (i), we employ the method of the elimination of blowing up solutions. This method allows to put the solutions of (2) into one-to-one correspondence with bi-infinite sequences of symbols (i.e., *the codes*). The NLM corresponding to simplest codes were computed. Most of them are found to be unstable. However, it was discovered that apart from the simplest stable NLM (bright soliton), one more NLM (dipol soliton) is stable, [1].

In the case (ii), we used the method of "demonstrative computations" [2]. Two cases are considered separately: (a) $\overline{P(x)}\neq 0$ and (b) $\overline{P(x)}=0$ (the $\overline{P(x)}$ is the mean value of $P(x)$). The diagrams representing the branches of NLM for both the cases are given. In the limit when $P(x)$ is a rapidly oscillating function, asymptotic formulas for NLM are derived. It was found that the presence of the lattice pseudopotential may result in (I) emerging of new families of NLMs; (II) stabilisation of some unstable NLM; (III) evolution of unstable NLMs into a pulsating entity localised in one well of the lattice pseudopotential.

[1] M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, and B. A. Malomed, Chaos 26, 073110 (2016);

[2] G. L. Alfimov and D. A. Zezyulin, Nonlinearity 20 (2007) 20752092.

Bifurcations of soliton solutions of the vector defocusing Gross-Pitaevskii equation

Alfimov G. L.[a,c], Kirilin A. D.[a], Smirnov V. V.[a], Zezyulin D. A.[b,c]

[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

[b] ITMO University, St. Petersburg, Russia;

[c] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia.

We consider the steady-state solutions for the system of coupled Gross-Pitaevskii equations

$$\begin{cases} i\Psi_{1,t}=-\Psi_{1,xx}+V(x)\Psi_1+(|\Psi_1|^2+\beta|\Psi_2|^2)\Psi_1,\\ i\Psi_{2,t}=-\Psi_{2,xx}+V(x)\Psi_2+(\beta|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2)\Psi_2. \end{cases} \tag{1}$$

Here $V(x)$ is a trap potential and $\beta > 0$ is a real parameter. The model describes the dynamics of two-component Bose-Einstein condensate. The steady-state solutions of (1) are of the form $\Psi_{1,2}(t,x) = e^{-i\mu_{1,2}t}\psi_{1,2}(x)$. Here μ is a real parameter and $\psi_{1,2}(x)$ satisfy the system

$$\begin{cases} \psi_{1,xx} + (\mu_1 - V(x))\psi_1 - (\psi_1^2 + \beta\psi_2^2)\psi_1 = 0, \\ \psi_{2,xx} + (\mu_2 - V(x))\psi_2 - (\beta\psi_1^2 + \psi_2^2)\psi_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Soliton solutions of (2) corresponds to boundary condition $\psi_{1,2}(x) \to 0$ as $x \to \pm\infty$.

For detection and numerical computation of soliton solutions we employ the method of *elimination of blowing up solutions*. The method is based on the fact that under certain physically relevant assumptions most of solutions of Eq. (2) are singular, i.e. they tend to infinity at some finite point of x axis. We present the numerical strategy for detection of soliton solutions that is consistent with the method. It allows to visualize these nonlinear modes and trace their bifurcations in a simple and transparent way.

The bifurcation diagrams for different sets of parameters μ_1 and μ_2 are given.

Обратная задача определения нелинейного источника в многомерном волновом уравнении.

Артюшин А.Н.
г.Новосибирск, Россия

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. В цилиндре $Q = (0,T) \times \Omega$ с боковой поверхностью $S = (0,T) \times \Gamma$ рассматривается обратная задача с нелинейным источником $f(\cdot)$

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(u), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{2}$$

$$u|_S = \varphi(x,t), \tag{3}$$

$$\int\limits_\Gamma K(t,x)u_\nu(t,x)\, d\Gamma = \psi(t). \tag{4}$$

Локальная разрешимость данной задачи в одномерном случае доказана Щегловым А.Ю. методом характеристик (см., например, [1]).

Мы предлагаем иной, довольно общий подход. Сначала мы рассматриваем линейную обратную задачу определения источника для уравнения

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(v), \tag{5}$$

с известной функцией $v(t,x)$. Оказывается, что имеет место интегральное представление

$$u(t,x) = \int f(\xi)V(t,x,\xi)\,d\xi,$$

где $V(t,x,\xi)$ — решение некоторой вспомогательной задачи для однородного волнового уравнения. Из этого представления уже легко получить интегральное уравнение для $f(\xi)$, которое при определенных условиях можно свести к уравнению Вольтерры первого, а затем и второго рода. При реализации этой схемы возникает основное условие

$$v_t(x,0) - |\nabla v(x,0)| \geqslant \delta > 0, \quad x \in \Gamma.$$

Нелинейную задачу после этого решаем с помощью метода последовательных приближений.

[1] А. Ю. Щеглов, Метод приближенного решения обратной задачи для полулинейного уравнения гиперболического типа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003, том 43, номер 1, 111–126.

Временные окна масс-спектрометрического эксперимента и воспроизводимость результатов измерений

Асфандиаров Н.Л., Пшеничнюк С.А., Нафикова Е.П., Рахмеев Р.Г.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Спектроскопия диссоциативного захвата электронов (ДЗЭ), исследующая сечения образования отрицательных ионов, может быть реализована на основе различных источников ионов масс-анализаторов [1, 2]. При этом для каждого типа приборов (магнитный, времяпролетный, квадрупольный) существует своя шкала времен. Сечения образования временно-живущих молекулярных M? и стабильных осколочных R? ионов связаны с полным сечением захвата электронов sCap кинетическими уравнениями:

$$M^-(t) = \sigma_{Cap} exp\left[-(k_a + k_d)\,t\right], \tag{1}$$

$$R^-(t) = \sigma_{Cap} \frac{k_d}{k_a + k_d}\left[1 - exp\left(-k_a - k_d\right)t\right] \tag{2}$$

где k_a и k_d – константы скорости выброса электрона и диссоциации на фрагменты. Пусть время экстракции ионов из источника равно t^{ext}, а пролета до момента детектирования вторичным электронным умножителем t^{flight}. Тогда наблюдаемая в эксперименте интенсивность ионов

$$I\left(M^{-}\right)=\int_{0}^{t^{flight}} M^{-}(t)\, dt, \qquad (3)$$

$$I\left(R^{-}\right)=\int_{0}^{t^{ext}} R^{-}(t)\, dt \qquad (4)$$

будет функцией этих времен. Этот эффект наблюдается в спектрах ДЗЭ галоген-производных бензола [3] и анизола [4].

Основным выводом работы является то, что нет «правильных» и «неправильных» спектров ДЗЭ, а есть спектры ДЗЭ, полученные в различных экспериментальных условиях. Корректность интерпретации данных измерений зависит от умения правильно учитывать это обстоятельство и особенно важно в аналитических приложениях метода ДЗЭ.

Работа поддержана РФФИ, проект № 18-03-00179.

[1] В.И. Хвостенко, Масс-спектрометрия отрицательных ионов в органической химии, М. «Наука», 1980, 169 с.

[2] E. Illenberger , B. M. Smirnov, Phys. Usp. 41, 651 (1998).

[3] N. L. Asfandiarov, S. A. Pshenichnyuk, V. G. Lukin, I. A. Pshenichnyuk, A. Modelli, S. Matejcik, Int. J. Mass Spectrom. 264, 22 (2007).

[4] N. L. Asfandiarov, M. V. Muftakhov, S. A. Pshenichnyuk, P. Papp, M. Danko, M. Lacko, J. Blaško, Š. Matejčik, A. Modelli, The Journal of Chemical Physics 147, 234302 (2017).

Асимптотические решения задачи конвективной диффузии внутри капли с учётом объёмной химической реакции

Ахметов Р.Г.

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия, г. Уфа

Рассматривается стационарная конвективная диффузия внутри капли при наличии объёмной химической реакции. Аналогичные и более сложные задачи исследовались во многих работах [1, 2]. Задачи такого рода возникают в химической технологии. В докладе предполагается дать обзор основных результатов автора по данной теме. Для задачи стационарной конвективной диффузии внутри сферической капли при наличии объемной химической реакции методом согласования [3] построено асимптотическое решение по малому параметру в окрестности границы. Малый параметр соответствует большим числам Пекле.

[1] Гупало Ю. П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука. 1985. 336 стр.

[2] Головин А.М., Животягин А.Ф. Влияние объёмной химической реакции на массообмен внутри капли при больших числах Пекле. // Вестник МГУ, сер. 1., мат. и мех., 1979, №4, Стр. 834-847.

[3] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989 . 336 стр.

Задача управления для дробного уравнения с многочленами от оператора дифференцирования

Байбулатова Г.Д.[a], Плеханова М.В.[a,b]
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия,
[b]Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск, Россия

Пусть D_t^α – дробная производная в смысле Герасимова — Капуто, $P_n(\lambda)$, $Q_{n_1}(\lambda)$ – многочлены с комплексными коэффициентами порядка n и n_1 соответственно, $n \geq n_1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов A, $B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен.

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$D_t^\alpha P_n(A)w = Q_{n_1}(A)w + g(x, P_n(A)w, D_t^1 P_n(A)w, \ldots, D_t^s P_n(A)w) +$$
$$+ Bu(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0, T], \tag{1}$$

$$B_l A^k w(x,t) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n-1, \quad l = 1,2,\ldots,r, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [t_0, T], \tag{2}$$

$$P_n(A)w(x,t_0) = w_0(x),\ D_t^1 P_n(A)w(x,t_0) = w_1(x), \ldots,$$
$$D_t^{m-1} P_n(A)w(x,t_0) = w_{m-1}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x,t) \in U_\partial, \quad (x,t) \in \Omega \times [t_0, T], \tag{4}$$

$$J(w,u) \to \inf, \tag{5}$$

где $w(x,t)$ – неизвестная вектор-функция, $u(x,t)$ – функция управления, $\alpha > 0$, $m-1 \leq \alpha < m$, $s \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, U_∂ – множество допустимых управлений, $J(w,u)$ – функционал качества.

Пусть U — банахово пространство, выберем $j \in \mathbb{N}$ и положим $\mathcal{X} = \{v \in H^{2r(n+j)}(\Omega) : B_l A^k v(x) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1,\ l = 1,\ldots,r, x \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} = H^{2rj}(\Omega)$, $Z = \{w \in W_q^s(t_0,T;\mathcal{X}) : D_t^\alpha P_n(A)w - Q_{n_1}(A)w - g(x, P_n(A)w, D_t^1 P_n(A)w, \ldots, D_t^s P_n(A)w) \in W_q^s(t_0,T;H^{2rj}(\Omega))\}$

Теорема. Пусть $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $n \geq n_1$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих нулей многочленов P_n и Q_{n_1}, $s = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{s+1}; \mathbb{R})$, все частные производные от g до порядка $2rj + 1$ включительно ограничены на $\Omega \times \mathbb{R}^{s+1}$, $Bu \in W_q^s(t_0, T; H^{2rj}(\Omega))$, $\langle w_l, \varphi_k \rangle = 0$ при $P_n(\lambda_k) = 0$, $l = 0, \ldots, m-1$, $\{\varphi_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора A, U_∂ – непустое выпуклое замкнутое подмножество в $W_q^s(t_0, T, U)$, Z непрерывно вложено в банахово пространство $\mathfrak{Y}$, которое вложено в $W_q^s(t_0, T, \mathfrak{X}_1)$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу на $\mathfrak{Y} \times W_q^s(t_0, T, U)$, коэрцитивный на $Z \times W_q^s(t_0, T, U)$. Тогда существует решение $(\hat{w}, \hat{u} \in Z \times U_\partial))$ задачи (1) – (5).

Система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными

Борель Л.В.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассмотрена задача

$$z_i(x,t) = z_{i-}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_-, \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

$$(1-\theta) z_i(x,t) + \theta \frac{\partial z_i}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad i = 1,2,3, \tag{2}$$

для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} z_{1t}(x,t) = \triangle z_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{-\infty}^{t} k_{1i}(t-s) z_i(x,s) ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ z_{3t}(x,t) = \triangle z_2(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{-\infty}^{t} k_{2i}(t-s) z_i(x,s) ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \\ 0 = \triangle z_3(x,t) + \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{-\infty}^{t} k_{3i}(t-s) z_i(x,s) ds, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\theta \in \mathbb{R}$, заданы функции $z_{i-} : \overline{\mathbb{R}}_- \to \mathbb{R}$, $k_{ji} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$, $i, j = 1,2,3$.

Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство. Через $\mathcal{R}(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$ будем обозначать множество функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, для которых несобственный интеграл Римана $\int_0^{+\infty} \|h(t)\|_{\mathfrak{U}} dt$ сходится. Положим $H^2_\theta(\Omega) := \{u \in H^2(\Omega) : \theta \frac{\partial u}{\partial n}(x) + (1-\theta) u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega\}$.

На основе результатов работы [1] доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $z_{1-} \in C_0(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega)) \cap \mathcal{R}(\mathbb{R}_-; L_2(\Omega))$, функции $z_{2-}, z_{3-} \in C(\overline{\mathbb{R}}_-; L_2(\Omega))$ ограничены, $z_{2-}(\cdot, 0) \equiv z_{3-}(\cdot, 0) \equiv 0$, $k_{2i} \equiv$

$k_{3i} \equiv 0$, $k_{1i} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $k_{1i}, k'_{1i} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$, $i = 1,2,3$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение

$$z_1, z_3 \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)),$$

$$z_2 \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; H^2_\theta(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}; L_2(\Omega)).$$

[1] Федоров В. Е., Борель Л. В. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 4. С. 899–912.

О корректности одной задачи для интегро-дифференциального уравнения агрегации

Вильданова В.Ф., Зайнулова А.Р.
БГПУ им.М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим

$$\beta(x,u)_t = \operatorname{div}(a(x,u,\nabla u) - \beta(x,u)G(u)) + f(x,u) \tag{1}$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x,0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$(a(x,u,\nabla u) - uG(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \ \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

где ν – вектор внешней нормали. Здесь $\beta(x,r)$, $f(x,r)$, $a(x,r,y)$ – каратеодориевы функции. Функция β, $\beta(x,0) = 0$ – нечетная и возрастает по r. Требование нечетности несущественно, поскольку нас интересуют только неотрицательные решения уравнения (1). Интегральный оператор $G(u) = (G_1(u), G_2(u), ..., G_n(u))$ определяеся формулами

$$G_i(v) = \int\limits_\Omega g_i(x,y)b(v(y))dy.$$

Целью работы является доказательство существования и единственности решений смешанной задачи (1) – (3).

Теорема 1. Пусть $B(x,u_0) \in L_1(\Omega)$, $0 \leq u_0(x) \leq M_0$. Тогда существует число T, определяемое данными задачи, такое что в цилиндре D^T существует ограниченное слабое решение задачи (1) – (3).

При некоторых более жестких ограничениях доказана единственность решения задачи (1) – (3) в D^T.

[1] Bertozzi A., Slepcev D. Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion. Comm. Pur. Appl. Anal. 2010. Vol. 6, p. 1617–1637.

Лемма о разрешимости простейшего разностного уравнения в полосе

Воронин С.М., Шайхуллина П.А.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В работе рассмативается простейшее функциональное уравнение

$$x(t) - x(t+1) = a(t),\ t \in U \tag{1}$$

Это уравнение возникает в многочисленных задачах анализа и является разностным аналогом простейшего дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = a(t)$. Разрешимость этого уравнения зависит от его области определения $U \subset \mathbb{C}$ и асимптотики правой части. В простейших случаях (например, когда область U инварианта относительно сдвига $T : t \mapsto t+1$ и итерации $a \circ T^n$ достаточно быстро убывают), решение уравнения (1) можно найти явно: $x = \sum\limits_n a \circ T^n$. Однако, для области U типа «полоса» стандартные методы не работают. Тем не менее справедлива следующая

Теорема (Лемма о разрешимости). Пусть $U = \{Ret \in (b,c)\} \subset \mathbb{C}$ - полоса ширины $c - b > 1$, функция a голоморфна на U, причём $a(t) = O(|Im\xi|^{-m})$ при $Im\xi \to \infty$, тогда:

1. На расширенной полосе $\tilde{U} = \{Re\xi \in (b, c+1)\}$ определена голоморфная функция $x_+(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) на U, причем

$$x_+(t) = O(|Im\xi|^{-m+1}),\ Im\xi \to +\infty,\ t \in \tilde{U} \tag{2}$$

$$\sup_{t\in\tilde{U}} |x_+(t)| \leq C_m \sup_U |t^m a(t)|$$

для некоторой универсальной константы C_m;

2. Ограниченное голоморфное решение уравнения (1) на $\tilde{U}$, нормированное условием (2), единственно.

С помощью Леммы о разрешимости, решение нелинейных задач можно теперь искать по следующему плану. По нелинейному функциональному уравнению строится соответствующее ему гомологическое уравнение ГУ: оно получается линеаризацией исходного. По Лемме строится решение ГУ. Оценки этого решения позволяют далее обосновать сходимость итерационного процесса метода Ньютона. К настоящему времени по указанной схеме удалось построить секторильные нормализующие отображения для полугиперболических (частично опубликовано в [1]) и резонансных седловых ростков.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00739 А.

[1] Воронин С.М., Фомина П.А. Секториальная нормализация полугиперболических отображений. Вестник ЧелГУ -2013. -№16.-С. 94-113.

Равенство порядков ряда Дирихле в полуполосах заданной ширины

Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский госуниверситет
г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{1}$$

— ряд Дирихле, сходящийся в $\mathbb{C}$. Обозначим $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|\le\infty} |F(\sigma + it)|$, $M_s(\sigma) = \max\limits_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma + it)|$. Величина $\rho_s = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \sigma^{-1} \ln^+ \ln M_s(\sigma)$ $(a^+ = \max\,(a, 0))$ называется R-порядком функции F в полосе $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a\}$.

С. Мандельбройтом доказано, что если $\varliminf\limits_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$, то R-порядок ρ_s функции F в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^*$ (D^* — усреднённая верхняя плотность) равен R-порядку ρ_R во всей плоскости. Наиболее общий результат о равенстве R-порядков в разных полосах $S_i = S(a_i, t_i)$ $(i = 1, 2)$ установлен А.Ф. Леонтьевым в [1]. Для замкнутых полос соответствующий результат доказан Г.С. Садыховым (см. в [1]).

Отметим, что для целых рядов Дирихле (1) (как произвольного, так и заданного роста) в [2] была сделана попытка в общей ситуации получить асимптотическое равенство

$$\ln M(\sigma) \sim \ln M_S(\sigma) \tag{2}$$

при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$. Это соотношение выводится из утверждения [2]: *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ *(когда F имеет произвольный рост) или $n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$ (если F — целая функция* *конечного порядка по Ритту), то для всяких горизонтальных полос $S_1 \subset S_2$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества E конечной меры или нулевой плотности соответственно*

$$\ln M_{S_2}(\sigma) \geq \ln M_{S_1}(\sigma) \geq \ln\left\{M_{S_2}(\sigma) - |o(1)|\mu(\sigma)\right\} + o\left(\ln M(\sigma)\right), \qquad (3)$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда Дирихле.

Однако, в (3) выражение в фигурных скобках, вообще говоря, отрицательно. Но тогда правая оценка в (3) не имеет смысла несмотря на то, что показатели ряда подчинены весьма жестким ограничениям — условиям Фейера или Фабри. Тем не менее, если же коэффициенты a_n ряда (1) лежат в угле $\left\{s = re^{i\theta} : |\theta - \theta_0| \leq \gamma < \frac{\pi}{4}\right\}$ ($|\theta_0| \leq \pi$), то $|F(\sigma)| \geq M(\sigma)\cos\gamma$, и при подходящем выборе полосы S_2 соотношение (2) легко вытекает из (3).

Для целых рядов Дирихле конечного порядка по Ритту в [3] доказан критерий выполнения (2) (Λ имеет нулевую α–конденсацию и удовлетворяет более слабому условию роста, чем условие Фабри [3]). Здесь же получены наиболее общие и окончательные результаты для рядов Дирихле произвольного роста, при этом вообще не требуется, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$.

В данной работе приведенный выше результат А.Ф. Леонтьева из [1] переносится на случай, когда область сходимости ряда (1) — полуплоскость $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$. Класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле (1), сходящимися лишь в полуплоскости Π_0, обозначим через $D_0(\Lambda)$.

Пусть $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \leq a, \quad \sigma < 0\}$ — полуполоса. Естественным образом вводится порядок $\rho(R)$ по Ритту в полуплоскости Π_0 и порядок $\rho(S)$ полуполосе $S(a, t_0)$ функции F (см. в [3]).

Теорема Пусть последовательность Λ имеет конечную R-плотность $G(R)$. Если $S_1 = S(a_1,\ t_1)$, $S_2 = S(a_2,\ t_2)$ — полуполосы, каждая из которых имеет ширину больше $2\pi G(R)$, то $\rho_1 = \rho_2$, какова бы ни была функция $F \in D_0(\Lambda)$. Здесь ρ_1 и ρ_2 — R-порядки функции F в S_1 и S_2 соответственно.

Замечание. При $G(R) = 0$ равенство $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$ верно для любых полуполос ($a_1 > 0,\ a_2 > 0$ — любые). Однако отметим, что аналог теоремы для горизонтальных лучей в условиях теоремы не верен. Оказывается, как только одна из полуполос имеет ширину меньше $2\pi G(R)$, то теорема тоже не верна — построен соответствующий пример. Приведенная теорема содержит результаты работы [4].

[1] Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

[2] Шеремета М.Н. Рост в полосе целых функций, представленных рядами Дирихле. Изв.АН СССР. Сер. матем.**45**, 1981, №2, 674–687.

[3] Гайсин А.М. Асимптотические свойства функций, заданных рядами экспонент. Докт. дис., Уфа, 1994.

[4] Гайсин А.М. Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах. Матем.заметки, (42), 1987, №5, 660-669.

Формула для порядка ряда экспонент для области с гладкой границей

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — конечная выпуклая область, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D. В [1] показано, что любая функция f из $H(D)$, имеющая конечный порядок

$$\rho = \varlimsup_{z \to \partial D} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad d(z) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|,$$

допускает разложение в ряд экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D \tag{1}$$

(λ_n — нули некоторой целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$, для которой $\overline{D}$ — сопряженная диаграмма), причем для любого $\varepsilon > 0$ при $r < r_0(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}| < \exp\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{\rho+\varepsilon}\right], \quad r = d(z).$$

Однако в данной ситуации нельзя ставить вопрос о формулах для коэффициентов, ибо нет единственности (сумма ряда может быть равна нулю, а его коэффициенты не все равны нулю). Поэтому в [1] не ставится и не обсуждается вопрос о какой-либо формуле, позволяющей вычислять порядок ρ через коэффициенты разложения.

Предположим, что ряд (1) сходится в большей области $G \supset \overline{D}$. В этом случае имеет место единственность разложения в ряд экспонент (1), и существуют формулы для определения коэффициентов [2]. Поскольку последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0$$

и G совпадает с областью абсолютной сходимости. Значит, область G выпукла [2]. Через $H(G, \Lambda)$ обозначим класс аналитических в G функций, представимых в G рядами (1), причем G — область сходимости.

Пусть λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — все нули некоторой четной целой функции $Q(\lambda)$ экспоненциального типа, и пусть они простые (такая функция имеется [2]). Предположим, что $\tau = \delta = 0$, где

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|}, \quad \delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right|.$$

Тогда сопряженная диаграмма функции $Q(\lambda)$ есть точка — $\{0\}$, а область G совпадает с областью регулярности ряда (1) [2].

Теорема. Пусть область G имеет гладкую границу. Если $\tau = 0$,

$$q_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}}{\ln |\lambda_n|} = 0,$$

то порядок любой функции $f \in H(G, \Lambda)$ подсчитывается по формуле

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_n| e^{K(-\varphi_n)|\lambda_n|}\right]}{\ln |\lambda_n|}, \tag{2}$$

где $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$, $K(\varphi)$ — опорная функция области G.

В случае, когда $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $G = \Pi_0 = \{z : Rez < 0\}$, в [3] было доказано утверждение: *для того, чтобы порядок ρ любой функции f из $H(\Pi_0, \Lambda)$ вычислялся по формуле*

$$\frac{\rho}{\rho+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ |a_n|}{\ln \lambda_n}, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = 0.$$

Формально формула (3) вытекает также из соотношения (2).

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. №6. С. 1308–1328.

[2] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

[3] Гайсина Г.А. Об одном обобщении формулы Н. В. Говорова – Мак-Лейна – М. Н. Шереметы для вычисления порядка // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21. № 3. С. 556–559.

Интерполяция и проблема неполноты на кривых

Гайсин Р.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть L — класс всех непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $l = l(x)$, таких, что $0 < l(x) \uparrow \infty$ при $x \to \infty$,

$$W = \left\{ w \in L : \int\limits_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}, \qquad \Omega = \left\{ \omega \in W : \frac{\omega(x)}{x} \downarrow \text{ при } x \to \infty \right\}.$$

Определение ([1]). Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < |\lambda_n| \nearrow \infty)$ — последовательность попарно различных комплексных чисел. Последовательность Λ называется *интерполяционной в смысле Павлова-Коревара-Диксона*, если найдется функция $\omega \in \Omega$, такая, что для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел, $|b_n| \leq 1$, существует целая функция f, обладающая свойствами:

$$1)\ f(\lambda_n) = b_n \ \ (n \geq 1); \qquad 2)\ M_f(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq e^{\omega(r)}.$$

Впервые интерполяционные последовательности $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ рассматривал А.И. Павлов (1972). Я. Коревар и М. Диксон указали достаточные условия на числа p_n, при которых последовательности $\{p_n\}$ будут интерполяционными. А именно, было установлено, что последовательности А.И. Павлова

$$\frac{n}{p_n} \downarrow, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty$$

и последовательности Т. Ковари

$$p_n \geq cn \ln n (\ln \ln n)^{2+\varepsilon}, \quad c > 0,\ \varepsilon > 0,\ n \geq 3,$$

являются интерполяционными [2].

В работе [3] доказан следующий критерий: *для того, чтобы последовательность $\{p_n\}$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\omega \in \Omega$, такая, что:*

$$a)\ n(t) \leq \omega(t); \qquad б)\ -\ln \prod_{\substack{\frac{p_n}{2} \leq p_k \leq 2p_n \\ k \neq n}} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| \leq \omega(p_n) \ \ (n \geq 1).$$

Здесь $n(t)$ — считающая функция последовательности $\{p_n\}$.

Для произвольной последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, критерий интерполяционности в классе W установлен в работе [4].

Теорема 1 [4]. *Для того, чтобы последовательность* Λ *была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $w \in W$, *такая, что*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty; \qquad б)\ -\ln\prod_{\substack{\frac{\lambda_n}{2}\le\lambda_k\le 2\lambda_n\\ k\ne n}}\left|1-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|\le w(\lambda_n)\quad (n\ge 1). \qquad (1)$$

Доказательство теоремы 1 основано на одной теореме существования Хёрмандера для $\overline{\partial}$-уравнений.

Я. Кореваром и М. Диксоном доказано следующее утверждение: *если* $\{p_n\}$ $(p_n \in \mathbb{N})$ — *последовательность А.И. Павлова, то*

$$\ldots,-p_n,\ldots,-p_2,-p_1,0,p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$$

является интерполяционной последовательностью [1].

Здесь доказана следующая более общая

Теорема 2. *Последовательность* $M=\{\nu_n\}$, $\nu_n=\lambda_n$, $\nu_{-n}=-\lambda_n$ $(n\in\mathbb{N})$ *является интерполяционной тогда и только тогда, когда выполнены условия* (1).

Из теоремы 2 следует, что для любого $\eta\in(0,1)$ система экспонент $\{e^{\eta\nu_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$ для любой спрямляемой кривой γ. Отсюда можно получить ответ на задачу Сиддики об условиях нетривиальности класса $C_{00}(\hat{M}_n;\gamma)$ в случае, когда γ — дуга ограниченного наклона с $q<1$, если учесть результат статьи [5] (обозначения см. также в [5]).

[1] J. Korevaar, M. Dixon. Nonspanning sets of exponentials on curves // Acta Math. Acad. Scient. Hung. 1979. T. 33. P. 89–100.

[2] J. Korevaar, M. Dixon. Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40. No 2. P. 243–258.

[3] B. Berndtsson. A note on Pavlov-Korevaar-Dixon interpolation // Nederl. Akad. Wet. Indag. Math. 1978. V. 40. No 4. P. 409–414.

[4] Р.А. Гайсин. Интерполяционная задача Павлова-Коревара-Диксона с мажорантой из класса сходимости // Уфимский матем. журнал. 2017. Т. 9. No 4. С. 22–35.

[5] А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана. II // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. No 1. С. 49–73.

Аналитические решения в задачах динамики газовых пузырьков в жидкости

Гаращук И.Р., Синельщиков Д.И., Кудряшов Н.А.
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

В докладе рассматривается несколько моделей динамики одиночного газового пузырька в жидкости. Исследование подобных математических моделей представляет интерес в связи с использованием инкапсулированных газовых пузырьков в качестве контрастных агентов при ультразвуковой диагностике [1]. Основой данных математических моделей является уравнения Рэлея, которое описывает процесс роста и схлопывания пустой полости в жидкости. В докладе обсуждается подход для построения общих аналитических решений рассматриваемых математических моделей, основанный на применении обобщенных преобразований Зундмана (см. например [2, 3, 4, 5]). Показано что в случае отсутствия диссипации для подобных математических моделей можно построить общее аналитическое решение выраженное через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Данный результат иллюстрируется на примерах моделей динамики газового пузырька в жидкости при учете поверхностного натяжения и влияния эластичной стенки, около которой осциллирует пузырек.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-71-10241.

[1] L. Hoff, Acoustic characterization of contrast agents for medical ultrasound imaging, Springer, Berlin, 2001.

[2] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble, J. Phys. A Math. Theor. 47 (2014) 405202.

[3] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, Analytical solutions for problems of bubble dynamics, Phys. Lett. A. 379 (2015) 798–802.

[4] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, On connections of the Liénard equation with some equations of Painlevé–Gambier type, J. Math. Anal. Appl. 449 (2017) 1570–1580.

[5] I.R. Garashchuk, D.I. Sinelshchikov, N.A. Kudryashov, General Solution of the Rayleigh Equation for the Description of Bubble Oscillations Near a Wall, to appear in 'European Physical Journal: Web of Conferences'.

Multistability in bubble contrast agent models

Garashchuk I.R., Sinelshchikov D.I., Kudryashov N.A.
National research nuclear university MEPhI, Moscow, Russia

Ultrasound contrast agents are encapsulated gas bubbles with radius on the order of a few micrometers, which are injected into the blood stream [1]. They are currently widely used to improve quality ultrasound visualisation by enhancing acoustic contrast between the blood and the surrounding tissues [1]. There are also several promising new applications of the microbubbles such as targeted drug delivery and noninvasive therapy [3].

We investigate three models of the microbubble dynamics: a non-encapsulated bubble oscillating close to an elastic wall, a simple coated bubble and a coated bubble near an elastic wall [2, 4]. We demonstrate presence of complex dynamics in all of them. We are particularly interested in the multistability phenomenon of bubble dynamics. In these models it can be presented in different ways: two different periodic attractors may coexist or a periodic attractor may coexist with a chaotic one. We demonstrate that both of these opportunities are realized in all models mentioned above. In an instance of coexistence of multiple attractors, the initial values problem becomes non–trivial. We demonstrate how several tools can be applied to overcome this problem and localize coexisting attractors. We provide wide regions of the control parameters for which different attractors coexist along with areas for which only one attractor exists. We provide some considerations why the multistability can be adverse for applications.

This work is supported by Russian Science Foundation, grant number 17-71-10241.

[1] L. Hoff, Acoustic characterization of contrast agents for medical ultrasound imaging, Springer, Berlin, 2001.

[2] A.A. Doinikov, A. Bouakaz, Review of shell models for contrast agent microbubbles, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 58 (2011) 981993.

[3] A.L. Klibanov, Microbubble contrast agents: targeted ultrasound imaging and ultrasound-assisted drug-delivery applications., Invest. Radiol. 41 (2006) 354362.

[4] A.A. Doinikov, L. Aired, A. Bouakaz, Acoustic scattering from a contrast agent microbubble near an elastic wall of finite thickness, Phys. Med. Biol. 56 (2011) 69516967.

[5] D. Dudkowski, A. Prasad, S. Jafari, T. Kapitaniak, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, G A., Hidden attractors in dynamical systems, Physics Reports, vol. 637, 2016

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа

Гималтдинова А.А.
Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа, Россия

Для уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + bu = 0, \quad b \in R, \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \in R^2 \mid -l < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, α, β, $l \in R_+$ изучена первая краевая задача.

Для случаев $b = 0$ и $b \neq 0$ установлен критерий единственности и построено решение в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Установлена полнота биортогональной системы в пространстве $L_2[-l, l]$ и на основе этого доказана единственность решения поставленной задачи. При доказательстве существования решения задачи Дирихле, т.е. при обосновании сходимости ряда, возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование решения задачи. Установлено, что знак коэффициента b не влияет на однозначную разрешимость задачи Дирихле для уравнения (1) в отличие от классических работ по теории задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с одной или двумя линиями изменения типа.

Регулярные множества в комплексной полуплоскости

Гусев А.Л.
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Б.Я. Левиным были введены регулярные множества в комплексной плоскости [1, гл.II]. Было показано, что такие множества являются интерполяционными в пространстве целых функций конечного порядка с индикатором, не превосходящим заданный. Понятие слабо регулярного множества в пространстве аналитических функций конечного порядка и нормального типа в полуплоскости было введено К.Г. Малютиным в 2013. Также было доказано, что эти множества являются интерполяционными в данном пространстве функций. Мы вводим понятие слабо регулярного множества в пространстве $[\rho, \infty]_+$ аналитических функций конечного порядка $\rho > 1$ в полуплоскости и доказываем, что эти множества являются интерполяционными в этом пространстве.

Последовательность $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$, $A \in \mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$, называется слабо регулярной последовательностью в пространстве $[\rho, \infty]_+$, $\rho > 1$, если выполняются следующие условия:
1) для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Im a_n}{|a_n|^{1+\rho+\varepsilon}} < \infty\,,$$

2) Среди точек множества A нет кратных и нет точек с одинаковыми модулями;
3) $A \cap C(0,2) = \emptyset$;
4) для всех точек a_n и a_k, принадлежащих A, из неравенства $|a_n| \geqslant |a_k|$ следует, что

$$\inf_k \frac{1}{|a_k|} \inf_n \ln\left(\frac{|a_n|}{|a_k|} - 1\right) > -\infty,$$
$$\liminf_{|a_k|\to\infty} \frac{1}{|a_k|} \inf_n \ln\left(\frac{|a_n|}{|a_k|} - 1\right) \geqslant -\rho\,.$$

Теорема. Слабо регулярная последовательность $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ является интерполяционной в пространстве $[\rho, \infty]$, $\rho > 1$.

[1] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в плоскости.

Джамалов С.З.
Институт математики АНРУз., г.Ташкент, Узбекистан

В докладе излагаются некоторые результаты об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для нагруженного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в плоскости.
Нагруженным уравнением принято называть уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах значения тех или иных функционалов от решения уравнения [2].
В области $Q = (0,1) \times (0,T) = \{\,(x,t);\ 0 < x < 1;\ \ 0 < t < T < +\infty\,\}$ рассмотрим нагруженное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - u_{xx} + \alpha\,(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) + Pu(x,t_0) \qquad (1)$$

где, $Pu\,(x,t_0) = b_1(x,t)u_x(x,t_0) + b_0(x,t)u(x,t_0), \quad 0 \leq t_0 \leq T$
Предположим, что $K(x,0) \leq 0 \leq K\,(x,T)$ и пусть коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области не налагается никаких ограничений,то есть функция $K(x,t)$ внутри области Q можеть менять знак [1].
Краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям.

$$u\,(x,0) = \gamma\, u(x,T) \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{3}$$

где, γ-некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнено.
В данной работе, в случае, когда $Pu(x,t_0) \neq 0$ и при выполнении некоторых условиях на коэффициенты уравнение (1) доказывается методами "ε-регуляризации", априорных оценок и последовательных приближений однозначное разрешимости задач (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$.

[1] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: Новосибирск.НГУ:, 1983. с. 84.

[2] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. Диф. уравн,1983.Т 19,No-1,с. 86–94.

Численное решение нелинейных уравнений типа Блэка-Шоулса с учетом эффектов обратной связи, возникающих из-за неликвидности рынка

Дышаев М.М.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Одна из базовых моделей ценообразования опционов — модель Блэка — Шоулса [1] — построена в предположении абсолютной ликвидности рынка. Модели, описывающие динамику стоимости опционов с учетом возникающих из-за недостаточной ликвидности эффектов обратной связи получены в работах [2, 3, 4]. В общем виде уравнение можно представить, как

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{2\left(1 - xv(u_x)u_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0, \tag{1}$$

при этом функция $v = v(u_x)$ принимает различный вид в зависимости от предполагаемой функции спроса реферальных трейдеров:

$$v = \begin{cases} 0, & \text{если модель не учитывает спрос;} \\ \beta, & \text{если функция спроса логарифмическая: } U(z) = \frac{1}{\beta}\ln z + A \ ; \\ \beta/u_x, & \text{если функция спроса степенная: } U(z) = Az^{1/\beta}. \end{cases}$$

Интерес представляет получение численных решений уравнения (1) для разных моделей спроса и последующий анализ различий в поведения цены опциона и других показателей, активно используемых в практической работе опционных трейдеров.

[1] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637–659.

[2] Frey R., Stremme A. Market volatility and feedback effects from dynamic hedging // Mathematical Finance. 1997. Vol. 7, no. 4. P. 351–374.

[3] Sircar R., Papanicolaou G. Generalized Black — Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies // Applied Mathematical Finance. 1998. Vol. 5, no. 1. P. 45–82.

[4] Schönbucher P. , Wilmott P. The feedback-effect of hedging in illiquid markets // SIAM J. on Applied Mathematics. 2000. Vol. 61. P. 232–272.

Динамика связанных магнитных вихрей обобщенного уравнения Ландау-Лифшица для случая мультислойных проводящих наноцилиндров

Екомасов А.Е.[1], Степанов С.В.[1], Антонов Г.И[1], Звездин К.А.[2], Екомасов Е.Г.[1]

[1] Башкирский Государственный Университет, Уфа, Россия

[2] Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

Большое внимание, в настоящее время, привлекают исследования вихревых решений Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица [1, 2, 3]. Наличие в этом уравнении слагаемого, учитывающего взаимодействие намагниченности и спин-поляризованного тока, позволяет исследовать процессы переключения и возбуждения осцилляций намагниченности в магнитных наноструктурах с помощью тока и внешнего магнитного поля. С помощью численного решения Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица, проведено исследование динамики и структуры двух дипольно связанных магнитных вихрей в трехслойном наностолбике, под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Показана возможность существования различных режимов движения вихрей, в зависимости от величины поляризованного тока и магнитного поля. Для случая стационарной динамики связанных магнитных вихрей, найдена зависимость частоты их колебаний от величины тока. Показана возможность управления частотой стационарного движения вихрей и подстройки амплитуды управляющих токов с помощью внешнего магнитного поля. С помощью аналитического метода для упрощенного описания динамики связанных вихрей, получены зависимости частоты от величины тока и внешнего магнитного поля, качественно совпадающие с численными результатами. Построена зависимость величины магнитного поля, раздельно переключающего полярность вихрей от величины спин-поляризованного тока. Показано, что динамический и квазистатический сценарии переключения полярности вихря имеют место при различных значениях поля/тока.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 16-32-00381.

[1] Звездин А.К., Звездин К.А., Хвальковский А.В. // УФН.178, 436 (2008).

[2] Locatelli N., Ekomasov A.E., Khvalkovskiy A.V. and et. al., Applied Physics Letters. 102, 062401 (2013).

[3] Екомасов А.Е., Степанов С.В., Звездин К.А., Екомасов Е.Г., Физика металлов и металловедение. 118, 345 (2017).

Структура и динамика солитонов модифицированного уравнения синус-Гордона с учётом примесей, внешней силы и затухания

Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Салимов Р.К., Кудрявцев Р.В., Капитонов И.В.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Одним из самых известных представителей интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ). На сегодняшний день, модели, основанные на использовании данного уравнения и его различных модификаций, встречаются в самых разнообразных областях естествознания: геологии, молекулярной биологии, физики, космологии и т.д. Однако построение различных моделей, наиболее адекватно описывающих физические системы, приводит к необходимости модифицировать УСГ, вводя, например, переменные коэффициенты, внешнюю силу и затухание. Часто исследуется случай наличия пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) (см. например,[1-3]). В работе для случая (1+1) - мерного УСГ показана возможность аналитического и численного решения задачи для случая произвольного числа примесей. Для случая наличия двух примесей определено наличие критического значения расстояния между примесями, которое приводит к двум качественно различным сценариям динамического поведения кинка. Рассмотрены структура и свойства трех- и четырехкинковых решений уравнения синус-Гордона, возбуждаемых в области примесей. Для (3+1) - мерного УСГ рассмотрен случай примеси сферически симметричного вида. С помощью псевдоспектрального метода Фурье численно найдены долгоживущие локализованные решения пульсонного и солитонного вида.

[1] A. M. Gumerov, E. G. Ekomasov, F. K. Zakir'yanov, R. V. Kudryavtsev, Comput. Math. Math. Phys., 54(3) (2014) 491–504.

[2] E. G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, JETP Letters, 101(12) (2015) 835–839.

[3] E.G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. V. Kudryavtsev, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312 (2017) 198–208.

Контактное сопротивление прямоугольного контакта

Ершов А.А., Крутова Ю.А.

ИММ УрО РАН, г.Екатеринбург, Россия

ЧелГУ, г.Челябинск, Россия

По определению контактного сопротивления Р. Хольма [1] контактное сопротивление есть электрическое сопротивление полубесконечного тела (занимающего полупространство), подключенного с одной стороны. Контактное сопротивление можно найти иначе, как половину главного члена асимптотики электрического сопротивления тела конечных размеров с двумя одинаковыми малыми контактами.

Рассмотрен случай, когда плотность тока на поверхности контактов постоянна. Сопротивление прямоугольного образца выражено в виде суммы ряда, сингулярно зависящей от малого параметра.

Установлено, что контактное сопротивление квадратного контакта со стороной ε составляет

$$R_{\varepsilon\times\varepsilon} = \frac{4}{\sigma\pi\varepsilon}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\Big),$$

где σ — электрическая удельная проводимость материала образца.

Ключевым моментом его вычисления является доказательство следующего асимптотического равенства:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2}\frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\right)}{\sqrt{m^2+n^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{\mu}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\Big)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big),\quad \mu\to 0.$$

Также установлено, что контактное сопротивление прямоугольного контакта со сторонами $\varepsilon\times C\varepsilon$ составляет

$$R_{\varepsilon\times C\varepsilon}=\frac{2}{3\sigma\pi\varepsilon C^2}\left(C^3\left(1-\frac{\sqrt{1+C^2}}{C}\right)+1-\sqrt{1+C^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3C^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+C^2}+1}{\sqrt{1+C^2}-1}\right)+\frac{3C}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+C^2}+C}{\sqrt{1+C^2}-C}\right)\right).$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ проект № 18-01-00221.

[1] Хольм Р. Электрические контакты. М.: Иностранная литература, 1961.

Оценка погрешности метода регуляризации А.Н.Тихонова для задачи ФТТ

Ершова А.А., Танана В.П.
ЮУрГУ, г.Челябинск, Россия

В работе рассматривается оценка точности метода регуляризации А.Н. Тихонова с параметром регуляризации α, выбранного из принципа невязки при решении задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости, зависящей от температуры.

Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Sn(s)=\int_0^{\infty}S(\frac{\varepsilon}{\theta})\frac{\varepsilon}{\theta}n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{C(\theta)}{\theta};0\le\theta<\infty, \tag{1}$$

где $S(x)=\frac{x^2}{2sh^2(\frac{x}{2})}$, $C(\theta)$– теплоемкость системы, $\theta=kT,T$ – абсолютная температура, а k– константа, определяемая системой, $n(\varepsilon)$ – спектральная плотность.

При некотором приближении $\frac{C_\delta(\theta)}{\theta}$ и уровне погрешности $\delta > 0$ таких, что $\left\|\frac{C_\delta(\theta)}{\theta} - \frac{C_0(\theta)}{\theta}\right\|_H \le \delta$, где H – действительное пространство, измеримых на $[0,\infty)$ функций, интегрируемых с квадратом на полупрямой $[0,\infty)$.

Требуется определить приближенное решение $n_\delta(\varepsilon)$ и оценить уклонение $\|n_\delta(\varepsilon) - n_0(\varepsilon)\|$.

При условии, что $\frac{C(\theta)}{\theta}, n(\varepsilon) \in H$, то уравнение (1) является некорректной задачей.

Вариационная задача для (1) имеет вид

$$\inf\left\{\int_0^\infty \left[\int_0^\infty S(\frac{\varepsilon}{\theta})\frac{\varepsilon}{\theta}n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C(\theta)}{\theta}\right]^2\frac{d\theta}{\theta} + \alpha\int_0^\infty [n'(\varepsilon)]^2\varepsilon d\varepsilon\right.$$

$$\left.+\alpha\int_0^\infty n^2(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} : n(\varepsilon) \in H^1[0,\infty)\right\},$$

где $H^1[0,\infty)$ – гильбертово пространство.

Параметр регуляриации, используемый в методе регулризации Тихонова, находится из уравнения

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty S(\frac{\varepsilon}{\theta})\frac{\varepsilon}{\theta}n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{C(\theta)}{\theta}\right]^2\frac{d\theta}{\theta} = \delta^2,$$

которое имеет единственное решение $\overline{\alpha}(C_\delta, \delta)$. Вариационная задача также имеет единственное решение, зависящее от α.

Приближенное решение $n_\delta(\varepsilon)$ уравнения (1) определяется формулой $n_\delta(\varepsilon) = n_\delta^{\overline{\alpha}(C_\delta,\delta)}(\varepsilon)$, а его уклонение от точного решения удовлетворяет соотношению $\|n_\delta(\varepsilon) - n_0(\varepsilon)\| \le \frac{2r}{\sqrt{1+\frac{1}{\pi^2}ln^2(\frac{2r}{3\delta})}}$.

Обобщенные неравенства Коши-Буняковского для линейных положительных функционалов

Ершова Т.В.

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г.Челябинск, Россия

Пусть V — линейная алгебра вещественных функций, заданных на некотором множестве Y. Обозначим через Φ линейный положительный функционал, действующий из V в $\mathbb{R}$. Известно [1], что неравенство Коши-Буняковского для линейных положительных функционалов имеет вид

$$\Phi^2 f\varphi \le \Phi f^2 \cdot \Phi\varphi^2, \tag{1}$$

где функции f, φ принадлежит V. В [2] работе указан метод,который позволяет получать неравенства, в некотором смысле обобщающие неравенство (1).

Из определения положительного функционала следует, что неотрицательной является квадратичная форма

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j \Phi f_i f_j,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, функции $f_i \in V$, $i \in \overline{1,m}$. Квадратичной форме соответствует симметрическая матрица с неотрицательными главными минорами. Таким образом, для главных миноров второго порядка имеем неравенство

$$D_2 = \begin{vmatrix} \Phi f_i^2 & \Phi f_i f_j \\ \Phi f_j f_i & \Phi f_j^2 \end{vmatrix} \geq 0, \quad i,j = \overline{1,m},$$

которое приводит к неравенству (1).

Рассмотрим случай главных миноров третьего порядка. Изменим обозначения функций f_i, f_j, f_k на f, φ, g. Будем иметь

$$D_3 = \begin{vmatrix} \Phi f^2 & \Phi f\varphi & \Phi fg \\ \Phi\varphi f & \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi g \\ \Phi gf & \Phi g\varphi & \Phi g^2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Вычислим произведение $\Phi f^2 \cdot D_3$, которое является неотрицательным, получаем

$$\Phi f^2 \cdot D_3 = (\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi g^2 - \Phi^2 fg) - (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)^2 \geq 0.$$

Таким образом,

$$(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi g^2 - \Phi^2 fg) \geqslant (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)^2. \qquad (2)$$

Теперь напишем определитель Грама четвертого порядка для функций f, φ, g и h.

$$D_4 = \begin{vmatrix} \Phi f^2 & \Phi f\varphi & \Phi fg & \Phi fh \\ \Phi\varphi f & \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi g & \Phi\varphi h \\ \Phi gf & \Phi g\varphi & \Phi g^2 & \Phi gh \\ \Phi hf & \Phi h\varphi & \Phi hg & \Phi h^2 \end{vmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{gathered}\big[(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi g^2 - \Phi^2 fg) - (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)^2\big]\times \\ \times\big[(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi h^2 - \Phi^2 fh) - (\Phi f^2 \Phi\varphi h - \Phi f\varphi \Phi fh)^2\big] \geq \\ \geq \big[(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi gh - \Phi fg \Phi fh) - (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)\times \\ \times(\Phi f^2 \Phi\varphi h - \Phi f\varphi \Phi fh)\big]^2. \end{gathered} \qquad (3)$$

Подобным образом исследуются случаи миноров порядков больших четырех. Неравенства (2), (3) и аналогичные им будем называть обобщенными неравенствами Коши-Буняковского.

[1] Виденский В.С. Линейные положительные операторы конечного ранга. Л.: Изд-во Ленингр. гос.пед. ин-та, 1985.

[2] Ершова Т.В. Обобщённые неравенства Коши — Буняковского для линейных положительных функционалов. Челяб. физ.-матем. журн., 2:4 (2017), 412–419 с.

Группа допускаемых преобразований модели Андерсона динамики двухфазной среды

Журавлев К.К.[1], Иванова Н.Д.[1,2]

[1]Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

[2]Южно-Уральский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассматривается модель Андерсона динамики двухфазной среды в одномерном изотермическом случае [1], которая имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + m_1 p)}{\partial x} = p_1\frac{\partial m_1}{\partial x} - \frac{\rho_2(u_1-u_2)}{\tau}, \\ \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2 + m_2 p)}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = p_1\frac{\partial m_2}{\partial x} - \frac{\rho_2(u_1-u_2)}{\tau}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $p_1 = \frac{a_1^2\rho_1}{1-\rho_2\rho_{22}^{-1}}$, $p_2 = a_2^2\rho_2$. В отличие от модели Рахматулина динамики двухфазной среды [2], модель Андерсона (1) учитывает взаимодействие частиц второй фазы. Групповые свойства уравнения Рахматулина были исследованы в работах [3,4]. В данной работе исследуются свойства симметрии модели Андерсона.

[1] Glasser, B.J., Kevrekids, I.G., Sundars, S. One- and two-dimensional traveling wave solutions in fluidized beds // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 306. P. 183–221.

[2] Рахматулин, Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред//Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184-195.

[3] Панов, А.В. Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20. № 2 (17). С. 71–82.

[4] Федоров, В.Е., Панов, А.В. Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Челябинский физико-математический журнал. 2011. № 38. С. 65–68.

Задача Коши для эволюционного уравнения с несколькими дробными производными

Журавлев С.О.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $A, B_1, \ldots, B_n, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$. Рассмотрим уравнение

$$D_t^{\alpha} Ax(t) + \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} B_k x(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $0 < \alpha_n < \alpha_{n-1} < \ldots < \alpha_1 < \alpha < 1$, D_t^{β} — производная Капуто порядка $\beta > 0$ [1]. Решением уравнения (1) будем называть такое $u \in C([0,T];\mathfrak{X})$, что существуют $D_t^{\alpha} Ax$, $D_t^{\alpha_1} B_1 x$, $\ldots, D_t^{\alpha_n} B_n x \in C([0,T];\mathfrak{X})$ и выполняется равенство (1).

Обозначим $\mathcal{B}_r := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\}$, $S(\mu) = \mu^{\alpha} A + \mu^{\alpha_1} B_1 + \ldots + \mu^{\alpha_n} B_n + B$, $S^1(\mu) = \mu^{\alpha-1} A + \mu^{\alpha_1 - 1} B_1 + \ldots + \mu^{\alpha_n - 1} B_n$,

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = a^{-1/\alpha} + 1, \arg\mu \in (-\pi, \pi)\}$$

$$\gamma_2 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg\mu = \pi,\ \mu \in (-a^{-1/\alpha} - 1, -\infty)\},$$

$$\gamma_3 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg\mu = -\pi,\ \mu \in (-\infty, -a^{-1/\alpha} - 1)\}.$$

Теорема. Пусть $x_0 \in \mathfrak{X}$ и выполняются условия

(I) $\exists a > 0\ \forall \overline{\lambda} \in \mathcal{B}_a^{n+1}\ \exists \left(A + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k B_k + \lambda_{n+1} B \right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$;

(II) $\exists C > 0\ \forall \overline{\lambda} \in \mathcal{B}_a^{n+1}\ \left\| \left(A + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A_k + \lambda_{n+1} A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})} \leq K$,

где $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1})$. Тогда функция $x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} S(\mu)^{-1} S^1(\mu) e^{\mu t} x_0 d\mu$ является решением задачи Коши $x(0) = x_0$ для уравнения (1).

[1] Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Плеханова М.В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1367–1375.

Об одном обобщении теоремы В.Б. Лидского на неаккретивный случай

Ишкин Х.К.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть функция q суммируема на каждом интервале $(0,b)$, $b>0$, и L – оператор, действующий в пространстве $L^2(0,+\infty)$ по формуле $Ly = l(y) := -y'' + qy$ на функциях из $D(L) = \{y \in L^2(0,+\infty):\ y, y' \in AC[0,+\infty),\ l(y) \in L^2(0,+\infty), y(0) = 0\}$. Здесь $AC[0,+\infty)$ – множество функций, абсолютно непрерывных на любом отрезке $[0,b]$, $b>0$. Согласно известной теореме В. Б. Лидского [1] при выполнении одного из условий

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Re} q = +\infty$, $\operatorname{Im} q$ – произвольная функция,

B) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Im} q = +\infty$ (или $-\infty$), $\operatorname{Re} q$ – произвольная функция,

спектр оператора L дискретен. Поскольку (см. доказательство Теоремы 1 из [1]) при $\operatorname{Re} q > 0$ $(Ly,y) = \int\limits_0^\infty \left(|y'|^2 + q|y|^2\right) dx > 0$, то условие A) фактически влечет аккретивность оператора $L + mI$ при некотором $m>0$. Аналогичное утверждение верно для оператора iL в случае выполнения условия B). Оказывается, если вдали от 0 функция q достаточно гладкая и ведет себя там достаточно регулярно, то спектр оператора L может быть дискретной и в случае, когда ни вещественная, ни мнимая части функции q не полуограничены.

Теорема. Пусть функция q удовлетворяет условиям

1) Существует $a>0$, что q суммируема на $(0,a)$, дифференцируема на $[a,+\infty)$ и q' абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a,b]$, $b>a$;

2) На $[a,+\infty)$ функция $|q|$ не убывает и при всех $x \ge a$ $|\arg q(x)| \le \pi - \delta$, $\quad |q(x)| \ge C_0 x^\alpha$, где α, δ, C_0 – положительные постоянные;

3) Интеграл $I(s) = \int\limits_a^\infty \left|((q(x)+s)^{-1/4})''(q(x)+s)^{-1/4}\right| dx$ сходится при всех достаточно больших $s>0$ и $I(s) \to 0$ при $s \to +\infty$.

Тогда L имеет дискретный спектр.

Условиям 1) – 3) удовлетворяет, например, функция $q = re^{i\theta}$, где $r = x^\alpha, \theta = (\pi-\delta)\cos x^\beta$, $\alpha > 0, \beta < \alpha/4 + 1/2$.

[1] Лидский В. Б. *Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром*// Тр. ММО. Т. 9. 1960. С. 45–79.

Возникновение и распад π-кинка в модели синус-Гордон с высокочастотной накачкой

Киселев О.М., Новокшенов В.Ю.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассмотрено уравнение синус-Гордон с высокочастотной параметрической накачкой и слабой диссипативной силой

$$u_{tt} - u_{xx} + \gamma u_t + A\left(\frac{t}{\epsilon}\right)\sin u = \eta(t), \quad -l < x < l, \tag{1}$$

$$u_x(-l,t) = u_x(l,t) = 0, \tag{2}$$

где $\epsilon, \gamma \ll 1$, а функции A и η периодичны, причем среднее по времени от коэффициента A равно нулю, $\langle A \rangle = 0$. Изучается класс решений типа π-кинков

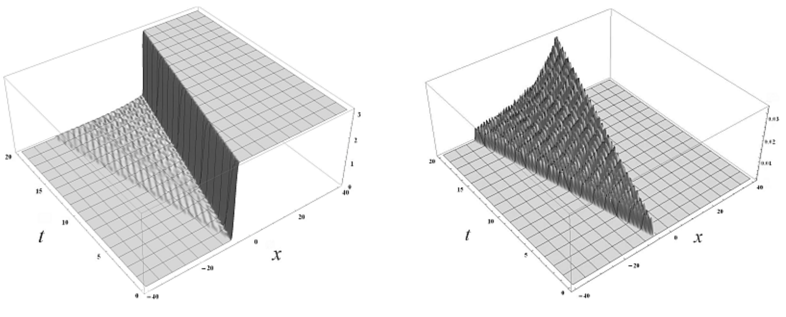

Рис. 1: Медленный распад начального условия, отвечающего π-кинку в уравнении (1) (слева) и разность решения краевой задачи (1), (2) и π-кинка (3) (справа).

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(D\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right], \quad D,\, c = \mathrm{const}. \tag{3}$$

которые, в отличие от устойчивых 2π-кинков, являются неустойчивыми решениями уравнения (1). Показано, что время, за которое π-кинк разрушается под действием малых возмущений, пропорционально кубу обратного периода быстрых осцилляций параметрической накачки. Выводится двухмасштабное асимптотическое разложение решения краевой задачи и анализируется эволюция волнового пакета с главным членом вида π-кинка. Проведено численное моделирование этого решения, которое показывает хорошее качественное согласие с полученной асимптотикой.

Oscillatory instabilities of Gap Solitons in a repulsive Bose–Einstein Condensate

Kizin P. P.[a,c], **Zezyulin D. A.**[b], **Alfimov G. L.**[a,c]
[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia
[b] ITMO University, St. Petersburg, Russia
[c] Institute of Mathematics RAS, Ufa, Russia

Our talk is devoted to numerical stability analisys of stationary localized solutions (Gap Solitons) of Nonlinear Schrödinger Equation (NLSE) with an additional potential. This equation arises in the theory of Bose–Einstein Condensate (BEC) in so-called mean-field approximation. In this model a special cigar-shaped condenstate's cloud is described by one-dimentional variant of NLSE

$$U_t = -U_{xx} + V(x)U + \sigma|U|^2U, \quad U = U(x,t), \tag{1}$$

where $V(x)$ is a real function and $\sigma = \pm 1$ is a parameter of interparticle interaction in BEC.

Gap Solitons of NLSE reads $U(x,t) = u(x)\exp\{-i\mu t\}$, where μ is a real parameter and $u(x)$ is a real function which obeys the localization conditions $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0$ and satisfies the second-order ODE

$$u_{xx} + (\mu - V(x))u - \sigma|u|^2u = 0. \tag{2}$$

We focus our attention on the case of periodic potentials $V(x)$ and repulsive nonlinearities $\sigma = 1$, [1]. Using Fourier collocation method and Evans Function approach we investigate numerially the Bogolyubov stability (spectral stability) for two classes of Gap Solitons of equation (2). For both classes we found the intervals of parameter μ with spectrally stable profiles and spectrally unstable ones.

In addition, we perform a numerical integration of NLSE by Trofimov–Peskov finite-difference scheme with stable and unstable initial conditions. During the integration all spectrally stable profiles have concerved their properties while all spectrally unstable profiles have been deformed. Results of both numerical stability analisys and numerical integration were in a good agreement with each other.

[1] P. P. Kizin, D. A. Zezyulin, G. L. Alfimov, Oscillatory instabilities of gap solitons in a repulsive Bose–Einstein condensate, Physica D **337** (2016), pp. 58–66.

Using statistical methods in entomology

Kočišek J.
Comenius University in Bratislava, Faculty of Natural Sciences, Department of Ecology
e-mail: jankokocisek@gmail.com

Contribution describes an application of statistical methods in entomology. To choose a statistical method is a crucial part of biological research. Author compares the use of absolute abundance and relative abundance in two commonly applied entomological methods. Further, works explains preference of absolute abundance for Capture-recapture method and relative abundance for Standard Walk Transects method. Output of valid statistical data is one of the keys for effective nature conservation, which will be demonstrated on examples from various Slovak ecosystems.

Low Energy Electron Interactions with Microhydrated Uracils

Kočišek J.[1], Fedor J.[1], Fárník M.[1], Poštulka J.[2], Slavíček P.[2]
[1] J. Heyrovský Institute of Physical Chemistry of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic
e-mail: kocisek@jh-inst.cas.cz
[2]University of Chemical Technology, Prague, Czech Republic
e-mail: slavicek@vscht.cz

It is believed that dissociative electron attachment to the nucleic acid bases can be the key process in the synergistic action of radiation with halogenated uracils in the concomitant chemoradiation therapy of cancer.[1] Typically, electron attachment to halogen uracils leads to the formation of transient negative ion that dissociates to form Uyl radical or Uyl radical anion, which are highly reactive. Most of the studies so far therefore focus on the stability of the halouracil transient anions. In our recent study [2] we showed that the water environment is very effective in the stabilization of the transient anions and the dissociation is not effective. However, such stabilization results in the effective energy transfer to the solvent. We will show, how electron attachment spectroscopy of sequentially microhydrated halogen uracils can be used for estimation of the energy transferred to the solvent [3].

Acknowledgment: This work was sup- ported by Czech Science Foundation grants no. 16-10995Y and 17-04068S.

[1] Chomicz, L.; Zdrowowicz, M.; Kasprzykowski, F.; Rak, J.; Buonaugurio, A.; Wang, Y. and Bowen, K. H. How to Find Out Whether a 5-Substituted Uracil Could Be a Potential DNA Radiosensitizer 2013 JCP Letters, 4, 2853.

[2] Kočišek, J.; Pysanenko, A.; Fárník, M. and Fedor, J. Microhydration Prevents Fragmentation of Uracil and Thymine by Low-Energy Electrons 2016 JCP Letters, 17, 3401.

[3] Poštulka, J.; Slavíček, P.; Fedor, J.; Fárník, M. and Kočišek, J. Energy Transfer in Microhydrated Uracil, 5-Fluorouracil, and 5-Bromouracil 2017 JPC B, 121, 8965.

Passage through the resonance in the Lamé equation with a slowly varying parameter

Koutvitsky V.A., Maslov E.M.
IZMIRAN, Moscow, Troitsk, Russia

Using the asymptotic perturbation method based on the Floquet theory we construct the resonant solutions of the Lamé equation with a slowly varying parameter. These solutions describe the passage of the oscillating inflaton scalar field through the resonance in the energy-momentum space due to cosmological expansion. We show that the most amplified Fourier k-modes of the scalar field perturbations grow as $\exp \int_0^t \mu(\varkappa, k)\, dt$ in the range $0 \lesssim k^2 \lesssim (3\lambda/2)\, \varphi_{\max}^2$, where $\varkappa(\varepsilon t)$ is a slowly varying parameter related to the energy density of the field, $\mu(\varkappa)$ is the Floquet exponent, $\varphi_{\max}$ is the amplitude of the homogeneous field oscillations, λ is the coefficient of anharmonicity.

Guaranteed error bounds for the nonlinear Poisson-Boltzmann equation

Kraus J., Nakov S. and Repin S.
RICAM, Austrian Academy of Sciences, Linz, Austria
e-mail: svetoslav.nakov@oeaw.ac.at

We show how to derive reliable functional a posteriori error estimates for the nonlinear Poisson-Boltzmann equation

$$-\nabla \cdot \left(\epsilon(x)\nabla\tilde{\phi}\right) + k^2(x)\sinh\left(\tilde{\phi}\right) = \sum_{i=1}^{N} z_i \delta_{x_i}(x) \tag{1}$$

which give not only an error indicator but also a tight bound on the error. In order to remove the delta distributions on the right-hand side of (1), a so called two or three term regularization is used. These regularizations split the full solution $\tilde{\phi}$ in $\tilde{\phi} = G + u$ or $\tilde{\phi} = G + u^h + u$, where G is analytically known and u^h is harmonic in the molecule domain Ω_1 and equal to $-G$ outside and is easy to approximate numerically. Our goal is to derive a posteriori error estimates for the component u which satisfies a nonlinear elliptic equation with nonhomogeneous Dirichlet boundary condition and nonhomogeneous interface jump condition on the normal component of the flux. The idea is to do one more splitting $u = u^L + u^N$ where u^L solves a linear nonhomogeneous interface elliptic problem and u^N solves a nonlinear homogeneous elliptic problem which depends on u^L. The resulting equation for u^N has the general form

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot (\epsilon \nabla u) + k^2 \sinh(u + w) &= l \quad \text{in } \Omega_1 \cup \Omega_2, && \text{(2a)}\\
[u]_\Gamma &= 0, && \text{(2b)}\\
\left[\epsilon \frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Gamma &= 0, && \text{(2c)}\\
u &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega, && \text{(2d)}
\end{aligned}$$

where $w \in L^\infty(\Omega)$ and $l \in L^2(\Omega)$. In this talk, the focus goes on obtaining guaranteed and fully computable error bounds on the approximation error. This is achieved by means of the approach suggested in [1] for convex variational problems. Moreover, we establish the error identity, which defines the error measure natural for the class of problems (2) and show that it yields computable majorants and minorants of the global error as well as indicators of local errors that provide efficient adaptation of meshes.

[1] S. Repin. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals. Math. Comp., 69:481-500, 2000

О некоторых эквивалентных соотношениях для плотностей последовательности нулей целых функций.

Кужаев А.Ф.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел с единственной предельной точкой $+\infty$. Нас будут интересовать главным образом верхняя плотность, максимальная плотность и верхняя логарифмическая блок-плотность, определяемые соответственно равенствами:

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1, \quad \bar{n}_0(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to+0} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{\delta t} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_n \leqslant t} 1,$$

$$\bar{L}(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to1-0} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{-\ln(1-\delta)} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_n \leqslant t} \frac{1}{\lambda_n}, \quad \delta \in (0;1).$$

Для дальнейшего понадобятся также следующие величины:

$$\bar{L}(\Lambda,\delta) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\lambda(t) - \lambda(t(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)},$$

$$\bar{n}_0(\Lambda,\delta) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{n(t) - n(t(1-\delta))}{\delta t}, \quad \delta \in (0;1).$$

Используя эти обозначения, получаем:

$$\bar{L}(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to1-0} \bar{L}(\Lambda,\delta), \quad \bar{n}_0(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to+0} \bar{n}_0(\Lambda,\delta).$$

Имеет место следующий результат (см.[1, теорема 3])

Теорема. Пусть $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < +\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\bar{n}_0(\Lambda,\delta) = \tau,\ \delta \in (0;1)$;
2) $\bar{n}(\Lambda) = \tau$;
3) $\bar{L}(\Lambda,\delta) = \tau,\ \delta \in (0;1)$
4) $\bar{L}(\Lambda) = \tau$;

[1] Кривошеев А.С., Кужаев А. Ф. *Об одной теореме Леонтьева-Левина* // Уфимский математический журнал. 2017. Т.9, №3. С. 89-101.

О задаче оптимизации для эллиптических уравнений с разрывными данными и управлениями в коэффициентах при младших производных и граничном условии сопряжения

Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Данная работа посвящена изучению задач оптимального управления процессами, описываемыми задачей Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений второго порядка с несамосопряженными операторами, с разрывными данными. Управляющими параметрами являются коэффициенты при младших производных и граничном условии сопряжения. Другими словами, в работе выделен класс задач оптимизации для состояния процесса, который связан с использованием недивергентной формы записи оператора конвективного переноса. Отметим, что в настоящее время в теории численных методов решения задач УМФ и задач оптимального управления наиболее глубокие результаты получены при рассмотрении процессов с самосопряженными операторами. В то время как задачи конвекции-диффузии свойственны многим математическим моделям механики жидкости и газа. Распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и быть обусловлено движением среды, то есть конвективным переносом (см. [1]). Конвективный-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов, в частности, при моделировании экологических проблем, связанных с описанием процессов распределения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи как для стационарных, так и нестационарных уравнений конвекции-диффузии - эллиптические или параболические уравнения второго порядка с младшими членами.

В работе изучается основной спектр проблем аппроксимации задач оптимального управления, описываемых уравнениями конвекции-диффузии: рассматриваются вопросы построения дискретных аналогов оптимизационных задач, вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций. Работа дополняет результаты из [2].

[1] Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Вычислительная теплопередача, Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2009.

[2] Лубышев Ф. В., Манапова А.Р., Файрузов М. Э. Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, Т. 54, № 11, С. 1767–1792 (2014).

Гауссово соотношение для смежных функций ${}_1F_2$ с фиксированным первым параметром

Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.
Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Как известно [1] функция Горна $H_3(\cdot)$ с первым единичным аргументом вырождается в гипергеометрическую функцию ${}_1F_2$:

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; 1, \tau) = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)} {}_1F_2(\delta-\alpha-\beta; 1-\alpha, \delta-\alpha; -\tau).$$

Теорема. Для всех не целых значений k верно соотношение:

$$-k \cdot {}_1F_2(1; 1-k, k; -\tau) - \frac{\tau}{1-k} \cdot {}_1F_2(1, 2-k; k+1; -\tau) = -k \qquad (1)$$

Доказательство. Функция ${}_1F_2(\cdot)$ в виде ряда выражается следующим образом [2]:

$${}_1F_2(a, b; c; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i}{(b)_i (c)_i} \frac{z^i}{i!}.$$

В левой части (1), которую обозначим через L, запишем функцию ${}_1F_2$ через ряд. Тогда учитывая, что $(1)_i = 1 \cdot 2 \cdot ... i = i!$, имеем

$$L = -k \cdot {}_1F_2(1; 1-k, k; -\tau) - \frac{\tau}{1-k} \cdot {}_1F_2(1, 2-k; k+1; -\tau) =$$

$$= -k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1)_i}{(1-k)_i (k)_i} \frac{(-\tau)^i}{i!} - \frac{\tau}{1-k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1)_i}{(2-k)_i (k+1)_i} \frac{(-\tau)^i}{i!} =$$

$$= -k - k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^i}{(1-k)_i (k)_i} - \frac{\tau}{1-k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^i}{(2-k)_i (k+1)_i}.$$

Поскольку $(1-k)_{n+1} = (1-k)(2-k)_n$ и $(k)_{n+1} = k(k+1)_n$, то заменив в первой сумме $n = i-1$, получим

$$L = -k + \frac{\tau}{(1-k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{(2-k)_n (k+1)_n} - \frac{\tau}{1-k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^i}{(2-k)_i (k+1)_i} = -k.$$

[1] Капилевич М.Б. О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна, Дифференциальные уравнения 2 (9), 1239 – 1254 (1966).

[2] Кампе де Ферье Ж., Кеимбелл Р., Петьо Г. Функции математической физики. Справочное руководство. М.: Наука, 1963.

Математическое моделирование деформирования упругой пластины под действием динамической нагрузки

Марченко О.В., Сергеева А.М.

Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г.Комсомольск-на-Амуре, Россия

В работе представлено описание построения математической модели процесса деформирования пластины конечной толщины системой динами-ческих нагрузок. Особенность модели: объединение в систему разнохарак-терных нагрузок, учет их взаимовлияния и распределения свойств дефор-мируемой среды по объему. Применена теория малых упругих деформа-ций, эйлерова система координат. Система дифференциальных уравнений:

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = I_i^t; \quad i, j,\ k = 1, 2, 3; \quad t = 1, 2...n - \text{номер нагрузки.} \tag{1}$$

Закон Гука

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}; \tag{2}$$

Уравнение теплопроводности (только для пластины)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\Big) = 0; i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

В уравнениях (1)-(3) используется суммирование по повторяющимся индексам. θ - температура льда, $\rho = \rho(\theta)$ – плотность льда, $G = G(\theta)$ – модуль сдвига льда, σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, ν_i, F_i – проекции скорости перемещений и удельной объемной силы, λ - коэффициент теплопроводности. Результаты численных исследований изложены в работах [1, 2]. Показана возможность применения матмодели для анализа ледоразрушающей способности инновационных ледокольных устройств.

[1] Сергеева А.М., Одиноков В.И, Марченко О.В. Определение напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при движении под ним ледокольной приставки // Математическое моделирование.– 2009. - №10. – с.47-573

[2] Марченко О.В., Сергеева А.М. Об особенностях деформирования тяжелой упругой пластины конечной толщины под действием подвижной нагрузки применительно к изучению прочности ледяного покрова //Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). - с. 61-72

Коэффициенты асимптотического разложения отображения соответствия и преобразования монодромии в случае сложной монодромной особой точки.

Медведева Н.Б.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В статье [1] получены формулы для коэффициентов отображения соответствия в первом квадранте для монодромной особой точки векторного поля на плоскости в случае, когда диаграмма Ньютона состоит из одного ребра. В случае, когда диаграмма Ньютона векторного поля состоит из нескольких невырожденных ребер, отображение соответствия в первом квадранте и преобразование монодромии может быть разложено в композицию так называемых расширенных отображений соответствия, каждое из которых соответствует внутренней вершине диаграммы Ньютона и двум смежным с ней ребрам. Разработан алгоритм построения формул для коэффициентов асимптотического разложения (произвольной длины) расширенного отображения соответствия при условии отсутствия некоторых резонансов седла, полученного в результате раздутия с центром в данной внутренней вершине. Доказано, что асимптотическое разложение расширенного отображения соответствия можно получить, составляя формальные отображения, соответствующие двум ребрам и внутренней вершине диаграммы Ньютона и затем составляя их композицию. Формальный ряд, соответствующий данному ребру, составляется так, как если бы диаграмма Ньютона векторного поля состояла только из одного данного ребра (аналогично случаю одного ребра диаграммы Ньютона). Коэффициенты этих рядов выражаются через интегралы Адамара (регуляризация расходящихся несобственных интегралов) от функций, выражаемых через квазиоднородные компоненты векторного поля, и определяющихся рекуррентно. Отображение, соответствующее вершине, имеет вид просто x^{λ}, где λ равно минус отношению собственных значений седла, полученного в результате раздутия с центром в данной внутренней вершине. Описанный алгоритм может быть реализован на компьютере. Обобщено понятие регуляризации расходящегося несобственного интеграла в смысле Адамара.

Выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект 17-01-00739.

[1] Медведева Н.Б. Асимптотическое разложение преобразования монодромии. Челябинский физико-математический журнал. Т.1. Вып. 1. 2016. С. 59-72.

Задача движения двумерного фронта для нелинейной системы параболических уравнений

Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Физический ф-т, г.Москва, Россия

Работа направлена на исследование решений типа фронта для нелинейной системы параболических уравнений в двумерной области. Систему можно рассматривать как математическую модель, описывающую резкое изменение физических характеристик в пространственно неоднородных средах. Система уравнений содержит малые параметры в разных степенях при дифференциальном операторе, что означает различие характерных скоростей протекания процессов для каждой из компонент. Исследование проведено с помощью методов теории контрастных структур, [1], [2], что позволило получить условия существования решения типа фронта, локализованного в окрестности замкнутой кривой, определить скорость фронта в зависимости от времени, получить асимптотическое приближение решения нулевого и первого порядков по малому параметру и описать алгоритм определения следующих приближений. Приближеннное решение обосновано по методу дифференциальных неравенств (см. [3]).

Приближенное решение позволяет подобрать параметры модели таким образом, чтобы результат соответствовал наблюдаемым процессам, объяснять и описывать особенности решений с резкими градиентами, создавать модели, обладающие устойчивыми решениями, тем самым облегчая задачу получения численных результатов.

[1] Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений. Дифф. ур. 2015. Т.51. №3. С. 339-358.

[2] Nefedov, N. N., Recke, L., Schnieder, K. R. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. V.405. P. 90-103.

[3] В. Ф. Бутузов, Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова, Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т.53. №9. С. 1427-1447.

On absence of global positive solutions of differential-convolutional inequalities with correlated-noise KPZ-nonlinearities

Muravnik A.B.

JSC “Concern “Sozvezdie”, Voronezh & RUDN University, Moscow, Russia

The inequalities

$$\Delta u+\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2+b(x,u)\,K*u^{\gamma}\leq 0,\ \ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

and

$$\Delta u+\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2+b(x,u)\,K*u^{\gamma}\geq 0,\ \ x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

are considered under the assumption that K is bounded by the Riesz kernel $|x|^{\beta-n}$, $\beta\in(0,n)$, from below (from above respectively).

The following results are presented.

Theorem 1. Let there exist α from $(-1,\infty)$ such that $a_j(x,s)\geq\dfrac{\alpha}{s}$ $(j=\overline{1,n})$, $b(x,s)\geq\dfrac{1}{(\alpha+1)s^{\alpha}}$, $\gamma>\alpha+1$, and $\gamma\leq\dfrac{(\alpha+1)n}{n-2-\beta}$ (the last assumption is imposed only in the case where $\beta<n-2$). Then inequality (1) has no positive solutions.

Theorem 2. Let there exist α from $(-\infty,-1)$ such that $a_j(x,s)\leq\dfrac{\alpha}{s}$ $(j=\overline{1,n})$, $b(x,s)\leq\dfrac{1}{(\alpha+1)s^{\alpha}}$, $\gamma<\alpha+1$, and $\gamma\geq\dfrac{(\alpha+1)n}{n-2-\beta}$ (the last assumption is imposed only in the case where $\beta<n-2$). Then inequality (2) has no positive solutions.

This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on the program to improve the competitiveness of Peoples’ Friendship University (RUDN University) among the world’s leading research and education centers in the 2016–2020, by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 17-01-00401), and by the President Grant for the Government Support of the Leading Scientific Schools of the Russian Federation, No. 4479.2014.1.

Об одном классе бесконечно дифференцируемых функций, допускающих продолжение до целых

Мусин И.Х., Яковлева П.В.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН; УГАТУ, г.Уфа, Россия

В работах Л. Эренпрайса и Б.А. Тейлора рассматривались пространства функций в $\mathbb{R}^n$, построенные по следующей схеме. Пусть $M = (M_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность чисел $M_k > 0$ с $M_0 = 1$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln M_k}{k} = +\infty$. Пусть $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что $\forall m \in \mathbb{N}$: $\varphi_m \in C(\mathbb{R}^n)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty$. Пусть $G(M,\Phi)$ – пространство функций $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$p_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^{\alpha} f)(x)|}{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|} e^{\varphi_m(x)}} < \infty, \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0.$$

Предположим, что последовательность M и семейство Φ таковы:

α_1). $M_k^2 \le M_{k-1}M_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$;

α_2). $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_{\varepsilon} > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad M_k \le a_{\varepsilon}\varepsilon^k k!$;

α_3). существует логарифмически выпуклая последовательность $K = (K_m)_{m=0}^{\infty}$ с $K_0 = 1$ такая, что при некоторых $t_1 > 1, t_2 > 1$

$$t_1^{-1} t_2^{-m} K_m \le \frac{m!}{M_m} \le t_1 t_2^m K_m, \ \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

α_4). $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \delta > 0$ существуют постоянные $a_m > 1$ (зависящая только от m) и $b_{m,\delta} > 0$ такие, что для любых $R > 0, x \in \mathbb{R}^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ с $\|\xi\| \le R$ имеем $\varphi_{m+1}(x+\xi) \le \varphi_m(x) + \omega_K(a_m\delta R) + b_{m,\delta}$, где $w_K(r) = \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}_+} \ln \dfrac{r^m}{K_m}$ for $r > 0$, $w_K(0) = 0$.

Пусть $E(K,\Phi)$ – счётно-нормированное пространство функций $f \in H(\mathbb{C}^n)$ таких, что $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\forall \varepsilon > 0$ конечны нормы

$$q_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(Re z) + w_K(\varepsilon\|Im z\|)}}.$$

Теорема. Пространства $G(M,\Phi)$ и $E(K,\Phi)$ изоморфны.

Подобная задача рассматривалась также в [1].

[1] А.В. Абанин, Ю.С. Налбандян, И.С. Шабаршина, “Продолжение бесконечно дифференцируемых функций до целых с согласованными оценками роста и теоремы типа Пэли—Винера— Шварца”, Владикавк. матем. журн., 6:2 (2004), 3–9.

Признаки опасных и безопасных точек бифуркации неавтономных динамических систем

Мустафина И.Ж.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\mu)x + b_2(x,t,\mu) + b_3(x,t,\mu) + b_4(x,t,\mu) + f(t,\mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

где μ скалярный или векторный параметр, $A(t,\mu)$ – квадратная матрица, $b_2(x,t,\mu)$ и $b_3(x,t,\mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $b_4(x,\mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|b_4(x,\mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по μ. Все слагаемые в уравнении являются гладкими по совокупности переменных и T-периодическими по t, при этом $f(t,\mu_0) \equiv 0$.

Предполагается, что при $\mu = \mu_0$ матрица $A_0 = A(t,\mu_0)$ является постоянной и имеет простое собственное значение 0. При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части.

В настоящем докладе обсуждается вопрос о признаках опасных и безопасных точек бифуркации. В соответствии с [1] будем говорить, что μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации, если решение $x = 0$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ является асимптотически устойчивым (неустойчивым).

Обозначим через e и g собственные векторы матриц A_0 и A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0 и удовлетворяющие равенствам $\|e\| = 1$, $(e,g) = 1$, где матрица A_0^* – транспонированная матрице A_0.

Положим $l_2 = \int_0^T (b_2(e,\tau,\mu_0), g)dt\,, \quad l_3 = \int_0^T (b_3(e,\tau,\mu_0), g)dt.$

Теорема 1. Пусть выполнено соотношение $l_2 \neq 0$. В этом случае точка μ_0 является опасной точкой бифуркации системы (1).

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения $b_2(x,t,\mu) \equiv 0$, и $l_3 \neq 0$. В этом случае точка μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации системы (1), если $l_3 < 0$ ($l_3 > 0$).

[1] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2009.

О равномерной резольвентной сходимости для многомерных эллиптических операторов в областях с малыми отверстиями

Мухаметрахимова А.И., Борисов Д.И.

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы; Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с границей класса C^2, $S \subset \Omega$ – многообразие без края класса C^2 коразмерности 1, ε – малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – некоторая функция, удовлетворяющая неравенству: $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$, $\mathbb{M}^\varepsilon \subseteq \mathbb{Z}$ – некоторое произвольное множество, $M_k \in S$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ – точки, удовлетворяющие условию: $\inf_{p\neq k} |M_k - M_p| \geqslant C\varepsilon$, где C – положительная константа, не зависящая от ε, $\omega_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ – ограниченные области с границами класса C^2, $\omega_k^\varepsilon = \{x : (x - M_k)\varepsilon^{-1}\eta^{-1} \in \omega_k\}$, $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon$. Положим: $\theta^\varepsilon = \theta_0^\varepsilon \cup \theta_1^\varepsilon$, $\theta_i^\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{M}_i^\varepsilon} \omega_k^\varepsilon$, $i = 0, 1$, где $\mathbb{M}_0^\varepsilon \cap \mathbb{M}_1^\varepsilon = \emptyset$, $\mathbb{M}_0^\varepsilon \cup \mathbb{M}_1^\varepsilon = \mathbb{M}^\varepsilon$.

Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим функции, заданные в Ω и удовлетворяющие следующим условиям:

$$A_{ij}, A_i \in W_\infty^1(\Omega), \quad A_0 \in L_\infty(\Omega), \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C_0|\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1 \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где C_0 – положительная константа, не зависящая от x и ξ. Пусть $a = a(x, u)$ – некоторая измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$|a(x, u_1) - a(x, u_2)| \leqslant a_0|u_1 - u_2|, \quad a(x, 0) = 0, \tag{1}$$

где a_0 – некоторая константа, не зависящая от x, u_1 и u_2.

Рассматривается краевая задача:

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 - \lambda\right) u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon,$$
$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta_0^\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + a(x, u_\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta_1^\varepsilon,$$

где $f \in L_2(\Omega)$, λ – вещественное число, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}$.

Введем еще одну краевую задачу:

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j} + A_0 - \lambda\right) u_0 = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \cup S.$$

Наш основной результат утверждает, что при условии

$$\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

и некоторых достаточно слабых предположения на распределение отверстий ω_k^ε верно неравенство:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C \left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2}$$

где константа C не зависит от ε и f.

Обратная задача для системы уравнений дробной вязкоупругой жидкости

Нагуманова А.В.

Челябинский Государственный Университет, г.Челябинск, Россия

Рассмотрим обратную задачу для системы уравнений

$$v^{(k)}(x,0) = v_k(x), \quad k = 0,1,\dots,m-1, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$\int\limits_0^T v(x,t)d\mu(t) = v_T(x), \quad \int\limits_0^T r(x,t)d\mu(t) = r_T(x), \tag{3}$$

$$(1-\kappa\Delta)D_t^\alpha v(x,t) = \nu\Delta v(x,t) - r(x,t) + u(x)q(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{4}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{5}$$

которая в линейном приближении моделирует динамику дробной вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта [1]. Здесь параметры $\kappa \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$ характеризуют свойства жидкости, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $v = v(x,t)$ — скорость жидкости, $r = r(x,t)$ — градиент ее давления. Искомыми являются функции v, r, u.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^s$, $L = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^s : \nabla \cdot v = 0\}$, $\mathbb{H}_\sigma$ – замыкание L в норме $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{H}_\pi$ – его ортогональное в смысле $\mathbb{L}_2$ дополнение, Π – соответствующий ортопроектор, $\Sigma = I - \Pi$. $\mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^s$,$\mathbb{H}_\sigma^1$ – замыкание L в норме $\mathbb{H}^1$, $\mathbb{H}^2 = (H^2(\Omega))^s$, $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$. Линейный замкнутый оператор, определенный на $\mathbb{H}_\sigma^2$, $A_\sigma = \Sigma\mathrm{diag}\{\Delta, \dots, \Delta\} : \mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{H}_\sigma$ имеет дискретный конечнократный спектр $\sigma(A_\sigma)$, сгущающимйя лишь на $-\infty$. Пусть $\{\varphi_k\}$ – семейство ортонормированных в смысле $\mathbb{H}_\sigma$ собственных функций оператора A_σ, занумерованных по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k\}$ с учетом их кратности. Рассмотрим функцию $\chi(z) \equiv \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(z(t-s)^\alpha)\varphi(s)ds, \quad z \in \mathbb{C}$, где $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ функция Миттаг-Лёффлера.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\kappa \neq 0$, $\kappa^{-1} \notin \sigma(A_\sigma)$, функция $q \in C([0,T];\mathbb{R})$, функция $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Решение задачи (1)–(5) существует и единственно тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^T q(t)d\mu(t) \neq 0$ и для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\chi\left(\nu\lambda_k/(1-\kappa\lambda_k)\right) \neq 0$.*

[1] *Mainardi F.* The time fractional diffusion-wave equations // Radiophys. and Quant. Electr. 1995. V. 38 P. 13-24.

Возбуждение магнитного бризера в трехслойной ферромагнитной структуре в режиме авторезонанса

Назаров В.Н.[1], Екомасов Е.Г.[2]

[1]ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В настоящее время сэндвичеподобные магнитные структуры широко исследуются в связи с возможностью их практического применения. Для таких магнитных материалов исследование динамики перемагничивания и генерации неоднородной структуры под действием высокочастотного поля представляется актуальным. Интерес представляет изучение контролируемых условий, в которых высокие углы прецессии намагниченности могут быть достигнуты применением полей достаточно малой амплитуды [1, 2]. В этой работе описывается авторезонансное параметрическое возбуждение магнитного бризера в трехслойном ферромагнетике с уменьшенным значением анизотропии в тонком слое полями переменной частоты и малой амплитудой специального вида. Как было показано ранее [3], при наличии диссипации начальный зародыш докритической амплитудой слабо реагирует на размер дефекта и исчезает, превращаясь в затухающий бризер. В случае переменного внешнего поля существует возникновение резонансных эффектов, приводих к росту амплитуды бризера. При переменной частоте поля накачки эволюция квадрата амплитуды определяется из резонансных условий, которые интерпретируются как захват системы в параметрический резонанс. Получены дифференциальные уравнения, анализ которых показывает существование решений с растущей амплитудой в зависимости от размеров слоя. Кроме того, показана возможность генерации магнитного бризера с увеличением амплитуды в поле тонкого слоя из уравнений движения, сформулированных в виде уравнения синус-Гордона в модели с включением примесей и решаемой с помощью численных методов [4].

[1] Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., Назаров В.Н., Харисов А.Т., Шамсутдинов Д.М. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009. 456 с.

[2] Калякин Л.А., Шамсутдинов М.А., Гарифуллин Р.Н., Салимов Р.К., ФММ. 2007. Т. 104, № 2. С. 115–128.

[3] Назаров В.Н., Шафеев Р.Р., Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., ФТТ. 2012. Т. 54, № 2. С. 282–287.

[4] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. V. 312. P. 198–208.

Об одном классе решений уравнения нелинейной диффузии

Орлов Св.С.[1], Орлов С.С.[2]

[1]Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН,

[2]Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Россия

В работе рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$U_t = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (k(U)\nabla_{\mathbf{x}} U), \quad k(U) = k_0 U^{\sigma}, \tag{1}$$

где $U = U(t, \mathbf{x})\colon \Omega \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, $\Omega \subset \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, $k_0, \sigma \in \mathbf{R}_{>0}$. Данное уравнение используется при описании многих процессов, встречающихся в задачах тепло- и массопереноса, теории горения и взрыва, фильтрации жидкости и газа, химической кинетике, биологии и т. д. В литературе (1) называют *уравнением нелинейной диффузии, теплопроводности* или *нестационарной фильтрации*.

Авторами предлагается подход к построению *обобщенных* решений [1, с. 37] уравнения (1), удовлетворяющих условию $U(t, \mathbf{x})|_{s(t,\mathbf{x})=s_0} = 0$, где $s_0 \in \mathbf{R}$. Выражение $s(t, \mathbf{x}) = s_0$ задает в пространстве $\mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}^n$ семейство гиперповерхностей (*фронтов диффузии*), вдоль которых вырождается уравнение (1), их аналитический вид и свойства определяются в процессе нахождения решений.

При помощи замены $u(t, s) = k_0[U(t, \mathbf{x})]^{\sigma}$, где $s = s(t, \mathbf{x})$ — некоторая функция такая, что $s_t \nabla_{\mathbf{x}} s \not\equiv \mathbf{0}$, осуществляется переход от (1) к одномерному уравнению

$$u u_{ss} + u_s^2/\sigma + k_1(t, s) u u_s + k_2(t, s) u_t + k_3(t, s) u_s = 0, \tag{2}$$

в котором коэффициенты $k_i(t, s)$ $(i = 1, 2, 3)$ связаны переопределенной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{x}} s/(\nabla_{\mathbf{x}} s)^2 = k_1(t, s), \\ -1/(\nabla_{\mathbf{x}} s)^2 = k_2(t, s), \\ -s_t/(\nabla_{\mathbf{x}} s)^2 = k_3(t, s). \end{cases} \qquad (3)$$

Изучаются вопросы совместности системы (3) и построения ее решений. Далее осуществляется поиск конструкций точных решений уравнения (2), удовлетворяющих условию $u(t, s)|_{s=s_0} = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00608, 16-31-00291)

[1] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

Квантование гамильтоновой системы Кимуры $H(1, 1, 1, 2)$

Павленко В.А.
ФГБОУ ВО БГАУ, г.Уфа, Россия

Рассматриваются два совместных между собой линейных уравнения с временами t_1 и t_2, которые зависят только от двух пространственных переменных. Эти уравнения являются аналогами уравнений Шредингера, которые опеределяются гамильтонианами Кимуры, см. [1]:

$$H_{t_k}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (k = 1, 2) \qquad (1)$$

пары совместных между собой систем, которые допускают применение метода изомонодромных деформаций (ИДМ). Установлено, что решения гамильтоновой системы $H^{2+1+1+1}$ Кимуры явным образом задаются совместными решениями $H^{2+1+1+1}$ Накамуры, см. [2].

В данной работе мы только начали выписывать решения эволюционных уравнений, которые задаются гамильтонианами Кимуры. Мы начали с гамильтониана $H(1, 1, 1, 2)$. Но в работе Кимуры имеются ещё целый ряд уравнений, которые задаются другими гамильтонианами. Все они являются аналогами уравнений Шредингера. Эти результаты будут обсуждаться в последующих работах.

[1] Hironobu Kimura. The degeneration of the two dimentional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. Vol. 4 CLV(1989), pp. 24-74

[2] Hiroshi Kawakami, Akane Nakamura and Hidetaka Sakai. Degeneration scheme of 4-dimentional Painleve-type equations. http://arXiv:1209.3836v3 [math.CA] 4 Aug 2016

Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями

Павленко В.Н.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассматривается следующая задача периодическая по отношению к t:

$$Lu(x,t) = g\left(x, t, u(x,t)\right), (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{S_T} = 0, u(x,0) = u(x,t), x \in \Omega, \tag{2}$$

где $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2, $S_T = \partial\Omega \times [0,T]$, L – равномерно параболический дифференциальный оператор в Q_T с достаточно гладкими коэффициентами, $g(x,t,u)$ равна разности суперпозиционно измеримых функций $g_2(x,t,u)$ и $g_1(x,t,u)$ неубывающих по u.

Функция $u \in W_2^{2,1}\left(Q_T\right)$ называется сильным решением задачи (1)-(2), если она почти всюду в Q_T удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2).

Получен принцип верхних и нижних решений для задачи (1)-(2) без дополнительных ограничений на “прыгающие вверх” точки разрыва $g(x, t, \cdot)$. С помощью этого принципа можно доказать теоремы существования сильных решений задачи (1)-(2) при некоторых дополнительных ограничениях на нелинейность $g(x,t,u)$, обеспечивающих существование упорядоченных пар нижнего и верхнего решений. В частности, в случае $g(x,t,0) = 0$ на Q_T устанавливаются теоремы существования положительного (соответственно отрицательного) на Q_T решения и не менее двух нетривиальных решений.

[1] Pavlenko V. N. Strong solutions of periodic parabolic problems with discontinuous nonlinearities. Differential Equations, 2016, Vol. 52, No 4, pp 505–516

Метод последовательных приближений для задачи Штурма – Лиувилля с разрывной нелинейностью

Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассматривается краевая задача с параметром $\lambda > 0$ на $(0,1)$:

$$Lu(x) \equiv -\left(p(x)u^{'}(x)\right)^{'} + r(x)u^{'}(x) + q(x)u(x) = \lambda g\left(x, u(x)\right), \tag{1}$$

$$u(0) = a, u(1) = b \tag{2}$$

где $a > 0$, $b \geqslant 0$, $p \in C^1\left([0,1]\right)$ и $p(x) > 0$ на $[0,1]$, r и q принадлежат $C\left([0,1]\right)$ причем $q(x) \geqslant 0$. Функция $g(x,u) = 0$, если $u \geqslant 0$ для почти всех $x \in (0,1)$, и совпадает с $f(x,u)$, непрерывной на $[0,1] \times (-\infty, 0]$, при $u < 0$ и $x \in [0,1]$. Предполагается, что $f(x,0) < 0$ на $[0,1]$ и существует постоянная $M \geqslant 0$ такая, что функция $f(x,u) + Mu$ неубывающая по u при $x \in [0,1]$. Кроме того, верна оценка

$$|f(x)| \leqslant c + d|s|^{\nu}, s \leqslant 0, x \in [0,1]\,, \tag{3}$$

где c, d – положительная константа, а $0 \leqslant \nu < 1$ и $f(x,s) \leqslant 0$ на $[0,1] \times (-\infty, 0]$. Пусть $\widetilde{v}(x)$ – решение задачи $Lu = 0$ на $(0,1)$, $u(0) = a$, $u(1) = b$. Заменой $v(x) = u(x) - \widetilde{v}(x)$ задача (1)-(2) преобразуется к виду

$$Lv(x) = \lambda\widetilde{g}(x, v(x)), x \in (0,1), \tag{4}$$

$$v(0) = v(1) = 0, \tag{5}$$

где $\widetilde{g}(x,s) = g(x, s + \widetilde{v}(x)$. В силу (3) для любого $\lambda > 0$ существует постоянная $C(\lambda)$ такая, что решение задачи $Lu(x) = -C(\lambda)$, $x \in (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$ (обозначим его $v_0(x)$) удовлетворяет неравенству $Lv_0(x) \leqslant \lambda\widetilde{g}(x, v_0(x))$ на $(0,1)$.

Сильным решением задачи (4) - (5) называется функция $v \in W_q^2(0,1)$, удовлетворяющая уравнению (4) почти всюду на $(0,1)$ и граничным условиям (5).

Говорят, что $\lambda > 0$ точка спектра σ задачи (4) - (5), если эта задача имеет нетривиальное сильное решение.

Теорема Пусть $\lambda \in \sigma$, $Lv_n + \lambda M v_n = \lambda\,(\widetilde{g}(x, v_{n-1} + M v_{n-1})$, $x \in (0,1)$, $v_n(0) = v_n(1) = 0$ ($v_0(x)$ - определена выше). Тогда $v_n(x) \uparrow v(x)$ в равномерной метрике и $v(x)$ минимальное сильное решение задачи (4) - (5).

Замечание Если дополнительно $b > 0$ и $r(x) = 0$, то $\sigma = [\lambda^*, +\infty]$, где $\lambda^* > 0$.

Электрон-акцепторные свойства фенилгорчичных масел в приложении к вопросу функционирования обонятельной системы

Пшеничнюк С.А.[1], Рахмеев Р.Г.[1], Асфандиаров Н.Л.[1], Комолов А.С.[2], Modelli A.[3,4], Jones D.[5]
[1]ИФМК УФИЦ РАН, Уфа, Россия;
[2]СПбГУ, Физический факультет, Санкт-Петербург, Россия; [3]Universitá di Bologna, Dipartimento di Chimica "G. Ciamician", Bologna, Italy;
[4]Centro Interdipartimentale di Ricerca in Scienze Ambientali, Ravenna, Italy; [5]ISOF, Istituto per la Sintesi Organica e la Fotoreattivitá, C.N.R., Bologna, Italy

Методами спектроскопии диссоциативного захвата электронов (ДЗЭ) и теории функционала плотности исследован резонансный захват электронов молекулами фенилгорчичных масел (Рис.1). Обнаружено, что относительные сечения образования наиболее интенсивных фрагментарных анионов (S– и SCN–) по механизму ДЗЭ являются характерными для каждого исследованного соединения, т.е. могут служить в качестве дифференцирующего фактора при восприятии запаха обонятельной системой.

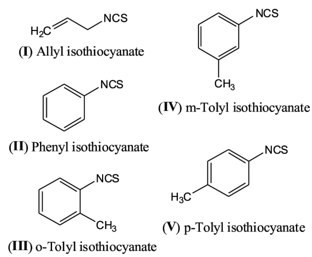

Рис. 1: Молекулярные структуры фенилгорчичных масел

В работе развивается идея о том, что электрон-акцепторные свойства одорантов, в частности, образование и распад их отрицательных ионов при захвате медленных (0-15 эВ) электронов, важны для понимания молекулярных механизмов функционирования обонятельной системы. Предложенный механизм можно рассматривать как обобщение «спектроскопической теории» Люки Турина [1], в рамках которой рассматривается неупругий перенос электрона через молекулу одоранта, связанную в активном центре обонятельного рецептора, с последующей активацией G-белка, сопряженного с данным рецептором.

Работа поддержана грантами РФФИ NoNo15-29-05786, 18-03-00179, 18-03-00020.

[1] Turin, L. (1996). A spectroscopic mechanism for primary olfactory reception. Chemical Senses, 21(6), 773-791.

О представлении функций, аналитических в замкнутой области, рядами экспоненциальных многочленов

Рафиков А.И.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работе рассматривается результат А. Ф. Леонтьева [3, гл. I, § 2, п. 6, следствие 1 из теоремы 1.2.5] о достаточных условиях разложимости функций, аналитических в замкнутой области, в ряд экспоненциальных многочленов. Используя методы, использованные в работе [1], его можно улучшить, «уменьшив скобки» в получающемся ряде за счёт перехода от групп, построенных по кольцам, к «относительно малым группам» и переформулировав в терминах геометрических характеристик последовательности показателей. Более того, за счёт преобразования базисов в каждой из групп представляется возможным записать получающийся ряд в более простом виде (1), несущественно усложняя оценки его слагаемых, поскольку новая система является «почти экспоненциальной».

Введём необходимые понятия и обозначения. $\Lambda = \{\lambda_n, \nu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — кратная последовательность комплексных чисел λ_n с единственной предельной точкой ∞. Под $n_\Lambda(\varphi, \psi)$ будем понимать угловую плотность последовательности Λ; под $W_D(\varphi, \psi)$ — длину дуги границы области D, заключённой между точками опоры опорных прямых, перпендикулярных направлениям $\arg z = \varphi$ и $\arg z = \psi$.

Семейство непустых множеств $U = \{U_m\}_{m=1}^{+\infty}$ назовём разбиением Λ, если множества U_m попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} U_m = \Lambda$. Обозначим количество различных точек $\lambda_k \in U_m$ с учётом кратностей как N_m. Тогда точки Λ, попавшие в группу U_m, естественно обозначить символом $\lambda_{m,k}$ (нумерация внутри группы произвольна), а их кратности — $\nu_{m,k}$. Наконец, разбиение U назовём относительно малым, если

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \max_{\substack{1\leqslant k\leqslant N_m\\ 1\leqslant l\leqslant N_m}} \left|\frac{\lambda_{m,k}-\lambda_{m,l}}{\lambda_{m,k}}\right| = 0.$$

Для относительно малых разбиений введём следующие функции:

$$q_{\Lambda,U}^{m,p}(z,\delta) = \prod_{\substack{\lambda_{k,l}\in B(\lambda_{m,p},\delta|\lambda_{m,p}|\\ m\neq k}} \left(\frac{z-\lambda_{k,l}}{3\delta\lambda_{k,l}}\right)^{\nu_{k,l}},$$

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta\to0} \varliminf_{m\to+\infty} \min_{1\leqslant p\leqslant N_m} \frac{\ln\left|q_{\Lambda,U}^{m,p}(\lambda_{m,p},\delta)\right|}{|\lambda_{m,p}|}.$$

Теперь мы можем сформулировать результат.

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая ограниченная область, Λ — правильно распределённая при порядке 1 последовательность, для которой $n_\Lambda(\varphi,\psi) = \dfrac{1}{2\pi} W_D(\varphi,\psi)$ и которая разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{+\infty}$, причём $S_\Lambda(U) = 0$. Тогда каждая аналитическая в $\bar{D}$ функция $f(z)$ может быть разложена в равномерно сходящийся в $\bar{D}$ ряд

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} d_m e_m(z), \tag{1}$$

где $d_m \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты, а $e_m(z)$ — почти экспоненциальная система с показателями Λ.

[1] Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб., Т.204, вып. 12. 2013. С. 49–104.

[2] Кривошеев А. С. *Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов* // Уфимск. матем. журн., Т.4, вып. 1. 2012. С. 88–106.

[3] Леонтьев А. Ф., *Ряды экспонент*, М.:Наука. 1976. 536 с.

[4] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*, М.:ГИТТЛ. 1956. 632 с.

Оператор свертки Данкла

Рахимова А.И.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В работе рассматривается обобщенный оператор Данкла и его свойства. Изучается построенный по нему оператор свертки. Обобщенный оператор Данкла определяется по формуле

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z),\ c > 0,\ \alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}},\ j = \overline{0; m-1}.$$

Его действие на целую функцию $f(z)$ имеет вид $\Lambda f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \phi(k) z^{k-1}$, где $\phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K e^{\xi k} (\frac{1}{\xi^2} + c \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i j}{m}}}{\xi - \frac{2\pi i j}{m}}) d\xi = k + c \sum\limits_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$. Полученный ряд определяет разложение Адамара. Если выполняется условие $\phi(k) =$

$p(k)$, где $p(k)$ – некоторый многочлен, причем $p(0) = 0, p(k) > 0, k > 0$, то обобщенный оператор Данкла является оператором Гельфонда-Леонтьева.

Оператор сдвига Данкла имеет вид

$$S_t[f(z)] = f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{\phi(1)\phi(2)...\phi(k)} \Lambda^k f(z),\ z, t \in \mathbb{C}.$$

Оператор свертки Данкла функционала $F(z) \in H^*(\mathbb{C})$ и функции $f(z) \in H(\mathbb{C})$ определяется по формуле

$$M_F[f(z)] = (F(t), S_t[f(z)]),\ z, t \in \mathbb{C}.$$

Теорема.

Функции $y(\lambda z), zy'(\lambda z), ...z^{n_k-1}y^{(n_k-1)}(\lambda z), k = (1; \infty)$ являются решениями однородного уравнения свертки $M_F[f(z)] = 0$.

Совокупность точек $(\lambda_1, n_1), ...(\lambda_k, n_k), ...$ образуют нули и кратности нулей уравнения $\widehat{F}(\lambda) = 0$.

[1] Напалков В. В., Напалков В. В. (мл.) Операторы Данкла как операторы свертки. // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423. № 3. С. 300–302.

[2] Карамов И. И., Напалков В. В. Обобщенный оператор Данкла. // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 1. С. 59–68.

Диссоциативный захват электрона молекулами 4-бромбифенила

Рахмеев Р.Г., Асфандиаров Н.Л., Пшеничнюк С.А., Зайцев Н.Л.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Диссоциативный перенос электронов на галогенированные ароматические углеводороды является важным процессом электрохимии и нуклеофильного замещения, и имеет промышленную и экологическую значимость [1]. Так при захвате электронов арилгалогенидами происходит образование промежуточного радикального аниона (ArX^-), который в последующем претерпевает разрыв связи C-X. При диссоциации избыточный электрон, делокализованный по π^*-системе, локализуется на $\sigma*$-связи, а атом галогена несет на себе избыточный заряд.

В качестве прототипа реакции в конденсированной фазе может служить диссоциативный захват электрона (ДЗЭ) исследуемый в настоящей работе. Методом масс-спектрометрии отрицательных ионов (МСОИ)

ДЗЭ [2] исследован ряд молекул галогенированных бифенилов. Измерены средние времена жизни молекулярных отрицательных ионов (ОИ) относительно выброса электрона. Обнаружено, что при ДЗЭ молекулами 4-бромбифенила при энергиях близкой к нулю присутствуют молекулярные ионы со средним временем автоотщепления $\tau_a = 50$ мкс и анионы Br^-. Величина сродства к электрону оценена в приближении Аррениуса [3] и рассчитана методом DFT B3LYP/6-31G+(d). Исходя из оценок времени жизни отрицательного молекулярного иона, и расчетов полной энергии молекулы при моделировании разрыва связи C-Br в анионе 4-бромбифенила, выявлено существование глобального минимума потенциальной энергии в котором практически весь избыточный отрицательный заряд сосредоточен на атоме галогена, а длина связи C-Br превышает 2.5 Ангстрема.

[1] IARC monographs on the evaluation of carcinogenic risks to humans; V. 107, Lyon, France, 2016.

[2] В.И. Хвостенко, Масс-спектрометрия отрицательных ионов в органической химиию. М.: «Наука», 1980, 169 с.

[3] N.L. Asfandiarov, S.A. Pshenichnyuk, A.S. Vorob'ev, E.P. Nafikova, A. Modelli Electron affinity evaluation for nitrobenzene derivatives using negative ion lifetime data // Rapid Commun. Mass Spectrom. 2015, V. 29, P. 910-912.

Dissociative electron attachment importance in DNA damage by ionizing radiation

Reimitz D.[1], Davídková M.[2], Kočišek J.[1]

[1] J. Heyrovský Institute of Physical Chemistry of the CAS, Prague, Czech Republic

e-mail: dan.reimitz@jh-inst.cas.cz

[2]Deptartment of Radiation Dosimetry, Nuclear Physics Institute of the CAS, Prague, Czech Republic

e-mail: davidkova@ujf.cas.cz

Synergistic effect of cisplatin (CDDP) with ionizing radiation to DNA damage is a known issue[1], but the mechanism is not yet known. One of the most promising explanations for this phenomena is that covalent bond of CDDP molecule to DNA causes conformation changes, which may increase the reactivity of DNA with radicals or secondary electrons generated by irradiation. Other explanation could be that low energy electrons can enhance the dissociation of CDDP which can then follow up radical reactions with DNA, but our results do not support this explanation[2]. Some authors propose other explanation, that the presence of CDDP can enhance the production of low energy electrons (LEE) in the close vicinity of Pt-DNA adducts, which can then cause a damage to DNA via dissociative electron attachment to the nucleic acid bases.

We report results of experiments exploring the combined effect of chemotherepeutics and radiation on DNA damage. To distinguish the effects of secondary electrons from that of OH radicals, which are dominant, we performed series of experiments with different scavenging capacity of OH radicals. This methodology was tested on CDDP molecule with known synergy with secondary electrons. Then we applied the same methodology to test other organometallic compounds based on ruthenium (RAPTA-C) and titanium ($Cp_2^*TiF_2$).

Acknowledgment: This work was supported by Czech Science Foundation grant no. 16-10995Y.

[1] Rezaee, M.; Sanche, L.; Hunting, D. J. Cisplatin Enhances the Formation of DNA Single- and Double -Strand Breaks by Hydrated Electron and Hydroxyl Radicals 2013 Radiation Research, 179, 323.

[2] Reimitz, D.; Davídková, M.; Mestek, O.; Pinkas, J.; Kočišek, J. Radiomodifying Effects of RAPTA C and CDDP on DNA Strand Break Induction 2017 Radiation Physics and Chemistry, 141, 229.

Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области

Рузиев М.Х.
Институт математики АНРУз., г.Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$(\mathrm{sign}y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $1 < \beta_0 < (m+4)/2$, в неограниченной области D, ограниченной полупрямыми $x = 0$, $x = 1$, расположенными в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками OC и BC уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$. Пусть $D^+ = D \cap \{(x,y) : y > 0\}$, $D^- = D \cap \{(x,y) : y < 0\}$, $I = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\}$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, которая :

$u(x,y) \in C(\bar{D}\backslash\bar{I}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+ \cup D^-$; $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0$, равномерно по $x \in [0,1]$; удовлетворяет краевым условиям $u(0,y) = \varphi_1(y)$, $u(1,y) = \varphi_2(y)$, $y > 0$, $u|_{OC} = \psi(x)$, $0 < x \leq 1/2$ и условию сопряжения

$\lim\limits_{y\to+0} y^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{\beta_0-1}u(x,y)) = \lim\limits_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}((-y)^{\beta_0-1}u(x,y))$, $x \in I$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$,$\psi(x)$- заданные функции, причем $\lim\limits_{y\to+0}(y^{\beta_0-1}u(0,y)) = \varphi_1(0)$, $\lim\limits_{y\to+0}(y^{\beta_0-1}u(1,y)) = \varphi_2(0)$, $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0-1}u|_{OC} = \psi(0)$.

Доказаны теоремы единственности и существования решений. Заметим, что краевые задачи для уравнения (1) при $\beta_0 = 0$ исследованы в [1],[2].

[1] Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой - полуполоса. Диф.уравн.1996. Т. 32,No 4. С. 565–567.

[2] Коржавина М.В. Задача Т для обобщенного уравнения Трикоми в случае бесконечной полуполосы.Волжский мат.сборник.Куйбышев:,1971г. С.114–119.

Граничные условия одномерного волнового объемного потенциала

Садыбеков М.А. Дербисалы Б.О.

Институт математики и математического моделирования,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г.Алматы, Казахстан

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ – область, ограниченная кривыми $x = \alpha(t)$ и $x = \beta(t)$ и отрезками прямых $t = 0$ и $t = T > 0$. Здесь $\alpha(t) < \beta(t)$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$, $|\alpha'(t)| < 1$, $|\beta'(t)| < 1$.

В Ω рассмотрим объемный волновой потенциал

$$u(x,t) = \int_{\Omega} \varepsilon(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|)$ – фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}, t > 0\}$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение (2) в области Ω. Хорошо известно, что при $T > 1/2$ решение уравнения (2) в Ω не однозначно восстанавливается по начальным условиям

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ 0 \le x \le 1. \tag{3}$$

Для однозначности необходимо использование краевых условий.

Ставится задачей построение краевых условий, по которым решение уравнения (2) в Ω будет однозначно определяться в виде (1).

В докладе обосновывается, что объемный волновой потенциал (1) на боковых сторонах Ω удовлетворяет условиям

$$u_x(\alpha(t),t) - u_t(\alpha(t),t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(\beta(t),t) + u_t(\beta(t),t) = 0, \ \ 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Обратно, решение уравнения (2) с начальными условиями (3) краевыми условиями (4), (5) существует, единственно и определяется в виде (1).

В случае $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 1$ данный результат получен в [1].

[1] Kalmenov T.Sh., Suragan D. Initial-boundary value problems for the wave equation // Electron. J. Differential Equations – 2014. – V. 2014, Art. No. 48. – P. 1–6.

Условия, при которых возможно существование локализованных осциллирующих решений возмущенного сферически симметричного уравнения Синус-Гордона

Салимов Р.К., Екомасов Е.Г.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия, г.Уфа, Россия

Уравнение синус-Гордона имеет много приложений в различных областях физики, включая гидродинамику, физику конденсированного состояния, теории поля и т.д. [1].Можно легко показать существование локализованного решения модифицированного уравнения синус-Гордона

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = (1 + f(r))sin(u) \tag{1}$$

при отрицательной энергии.Очевидно, что если энергия первоначального состояния меньше нуля

$$E = \int_0^\infty \left(\frac{u_r^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} + (1 + f(r))2\sin^2(\frac{u}{2}) \right) r^2 dr < 0 \tag{2}$$

то полной диссоциации локализованного решения не будет, так как при этом его энергия должна стать положительной. Здесь функция $f(r) \to 0$, при $r \to \infty$ и есть области где $f(r) < 0$. Обобщим это утверждение для выражения вида для $G < 0, E > 0$

$$G(t) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{u_r^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} + (1 + f(r) 2 \sin^2(\frac{u}{2}))\right) q(r) dr \qquad (3)$$

Где $q(r)$- некая везде дифференцируемая функция. Пусть начальным условием будет $u(r,0)$, $u_t(r,0) = 0$, такое, что

$$G(0) < 0 \qquad (4)$$

Тогда можно показать, что и в этом случае в области локализованной неоднородности $f(r)$ будет сохранятся не нулевое решение.

[1] М. А. Шамсутдинов, В. Н. Назаров, И. Ю. Ломакина, Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. — М.: Наука, (2009).

Многопериодические решения одной автономной системы уравнений с оператором дифференцирования по пространственным и временным переменным

Сартабанов Ж.А.,Омарова Б.Ж.

АРГУ имени К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан

Рассматривается автономная система линейных уравнений

$$Dx = Bx + f(\eta) \qquad (1)$$

с оператором дифференцирования $D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \langle e, \frac{\partial}{\partial t}\rangle + \langle A\eta, \frac{\partial}{\partial \eta}\rangle$, где $\tau \in (-\infty, +\infty) = R, t = (t_1, \dots, t_m)$, – временные и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ – пространственные переменные, $e = (1, \dots, 1)$ – m-вектор, $\frac{\partial}{\partial t} = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m})$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = (\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \eta_k})$, – вектор-операторы, $\langle , \rangle$ – знак скалярного произведения, A и B – постоянные $k \times k$ и $n \times n$ b– матрицы, $f(\eta)$ – ограниченная аналитическая n-вектор-функция.

Матрицы A и B обладают свойствами

$$N^{-1}AN = J = diag[\Omega_0, \dots, \Omega_\alpha], \Omega_j = \begin{pmatrix} 0 & -v_j \\ v_j & 0 \end{pmatrix}, j = \overline{0, \alpha},$$

$$2\alpha + 2 = k, m = \alpha, Re\mu_1(B) \neq 0, l = \overline{1, n},$$

где N – неособенная матрица, $\pm iv_j$ – рационально несоизмеримые простые собственные значения матрицы A, $\mu_l(B)$ – собственные значения матрицы B.

Векторное поле оператора D имеет характеристики

$$t = \sigma + e\tau \in R^m, \eta = N diag[H_0(\tau), H_1(t_1), \ldots, H_\alpha(t_\alpha)]N^{-1}c \in R^k,$$

с произвольными постоянными векторами σ и c,

$$H_j(t_j) = \begin{pmatrix} \cos v_j t_j & -\sin v_j t_j \\ \sin v_j t_j & \cos v_j t_j \end{pmatrix}.$$

Доказана теорема о том, что при этих условиях функция

$$x^*(\tau, t, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau - s) f(N diag[H_0(s), H_1(t_1 - \tau + s) \ldots,$$

$$H_\alpha(t_\alpha - \tau + s)]N^{-1}\eta)\, ds$$

представляет собой $(\theta, \omega_1, \ldots, \omega_\alpha)$ – периодическое решение системы (1), где $\theta = v_0^{-1}, \omega_1 = v_1^{-1}, \ldots, \omega_\alpha = v_\alpha^{-1}, G(\tau)$ – функция Грина многопериодической задачи для системы (1).

Исследование проводится в направлении обобщения известного метода Ляпунова [1] по периодическим решениям обыкновенных дифференциальных уравнений для рассматриваемого случая.

[1] Ляпунов А.М. Общая задачи об устойчивости движений. М.-Л.:ГИТТЛ, 1950.-472с.

Задача об определении ядро интегро-дифференциального уравнения с распределенными начальными данными

Сафаров Ж.Ш.

Институт математики имени В.С. Романовского АН РУз,
Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа в области $D = \{(x,t) : -\infty < x < \infty,\ t > 0\}$

$$u_{tt} = u_{xx} - \int_0^t k(\tau) u(x, t-\tau) d\tau, \qquad (x,t) \in R \times R_+, \tag{1}$$

$$u\mid_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t\mid_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где $R_+ = \{t \in R \mid t > 0\}$, $\varphi(x) \in C^2(-\infty, \infty), \psi(x) \in C^1(-\infty, \infty)$. При фиксированных k, φ, ψ эта задача является корректной, если подходящим образом подобраны функциональные пространства для данных задачи и пространства решений.

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $k(t) \in C(-\infty, \infty)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2)

$$u(0, t) = f_1(t), \qquad u_x(0, t) = f_2(t) \qquad t > 0. \tag{3}$$

Пусть $\Delta(x, t) = \{(\xi, \tau) : x - t < \xi < x + t, \qquad 0 < \tau < t - |x - \xi|\}$.

Теорема 1. Если для какого-либо $T > 0$, $k(t) \in C[0, T]$, $\varphi(x) \in C^2[-T, T]$, $\psi(x) \in C^1[-T, T]$, то в области $\Delta(0, T)$ существует единственное классическое решение задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть, функции $f_1(t), f_2(t)$ таковы, что $f_1(t) \in C^3[0, T]$, $f_2(t) \in C^2[0, T]$, и выполнены условия

$$f_1(+0) = \varphi(0) \neq 0, \qquad f_1'(+0) = \psi(0), \qquad f_2(+0) = \varphi'(0),$$

$$f_2'(+0) = \psi'(0), \qquad f_2''(+0) = \varphi''(0).$$

Тогда для достаточно малого $T_0 \in (0, T)$ решение обратной задачи (1) – (3) в классе $k(t) \in C[0, T_0]$ существует и единственно.

[1] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики, М: Наука,1984.-264с.

[2] Ж.Ш.Сафаров. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной области. // Узб. Мат. Журнал No2, 2012,Ташкент, с 117-124.

Об инвариантной подмодели ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа

Сираева Д. Т.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

В данной работе рассматриваются уравнения газовой динамики с уравнением состояния, полученного в классификации [1]:

$$p = f(\rho) + h(S), \ a^2 = f'. \tag{1}$$

По 2-мерной подалгебре в виде линейной комбинации переносов [2]:

$$X_3 + X_4 = \partial_z + t\partial_x + \partial_u, \quad X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p$$

получено представление инвариантного решения:

$$u = v_1 + z, v = u_1, w = w_1, \rho, p = p_1 + x - tz, \tag{2}$$

где u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 функции переменных t, y. Подстановка (2) в уравнения газовой динамики приводят к инвариантной подмодели ранга 2:

$$\begin{gathered} Du_1 + \rho^{-1} p_{1y} = 0, \\ Dv_1 = -\rho^{-1} - w_1, \\ Dw_1 = t\rho^{-1}, \\ D\rho + \rho u_{1y} = 0, \\ Dp_1 + \rho f_\rho u_{1y} = tw_1 - v_1, \end{gathered} \tag{3}$$

где $D = \partial_t + u_1 \partial_y$.

В данной работе найдены интегралы системы (3), определяется ее тип, приводится система к симметрическому виду и к характеристическому виду, находятся точные решения, определяются преобразования эквивалентности для линейной системы, решается задача групповой классификации, строится оптимальная система неподобных подалгебр, применяются интегральные преобразования.

[1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. — 1994. — Т. 58, вып. 4. — С. 30–55.

[2] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, вып 1. — С. 94—107.

О разрешимости одного уравнения с распределенной производной

Стрелецкая Е.М.

Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, т. е. линейный и ограниченный оператор. Рассмотрим уравнение распределенного порядка [1]

$$\int_0^1 \mathrm{D}_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t), \ t \geq 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{D}_t^\alpha x(t)$ — дробная производная Герасимова — Капуто [2], и задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

для него. Решением задачи (1), (2) будем называть такую функцию $x \in C([0,+\infty);\mathfrak{X})$, что существует $D_t^\alpha x(t) \in C([0,+\infty);\mathfrak{X})$ и выполняются равенства (1), (2).

Обозначим при некотором достаточно большом $a > 0$

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = a, \arg\mu \in (-\pi,\pi)\}$$

$$\gamma_2 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg\mu = \pi,\ \mu \in (-a,-\infty)\},$$
$$\gamma_3 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg\mu = -\pi,\ \mu \in (-\infty,-a)\}.$$

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $x_0 \in \mathfrak{X}$. Тогда функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\mu-1}{\ln\mu}I - A\right)^{-1} e^{\mu t} x_0 d\mu$$

является решением задачи (1), (2).

[1] Zhuang Jiao, Yang Quan Chen, Podlubny I. Distributed-Order Dynamic Systems Stability, Simulation, Applications and Perspectives. London.: Springer, 2012.

[2] Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. Berlin: Birkhauser, 1993.

Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of three-electron systems in the impurity Hubbard model

Tashpulatov S.M.
Institute of Nuclear Physics of AS of Republik of Uzbekistan, Tashkent

The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [1]. We consider the energy operator of three-electron systems in the Impurity Hubbard model and describe the structure of the essential and discrete spectra of the system. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\times$$

$$\times \sum_{\gamma} a^{+}_{0,\gamma} a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a^{+}_{0,\gamma} a_{\tau,\gamma} + a^{+}_{\tau,\gamma} a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a^{+}_{0,\uparrow} a_{0,\uparrow} a^{+}_{0,\downarrow} a_{0,\downarrow}.$$

Here, A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, B (B_0) is the transfer integral between electrons (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0$ ($B_0 > 0$) for convenience), and summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index,$\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, and $a^{+}_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^{\nu}$.

We denote $P = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2} B\varepsilon_1}$, and $Q = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2} B\varepsilon_1}$.

Theorem 1. If $\nu = 1$, $\varepsilon_1 \geq -2B$, and $\varepsilon_2 = P$, or $\varepsilon_1 \geq -2B$, and $\varepsilon_2 = Q$, or $\varepsilon_1 \leq 2B$, and $\varepsilon_2 = P$, or $\varepsilon_1 \leq 2B$, and $\varepsilon_2 = Q$, then the essential spectrum of operator H in the second doublet state consists of one interval $\sigma_{ess}(H) = [2A-4B, 2A+4B]$, and the discrete spectrum consists of no more then one points $\sigma_{disc}(H) = \{z_3\}$.

Theorem 2. If $\nu = 1$, $\varepsilon_1 > 0$, and $Q < \varepsilon_2 < -2B$, or $\varepsilon_1 > 0$, and $0 < \varepsilon_2 < P$, or $-2B \leq \varepsilon_1 < 0$, and $-2B < \varepsilon_2 < Q$, or $-2B \leq \varepsilon_1 < 0$, and $P < \varepsilon_2 < 0$, then the essential spectrum of operator H in the second doublet state consists of the union of two intervals $\sigma_{ess}(H) = [2A - 4B, 2A + 4B] \cup [A - 2B + z_1, A + 2B + z_1]$, and the discrete spectrum consists of no more then two points $\sigma_{disc}(H) = \{2z_1, z_3\}$.

[1] Tashpulatov S. M. Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model// Theoretical and Mathematical Physics. —2014. — *179*, No 3. —P. 712–728.

Отрицательные ионы полициклических ароматических углеводородов, соединений для органической электроники

Туктаров Р.Ф., Муфтахов М.В., Хатымов Р.В.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Молекулярные отрицательные ионы (ОИ) считаются долгоживущими, если время их жизни превышает несколько микросекунд и они наблюдаются масс-спектрометрически. Измерение времени жизни (?a) ОИ относительно автоотщепления электрона (автонейтрализации, автоионизации) является одним из достоинств разработанного в Уфе метода масс-спектрометрии резонансного захвата электронов (МС РЗЭ) [1]. Усовершенствованная методика [2] позволила расширить диапазон измерений τ_a вплоть до секунд. Исследования показали, что среди полициклических ароматических углеводородов (ПАУ) имеются соединения, время жизни ОИ которых достигает миллисекундных значений.

Анализ полученных данных показал, что величина τ_a зависит от размера молекул, их геометрии, электронной структуры. В то же время, от этих же молекулярных параметров зависит адиабатическое электронное сродство (ЕА), что позволяет прийти к логическому заключению о непосредственной связи τ_a с ЕА: чем выше ЕА молекулы, тем дольше она может удерживать дополнительный электрон [3]. Установлено, что с заменой в структуре молекул ПАУ одного или нескольких атомов углерода на атом азота значительно увеличивается τ_a ОИ, вероятно, из-за большей величины ЕА таких азапроизводных молекул.

В настоящее время ПАУ и их производные рассматриваются как лучшие кандидаты для материалов органической электроники, в особенности в приборах, не требующих миниатюризации – устройствах отображения информации и преобразовании солнечной энергии. При этом, среди большого разнообразия соединений ПАУ в исследованиях чаще всего фигурируют именно образцы с большой величиной ЕА, а следовательно, и с максимальным временем жизни ОИ. Уже несколько лет осуществляется коммерческий выпуск OLED дисплеев и телевизоров на основе органических светодиодов. Среди главных нерешенных проблем большинства таких устройств остается низкая воспроизводимость и малый срок службы, отчасти связанные с деградацией свойств органических материалов при протекании электрического тока. Данный вопрос так же рассматривается в докладе на элементарном уровне деструкции молекул в процессах диссоциативного РЗЭ.

Работа поддержана РФФИ, проект № 17-42-020643.

[1] Хатымова Л.З., Мазунов В.А., Хатымов Р.В., История науки и техники, № 3, С. 11 (2011).

[2] Р.Ф. Туктаров, Р.В. Хатымов, П.В. Щукин, М.В. Муфтахов, В.Ю. Марков, О.А. Соломещ, Письма в ЖЭТФ. 90, 564 (2009).

[3] Khatymov R.V., Muftakhov M.V., Shchukin P.V., Rapid Commun. Mass Spectrom., 31, 1729 (2017).

О задаче химической реакции в трехкомпонентных средах

Тахиров А.Ж.

Институт математики АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан

Ряд прикладных многокомпонентных задач, связанных с системами квазилинейных параболических уравнений дают задачи о самовоспламенении, задачи о динамике численностей взаимодействующий популяций и задачи о реакции химически-активных веществ [1, 2, 3].

Процессы самоорганизации в различных физических, биологических и химических системах в единой точки зрения изучает создаваемая в последние годы теория диссипативных структур. Универсальность свойств диссипативных структур объясняется тем, что, несмотря на различную природу, они описываются одними и теми же нелинейными уравнениями.

В настоящей работе рассматривается математическая модель процесса химической реакции, протекающей в смеси из трех компонент

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u + c_1\nabla u = -u^m v^n - u^k w^r, \\ u_t - d_2\Delta v + c_2\nabla v = -u^m v^n, \\ w_t - d_3\Delta w + c_3\nabla w = -u^k w^r, x \in \Omega, t > 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), w(x,0) = w_0(x), x \in \Omega,$$

где Ω - ограниченная область в R^3 с гладкой границей $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ - производная по внешней нормали к $\partial\Omega$.

Предполагается, что 1. $d_i, c_i (i = 1, 2, 3)$ - положительные постоянные; 2. $m, n, k, r \geq 1$ - постоянные; 3. $u_0, v_0, w_0 \in L^\infty(\Omega), u_0, v_0, w_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0, v_0 \equiv 0, w_0 \not\equiv 0$.

При определенных ограничениях на параметры устанавливаются априорные оценки, исследуется разрешимость и асимптотические поведения решения.

[1] Pao C.V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992. 780 c.

[2] Cantrell R.S., Cosner C. Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. England: Wiley, 2003. 411 c.

[3] Jiang C. et al. Asymptotic behavior of global solutions for a chemical reaction model. J.Math.Anal.and Appl, 1998. № 220. P. 640-656.

Нелокальная задача Флорина для квазилинейного уравнения диффузии

Тураев Р.Н.

Институт математики АНРУз., г.Ташкент, Узбекистан

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка лежат на основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в физике, механике и многих других областях знаний.

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \le T$ непрерывно дифференцируемая функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t, x) = a(u)u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t, 0) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t, 0) = u(t, s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t, s(t)) = \phi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливается априорные оценки свободной границей и решений и их производных в норм Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера (1), (2).

[1] Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.-мат.Науки".2012.No 26. С. 99–106.

[2] Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными.Труды Моск.Матем.Общ-ва.1967г.т.16. С.329–346.

Модули Мартине – Рамиса симметричной задачи о классификации седловых секторных полей

Туров М.М.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В работе рассматриваются ростки седловых резонансных голоморфных векторных полей на плоскости. Аналитическая классификация таких ростков получена в [2]. Такие ростки векторных полей естественным образом возникают в некоторых задачах симплектической и контактной геометрии. При этом, как отмечено в работе В. Арнольда [1], возникающие в приложениях ростки часто обладают некоторой дополнительной симметрией. В [1] поставлена задача исследования таких ростков, обладающих симметричностью, по действию соответствующей "симметричной" группы локальных замен координат.

Определение. Пусть V - росток голоморфного векторного поля в $(\mathbb{C}^2, 0)$, $I : (x, y) \to (-x, y)$ - инволюция. Росток V назовем $I-$симметричным, если $I^{'}V = V \circ I$.

Будем использовать определение преобразования монодромии из [3].

Теорема 1. Если росток V симметричен относительно некоторой инволюции I, $I^{'}V = V \circ I$, трансверсаль T выбрана симметричной относительно инволюции I, $I(T) = T$ и $i = I_0\Big|_T$ - сужение симметрии I на трансверсаль T, то преобразование монодромии Δ, определяемое по трансверсали T, так же симметрично: $i \circ \Delta = \Delta \circ i$.

В качестве следствия теоремы 1, получена

Теорема 2. Пусть m_V - модули Мартине – Рамиса для ростка V. Тогда у модуля m_V можно выбрать такие представители $\{\phi_j\}_{j=1}^{2n}$, что $\phi_j(-x) = \phi_{j+n}(x)$, для всех $j = 1, ..., n$.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00739а.

[1] Арнольд В. И., "О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями", Матем. заметки, 44:1 (1988), 3–18; Math. Notes, 44:1 (1988), 489–497

[2] Martinet, J., Ramis, J. -P. Classification analytique des equations differentielles non lineaires resonnantes du premier ordre / J. Martinet, J. -P. Ramis // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 16

[3] Il'iashenko, IU. S. Lectures on analytic differential equations /Yulij Ilyashenko, Sergei Yakovenko // Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339 ; v. 86

Проблема Пэли для функций многих переменных

Хабибуллин Б. Н., Баладай Р. А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Для функции $u\colon \mathbb{C}^n \to [-\infty, +\infty)$ полагаем $u^+ := \max\{0, u\}$, $M(r; u)$ $:= \max\bigl\{u(z)\colon |z| = r\bigr\}$, $\quad T(r; u) := \frac{1}{|S^{2n-1}|} \int_{S^{2n-1}} u^+(rz)\, \mathrm{d}s(z)$, где S^{2n-1} — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ площади $|S^{2n-1}|$, $\mathrm{d}s$ — элемент площади на S^{2n-1}, т. е. $T(r, u)$ — характеристика Неванлинны для u.

В 1932 г. Пэли выдвинул гипотезу, что для функции $u = \ln|f|$, где f — целая функция в $\mathbb{C}$ конечного порядка λ, справедлива точная оценка $\liminf_{r\to+\infty} \frac{M(r;u)}{T(r;u)} \le \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}$ при $0 \le \lambda < 1/2$ и $\le \pi\lambda$ при $\lambda \ge 1/2$.

Н. В. Говоров доказал гипотезу в 1968 г., В. П. Петренко в 1969 г. установил аналогичную точную оценку для мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. Различные субгармонические версии проблемы Пэли в $\mathbb{C}$ и в $\mathbb{R}^m$ рассматривались Б. Дальбергом, М. Эссеном, М. Л.Содиным, А. А.Кондратюком, У. Хейманом и многими другими. Все эти результаты изложены в обзоре первого из авторов [1]. Там же приводятся новые точные результаты, полностью и точно решающие в некотором равномерном смысле вдоль комплексных прямых, проходящих через точку 0, проблему Пэли для мероморфных функций в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ конечного нижнего порядка λ, 1995 г. Для таких же плюрисубгармонических функций точные оценки (глобальные, по сферам) найдены нами в 1999 г. для любых n, но только при $0 \le \lambda \le 1$. Эквивалентные постановки для проблемы Пэли при $\lambda > 1$, сводящие ее к некоторым оценкам через элементарные одномерные интегралы по $\mathbb{R}$ получены нами в 2010 г. Ряд контрпримеров для случая $\lambda > 1$ были установлены в сериях работ Р. А.Шарипова и албанского математика A. Bërdëllima 2010-2017 гг. Подробности о состоянии тематики вплоть до конца 2017 г. — в [2]. В докладе намечается осветить ситуацию с многомерной проблемой Пэли на настоящее время.

Исследования поддержаны грантом РФФИ № 16-01-00024а.

[1] Khabibullin B. N. *The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results* // Mathematical Physics, Analysis, and Geometry (Ukraine). 2002. V. 9, No. 2, P. 146–167. http://www.mathnet.ru/links/2fb0b6a16fd45a9b20db819fda1e9f21/jmag279.pdf

[2] Khabibullin B. N., Baladai R. A. *Paley problem for plurisubharmonic functions* // В сб.: Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018» / под ред. В. А. Костина. Воронеж: ИПЦ «Научная книга». 2018. С. 374–377. https://vzms2018.ru/Сборник%20ВЗМШ-2018.pdf

Равномерная асимптотика специального решения нелинейного ОДУ 2-го порядка вблизи точки катастрофы “бабочка”

Хачай О. Ю.
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия

В докладе рассматривается асимптотическая задача

$$u''_{xx} = u^5 + tu^3 - x, \quad \lim_{x\to+\infty} |u(x;t) - H(x;t)| = 0, \quad u(0;t) = 0, \qquad (1)$$

где функция $u = H(x;t)$ — это непрерывная однозначная ветвь корня конечного уравнения $u^5 + tu^3 - x = 0$, максимально продолженная влево из окрестности точки $x = +\infty$. Данная задача является составной частью исследования [1, 2, 3] в рамках метода согласования асимптотических разложений [А.М. Ильин. М.: Наука. 1989] поведения решения трехмерного нелинейного волнового уравнения вблизи точки катастрофы “бабочка”, являющейся для него типичной. Опираясь на подходы статьи [А.М. Ильин, Б.И. Сулейманов. Мат. сб. 2004], дополнительно потребуем, чтобы искомое решение задачи (1) строго возрастало по переменной x. Доклад основан на результатах работы [3].

Теорема 1. *Существует единственное строго возрастающее на всем луче $x \in [0, +\infty)$ решение $u(x;t)$ задачи (1), удовлетворяющее неравенству $0 < u(x;t) < H(x;t)$ при $x > 0$.*

Для задачи (1) получена равномерная асимптотика в виде:

1) $\left|u(x;t) - x^{1/5}\left(1 + \sum\limits_{j=1}^{N} c_j(t)x^{-j/5}\right)\right| \le M_{1,N}x^{(1-N)/5}$,

2) $\left|u(x;t) - t^{1/2}\sum\limits_{k=0}^{N-1} \mu^{2k}w_k(s)\right| \le M_{2,N}\mu^{2k}s^{(1-14N)/5}$,

3) $\left|u(x;t) - t^{1/2}W_N(s;\mu)\right| \le M_{3,N}\mu^{aN+b}$,

где 1) соответствует $0 \le t \le M^t$, $x \ge M^x$; 2) — при $t \ge M^t$, $s \ge M^s$ и 3) — при $t \ge M^t$, $0 \le s \le M^s$. Здесь a, M^t, M^x, M^s и $M_{j,N}$, $j = 1, 2, 3$ — положительные постоянные; $b \in \mathbb{R}$; $s = t^{-5/2}x$, $\mu = \sqrt{t^{-7}}$, $\sigma = s/\mu^{3/4}$; $W_N(s;\mu)$ — составное асимптотическое разложение для ФАР $w(s;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k}w_k(s)$, $\mu \to +0$ и $\omega(\sigma;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\mu^{i/2}\omega_i(\sigma)$, $\mu \to +0$, приближающих функцию $u(x;t)$ на соответствующих асимптотических слоях, $W_N(s;\mu) = A_{N,\sigma}\,\omega(\sigma;\mu) + A_{N,s}\mu^{1/4}w(s;\mu) - A_{N,s}A_{N,\sigma}\,\omega(\sigma;\mu)$, $\quad N \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00222).

[1] Khachay O.Y., Nosov P.A. Ural Math. J. 2016. T. 2, No 2, C. 127–140.

[2] Хачай О.Ю. Труды ИММ УрО РАН, Т. 23. № 2. С. 250–265.

[3] Хачай О.Ю. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 152. (в печати)

Колебания идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом

Цветков Д.О.

Крымский федеральный университет, г.Симферополь, Россия

Изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом, который моделируется упругой пластиной. Близкая по математической постановке задача о колебаниях однородной жидкости в контейнере с упругим дном рассматривалась ранее [1].

Проведено построение, которое позволяет получить аналог известного ортогонального разложения Вейля, пространства вектор-функций суммируемых с квадратом по области, приспособленного к исследованию данной задачи. И путем проектирования уравнений на соответствующие ортогональные подпространства (отделяя тривиальные соотношения) и введения вспомогательных краевых задач и их операторов, начально-краевая задача, описывающая малые движения данной системы, проводится к задаче Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{X}+\mathcal{C}\mathcal{X}=\mathcal{F}, \qquad \mathcal{X}(0)=\mathcal{X}^0, \qquad \mathcal{X}^{'}(0)=\mathcal{X}^1; \tag{1}$$

$$0 << \mathcal{A}=\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{C}=\mathcal{C}^*\geq 0.$$

Здесь $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ – пространство ограниченных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Введено понятия сильного решения и получены условия сильной разрешимости задачи (1). Далее доказана теорема о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

Исследованы свойства поверхностных волн, а также асимптотика их частот, вопросы базисности мод собственных колебаний. Установлено, что предельным спектром внутренних волн является отрезок, определенный максимальным значением частоты плавучести.

[1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.:Наука. 1989.

Исследование одной системы дифференциальных уравнений семейства Ремизова

Чиркова Е.А.

Челябинский Государственный Университет, г.Челябинск, Россия

В работах А.Ремизова [1, 2], связанных с вырождениями метрики, была поставлена задача качественного исследования семейства векторных полей с неизолированными особыми точками: $\dot{x} = y, \dot{y} = py, \dot{p} = M(x, y, p)$, где функция M – кубический многочлен по p специального вида: $M = \alpha(x, y)(p^2 - x) - yp(\beta_1(x, y)p^2 + \beta_2(x, y)p + \beta_3(x, y))$. В данной работе предпринята попытка исследования одного из векторных полей этого семейства ($\alpha = -1, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$): $V = y\frac{\partial}{\partial x} + yp\frac{\partial}{\partial y} + (p^2 - x)\frac{\partial}{\partial p}$. В "разрешающих особенность" координатах ($u = \frac{x}{p^2}, v = \frac{y}{p^3}, p$) соответствующая система записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{u} = v + 2u + 2u^2, \\ \dot{v} = v + 3uv, \\ \dot{p} = -up, \end{cases}$$

Рассмотрим соответствующую этой системе фактор-систему (проекцию системы на плоскость (u, v)). Эта система имеет три элементарные особые точки: $(0, 0)$ – точка является неустойчивым резонансным узлом; $(-1, 0)$ – точка является устойчивым вырожденным узлом; $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{9})$ –точка является седловой. Бесконечно удалённые точки: $(\infty, 0)$ – точка является седловой, $(0, \infty)$ – точка является сложной особой точкой. При дальнейшем раздутии особенности, эта особая точка распадается на седло и узел, что позволяет построить фазовый портрет в окрестности особой точки $(0, \infty)$.

В результате синтеза фазовых портретов в окрестностях особых точек фактор-системы, был получен фазовый портрет фактор-системы на плоскости (u, v). Также было произведено исследование общей системы в координатах (u, v, p) (надстройки над двумерной системой).

[1] Ремизов, А.О. Геодезические на двумерных поверхностях с псевдоримановой метрикой: особенности смены сигнатуры /Матем. сб., 200:3 (2009), 75–94.

[2] Ремизов, А.О.; Павлова, Н.Г. Полная классификация типичных особенностей геодезических потоков на 2-поверхностях с псевдоримановыми метриками / УМН, 72:3(435) (2017), 195–196; Russian Math. Surveys, 72:3 (2017), 577–579.

Invariant submodels of the Westervelt model of nonlinear hydroacoustics without dissipation

Chirkunov Yu. A.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia, E-mail: chr101@mail.ru

We study [1] three-dimensional Westervelt model of a nonlinear hydroacoustics without dissipation. We received all of its invariant submodels. We studied all invariant submodels described by the invariant solutions of rank 0 and 1. All invariant solutions of rank 0 and 1 are found either explicitly, or their search is reduced to the solution of the nonlinear integral equations. With a help of these invariant solutions we researched: 1) a propagation of the intensive acoustic waves (self-similar, axisymmetric, planar and one-dimensional) for which the acoustic pressure and a speed of its change, or the acoustic pressure and its derivative in the direction of one of the axes are specified at the initial moment of the time at a fixed point, 2) a spherically symmetric ultrasonic field for which the acoustic pressure and a speed of its change, or the acoustic pressure and its radial derivative are specified at the initial moment of the time at a fixed point. Solving of the boundary value problems describing these processes is reduced to the solving of nonlinear integral equations. We are established the existence and uniqueness of solutions of these boundary value problems under some additional conditions. The reported study was funded by RFBR according to the research project № 16-01-00446 a.

[1] Yu. A. Chirkunov. Invariant solutions of the Westervelt model of nonlinear hydroacaustics without dissipation. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2016. V. 85, pp. 41-53.

Reduction of the gas motion model in a rarefied space

Chirkunov Yu. A., Pikmullina E. O.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia e-mail: chr101@mail.ru, elena187@list.ru

A model describing a thermal motion of a gas in a rarefied space is investigated. For a given initial pressure distribution, a special choice of mass Lagrange variables leads to a reduced system of differential equations describing this motion, in which the number of independent variables is one less than the original system [1, 2]. This means that there is a stratification of a highly rarefied gas with respect to pressure. Namely, in a rarefied space for each given initial pressure distribution, at each instant of time all gas particles are localized on a two-dimensional surface moving in this space. At each point of this surface, the acceleration vector is collinear with its normal vector. The resulting system admits an infinite Lie transformation group. All significantly various submodels that are invariant with respect to the subgroups of its eight-parameter subgroup generated by the transfer, extension, rotation, and hyperbolic rotation operators (the Lorentz operator) are found. For invariant submodels of rank 1, the basic mechanical characteristics of the gas flow described by them are obtained. Conditions for the existence of these submodels are given. For invariant submodels of rank 2, integral equations describing these submodels are obtained. For some submodels, the problem of describing the gas flow from the initial location of its particles and the distribution of their velocities has been investigated.

The reported study was funded by RFBR according to the research project № 16-01-00446 a.

[1] Yu. A. Chirkunov. Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2016. V, 83. pp. 9-14.

[2] Yu. A. Chirkunov, E. O. Pikmullina. Invariant submodels of the model of thermal motion of gas in a rarefied space. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. V. 95, pp. 185-192.

Нормализующие преобразования ростков полугиперболических отображений в левых секториальных областях

Шайхуллина П.А.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Росток голоморфизма $F : (\mathbb{C}^2, (0,0)) \to (\mathbb{C}^2, (0,0))$ будем называть *полугиперболическим*, если один его мультипликатор равен 1, а другой - гиперболический: $F(x,y) = (x + ..., \Lambda y + ...)$, где $|\Lambda| \neq 0, 1$.

В частности, отображение $F_\lambda(x,y) \mapsto (\frac{x}{1-x}, e^\lambda y)$, где $Re\lambda > 0$, является полугиперболическим. В данной работе мы ограничивается классом ростков $\mathbf{F}_\lambda$ — голоморфных отображений, формально эквивалентных ростку F_λ. В работе [1] было показано что росток $F \in \mathbf{F}_\lambda$ приводится к своей формальной нормальной форме F_λ некоторой полуформальной нормализующей заменой (формальной по одной переменной и аналитической — по другой). В частности отсюда следует, что росток F аналитической заменой координат приводится к виду $\mathcal{F}_N(x,y) = F_\lambda(x,y) + O(x^N)$.

Аналитическую нормализацию будем производить в координатах $(\xi = -\frac{1}{x}, z = y)$. В этих координатах росток $\mathcal{F}_N(x,y)$ имеет вид

$$\tilde{F}_N(\xi, z) = F_0(\xi, z) + O(\xi^{-N+2}), \text{ где } F_0 = (\xi + 1, \Lambda z), \ \Lambda = e^\lambda.$$

Определение. Левой секториальной областью S в координатах (ξ, z) будем называть прямое произведение дополнения к выпуклой оболочке объединения диска с центром в начале координат радиуса R и сектора $|arg(\xi)| < \delta$ на круг $|z| < \varepsilon$.

Теорема. В левой секториальной области S (для любого достаточно большого R) существует голоморфное нормализующее преобразование $H(\xi, z)$, сопрягающее $\widetilde{F}_N(\xi, z)$ и $F_0(\xi, z)$, причем:

1. $H(\xi, z)$ ограничено на S;
2. $H(\xi, z) = (\xi, z) + O(\xi^{-N+5})$ при $|\xi| \to \infty$;
3. $H(\xi, z)$ единственно в классе голоморфных отображений, удовлетворяющих 1 и 2.

Следствие. Полуформальное нормализующее преобразование является для голоморфного нормализующего преобразования в левых секториальных областях асимптотическим.

Замечание. Существование левых нормализующих отображений (без асимптотических оценок) было получено так же ранее в работе [2].

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00739 А.

[1] Шайхуллина П.А. Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений. Математические заметки СВФУ —2015. —Т.22, №4. —С. 79—90.

[2] Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables. I. J. Math. Kyoto Univ. —1986. —№26. —С. 233—261.

Безвихревое сгущение и последующий разлет одноатомного газа

Шаяхметова Р.Ф.
Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа имеет вид:

$$\rho\, D\vec{u} + \nabla p = 0, D\rho + \rho\,(\nabla \cdot \vec{u}) = 0, DS = 0, S = p\rho^{-\frac{5}{3}}.$$

Рассматривается построенная в работе [1] инвариантная подмодель на двумерной подалгебре с номером 2.5*, содержащей проективный оператор X_{12} (базисные операторы $a(X_3 - X_5) + b(X_2 + X_6) + X_7 + X_{10} + X_{12}, X_3 - X_5 + cX_{14}$):

$$\begin{gathered}
D_1 u_1 + \rho_1^{-1} p_{1x_1} = -x_1, \\
D_1 v_1 + \rho_1^{-1} p_{1y_1} = 2w_1, \\
D_1 w_1 = -2(v_1 + b) - c\rho_1^{-1} p_1, \\
D_1 \rho_1 + \rho_1 (u_{1x_1} + v_{1y_1}) = c\rho_1 (a - w_1), \\
D_1 S_1 = \tfrac{2}{3} c S_1 (w_1 - a), S_1 = p_1 \rho_1^{-\frac{5}{3}},
\end{gathered}$$

где $D_1 = u_1 \partial_{x_1} + v_1 \partial_{y_1}$.

Представление для вихря скорости имеет вид

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\vec{u} = (w_{1y_1} + 2)(1+t^2)^{-1}\vec{i} + (t(u_{1y_1} - v_{1x_1}) - w_{1x_1})(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{j} + \\ +(v_{1x_1} - u_{1y_1} - t w_{1x_1})(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}\vec{k}.$$

Для безвихревых движений подмодель сведена к переопределенной системе из трех уравнений:

$$u_{1y_1} = v_{1x_1}, u_{1x_1} + v_{1y_1} = 0, D_1(u_1^2 + v_1^2 + x_1^2 + 4y_1^2) = 4b(a + 2y_1).$$

Система была исследована на совместность. Возможно лишь решение $ab = 0$, $u_1 = 0, v_1 = b$. Решение задает сгущение газа с последующим разлетом. Мировые линии частиц задаются формулами

$$x = x_0\sqrt{1+t^2}, t = \mathrm{tg}\tau \\ y = y_0 + 2b\tau - t(z_0 - 2y_0\tau - b\tau^2), \\ z = z_0 - 2y_0\tau - b\tau^2 + t(y_0 + 2b\tau).$$

[1] Шаяхметова Р.Ф. Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 одноатомного газа с проективным оператором // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 11. / Уфа: Нефтегазовое дело. 2016. С. 127-135.

Предельные множества Азарина некоторых нерегулярно растущих функций

Шевцова Т.В.

Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Доказывается аналог леммы Римана-Лебега для тригонометрических интегралов. Применение этой леммы позволяет получить асимптотические формулы для интегралов с абсолютно непрерывной функцией. Рассматриваются случаи, когда в качестве абсолютно непрерывной функции берется произведение степенной функции на ядро Пуассона или сопряженное ядро Пуассона для полуплоскости, а в качестве промежутка интегрирования берется мнимая полуось. Вещественные и мнимые части этих интегралов представляют собой гармонические функции в комплексной плоскости разрезанной по положительному лучу. Находим предельное множество Азарина для таких функций. Предельное множество Азарина [1] $\mathrm{Fr}\, u$. Это предельное множество семейства функций $u_t(z) = u(tz)/t^\rho$ (ρ — порядок u) при $t \to +\infty$ в топологии пространства обобщенных функций Шварца.

Предельное множество Азарина несет в себе больше информации о поведении субгармонических функций в окрестности бесконечности чем индикатор. Общая теория дает теорему о характеризации предельных множеств Азарина и гарантирует существование субгармонических функций с заданым предельным множеством. Однако, мы даем примеры конкретных функций нерегулярного роста, для которых вычисляется предельное множество Азарина. До сих пор асимптотические оценки в основном, строились для функций вполне регулярного роста. Такие функции хорошо приближают некоторые субгармонические функции с корнями на одном луче. Мы указываем такие функции. Тем самым мы указываем широкий набор субгармонических функций нерегулярного роста с известным асимптотическим поведением.

[1] Азарин В. С. *Об асимптотическом поведении субгармонических функций*, Матем. сб. **108** (2), 147–167 (1979).

Научное издание

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
"КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

Сборник тезисов
(12 – 16 марта 2018 г.)

Лиц. на издат. деят. Б848421 от 03.11.2000 г. Подписано в печать 02.03.2018.

Формат 60Х84/16. Компьютерный набор. Гарнитура Times.

Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. – 5,8. Уч.-изд. л. – 5,6.

Тираж 100 экз. Заказ №

ИПК БГПУ 450000, г.Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а