МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности организации обобщающего повторения темы: «Логарифмические уравнения и неравенства» при подготовке к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
89,07% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2022 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
Суховиенко Елена Альбертовна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513-204-5-1
Тихонова Елена Алексеевна

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск

2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.. 3

ГЛАВА 1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ... 5

1.1 Методические особенности изучения логарифмических уравнений и неравенств…………... 5

1.2 Анализ учебников по алгебре и началам анализа по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» 9

ГЛАВА 2. ВИДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ.. 16

2.1 Виды логарифмических уравнений и подходы к их решению 16

2.2 Виды логарифмических неравенств и методы их решения.................... 35

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ: «ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА».................... 43

3.1 Анализ заданий ЕГЭ по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»……… 43

3.2 Программа элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»……….. 48

3.3Содержание элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»……… 52

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 73

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 75

ПРИЛОЖЕНИЕ 1Контрольные работы по разделам курса ………………77

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Итоговая контрольная работа…………………….. …79

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Справочный материал к курсу «Логарифмические уравнения и неравенства»…………………………………………………80

ВВЕДЕНИЕ

Логарифмические уравнения и неравенства являются одной из наиболее содержательных тем школьного курса алгебры и включают в себя множество необычных, интересных методов решения, способствующих развитию рационального мышления, памяти и познавательного интереса.

В зависимости от авторов учебника, эта тема изучается в 10 или 11 классе. Тема является укоренившейся в курсе алгебры и начал анализа средней школы, но при этом вызывает значительные трудности у обучающихся из-за изложения разнообразного материала в достаточно сжатой форме. Логарифмические уравнения и неравенства встречаются во многих заданиях единого государственного экзамена (далее – ЕГЭ), как профильного, так и базового уровней. Для их решения учащиеся должны обладать глубокими и полными знаниями данной темы и навыками решения уравнений и неравенств, содержащих логарифмы. Поэтому, повторению и дополнительной проработке методов решения логарифмических уравнений и неравенств должно быть уделено особое внимание.

Цель данной работы состоит в разработке элективного курса, ориентированного на обобщение, систематизацию, расширение и углубление знаний учащихся по теме «Логарифмические уравнения инеравенства» при подготовке к ЕГЭ.

Гипотеза: внедрение в процесс обучения разработанного элективного курса может способствовать более эффективному обобщению знаний учащихся по теме «Логарифмические уравнения инеравенства» и, как следствие, повышению качества подготовки к ЕГЭ.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– проанализировать материал по теме в учебниках алгебры и начала анализа;

– проанализировать материал по данной теме в едином государственном экзамене;

– систематизировать методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

– разработать элективный образовательный курс по теме «Логарифмические уравнения и неравенства».

Объектом исследования являютсяметоды решения логарифмических уравнений и неравенств.

Предметом исследования являются методические особенности повторения логарифмических уравнений, неравенств и их систем.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и трех приложений.

ГЛАВА 1. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.

1.1 Методические особенности изучения логарифмических уравнений и неравенств

Если вспомнить функции, которые изучаются в курсе алгебры основной школы, то можно заметить, что нахождение их значений сводится к четырем арифметическим действиям (возведение в степень представим как многократное умножение). Для того, чтобы вычислить значение логарифмической функции, необходимо научиться еще одному действию, которое получило название – логарифмирование.

Практическое применение логарифмов остается актуальным и в настоящее время. Однако с развитием техники, их детальное изучение перестало быть необходимостью. В связи с этим в школьной программе такая объемная тема стала изучаться менее подробно.

Для многих учащихся изучение логарифмов и их свойств является довольно сложной задачей, поэтому при объяснении материала следует использовать подробные и наглядные объяснения. В учебниках логарифм определяется как показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить данное число. К примеру,$4 = \log_2 16$, т.к. $2^4 = 16$. На основе данного определения получаем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0,\ a \neq 1, b > 0$.Это тождество представляет собой краткую запись определения логарифма[2].

Доказательство свойств логарифма следует из его определения. Например, по определению логарифма $a^{\log_a b} = b$, $a^{\log_a c} = c$, перемножая эти равенства и используя свойство умножения степеней, получаем $a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc,\ \ a^{\log_a b + \log_a c} = bc$. Последнее равенство показывает, что

$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$, отсюда и следует свойство логарифма произведения $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$[2].

Вкурсе алгебры рассматриваются логарифмы по различным основаниям, в частности по основанию 10 ($\lg b$—десятичный логарифм) и по основанию e ($\ln b$—натуральный логарифм), отсюда возникает необходимость формулы перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0,\ a \neq 1, b > 0,$

$c > 0, c \neq 1$ [1].

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется *логарифмическим уравнением.*

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a x = b \ (1).$$

Утверждение 1**.** Если $a > 0$, $a \neq 1$, уравнение $\log_a x = b$ при любом действительном b имеет единственное решение $x = a^b$ [11].

Пример 1. Решить уравнения:

$$a) \log_5 x = 2,$$

$$b) \log_4 x = -1.$$

Решение. Используя утверждение 1, получим

$a)\ x = 5^2$ или $x = 25$;

$b)\ x = 4^{-1}$ или $x = 0{,}25$.

Приведем основные свойства логарифма.

$\mathrm{P}_{\mathbf{1}}$**.** Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$.

$\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$.Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log_a F \cdot G = \log_a F + \log_a G \ \ (a > 0,\ a \neq 1,\ F > 0,\ G > 0).$$

*Замечание***.** Если $F \cdot G > 0$, тогда свойство P_2 примет вид:

$$\log_a F\cdot G = \log_a|F| + \log_a|G|\,(a>0, a\neq 1, F\cdot G>0).$$

P_3. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов:

$$\log_a \frac{F}{G} = \log_a F - \log_a G \ (a > 0,\ a \neq 1,\ F > 0,\ G > 0).$$

Замечание. Если $\frac{F}{G} > 0$, тогда свойство P_3 примет вид

$$\log_a \frac{F}{G} = \log_a|F| - \log_a|G|, (a > 0,\ a \neq 1, F\cdot G > 0).$$

P_4. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа:

$$\log_a F^k = k \log_a F \ \ (a > 0,\ a \neq 1,\ F > 0).$$

Замечание. Если k –четное число ($k = 2s$), то

$$\log_a F^{2s} = 2s \log_a |F\,| \ \ (a > 0,\ a \neq 1,\ F \neq 0).$$

P_5. Формула перехода к другому основанию:

$\log_a F = \frac{\log_b F}{\log_{\rm b} a}$, $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ F > 0)$,в частности, если $F = b$,получим$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1). (2)$

Используя свойства P_4 и P_5, легко получить следующие свойства

$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c}\log_a b \ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), (3)$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b\,(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), (4)$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b \ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), (5)$$

и, если в (5 (для (3) и (4) это замечание тоже работает) c—четное число ($c = 2n$), имеет место

$$\log_{a^{2n}} b = \frac{1}{2n}\log_{|a|} b\,(b > 0,\ a \neq 0, |a\,| \neq 1). (6)$$

Перечислим и основные свойства логарифмической функции $f(x\,) = \log_a x$:

1.$D(y) = (0; +\infty)$.

2.$E(y)\epsilon\mathbb{R}$.

3. При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает ($0 < x_1 < < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$), а при $0 < a < 1$, — строго убывает ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$).

4. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

5. Если $a > 1$, то логарифмическая функция отрицательна при $x \in (0;1)$ и положительна при $x \in (1; +\infty)$, а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при $x \in (0; 1)$ и отрицательна при $x \in (1; +\infty)$.

6. Если $a > 1$, то логарифмическая функция выпукла вверх, а если $a \in\in (0; 1)$— выпукла вниз [11].

В курсе алгебры для определения свойств логарифмической функции пользуются тем фактом, что она является взаимно обратной к показательной, которая изучается до нее.

Логарифмическое неравенство— неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании.

Простейшие логарифмические неравенства —это неравенствавида$\log_a f(x) > b$,или$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$.Первое неравенство легко привестико второму, если воспользоваться формулой$b = \log_a a^b$ [11].

Найти множество всех решений при которых неравенство обращается в верное числовое соотношение— это значит решить неравенство.

Исходя из определения значения логарифма, можно сделать вывод, что при решении логарифмических уравнений (неравенств) необходимо учитывать условия существования входящих в них логарифмических выражений и отражать их при нахождении области определения неравенства, когда это необходимо.

Решение логарифмических неравенств основано на свойствах логарифмической функции $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$, о которых говорилось выше.

Также при решении неравенства нужно соблюдать следующие правила преобразования:

1. При перемещении какого-либо члена неравенства из одной части в другую, обязательно нужно изменить знак на противоположный.
2. При делении или умножении обеих частей неравенства на число, принимающее значение больше нуля, и не равное ему, получится неравенство, равносильное данному.
3. При делении или умножении обеих частей неравенства на число, принимающее значение меньше нуля, и не равное ему, получится неравенство, противоположное данному (сменится знак) [8].

Решение логарифмических уравнений и неравенств требует от ученика высокого уровня подготовки, а именно: знание, понимание и правильное применение свойств показательной и логарифмической функций, определения логарифма, основных формул логарифмирования.

Материал усваивается гораздо лучше при самостоятельной работе обучающего, поэтому стоит уделить особое внимание этому виду деятельности.

1.2Анализ учебников по алгебре и началам анализа по теме«Логарифмические уравнения и неравенства»

В данном параграфе мы проведем анализ школьных учебников «Алгебра и начала анализа» с целью узнать, в каком классе изучают логарифмические уравнения и неравенства, а также, как преподносится эта тема в каждом из учебников. Для сравнения возьмем 3 учебника алгебры и начал математического анализа для старших классов.

С. М. Никольский, Н. Н. Решетников, А. В. Шовкун, М. К. Потапов, «Алгебра и начала анализа» 10 класс.

Знакомство с логарифмами в данному учебнике начинается с параграфа 5 «Логарифмы».

Понятие логарифма вводится через показательную функцию $y = \alpha^x (\alpha > 0, \alpha \neq 1)$. График данной функции дает возможность решить обратную задачу: для данных положительных чисел bи $\alpha(\alpha \neq 1)$найти число α, такое, что$b = \alpha^\alpha$ (α– единственное).

В пункте 5.1. «Понятие логарифма» вводится определение логарифма положительного числа, а также определение натурального и десятичного логарифма числа и их обозначения. После теории предлагается небольшое количество заданий на вычисление.

В пункте 5.2. «Свойства логарифмов» представлена теорема, в которой отражены такие свойства логарифмов, как логарифм произведения, частного и степени.Приводится доказательство. Далее автор знакомит нас с формулой перехода логарифмов от одного основания к другому и рассматривает соответствующие примеры. В качестве тренировки предлагаются задания на вычисления.

В пункте 5.3. «Логарифмическая функция» вводится определение «логарифмическая функция», строится ее график, и рассматриваются свойства для функции, когда $\alpha > 1$ и когда $0 < \alpha < 1$. Задания по данной теме отличаются большим разнообразием.

Пункт 5.4. «Десятичные логарифмы» отмечен звездочкой, т.е. как дополнительный материал повышенной сложности. В этом пункте рассказывается, как вычислять десятичный логарифм положительного числа А, что называется характеристикой и мантиссой логарифма числа А.

Параграф 6 «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» включает в себя пять пунктов, посвященныеих решению, а также уравнениям и неравенствам, сводящимся к простейшим.

В пункте 6.2 «Простейшие логарифмические уравнения» дается определение уравнения вида $\log_a x = b$. Его называют простейшим. Приходят к выводу, что такое уравнение имеет единственный корень, который можно найти по определению логарифма. В примере 4 С. М. Никольский применяет формулу перехода логарифма к другому основанию, однако в теории о ней не упоминает и после примера тоже не записывает. В качестве тренировки предлагается один вид задания – решить уравнение.

В пункте 6.3 «Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного», данный метод рассматривается на конкретных примерах с подробным решением.

Пункт 6.5 «Простейшие логарифмические неравенства»состоит из определения и зависимости знака неравенства от основания логарифма. Присутствуют задания как для базового, так и для углубленного уровня.

В пункте 6.6 «Неравенства, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного» представлен разбор заданий, которые после введения замены превращаются в простейшие логарифмические, квадратные или рациональные. Заданий для углубленного изучения в данном пункте представлено больше, чем в остальных.

В конце учебника находятся задания для повторения. По словам автора:– «Данный раздел предназначен для повторения материала, изученного в девятилетней школе, и итогового повторения за курс 10 класса. В нем даны некоторые задачи выпускных школьных экзаменов и конкурсных экзаменов в вузы страны»[8,с.362].

Таким образом, в учебнике Никольского С.М. материал содержится и для базовогои для профильного уровней. Выделяются задачи устной работы, повышенной трудности, задания для повторения. После главы имеются сведения из истории и происхождения изученных понятий, терминов, символов.

Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс.

В данном учебнике изучение темы «Логарифмы» начинается с 4 главы учебника — «Логарифмическая функция».

Пропедевтика проводится при изучении показательной функции. Рассматривая уравнения типа $\alpha^x = b$, где $\alpha > 0, a \neq 1, b > 0$говорится, что данные уравнения имеют только один корень.

В параграфе 15 «Логарифмы» дается определение термина «Логарифм положительного числа» и предлагается его краткая запись.Вводятся понятия таких действий как логарифмирование и потенцирование. Следующим шагом приводятся несколько примеров на вычисление логарифма числа по его определению: один пример на решение неравенства и один пример на решение уравнения. Для решения в классе и дома Ш.А. Алимов предлагает задания трех уровней: обязательные, дополнительные и сложные.

В параграфе 16 «Свойства логарифмов» рассматриваю и приводят доказательства для трех основных свойств логарифмов и пример с их применением.

В 17 параграфе «Десятичные и натуральные логарифмы» вводятся следующие понятия: десятичный и натуральный логарифм, формула перехода логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию с доказательством.

18 параграф «Логарифмическая функция, ее график и свойства» посвящен описанию свойств логарифмической функции с доказательством. В нем выполнены построения графиков функций $y = \log_3 x$и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и приведена теорема, которая часто используется при решении уравнений, также с доказательством. Приводятся примеры на решение уравнения и двух неравенств, у одного из которых основание больше нуля, а у другого находится в промежутке от нуля до единицы.

В 19 параграфе «Логарифмические уравнения» дается подробное решение шести уравнений и одной системы уравнений.

В 20 параграфе «Логарифмические неравенства» предлагаются 3 задачи с подробным описанием решения логарифмических неравенств. В упражнениях для решения в классе и дома«дополнительные и сложные задачи» составляют большую часть.

В конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе IV», где находятся задачи обязательного и дополнительного уровней.

Таким образом, у Ш. А. Алимова тему «Логарифмы» тоже изучают в десятом классе. Представленный по этой теме материал доступно изложен. В отличие от других авторов Ш. А. Алимов уделил внимание вычислению числа e на микрокалькуляторе. Практические задания на закрепление темы ранжированные по уровню сложности: «обязательные задачи», «дополнительные более сложные задачи» и «трудные задачи».

В конце учебника расположены упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал математического анализа[1].

А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков «Алгебра и начала математического анализа» 11 класс. Углубленный уровень [7].

Изучение логарифмов начинается с 1 главы «Показательная и логарифмическая функция». Подступая к новойтеме, автор создает проблемную ситуацию, спрашивая, чему равен корень уравнения $2^x = 5$и задается вопросом: «есть ли вообще корень у этого уравнения?» Ответ на данный вопрос пробуют найти при помощи графической интерпретации, которая показывает, что уравнение имеет один единственный корень, однако однозначно его определить нельзя.

В параграфе 4 «Логарифм и его свойства» вводится определение логарифма числа, основное логарифмическое тождество. Отмечается, что выражение $\log_a b$при $b \leq 0$не имеет смысла. Также упоминается про десятичный логарифм и его запись. Помимо этого, формулируется четыре теоремы и два следствия. Даны примеры на вычисление значения выражения и построения графика с подробным решением. После теоретической части находятся задания на вычисление значения, упрощения выражения и доказательство.

В параграфе 5 «Логарифмическая функция и ее свойства» вводится определение логарифмической функции. Пользуясь тем, что показательная и логарифмическая функция – взаимно обратные, строят график последней. Далее происходит анализ логарифмической функции. Свойства функции $y = \log_a x$объединяют в общую таблицу. Примеры приводятся в основном на сравнение логарифмов.

В параграфе 6 «Логарифмические уравнения» дается определение простейшего логарифмического уравнения. Корень предлагают искать по определению логарифма.Теория довольна сжата, но некоторые способы решения уравнений можно понять из примеров.В данном параграфе присутствую задания, как на решение уравнений, так и их систем.

Параграф 7 «Логарифмические неравенства» начинается с теоремы, которая позволяет определить знак неравенства. Далее идут два следствия, после чего теория заканчивается. В примерах, приводимых Мерзляком А.Г., можно пронаблюдать метод решения по определению логарифма, метод замены переменной и функционально-графический метод.

В параграфе 8 «Производные показательной и логарифмической функции» вводится понятие натурального логарифма. Функция $y = \ln x$, ее свойства, график, дифференцирование.

В главе 5 «Повторение» Аркадий Григорьевич рассматривает методы и приемы решения уравнений и неравенств, в примерах которых встречаются и логарифмические уравнения с неравенствами.

В конце учебника в пункте 17 «Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства» содержится большой перечень задач на повторение.

В отличие от остальных авторов А.Г. Мерзляк начинает изучение логарифмов в 11 классе. В учебнике представлено большое количество заданий, среди которых можно найти схожие с заданиями ЕГЭ [7].

Таким образом, проанализировав учебники, делаем вывод —для выполнения простейших заданий, содержащих логарифмы, привлечение дополнительных источников по теме не требуется. Во всех трех учебниках теоретический материал изложен доступно, имеются примеры с решением и доказательства свойств. Но при подготовке к экзамену в форме ЕГЭ необходимо уделить особое внимание заданиям повышенной сложности, которые в большей степени встречаются в ЕГЭ по математике, и которые мало встречаются или почти не встречаются в данных учебниках.

ГЛАВА 2. ВИДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

2.1 Виды логарифмических уравнений и подходы к их решению

В этом параграфе мы узнаем об основных типах логарифмических уравнений и ометодах их решения.

1. *По определению логарифма.*

По определению логарифма как правило решаются простейшие логарифмические уравнения, имеющие следующий вид:$\log_a x = b$. Такие уравнения имеют единственный корень, который получается возведением в степень b основания логарифма a [14].

Пример 1. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$.

Решение: По определению логарифма $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$.

Ответ: 81.

Данный вид уравнений не вызывает у учащихся проблем при его решении.Трудности, с которыми может столкнуться ученик – возведение в степень основания логарифма или в преобразовании вида уравнения.

Покажем соответствующий вышесказанному пример.

*Пример 2.*Решите уравнение$\log_{\frac{\sqrt{6}}{36}} x = \frac{8}{3}$.

Так как уравнение является простейшим, то оно имеет единственный корень $x = \left(\frac{\sqrt{6}}{36}\right)^{\frac{8}{3}}$. Очевидно, что для вычисления конкретного значения требуются преобразования.

$$\left(\frac{6^{\frac{1}{2}}}{6^2}\right)^{\frac{8}{3}} = \left(6^{\frac{1}{2}-2}\right)^{\frac{8}{3}} = \left(6^{\frac{-3}{2}}\right)^{\frac{8}{3}} = 6^{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}\right)} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}.$$

Ответ: $\frac{1}{1296}$.

Далее рассмотрим простейшие уравнения вида$\log_a f(x) = b$,где a и b–числа, причем $a > 0, a \neq 0$, а $f(x)$— выражение с переменной x, к примеру, $\log_5(x - 4) = 2$, $\log_{\frac{1}{4}} x^2 = -1$ и другие. Суть метода состоит в замене уравнения $\log_a f(x) = b$ равносильным ему уравнением $f(x) = a^b$.

Пример 3. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 4x) = 2$.

Произведем замену решения уравнения $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 4x) = 2$ решением уравнения $(x^2 - 4x) = \left(\sqrt{2}\right)^2$;

$$x^2 - 4x = 2;$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0;$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 24 > 0,$$

следовательно, уравнение имеет 2 корня.

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{2\left(2 \pm \sqrt{6}\right)}{2} = 2 \pm \sqrt{6};$$

Ответ: $x_1 = 2 - \sqrt{6}, x_2 = 2 + \sqrt{6}$.

Метод определения логарифма применяется также при решении уравнений вида $\log_{p(x)} f(x) = g(x)$. Логарифмическое уравнение принимает следующий вид: $f(x) = \left(p(x)\right)^{g(x)}$ на области допустимых значений (далее –ОДЗ) исходного уравнения. Обобщив, получаем систему[14]:

$$\begin{cases} f(x) = \left(p(x)\right)^{g(x)}, \\ f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1. \end{cases}$$

*Пример 4.*Найдите корни уравнения$\log_3(10 - 3^x) = 2 - x$.

Согласно методу решения уравнений по определению логарифма, перейдем от исходного уравнения $\log_3(10 - 3^x) = 2 - x$ к уравнению

$$10 - 3^x = 3^{2-x};$$

$$\text{ОДЗ: } 10 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 10;$$

$$10-3^x=\frac{3^2}{3^x};$$

Введем замену. Пусть $3^x=k$ $(k<10)$, тогда:

$$10-k=\frac{9}{k};$$

$$(10-k)k=9;$$

$$10k-k^2-9=0;$$

$$k^2-10k+9=0.$$

По теореме Виета получаем корни $k_1=1, k_2=9$.

Вернемся к замене: $\begin{cases}3^x=1,\\3^x=9,\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=2.\end{array}\right.$

Ответ: $x_1=0, x_2=2$.

2. *Метод потенцирования.*

Потенцирование — это действие, заключающееся в нахождении числа по данному логарифму через логарифмы других чисел (нем. potenzieren — возводить в степень)[13].

Метод потенцирования применяется для решения логарифмических уравнений, обе части которых представляют собой логарифмы по одинаковым основаниям.Суть метода потенцирования состоит в нахождении решения заданного уравнения посредством решения уравнения, полученного из исходного уравнения путем его почленного потенцирования, на области допустимых значений для исходного уравнения.Другими словами, потенцирование логарифмических уравнений— это переход от уравнений типа $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ к решению уравнений $f(x)=g(x)$, где

$$\begin{cases}a\neq 0,\\a>0,\\f(x)>0,\\g(x)>0.\end{cases}$$

Обосновать метод можно, опираясь на свойства логарифмов. Из них мы знаем, что логарифмы двух положительных чисел с одинаковыми положительными и отличными от единицы основаниями равны тогда и

только тогда, когда равны сами числа, то есть,$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c, a > 0, a \neq 0, b > 0, c > 0$. Можно сказать, что переход от уравнения $\log_a f(x) =$
$= \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ своего рода эквивалент замены $\log_a b = \log_a c$ на $b = c$, а ОДЗ в свою очередь – аналог выполнения условий данного свойства.

Рассмотрим метод потенцирования на примерах.

Пример 5.$\log_{x+5}(13x) = \log_{x+5}(2x^2 + 15)$.

Решение: согласно выбранному методу, переходим от исходного уравнения$\log_{x+5}(13x) = \log_{x+5}(2x^2 + 15)$ к уравнению $2x^2 + 15 = 13x$.

$$2x^2 - 13x + 15 = 0;$$

$$2x^2 - 10x - 3x + 15 = 0;$$

$$x(2x - 3) - 5(2x - 3) = 0;$$

$$(2x - 3)(x - 5) = 0;$$

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0; \\ x - 5 = 0; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1{,}5; \\ x = 5. \end{array} \right.$$

Проверяем принадлежность корней области допустимых значений переменной x для данного уравнения.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x + 5 > 0, \\ x + 5 \neq 0, \\ 2x^2 + 15 > 0, \\ 13x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ x \neq -5, \\ x \epsilon \mathbb{R}, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Ответ: $x_1 = 1{,}5;\ x_2 = 5$.

Пример 6.$\log_3(x + 12) = \log_{27}(x^6)$.

Решение.

$$\log_3(x + 12) = \log_{3^3}(x^6);$$

$$\log_3(x + 12) = \log_3(x^6)^{\frac{1}{3}};$$

$$\log_3(x + 12) = \log_3(x^2);$$

$$\text{Найдем ОДЗ: } \begin{cases} x + 12 > 0; \\ x^2 > 0; \end{cases} \Rightarrow x \epsilon (-12; 0) \cup (0, +\infty).$$

Согласно методу потенцирования переходим к уравнению

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x^2 + 3x - 4x - 12 = 0;$$

$$x(x+3) - 4(x+3) = 0;$$

$$(x+3)(x-4) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0; \\ x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3; \\ x=4; \end{array}\right., x\epsilon(-12;0)\cup(0,+\infty).$$

Ответ: $x_1 = -3, x_2 = 4$.

Пример 7. $1 + \log_3(7x^2+2) = \log_{\sqrt{3}}\sqrt{(12x^4+15)}$.

$$\log_3 3 + \log_3(7x^2+2) = 2\cdot\tfrac{1}{2}\log_3(12x^4+15);$$

$$\log_3(7x^2+2) = \log_3(12x^4+15) - \log_3 3;$$

$$\log_3(7x^2+2) = \log_3\tfrac{3(4x^4+5)}{3};$$

$$\log_3(7x^2+2) = \log_3 4x^4 + 5;$$

ОДЗ: $\begin{cases} 7x^2+2>0; \\ 4x^4+5>0; \end{cases} \Rightarrow\ x\in\mathbb{R}$.

$$7x^2+2 = 4x^4+5;$$

$$4x^4 - 7x^2 + 3 = 0;$$

Пусть $x^2 = k$,тогда уравнение примет вид:

$$4k^2 - 7k + 3 = 0.$$

По теореме Виета получаем корни уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} k_1 = 1; \\ k_2 = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к замене: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1;$

$$x^2 = \tfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2};$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_4 = 1$.

*Пример 8.*Найдите корень уравнения$\log_2(8-x) = 2\log_2(4+x)$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наименьший из корней.

$$\log_2(8-x) = 2\log_2(4+x)\,;$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 8-x>0; \\ 4+x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<8; \\ x>-4; \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in (-4;8).$$

$$\log_2(8-x) = \log_2(4+x)^2;$$

$$\log_2(8-x) = \log_2(16+8x+x^2)\,;$$

$$8-x = 16+8x+x^2;$$

$$x^2+9x+8=0;$$

$$x_1 = -1;$$

$$x_1 = -8 \text{ , не удовлетворяет ОДЗ.}$$

Ответ: $x=-1$.

3. *Разложение на множители.*

Метод разложения на множители применяютдля решения уравнений вида $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot \dots \cdot f_n(x) = 0$, где $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$– некоторые выражения. В этом случае используется следующее правило: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из входящих в него множителей равен нулю, а остальные имеют смысл [13].

Применимэтот подход к логарифмическим уравнениям.В общем видеуравнение $\log_a f(x)\cdot\log_b h(x) = 0$равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ h(x)>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_a f(x) = 0, \\ \log_b h(x) = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим метод разложения на множители на конкретных примерах.

*Пример 9.*Решите уравнение$\ln(5x)\cdot\lg(x-3) = 0$.

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} 5x>0 \\ x-3>0 \end{cases}, \ \ x \in (3;+\infty)$$

$$\left[\begin{array}{l}\ln(5x)=0,\\ \lg(x-3)=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=1,\\ x-3=1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{5},\\ x=4.\end{array}\right.$$

$x=\frac{1}{5}$не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x=4$.

*Пример10.*Найдите корни уравнения$\lg(3-x)\cdot(\log_2(2x-1)-$ $-\log_2(x+4))=0$.

$$\left[\begin{array}{c}\lg(3-x)=0,\\ \log_2(2x-1)-\log_2(x+4))=0.\end{array}\right.$$

Уравнение $\lg(3-x)=0$ будем решать по определению логарифма, а уравнение $\log_2(2x-1)-\log_2(x+4))=0$– методом потенцирования.

$\lg(3-x)=0;$	$\log_2(2x-1)-\log_2(x+4))=0;$
$3-x=10^0;$	$\log_2(2x-1)=\log_2(x+4);$
$3-x=1;$	$2x-1=x+4;$
$x=2;$	$x=5;$

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}3-x>0,\\ 2x-1>0,\\ x+4>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<3,\\ x>\frac{1}{2},\\ x>-4,\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2};3\right).$$

Сучетом ОДЗ получаем один корень$x=2$.

Ответ: $x=2$.

Уравнения, решаемые методом разложения на множители не всегда представлены в виде произведения многочленов, приравненных к нулю. В таких случаях требуется преобразовать уравнение, а потом приступить к решению.

Пример 11. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}x\cdot\log_4 x=6+2\log_4 x-$ $-3\log_{\sqrt{3}}x$.

ОДЗ: $x>0$.

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения:

$$\log_{\sqrt{3}}x\cdot\log_4 x-6-2\log_4 x+3\log_{\sqrt{3}}x=0.$$

Следующим шагом нужно сгруппировать слагаемые, к примеру, первое с третьим, и второе с четвертым:

$$\log_4 x\left(\log_{\sqrt{3}} x-2\right)+3\left(\log_{\sqrt{3}} x-2\right)=0.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$\left(\log_{\sqrt{3}} x-2\right)(\log_4 x+3)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{3}} x-2=0, \\ \log_4 x+3=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{3}} x=2, \\ \log_4 x=-3,\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\left(\sqrt{3}\right)^2, \\ x=4^{-3},\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3, \\ x=\dfrac{1}{64}.\end{array}\right.$$

Оба корня принадлежат области допустимых значений.

Ответ: $x_1=3\,, x_2=\frac{1}{64}$.

4. *Метод замены переменной.*

Логарифмические уравнения можно решить путем введения новой переменной, если все логарифмы в уравнении могут быть сведены к одному и тому же логарифму, содержащему неизвестную величину. Как правило, данный метод применяется в следующих случаях:

– переменная является частью некоторой составной функции;

– переменная присутствует в нескольких одинаковых выражениях и нигде более;

– в логарифмическом уравнении переменная находится под знаками логарифмов, полученныхпутем перестановки выражения в аргументе и в основании, к примеру, $\log_{x+3}(3x+13)+4\log_{3x+13}(x+3)==4$ [14].

Примеры каждого из этих случаев приведены ниже.

*Пример 12.*Найти корни уравнения $(3-\log_{0,5} x)^6=729$.

Введение новой переменной $k=3-\log_{0,5}x$позволяет от уравнения, содержащее логарифмы, перейти к простому уравнению $k^6=729$, которое по силу решить каждому.

Прежде, чем его решать, укажем ОДЗ: $x>0$.

$$k^6=729;$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt[6]{729};$$

$$k_{1,2} = \pm 3;$$

Возвращаемся к замене и получаем два простейших уравнения, решаемые по определению логарифма.

$3 - \log_{0,5}x = 3;$

$\log_{0,5}x = 0;$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^0;$

$x = 1;$

$3 - \log_{0,5}x = -3;$

$\log_{0,5}x = 6;$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^6;$

$x = \frac{1}{64}.$

Таким образом, мы определили, что логарифмическое уравнение имеет два корня $\frac{1}{64}$и 1.

*Пример 13.*Решить уравнение$\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 6 = 0.$

ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $\log_{0,5} x = k$,тогда:

$$k^2 + k - 6 = 0;$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = -1, \\ k_1 \cdot k_2 = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -3, \\ k_2 = 2. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к замене:

$\log_{0,5} x = -3;$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8;$

$\log_{0,5} x = 2;$

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$

Оба корня удовлетворяют области допустимых значений.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 8.$

Приведем еще несколько примеров, иллюстрирующих второй случай.

*Пример 14.*Решить уравнение $\frac{3\lg x}{\lg x - 2} = \frac{\lg x + 4}{\lg x}$ [10].

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases} x > 0, \\ \lg x - 2 \neq 0, \\ \lg x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 100, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

На данном этапе уже можно вводить новую переменную.

Пусть $t = \lg x$, тогда уравнение будет иметь вид:

$$\frac{3t}{t+2} = \frac{t+4}{t}.$$

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases} t \neq 0, \\ t \neq -2. \end{cases}$$

$$\frac{3t \cdot t - (t+2)(t+4)}{t(t+2)} = 0;$$

$$3t^2 - t^2 - 6t - 8 = 0;$$

$$2t^2 - 6t - 8 = 0|:2;$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0;$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3, \\ t_1 \cdot t_2 = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1, \\ t_1 = 4. \end{array}\right.$$

Вернемся к замене:

$$lg\, x = -1 \Rightarrow x = 0{,}1;$$

$$\lg x = 4 \Rightarrow x = 10000;$$

Оба корня удовлетворяют области допустимых значений.

Ответ: $x_1 = 0{,}1, x_2 = 10000.$

*Пример 15.*Решите уравнение$2^{2(\log_5 x)^2} - 15 \cdot 2^{(\log_5 x)^2} - 16 = 0$ [12].

Выражения$2^{2(\log_5 x)^2}$ и $2^{(\log_5 x)^2}$, содержащие переменную, практически одинаковые. Различие состоит лишь в числе два, которое находится в показателе первого выражения. Если применить свойство степеней, то получим выражение $(2^{(\log_5 x)^2})^2$, то есть наше уравнение примет вид:

$$(2^{(\log_5 x)^2})^2 - 15 \cdot 2^{(\log_5 x)^2} - 16 = 0.$$

Решим уравнение с при помощи метода замены переменной.

Пусть $2^{(\log_5 x)^2} = k$;

$$k^2 - 15k - 16 = 0;$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 15, \\ k_1 \cdot k_2 = -16, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -1, \\ k_2 = 16. \end{array}\right.$$

Вернемся к замене:

$$2^{(\log_5 x)^2} = -1 \Rightarrow x \in \emptyset;$$

$$2^{(\log_5 x)^2} = 16 \Rightarrow 2^{(\log_5 x)^2} = 2^4 \Rightarrow (\log_5 x)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = -2, \\ \log_5 x = 2, \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{25}, \\ x = 25. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ: $x > 0$, нам подходят оба корня.

Ответ:$x_1 = \frac{1}{25}$,$x_2 = 25$.

Перейдем к последнему случаю и рассмотрим способ решения подобных логарифмических уравнений.

Пример 16. Решить уравнение $\log_{x+2}(2x+7) + 2\log_{2x+7}(x+2) = 3$.

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 2x + 7 > 0, \\ x + 2 \neq 1, \\ 2x + 7 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > -3{,}5, \\ x \neq -1, \\ x \neq -3, \end{cases} \Leftrightarrow x\epsilon(-2; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Для решения подобных уравнений обратимся к следствию из формулы перехода от одного основания логарифма к другому основанию, которое выражается следующей формулой: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,где $a, b > 0, a, b \neq 1$.Таким образом, можно ввести обозначение, где один из логарифмов примет значениеk, а другой соответственной $\frac{1}{k}$.

Пусть $\log_{x+2}(2x+7) = k$, тогда получится дробно – рациональное уравнение вида: $k + \frac{2}{k} = 3$;

$$k + \frac{2}{k} - 3 = 0;$$

$$\frac{k^2+2-3k}{k}=0, k\neq 0;$$

$$k^2-3k+2=0;$$

$$\begin{cases} k_1+k_2=3, \\ k_1\cdot k_2=2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=2. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к замене:

$$\log_{x+2}(2x+7)=1;$$

$$2x+7=x+2;$$

$$x=-5\notin(-2;-1)\cup(-1;+\infty);$$

$$\log_{x+2}(2x+7)=2;$$

$$2x+7=(x+2)^2;$$

$$2x+7=x^2+4x+4;$$

$$x^2+2x-3=0;$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2, \\ x_1\cdot x_2=-3, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3, x\notin(-2;-1)\cup(-1;+\infty), \\ x_2=1, x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty). \end{array}\right.$$

Ответ: $x=1$.

5. *Метод логарифмирования.*

Метод логарифмирования применяется в том случае, когда в одной части уравнения содержится показательно степенное выражение, а в другой – произвольное положительное число, как, к примеру, в следующих уравнениях: $x^{\log_2 x}=2$, $2x^{\log_2 x}=16$, $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}$и т.п.

При решении таких уравнений необходимо найти ОДЗ, затем обе части уравнения прологарифмировать, по основанию, равному основанию логарифма в показателе степени, затем пользуясь свойством логарифмаP_4, вынести показатель степени за знак логарифма и решить полученное уравнение, применяя метод замены переменной, о котором говорилось ранее. Продемонстрируем данный метод на конкретных примерах.

*Пример 17.*Найти корни уравнения$x^{\log_2 x}=2$ [12].

Данное уравнение является классическим примером на применение метода логарифмирования. В левой части уравнения – степень, в правой части – положительное число. Логарифмирование будем осуществлять по основанию 2.

ОДЗ: $x > 0$.

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 2.$$

Следуя вышеописанному алгоритму, выносим степень $\log_2 x$ из-под знака логарифма по свойству P_4.

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = 1;$$

$$\log_2^2 x - 1 = 0;$$

Пользуясь формулой разности квадратов, разложим выражение на множители и решим получившееся уравнение.

$$(\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) = 0;$$

$$\log_2 x - 1 = 0; \qquad \log_2 x + 1 = 0;$$

$$\log_2 x = 1; \log_2 x = -1;$$

$$x = 2; x = \frac{1}{2}.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2$.

В примере 17 замена переменной не потребовалась. Рассмотрим другой вариант задания с использованием замены.

*Пример 18.*Решить уравнение$x^{4\lg^2 x} = 0{,}1x^3$[4].

ОДЗ: $x > 0$.

$$\lg x^{4\lg^2 x} = \lg 0{,}1x^3;$$

$$4\lg^2 x \cdot \lg x = \lg 0{,}1 + \lg x^3;$$

$$4\lg^3 x = -1 + 3\lg x;$$

$$4\lg^3 x - 3\lg x + 1 = 0;$$

Введем замену: $\lg x = k$;

$$4k^3 - 3k + 1 = 0;$$

$$4k^3-4k+k+1=0;$$

$$4k(k^2-1)+(k+1)=0;$$

$$4k(k-1)(k+1)+(k+1)=0;$$

$$(k+1)(4k^2-4k+1)=0;$$

$$k+1=0; \qquad\qquad 4k^2-4k+1=0;$$

$$k=-1; \qquad\qquad (2k-1)^2=0;$$

$$2k-1=0;$$

$$k=\tfrac{1}{2}.$$

Вернемся к замене:

$$\lg x=-1; \lg x=\frac{1}{2};$$

$$x=\tfrac{1}{10}=0{,}1; \qquad\qquad x=\sqrt{10}.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1=0{,}1$, $x_2=\sqrt{10}$.

Пример 19. Решить уравнение $x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}$.

ОДЗ: $x>0$.

$$\lg x^{2\lg^3 x-1{,}5\lg x}=\lg\sqrt{10}\,;$$

$$(2\lg^3 x-1{,}5\lg x)\cdot\lg x=0{,}5;$$

$$2\lg^4 x-1{,}5\lg^2 x-0{,}5=0;$$

Введем замену: $\lg^2 x=k$;

$$2k^2-1{,}5k-0{,}5=0;$$

$$\left[\begin{aligned}k_1&=-0{,}25,\\ k_2&=1.\end{aligned}\right.$$

Вернемся к замене:

$$\lg^2 x=1; \lg^2 x=-0{,}25;$$

$$\lg x=\pm1; x\epsilon\emptyset.$$

$$\left[\begin{array}{l}\lg x = -1,\\ \lg x = 1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{10} = 0{,}1,\\ x = 10.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 10$.

6. *Мини-максный метод решения смешанных уравнений.*

Помимо логарифмирования для решения смешанных уравнений применяется мини-максный метод. Его можно использовать в том случае, если уравнение нельзя решить при помощи логарифмирования[9].

Для применения мини-максного метода необходимо ввести основные определения.

Определение 1

Функция $f(x)$монотонно возрастает на$[a, b]$,если для любых x_1, x_2 из этого промежуткаиз того, что $x_1 < x_2$следует, что$f(x_1) < f(x_2)$.
И наоборот, из того, что $x_1 > x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 2

Функция $f(x)$ монотонно убывает на $[a, b]$, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка из того, что $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$ и наоборот, из того, что $x_1 > x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ [9].

Функция на рисунке 1 слева – монотонно возрастающая, а справа – монотонно убывающая.

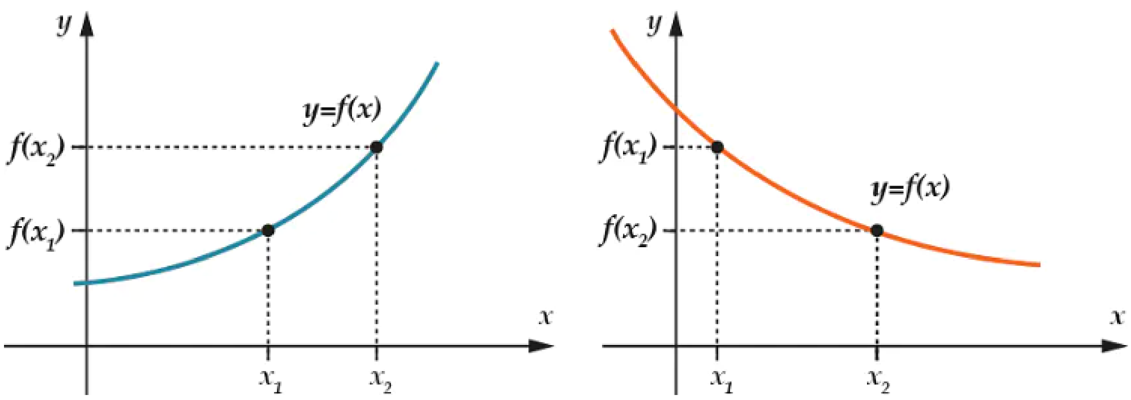

Рисунок 1 – Графики функций

Теперь обратимся к логарифмической функции $f(x) = \log_a x$, известно, что выполняется следующая теорема:

Теорема 1. Если $a > 1$, то функция $f(x) = \log_a x$ является монотонно возрастающей, если $0 < a < 1$, то функция$f(x) = \log_a x$является монотонно убывающей [9].

На рисунке 2 приведены примеры монотонно возрастающей и монотонно убывающей логарифмической функции.

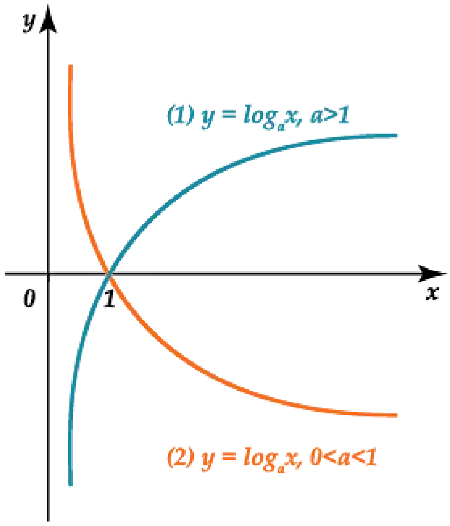

Рисунок 2 – Графики логарифмических функций

Мини-максный метод кратко можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq C, \\ g(x) \leq C, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = C, \\ g(x) = C. \end{cases}$$

Главная цель состоит в том, чтобы найти константу C, чтобы можно было свести уравнения к более простым. Для этого могут быть полезны свойства монотонности логарифмической функции, сформулированные выше.

Рассмотрим конкретные примеры:

*Пример 20.*Решить уравнение$\log_{\frac{1}{3}}(1+(x^2-3x+2)^2)=\sqrt{x^2-6x+8}$ применив свойства функций [4].

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases}1+(x^2-3x+2)^2>0,\\ x^2-6x+8\geq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R},\\ x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty).\end{cases}$$

Вначале будем рассматривать левую часть. Там стоит логарифм с основанием $0<a<1$. Согласно теореме 1, функция убывает. При этом, $t==1+(x^2-3x+2)^2\geq 1$, а значит, $\log_a t\leq 0$.

С другой стороны, корень не может принимать отрицательные значения:$\sqrt{x^2-6x+8}\geq 0$. Таким образом, константа C найдена и равна 0. Исходное уравнение представим в виде равносильной системы:

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(1+(x^2-3x+2)^2)=0,\\ \sqrt{x^2-6x+8}=0.\end{cases}$$

Решаем каждое уравнение по отдельности:

$$\log_{\frac{1}{3}}(1+(x^2-3x+2)^2)=0;\sqrt{x^2-6x+8}=0;$$

$$1+(x^2-3x+2)^2)=1;x^2-6x+8=0;$$

$$(x^2-3x+2)^2=0;\qquad\qquad \left[\begin{array}{l}x_1=4,\\ x_2=2,\end{array}\right.$$

$$x^2-3x+2=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=1.\end{array}\right.$$

Из решения видно, что общим для уравнений является корень $x=2$.

Ответ: 2.

*Пример 21.*Решить уравнение$\sqrt{\cos^2((x-3)\cdot sin5x)}=1+$ $+\log^4_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)$[4].

Заменим выражение $\sqrt{\cos^2((x-3)\cdot sin5x)}$ на тождественно равное ему $|\,cos((x-3)\cdot sin5x)\,|$.

Функция косинус принимает значения на $[-1;1]$, а его модуль–$[0;1]$. Следовательно, $0\leq|\,cos((x-3)\cdot sin5x)\,|\leq 1$.

С другой стороны,$\log^4_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)\geq 0$, как четная степень, поэтому $1+\log^4_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)\geq 1$.

Таким образом, значения выражения из левой части уравнения не превосходят 1, а значения выражения из правой части уравнения не меньше 1, т.е., константа $\mathrm{C}=1$. Это позволяет нам заменить решение исходного уравнения решением следующей системы:

$$\begin{cases}|cos\big((x-3)\cdot sin5x\big)|=1,\\ 1+\log^4_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)=1.\end{cases}$$

Решим второе уравнение, и результат подставим в первое.

$$1+\log^4_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)=1;$$

$$\log^4_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)=0;$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)=0;$$

$$x^2-5x+7=\left(\frac{1}{5}\right)^0;$$

$$x^2-5x+7=1;$$

$$x^2-5x+6=0;$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=5,\\ x_1\cdot x_2=6,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x_1&=2,\\ x_2&=3.\end{aligned}\right.$$

Выясним, удовлетворяют ли найденные корни логарифмического уравнения первому уравнению системы, а значит, системе в целом, и исходному уравнению.

$$\left|cos\big((3-3)\cdot\sin(5\cdot 3)\big)\right|=1;$$

$$|\cos 0|=1;$$

$1=1$– верно;

$$\left|cos\big((2-3)\cdot\sin(5\cdot 2)\big)\right|=1;$$

$|\cos(-1)(sin10)|=1$–неверно, т.к., $|\cos(-1)(sin10)|=1$, если $sin10=\pi\mathrm{k},\mathrm{k}\epsilon\mathbb{Z},$ но $\sin 10\neq\pi\mathrm{k}$ при $\mathrm{k}\epsilon\mathbb{Z}$. Действительно, при $\mathrm{k}=$

$0, \sin 10 \neq 0$. При любом другом $k \epsilon \mathbb{Z}$ равенство $sin 10 = \pi k$ не выполняется, так как функция синуса принимает значения $[-1; 1]$.

Ответ: 3.

7. *Графический метод.*

Использование графического метода для решения логарифмических уравнений обычно осуществляется в тех случаях, когда, во-первых, функции, соответствующие частям данного логарифмического уравнения, достаточно просты с точки зрения построения их графиков и, во-вторых, нет других более простых вариантов получения решения[5].

*Пример 22.*Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{10 + 9x} = \log_3(3 - x)$.

Формулировка задачи предполагает, что мы не можем решить уравнение напрямую, указывая не только количество корней, но и сами корни. Иначе бы вопрос стоял «решить уравнение». Действительно, аналитического способа решения данного уравнения не видно.

Однако, удобно определить количество корней, построив графики функций,соответствующих частям уравнения. Более того, построения графиков в данном примере выполняется довольно просто. Нам хорошо известны функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \log_3 x$ и их графики. Графики интересующих нас функций $\sqrt{10 + 9x}$ и $\log_3(3 - x)$ (рисунок 3)будут иметь схожую геометрию с точностью до преобразований растяжения и симметрии.Возьмем несколько опорных точек, чтобы получить изображение нужных кривых.

Учтем ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{10 + 9x} \geq 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{10}{9}, \\ x < 3. \end{cases}$

Найдем опорные точки для функции $y = \sqrt{10 + 9x}$:

1. При $x = -\frac{10}{9} \Rightarrow y = 0$.
2. При $x = -1 \Rightarrow y = 1$.
3. При $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Теперь найдем опорные точки для функции $y = \log_3(3 - x)$:

1. При $x = 0 \Rightarrow y = 1$.
2. При $x = -6 \Rightarrow y = 2$.
3. При $x = 2 \Rightarrow y = 0$.

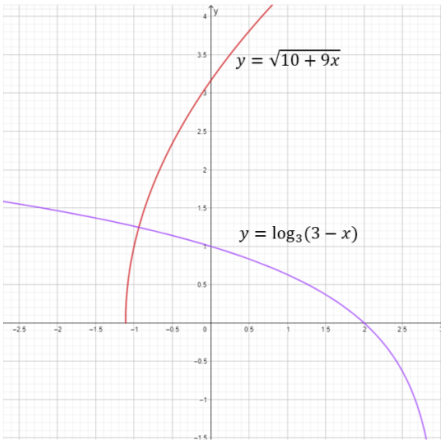

Рисунок 3 – Графическое решение уравнения

Из чертежа видно, что графики функций имеют ровно одну общую точку на отрезке$[-\frac{10}{9}; -\frac{1}{2}]$. Точек пересечения больше нет, так как функция $y = = \log_3(3 - x)$убывает на указанном отрезке, а функция $y = \sqrt{10 + 9x}$ возрастает, что позволяет утверждать о единственности корня.

Ответ: один корень.

2.2 Виды логарифмических неравенств и методы их решения

При решении логарифмических неравенств, в отличие от уравнений, важно принимать во внимание основание логарифма. От этого зависит как весь процесс решения, так и окончательный ответ. Отметим важное правило, которое будем использовать при решении логарифмических неравенств:

Если основание логарифма aв неравенстве$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ больше единицы, то знак неравенства сохраняется и для $f(x)$и для $g(x)$. Если основание находится в промежутке от нуля до единицы, то знак между $f(x)$и $g(x)$ меняется на противоположный [11].

В общем виде данное правило можно записатьследующим образом:

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$при $a > 1$,

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$при $0 < a < 1$.

Выделим простейшие логарифмические неравенства:

1. $\log_a f(x) V b$, где $a > 1, a \neq 1,\ V$ −один из знаков $\{<, \leq, >, \geq\}$. Например, неравенство$\log_a f(x) > b$ (по свойству 3 логарифмической функции) равносильно системе: $\begin{cases} f(x) > a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$,при $a > 1$ и системе $\begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$,при $0 < a < 1$.

2. $\log_{h(x)} f(x) V b$, где $h > 1, a \neq 1,\ V$ −один из знаков $\{<, \leq, >, \geq\}$. Например, неравенство$\log_{h(x)} f(x) \geq b$ (по свойству 3 логарифмической функции)равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) \geq h^b(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) \leq h^b(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

3. $\log_a f(x) V \log_a g(x)$, где $a > 1, h \neq 1,\ V$ −один из знаков $\{<, \leq, >, \geq\}$.Например, неравенство$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (по свойству 3 логарифмической функции)равносильно системе$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$ при $a > 1$, и системе$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$ при $0 < a < 1$.

4. $\log_{h(x)} f(x) V \log_{h(x)} g(x)$, где $h > 1, h \neq 1,\ V$ −один из знаков $\{<, \leq, >, \geq\}$.Например, неравенство$\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ (по свойству 3 логарифмической функции)равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} h(x) > 1; \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1; \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > g(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим основные методы, применяемые при решении логарифмических неравенств.

1. *Метод интервалов.*

Метод интервалов состоит в том, что нам необходимо выделить непрерывные функции, найти нули функций и ОДЗ, затем отметив все точки на числовой прямой, определить знаки[11].

*Пример 23.*Решить неравенство $(3x+7)\cdot\log_{2x+5}(x^2+4x+5) \geq 0$.

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} x^2+4x+5 > 0, \\ 2x+5 \neq 1, \\ 2x+5 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \epsilon \mathbb{R}, \\ x \neq -2, \\ x > -2{,}5. \end{cases}$$

В основании логарифма находится функция, поэтому логарифмическая функция$f(x) = \log_{2x+5}(x^2+4x+5)$не является непрерывной на всей области определения. Применим свойство перехода к новому основанию P_5. В качестве нового основания возьмем, к примеру, константу 2.

$$\frac{(3x+7)\cdot\log_2(x^2+4x+5)}{\log_2(2x+5)} \geq 0.$$

Таким образом, получаем три непрерывные функции, каждую из которых приравниваем к нулю.

$$\begin{matrix} 3x+7=0, \\ \log_2(2x+5) \neq 0, \\ \log_2(x^2+4x+5)=0, \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-\dfrac{7}{3}, \\ 2x+5 \neq 1, \\ x^2+4x+5=1, \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-\dfrac{7}{3}, \\ 2x \neq -4, \\ x^2+4x+4=0. \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} x = -\dfrac{7}{3}, \\ x \neq -2, \\ (x+2)^2 = 0, \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = -\dfrac{7}{3}, \\ x \neq -2, \\ x = -2. \end{array}$$

Отметим на числовых прямых нули функций и область допустимых значений. Найдем промежутки пересечения получившегося множества с ОДЗ (рисунок 4).

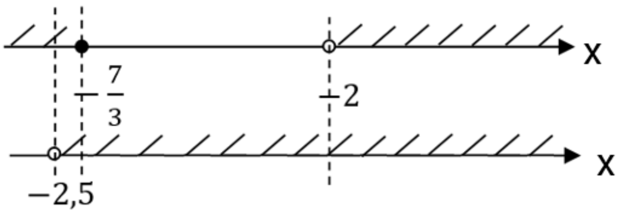

Рисунок 4 – Метод интервалов

Ответ: $\left(-2{,}5; -\frac{7}{3}\right] \cup (-2; +\infty)$.

2. Метод замены переменной.

Как уже говорилось раннее, если в уравнении встречается несколько раз одно и то же сложное выражение, то его нужно заменить какой-либо новой переменной. Тот же принцип применим и для логарифмических неравенств.

*Пример 24.*Решите неравенство$\lg^4(x^2-4)^2 - \lg^2(x^2-4)^4 \geq 192$.

$$\text{ОДЗ}: x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2;$$

$$\lg^4(x^2-4)^2 - 4\lg^2(x^2-4)^2 \geq 192;$$

Введем замену: $\lg(x^2-4)^2 = t, t > 0$;

$$t^4 - 4t^2 - 192 \geq 0;$$

Введем замену:$t^2 = k, k \geq 0$;

$$k^2 - 4k - 192 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 16, k_2 = -12.$$

Решение неравенства, относительно переменной k представлено на рисунке 5.

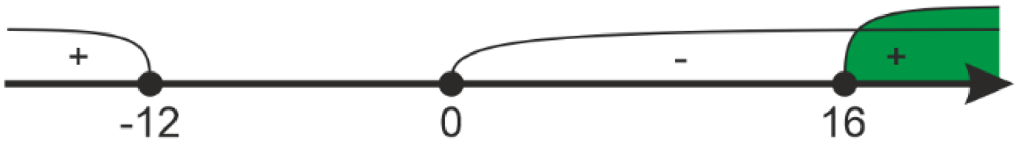

Рисунок 5 – Решение уравнения

Получаем $k \geq 16$. Возвращаемся к замене:$t^2 \geq 16$.

$$t^2 \geq 16 \Rightarrow t^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow (t-4)(t+4) \geq 0.$$

Решение неравенства, относительно переменной t представлено на рисунке 6.

Рисунок 6 – Решение уравнения

Получаем$t \leq -4; t \geq 4$. Возвращаемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l}\lg(x^2-4)^2 \leq -4,\\ \lg(x^2-4)^2 \geq 4\,,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(x^2-4)^2 \leq 10^{-4},\\ (x^2-4)^2 \geq 10^4,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(x^2-4-10^{-2})(x^2-4+10^{-2}) \leq 0,\\ (x^2-4-10^2)(x^2-4+10^2) \geq 0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c}\left(x-\sqrt{4{,}01}\right)\left(x+\sqrt{4{,}01}\right)\left(x-\sqrt{3{,}99}\right)\left(x+\sqrt{3{,}99}\right) \leq 0,\\ \left(x-2\sqrt{26}\right)\left(x+2\sqrt{26}\right) \geq 0.\end{array}\right.$$

Отметим точки на числовой прямой и определим знаки в промежутках (рисунок 7). Не забываем пересечь получившееся множество с ОДЗ.

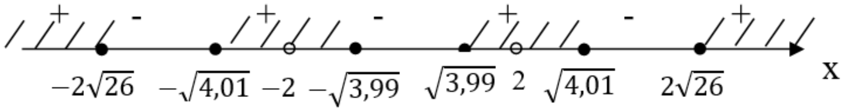

Рисунок 7– Решение уравнения

Ответ: $x\epsilon\left(-\infty; -2\sqrt{26}\right] \cup \left[-\sqrt{4{,}01}; -2\right] \cup \left[-2; \sqrt{3{,}99}\right] \cup \left[\sqrt{3{,}99}; 2\right] \cup$ $\cup \left[2; \sqrt{4{,}01}\right] \cup \left[2\sqrt{26}; +\infty\right)$.

3. Метод рационализации.

Метод позволяет в ряде случаев упростить неравенство, содержащее сложное трансцендентное (неалгебраическое) выражение, сведя его к рациональному неравенству (их мы умеем решать методом интервалов)[11].

Рассмотрим неравенство $h(a) - h(b)V0$,где обозначим за V −один из знаков $\{<, \leq, >, \geq\}$, $\bar{V}$ − противоположный знак [6].

1. Если $h(x)$ — монотонно возрастающая функция, тоу выражений $h(a) - h(b)$ и $a - b$совпадают знаки, т.е.

$$h(a) - h(b)V0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - bV0, \\ \text{ОДЗ } h(x). \end{cases}$$

2. Если $h(x)$ — монотонно убывающая функция, тоу выражений $h(a) - h(b)$ и $a - b$разные знаки, т.е.

$$h(a) - h(b)V0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b\bar{V}0, \\ \text{ОДЗ } h(x). \end{cases}$$

*Пример 25.*Решить неравенство$\log_x(2x^2 - 8) - \log_x(6x) > 0$ [12]. Если данный пример решать без метода рационализации, то получим следующее: $\log_x(2x^2 - 8) > \log_x(6x)$ и далее рассматриваем два случая, когда $x > 0$ и $0 < x < 1$. Т.е., расписываем совокупность двух систем с учетом ОДЗ.

Согласно методу рационализации для неравенства $\log_{a(x)} b(x) V \log_{a(x)} c(x)$ равносильным будет система:

$$\begin{cases} (a(x) - 1)\big(b(x) - c(x)\big)V0, \\ b(x) > 0, \\ c(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Заметим, что все строки, кроме первой, относятся к ОДЗ.

Докажем, что данный переход является равносильным и далее приведем решение примера с помощью метода рационализации.

Если $0 < a(x) < 1$, то из неравенства$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$ следует $b(x) < c(x)$. С другой стороны, так как $a(x) - 1 < 0$ неравенство $(a(x) - -1)\big(b(x) - c(x)\big) > 0$имеет смысл тогда, когда $b(x) - c(x) < 0$или $b(x) < c(x)$.

Получили, что при $0 < a(x) < 1$неравенства$(a(x) - 1)\big(b(x) - -c(x)\big) > 0$и $\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$ равносильны, учитывая ОДЗ.

Аналогично, неравенства будут равносильны и при$a(x) > 1$.

Продолжим решение:

$$\log_x(2x^2 - 8) - \log_x(6x) > 0 \Leftrightarrow \log_x(2x^2 - 8) > \log_x(6x)$$

$$\begin{cases} (x-1)(2x^2 - 8 - 6x) > 0, \\ 2x^2 - 8 > 0, \\ 6x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)(x-4) > 0, \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty), \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решаем получившееся неравенство методом интервалов и пересекаем получившееся множество с ОДЗ.

Ответ: $(4; +\infty)$.

Из рассмотренного метода рационализации вытекают следствия, представленные в Таблице 1.

Таблица 1 – Формулы сведения логарифмических неравенств к рациональным

Исходное неравенство	Равносильное неравенство
$\big(\log_{a(x)} b(x) - \log_{a(x)} c(x)\big) hV0$	$\big(b(x) - c(x)\big) hV0$
$\log_{a(x)} b(x) V \log_{d(x)} b(x)$	$(a(x)-1)(d(x)-1)(b(x)-1)(d(x)-a(x))V0$
$\log_{a(x)} b(x) \cdot \log_{d(x)} c(x) V0$	$(a(x)-1)(b(x)-1)(c(x)-1)(d(x)-1)V0$
$\log_{a(x)} b(x) + hV0$	$(a(x)-1)(b(x) \cdot a(x)^h - 1)V0$
$\log_{a(x)} b(x) - hV0$	$(a(x)-1)(b(x) - a(x)^h)V0$

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ: «ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

3.1 Анализ заданий ЕГЭ по теме «Логарифмические уравнения и неравенства»

Важным этапом обучения является сдача Единого государственного экзамена, где требуется большой объем знаний, полученный в ходе обучения в школе, и в особенности при самостоятельной работе. Ведь обучающиеся выполняют задания без какой-либо помощи, опираясь на свои знания и умения, полученные в процессе обучения.

В структуру ЕГЭ по математике входит три задания, где требуется решить логарифмическое уравнение или неравенство. Это задания под номерами 1, 12 и 14. В задании №1 от учащегося требуется решить простейшее логарифмическое уравнение по определению логарифма или методом потенцирования. Задание №12 входит во вторую часть экзамена, где требуется развернутый ответ. В нем учащимся предлагается решить уравнение и указать корни этого уравнения, принадлежащие определенному отрезку. При выполнении всех пунктов задания, учащийся получает 2 балла. Задание №14 требует от учащегося решить сложное логарифмическое неравенство. При правильном выполнении, экзаменуемый также получает 2 балла.

Подробно рассмотрим примеры таких заданий.

*Задача 1.*Найдите корень уравнения$\log_2(7-x)=5$ [12].

Решение.

Данное уравнение является простейшим логарифмическим уравнением, которое решается по определению логарифма.

Не забываем указывать ОДЗ: $x<7$.

$$7-x=2^5;$$

$$7 - x = 32;$$

$x = -25$ принадлежит ОДЗ.

Как правило, данное задание решается без особых трудностей. К ошибке может привести не знания определения логарифма, в следствие чего ученик может возвести не 2^5, а 5^2. Еще одной из возможных ошибок может являться неправильное найденное значение при возведении в степень.

Задача 2.

а. Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку$\left[-1; \frac{8}{9}\right]$ [12].

Решение.

а. В начале решения любого логарифмического уравнения находим ОДЗ. В нашем случае ОДЗ – это множество действительных чисел, так как аргументом логарифма является выражение четной степени.

Далее по свойству логарифма можно представить единицу как $\log_2 2$.

$$\log_2 2 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}.$$

Обратим внимание, что основания логарифма разные. Приводим к одному и тому же основанию, пользуясь формулой степени логарифма: $\log_{a^k} b^k = \log_a b$. Действительно, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{8x^4 + 14} = (8x^4 + 14)^{\frac{1}{2}}$.

$$\log_2 2 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(8x^4 + 14) .$$

На данном этапе уже могут произойти ошибки в преобразовании.

На данном этапе видно, что требуется применить свойства логарифма, такие как логарифм частного или логарифм произведения. Перенесем $\log_2 2$ из левой части в правую и применим свойство: $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$.

$$\log_2(9x^2 + 5) = \log_2 \frac{(8x^4+14)}{2} \Rightarrow \log_2(9x^2 + 5) = \log_2(4x^4 + 7).$$

Основания у логарифмов одинаковые, поэтому можно перейти к равносильному уравнению $9x^2 + 5 = 4x^4 + 7 \Rightarrow 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$.

Получили биквадратное уравнение, решаемое заменой переменной.

Пусть $x^2 = t$, тогда уравнение примет вид $4t^2 - 9t + 2 = 0$, которое обучающиеся с легкостью смогут решить.

В ходе решения получаем корни $t_1 = \frac{1}{4}$и $t_2 = 2$, после чего находим значения $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Все четыре корня входят в ОДЗ.

б. Среди найденных корней отберем подходящие под условие.

Зная, что $\sqrt{2} > 1$, смело можем утверждать, что $-\sqrt{2} < -1$, следовательно, он не входит в наш отрезок. Сравнить $\sqrt{2}$ и $\frac{8}{9}$ можно возведением в квадрат. Любая правильная дробь меньше единицы, а $\sqrt{2}$ при возведении во вторую степень примет значение 2. Следовательно, $\sqrt{2}$ также не принадлежит нужному промежутку.

Остается сравнить дроби:$-1 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{8}{9}$. Делаем вывод, что остальные корни нам подходят.

Ответ: а) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$.

Трудности при решении подобных заданий могут возникнуть из-за незнания формул или неумения их применять на практике.

Задание 3. Решите неравенство $\log_{9-4\sqrt{5}}(9x^2 - 24x + 16) +$ $+\log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + x - 2) \geq 0$[12].

Основания и аргументы представленных логарифмов разные, следовательно, нужны определенные преобразования. Главная задача – это сведение сложных логарифмических неравенств к простейшим, а для этого нам нужно, чтобы основания были одинаковые.

Обратим внимание, что $9 - 4\sqrt{5}$ можно представить как $(\sqrt{5} - 2)^2$, перепишем наше неравенство с учетом этого преобразования.

$$\log_{(\sqrt{5}-2)^2}(9x^2-24x+16)+\log_{\sqrt{5}+2}(x^2+x-2)\geq 0.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы из выражения $\sqrt{5}+2$ получить $\sqrt{5}-2$, тогда основания станут равными.

Если $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ и избавиться от иррациональности $\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}-2}{1}$.

Таким образом, можно заменить $\sqrt{5}+2$ на равносильное выражение $(\sqrt{5}-2)^{-1}$. Отметим, что $9x^2-24x+16=(3x-4)^2$. Перепишем неравенство с новыми преобразованиями:

$$\log_{(\sqrt{5}-2)^2}(3x-4)^2+\log_{(\sqrt{5}-2)^{-1}}(x^2+x-2)\geq 0.$$

Найдем ОДЗ для полученного неравенства:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0, \\ (3x-4)^2>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\epsilon(-\infty;-2)\cup(1;+\infty), \\ x\neq\dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\epsilon(-\infty;-2)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)\cup\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right);$$

По свойству логарифма можно вынести степени из основания и показателя логарифма. Но, прежде чем выносить квадрат из какого-либо выражения, посмотрим какое число «прячется» внутри.Так как, $\sqrt{5}-2>0$, то смело выносим степень за знак логарифма. Про выражение $3x-4$ однозначно ничего нельзя сказать, поэтому после вынесения степени за знак логарифма поставим модуль, чтобы не потерять корни.

$$2\cdot\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}-2}|3x-4|-\log_{\sqrt{5}-2}(x^2+x-2)\geq 0\,;$$

$$\log_{\sqrt{5}-2}|3x-4|\geq\log_{\sqrt{5}-2}(x^2+x-2).$$

На данном этапе нужно обратить внимание на основание логарифма и какой знак в неравенстве в зависимости от этого ставить. В нашем случае $\sqrt{5}--2<1$, следовательно, знак неравенства меняем на противоположный.

Потенцируем обе части неравенства: $|3x-4|\leq x^2+x-2$.

Решаем данное неравенство при условии, что $3x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$.

$$|3x-4| \leq x^2 + x - 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-4>0, \\ 3x-4 \leq x^2+x-2, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-4<0, \\ 3x-4 \geq -x^2-x+2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} 3x-4>0, \\ 3x-4 \leq x^2+x-2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{3}, \\ x^2-2x+2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x^2-2x+2=0;$$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 < 0$, действительных корней нет.

Отсутствие корней говорит о том, что нет пересечения с осью абсцисс, т.е., график функции будет располагаться полностью выше этой оси. Следовательно, $x \epsilon \mathbb{R}$.

Теперь перейдем к решению второй системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x-4<0, \\ 3x-4 \geq -x^2-x+2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{4}{3}, \\ x^2+4x-6 \geq 0. \end{cases}$$

$$x^2+4x-6=0;$$

$$D = 40;$$

$$x_1 = -2-\sqrt{10}, x_1 = -2+\sqrt{10}.$$

Т.к., нам нужны значения больше нуля, то$x \epsilon (-\infty; -2-\sqrt{10}] \cup$

$$\cup \left[-2+\sqrt{10}; +\infty\right).$$

Пересекая данное множество с ОДЗ и выкалывая точку $\frac{4}{3}$, получаем ответ (рисунок 8).

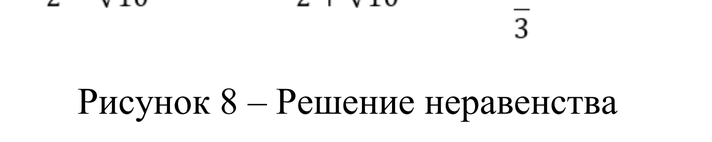

Рисунок 8 – Решение неравенства

Ответ: $x\epsilon(-\infty; -2-\sqrt{10}] \cup \left[-2+\sqrt{10}; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Возможные ошибки, которые могут допустить учащиеся при решении данного задания:

– неравносильные преобразования, которые могут привести к потере корней;
– не учтено ОДЗ;
– не учтено, что основание логарифма находится в пределах от нуля

до единицы, в следствие чего не изменен знак неравенства.

В открытом банке заданий федерального института педагогических измерений (далее –ФИПИ) содержится большое количество разнообразных заданий с логарифмами, требующие основательной подготовки.

3.2 Программа элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»

Элективный курс—это форма обучения, которая в сочетании с общеобразовательной подготовкой обеспечивает развитие способностей и интересов учащихся[3].

С помощью элективных занятий в школе решаются следующие задачи:

– удовлетворяется интерес обучающихся к более глубокому изучение отдельных предметов;

– развитие учебно-познавательных интересовучащихся, их творческих способностей и талантов, что и составляет важную образовательную ценность занятий.

Элективные занятия проводятся одновременно с изучением предметов федерального и регионального компонентов образовательного учреждения, с целью углубления знаний учащихся и формирования их творческих способностей. Элективные занятия —школьный компонент, т.е. обучающиеся сами выбирают, что будут изучать, этот компонент может включать в себя более глубокое изучение отдельных тем или разделов учебной программы по какому-либо предмету, а также содержать новые проблемы и темы, выходящие за пределы обязательной учебной программы. С этой целью разрабатываются специальные программы, направленные на поддержку учителя, и создаются учебные пособия по элективным предметам[3].

Грамотно организованный элективный курс позволяет заинтересовать обучающихся и раскрыть их потенциал.

Что касается организации элективных занятий в школе, то они могут принимать различные формы, начиная от обычных уроков и заканчивая экскурсиями, семинарами, дебатами и т.д.

«Логарифмы»– тема, традиционно изучаемая в курсе алгебры и начал анализа в средней школе, представляет определенную трудность для учащихся из-за небольшогоколичества выделенных на нее часов. При анализе учебников мы выяснили, что данная тема может изучаться как в 10, так и в 11 классе любого уровня подготовки. Также было выявлено недостаточное количество заданий повышенного уровня, которые встречаются на ЕГЭ. В свою очередь при изучении открытого банка заданий ФИПИ было выявлено большое разнообразие уравнений и неравенств с логарифмами, для решения которых нужно не только владеть теоретической информацией, но и практической составляющей. Как уже отмечалось ранее, программа по алгебре не предусматривает большого количества часов для данной темы, в связи с чем она изучается довольно сжато. Проведения элективного курса по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» позволит устранить данную проблему.

Данная программа элективного курса по теме «Логарифмические уравнения и неравенства» предназначена для учащихся 10-11 классов. Общая продолжительность составляет 18 часов (Таблица 2). Курспреподается в рамках предмета «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 классов.Программа курса позволит обучающимся закрепить на практике уже полученные знания, расширить свое представление о логарифмических уравнениях и неравенствах, научиться решать задачи углубленного уровня, а также примерные задания, которые встречаются на экзамене.

При решении заданий из данного курса учащиеся будут применять как типовые конструкции, так и проводить исследования, касаемо метода решения.

Курс построен на углубленном изучении логарифмических уравнений и неравенств и является развитием знаний, полученных раннее. Углубленное изучение основано на обучении приемам и методам решения математических задач, требующих применения высокой операционной и логической культуры, развивающей алгоритмическое мышление, направленное на развитие самостоятельной исследовательской деятельности.

Цель курса: систематизация, расширение и углубление знаний учащихся по теме «Логарифмические уравнения и неравенства», подготовка к ЕГЭ по данной теме.

Задачи курса:

1) рассмотреть и обобщить теоретический материал по теме «Логарифмы»;

2) сформировать умения применять свойства логарифма числа и логарифмической функции при решении практических заданий;

3) сформировать навыки решения логарифмических уравнений, неравенств и их систем.

В ходе обучения значительное место отводится практическим и самостоятельным работам учащихся.

Промежуточный контроль – контрольные работы по двум разделам курса(ПРИЛОЖЕНИЕ 1).

Итоговый контроль– контрольная работа по курсу«Логарифмические уравнения и неравенства» (ПРИЛОЖЕНИЕ2).

Таблица 2 –Тематический план программы элективного курса

№п/п	Наименование темы занятия	личество часов
Логарифм и его свойства.		
1	Понятие и свойства логарифмов.	1
2	Логарифмическая функция, свойства и ее график	1
Всего:		2
Логарифмические уравнения		
1	Решение уравнений методом, построенным на определении логарифма	1
2	Метод потенцирования	1
3	Метод замены переменной	1
4	Метод логарифмирования обеих частей уравнения	1
5	Решение однородных логарифмических уравнений второго порядка	1
6	Функционально-графический метод решения логарифмических уравнений	
7	Контрольная работа по теме: «Логарифмические уравнения»	1
Всего:		6
Логарифмические неравенства		
1	Простейшие логарифмические неравенства	1
2	Основные методы решения логарифмических неравенств	4
3	Контрольная работа по теме: «Логарифмические неравенства»	1
Всего:		6
Системы логарифмических уравнений и неравенств		
1	Системы логарифмических уравнений	1

2	Системы логарифмических неравенств	1
Всего:		2
Итоговая контрольная работа по курсу		2

В результате изучения элективного курса:

обучающийся должен знать:

– свойства логарифмических функций;

– основные свойства логарифмов;

– алгоритм решения логарифмических уравнений и неравенств, а также их систем;

– условия преобразования логарифмических выражений.

обучающийся должен уметь:

– применять определение логарифма числа, использовать свойства логарифма числа и логарифмической функции на практике, т.е. решать задачи.

Данный курс поддерживает изучение основного курса математики, способствует лучшему усвоению базового курса математики и направлен на расширение знаний учащихся, повышение уровня математической подготовки через решение большого количества логарифмических уравнений и неравенств.

3.3Содержание элективного курса «Логарифмические уравнения и неравенства»

В начало курса помещается справочный материал, который состоит из определения логарифма, его основных свойств (ПРИЛОЖЕНИЕЗ).

Занятие 1.Понятие и свойства логарифмов.

Пример:

$$\text{Вычислить} 3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3}}.$$

Решение:

$$\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} = \frac{2}{\frac{\log_3 3}{\log_3 \sqrt{5}}} = \frac{2\log_3 \sqrt{5}}{\log_3 3} = 2\log_3 \sqrt{5} = \log_3 5;$$

$$3^{\log_3 5} = 5.$$

Вычислить:

1) $(8^{\log_8 \sqrt[3]{5}})^3$;

2) $\log_4 64 - \log_5 125$;

3) $\log_{27} 81 + \log_{27} \sqrt{3}$;

4) $(6^{\log_3 6})^{\log_6 3}$;

5) $\log_{0,2} 96 - \log_{0,2} 6$;

6) $\log_{0,2} 6 - \log_{0,2} 18$;

7) $\log_{\frac{1}{6}} 12 + \log_{36} 7 + \log_6 3$;

8) $\log_{0,2} 125 : \log_{16} 64 \cdot \log_3 81$;

9) $\log_{\frac{1}{4}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 27^{\log_3 2}$;

10) $\log_{\frac{1}{27}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{16} : 7^{-2\log_{49} 2}$;

Упростить:

11) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$;

12) $(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}) \cdot 49^{\log_7 2}$;

13) $(\lg 125 - \lg 5) : (\lg 18 - \lg 3)$;

14) $2^{\log_8 7 + 1}$;

15) $5^{\frac{3-\lg 5}{\lg 25}}$.

Занятие 2.Логарифмическая функция, свойства и ее график.

1. Найти наименьшее значение функции $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(8 - x^2)$.

Решение:

$D\left(\log_{\frac{1}{2}} k\right) = (0; +\infty)$,поэтому$8 - x^2 > 0$, откуда$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$.

Функция$k = 8 - x^2$при $-\infty < x < 0$возрастает, при$0 < x < +\infty$, в точке $x = 0$принимает наибольшее значение. В силу того, что $\frac{1}{2} < 1$, то при $-2\sqrt{2} < x < 0$ функция $y = \log_{\frac{1}{3}} k$убывает, при$0 < x < 2\sqrt{2}$функция $y = \log_{\frac{1}{3}} k$возрастает и принимает наименьшее значение в точке$x = 0$:

$$y(0) = \log_{\frac{1}{2}}(8 - 0^2) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3.$$

2. Найти сумму целых значений функции$y = \log_2(128 - 124 \times \times 2^{-|x|})$.

3. При каком значении,a функция $y = a \lg x + 5x - x^2$имеет экстремум в точке $x = 1$?

4. Постройте график функции $y = \log_2(x^2 + 4x + 2)$. Сколько точек пересечения имеет данный график с функцией $y = 5x - 3$?

Занятие 3.Решение уравнений методом, построенным на определении логарифма.

*Пример 1.*Решите уравнение$\log_{\sqrt{2}}(x^2 + 4x - 7) = 4$. Если корней несколько, в ответе запиши среднее арифметическое их значений.

Решение:

$$ОДЗ: x^2 + 4x - 7 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -2 - \sqrt{11}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{11}; +\infty\right).$$

По определению логарифма имеем: $x^2 + 4x - 7 = \sqrt{2}^4$;

$$x^2 + 4x - 11 = 0;$$

$$x_1 = -2 - \sqrt{15};$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{15};$$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Т.к. корней несколько, найдем их среднее арифметическое.

$$(-2 - \sqrt{15} + (-2) + \sqrt{15}) : 2 = -2;$$

Ответ: -2.

*Пример 2.*Решите уравнение$\log_{0,2}\log_2(2x-3)=-1$.

Решение:

$$\text{\textit{ОДЗ:}}\ 2x-3>0 \Rightarrow x\in(1{,}5;+\infty).$$

По определению логарифма имеем:

$$\log_2(2x-3)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1};$$

$$\log_2(2x-3)=5\,;$$

Воспользуемся еще раз определением логарифма:

$$2x-3=2^5;$$

$$2x-3=32;$$

$$x=17{,}5;$$

Найденный корень входит в ОДЗ.

Ответ: $17{,}5$.

*Пример 3.*Найти корни уравнения $\log_{2+\mathrm{x}}(2x^2+3x-2)=2$.

Решение:

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases}2+x\neq 1,\\ 2+x>0,\\ 2x^2+3x-2>0.\end{cases}$$

Используем определение логарифма:

$$(2+x)^2=2x^2+3x-2;$$

$$x^2+4x+4=2x^2+3x-2;$$

$$x^2-x-6=0;$$

$$D=1+24=25;$$

$$x_1=\frac{(1+5)}{2}=3;$$

$$x_2=\frac{1-5}{2}=-2 \text{ не удовлетворяет ОДЗ.}$$

Ответ:$x=\ 3$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить уравнения:

1) $\log_2(x-3)=4$;

2) $\log_9 3^{2x+9}=2$;

3) $\log_2(2^x-3)=2-x$;

4) $\log_3(3^{-x+1}+1)+2=x$;

5) $lglglgx=0$;

6) $\log_{0,2} x\cdot\log_5 x\cdot\log_{25} x=0{,}5$;

7) $\log_5(26\cdot 5^{x-2})=2x-2$;

8) $\log_{x-2}(x^2-6x+10)=1$;

9) $\log_5(2^x-4)=x+2$;

10) $\log_9(4^x-3\cdot 2^{x+1}+9)+\log_3(2^x-1)=1$.

Занятие 4.Метод потенцирования.

Теория:

Потенцирование – сведение логарифмических уравнений вида $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$ к уравнениям вида $f(x)=g(x)$.

В начале решения необходимо определить ОДЗ:

$$\begin{cases} a(x)\neq 1, \\ a(x)>0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Логарифмическое уравнение будет иметь решения, если имеет решение уравнение $f(x)=g(x)$.

Пример 1:

$$\log_{0,4x}(15x-21)=\log_{0,4x}(11-x).$$

Решение: *Находим ОДЗ:*

$$\begin{cases} 0{,}4x\neq 1, \\ 0{,}4x>0, \\ 15x-21>0, \\ 11-x>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 2{,}5, \\ x>0, \\ 15x>21, \\ x<11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 2{,}5, \\ x>0, \\ x>1{,}4, \\ x<11, \end{cases} \Rightarrow x\in(1{,}4;2{,}5)\cup(2{,}5;11).$$

Решаем уравнение:

$$15x - 21 = 11 - x \Rightarrow 15x + x = 11 + 21 \Rightarrow x = 2.$$

Найденный корень принадлежит ОДЗ.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2:

$$\log_{\sqrt{6}}(2x-5) + \log_{\sqrt{6}}(7-x) = \log_{\sqrt{6}}(3x-11).$$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-5>0, \\ 7-x>0, \\ 3x-11>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>5, \\ x<7, \\ 3x>11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2{,}5, \\ x<7, \\ x>3\frac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow x \in (3\frac{2}{3}; 7).$

$$\log_{\sqrt{6}}(2x-5)(7-x) = \log_{\sqrt{6}}(3x-11);$$

$$(2x-5)(7-x) = 3x-11;$$

$$14x - 2x^2 - 35 + 5x = 3x - 11;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 6;$$

Корень $x_1 = 2$ не принадлежит ОДЗ.

Ответ: $x = 6$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить уравнения:

1) $\log_{0,2}(x^2 - 5x + 4) = \log_{0,2}(7x^2)$;
2) $\log_{5x-3}(\sqrt{x} + x) = \log_{5x-3}(2x)$;
3) $\ln(x^3 - 32x) = \ln(4x^2)$;
4) $\lg(17x - 2) + \lg(1x + 2) = \lg 21$;
5) $\log_{2\sqrt{3}}(9x^2 - 2) = \log_{2\sqrt{3}}(17x^2) - \log_{2\sqrt{3}} x$;
6) $\log_{729}(x-5)^6 = \log_3 x + 2$;
7) $\log_{x^2-4} x^2 = \log_{x^4-8x^2+16}(3x+10)^2$;
8) $\log_{\sqrt{x}}(5x) - \log_{\sqrt{x}}(25x^2) = \log_x(125x^3)$;
9) $\log_{\sqrt{3}}(3x - 2\sqrt{3x-1}) = 2\log_3(2\sqrt{3x-1} + 1)$.

Обратим внимание, что все логарифмы можно свести к одному и тому же логарифму с основанием $3x$, применяя свойство (6) из справочного материала.

После преобразований уравнение примет вид:

$$\frac{4\log_{3x}^2 x}{\log_{3x} x + 3} = \frac{2\log_{3x} x}{2\log_{3x} x + 1}.$$

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases} \log_{3x} x + 3 \neq 0, \\ 2\log_{3x} x + 1 \neq 0, \\ 3x > 0, \\ 3x \neq 1, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq (3x)^{-3}, \\ x \neq (3x)^{-\frac{1}{2}}, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{3}, \\ x \neq \frac{\sqrt[3]{9}}{3}, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(0;\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt[4]{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{3};\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3};+\infty\right).$$

Введём новую переменную:$\log_{3x} x = t$.

$$\frac{4t^2}{t+3} = \frac{2t}{2t+1}, t \neq -3, t \neq -\frac{1}{2};$$

$$4t^2(2t+1) = t(t+3);$$

$$8t^3 + 2t^2 - 6t = 0;$$

$$2t(4t^2 + t - 3) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{c} t = 0, \\ 4t^2 + t - 3 = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -1, \\ t = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Вернёмся кзамене:

$$\log_{3x} x = 0 \Rightarrow x = (3x)^0 = 1;$$

$$\log_{3x} x = -1 \Rightarrow x = (3x)^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3x} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\log_{3x} x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = (3x)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{(3x)^3} \Rightarrow x^4 = 27x^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 27. \end{array}\right.$$

Корни $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$и $x = 0$ не удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = 1,\ x_3 = 27$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решитьуравнения:

1) $2\,log_9^2\, x - log_9\, x = 1;$

2) $\log_5^2(2\mathrm{x}) -\ 20\log_5(2\mathrm{x}) = 21;$

3) $2\log_4^2 x - 5\log_4 x + 2 = 0;$

4) $lg^2\, x - 3\, lg\, x = lg^2 x - 4;$

5) $\frac{1}{5 - lg\, x} + \frac{2}{1 + lg\, x} = 1;$

6) $\sqrt{log_7\, x + 3} = log_7\, x + 1;$

7) $\log_x(6 - x) = 2;$

8) $3\log_8^2(3\mathrm{x} + 79) -\ 14\ \log_8(3\mathrm{x} + 79\ ) +\ 16 = 0;$

9) $3\log_8^2(5\mathrm{x} + 89) -\ 16\ \log_8(5\mathrm{x} + 89\ ) +\ 20 = 0;$

10) $lg^2\, x + lg\, x + 1 = \frac{7}{lg\frac{x}{10}};$

11) $lg(lg\, x) + lg(lg\, x^3 - 2) = 0;$

12) $\log_5^4 x - \log_5(\, 5x)^{64} = \log_5(\, 0{,}2)^{64}$.

Занятие 6. Метод логарифмирования обеих частей уравнения.

Теория:

Логарифмирование – процесс перехода от уравнения вида $f(x) = g(x)$к уравнению вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$.

Данный метод применяется в том случае, если в одной части уравнения переменная содержится как в показатели степени, так и в основании, а в другой части находится положительное число, т.е., $x^{\log_a f(x)} = a, a > 0$.

Пример. Решить уравнение$x^{\log_2 x} = 16$. Если уравнение имеет два корня, в ответе указать их произведение.

Решение: ОДЗ: $x > 0$.

Логарифмирование будем осуществлять по основанию 2:

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 16.$$

Применим свойство логарифма: $\log_a b^c = c \log_a b$.

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = 4;$$

$$\log_2^2 x = 4 \Rightarrow \log_2 x = \pm 2;$$

$$\log_2 x = 2; \qquad \log_2 x = -2;$$

$$x = 4; \qquad x = 0{,}25.$$

Оба значения принадлежат ОДЗ. Находим их произведение и записываем ответ.

Ответ:1

Упражнения для самостоятельного решения.

Решитьуравнения:

1) $x^{\lg x - 1} = 100;$

2) $x^{\log_3 x} = 9x;$

3) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x};$

4) $-0{,}01(x-3) = (x-3)^{\lg(x-3)};$

5) $2x^{\log_3 x^3 - \log_3 x} = 9;$

6) $x^{\ln xe + \ln x} = 20;$

7) $5^{x^2} = 2^{2\log_4 5};$

8) $x^{\log_{\sqrt{x}}(x^3-1)} = 125;$

9) $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0;$

10) $7^{\log_5 x} + x^{\log_5 7} = 28.$

Занятие 7. Решение однородных логарифмических уравнений II порядка.

Теория:

Уравнениевида $k_1 \log_h^2 f(x) + k_2 \log_h f(x) \cdot \log_h g(x) + +k_3 \log_h^2 g(x) = 0$ называется однородным логарифмическим уравнением второго порядка.

Алгоритм решения:

1. Найти ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. Разделить обе части уравнения на $\log_h^2 f(x)$ или $\log_h^2 g(x)$, причем $\log_h^2 f(x), \log_h^2 g(x) \neq 0$.

3. Производим замену $\frac{\log_h f(x)}{\log_h g(x)} = t$ или $\frac{\log_h g(x)}{\log_h f(x)} = t$. Получаем квадратное уравнение относительно переменной t.

4. Решить квадратное уравнение, вернуться к замене. Применяя потенцирование, найти корни уравнения.

5. Сравнить полученные корни с ОДЗ и записать ответ.

Пример:

а.Решить уравнение $\log_{0,4}^2(x^2 - 4x + 3) - 2\log_{0,4}(x^2 - 4x + +3)\log_{0,4}(x-1) + \log_{0,4}^2(x-1) = 0$.

б.Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 8; \log_3 82]$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x - 1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \epsilon (-\infty; 1) \cup (3; +\infty), \\ x \epsilon (1; +\infty), \end{cases} \Rightarrow x \epsilon (3; +\infty).$

$$\log_{0,4}^2(x^2 - 4x + 3) - 2\log_{0,4}(x^2 - 4x + 3) \cdot \log_{0,4}(x-1)$$
$$+ +\log_{0,4}^2(x-1) = 0 \; |: \log_{0,4}^2(x-1) \neq 0;$$
$$\frac{\log_{0,4}^2(x^2 - 4x + 3)}{\log_{0,4}^2(x-1)} - 2\frac{\log_{0,4}(x^2 - 4x + 3)}{\log_{0,4}(x-1)} + 1 = 0;$$

Пусть $\frac{\log_{0,4}(x^2-4x+3)}{\log_{0,4}(x-1)} = t$, тогда:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Вернемся к замене: $\frac{\log_{0,4}(x^2-4x+3)}{\log_{0,4}(x-1)} = 1;$

$$\log_{0,4}(x^2 - 4x + 3) = \log_{0,4}(x - 1);$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1;$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = 4;$$

б. Заметим, что $1 = \log_3 3 < \log_3 8 < 4 = \log_3 81 < \log_3 82$, следовательно, $x = 4 \epsilon [\log_3 8; \log_3 82]$.

Ответ: а) $1; 4$б) 4.

Упражнения для самостоятельного решения.

1. а. Решить уравнение$3\log^2_{\sqrt{3}}(2x + 1) - 4\log_{\sqrt{3}}(x + 1)\log_{\sqrt{3}}(2x + +1) + \log^2_{\sqrt{3}}(x + 1) = 0$.

   б.Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{-5-\sqrt{3}}{2}; \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$.

2. а. Решить уравнение$\lg^2(x^2) - \lg(x^2 - 2)\lg(x^2) - \lg^2(x^2 - -2) = 0$.

   б. Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3,5]$.

Занятие 8. Функционально-графический метод.

Теория:

При решении некоторых логарифмических уравнений целесообразно пользоваться свойствами функции или графическими иллюстрациями.

Если в уравнении $f(x) = g(x)$на промежутке Z функция $y = f(x)$ возрастает, $y = f(x)$ убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$имеет не более одного корня.

Если в уравнении $f(x) = g(x)$на промежутке Zнаибольшее значение функции $y = f(x)$ равно С и наименьшее значение другой функции $y = f(x)$ равно С, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = C, \\ g(x) = C. \end{cases}$

*Пример1.*Решить уравнение $\log_2 \sqrt{x} = (x-3)^2$. В ответе указать корень, принадлежащийотрезку $[3; 5]$.

Решение:

Изобразим графики функций $y = \log_2 \sqrt{x}$ и $y = (x-3)^2$ (рисунок 8).

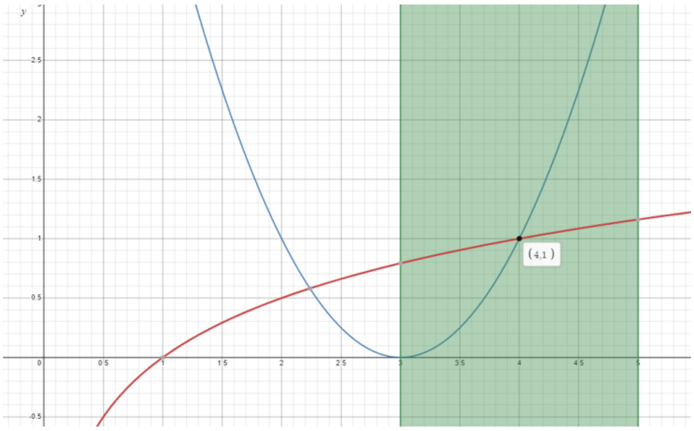

Рисунок 8 – Графическое решение уравнения

Из рисунка видно, что графики функций пересекаются в двух точках, при этом отрезку $[3; 5]$ принадлежит только точка (4;1).

Ответ: 4.

*Пример 2.*Решить уравнение $\log_{0,5}(x - 0,5) = x^2$.

Решение: Функция $y = \log_{0,5}(x - 0,5)$убывает на $(0,5; +\infty)$. Функция $y = x^2$возрастает на $(0,5; +\infty)$. Используя свойство монотонности функции, определяем, что уравнение имеет один корень, который необходимо найти подбором.

При $x = 1$получаем:

$$\log_{0,5}(0,5) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Решить уравнение $\log_3 x = |2 - x|$. В ответете указать корень,

принадлежащийотрезку $[2;4]$.

2. Решить уравнение $\log_3 5x = \sqrt{x-0{,}2}$. В ответе указать корень, принадлежащийотрезку $[12;17]$.

3. Найдите количество корней уравнения $\log_7((4x-1)^2+21) =$ $= 2-\sin^2(\pi x)$.

Занятие 9. Простейшие логарифмические неравенства.

Неравенство вида $\log_h f(x) \vee b$ или $\log_h f(x) \vee \log_h g(x)$, где $\vee$– один из знаков сравнения $\{\le, <, >, \ge\}$,называется простейшим логарифмическим неравенством.

Алгоритм решения:

1. Найти ОДЗ:$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. Определить знак неравенства:

$$\log_h f(x) > \log_h g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) \text{ при } h > 1;$$

$$\log_h f(x) > \log_h g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) \text{ при} 0 < h < 1.$$

3. Решить неравенство (по определению логарифма, метод потенцирования).

4. Пересекаем ОДЗ с решением неравенства.

Пример:

Решить неравенство$\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right)+\log_{0{,}25}\left(5-\frac{x}{4}\right) \ge 1$.

ОДЗ:$\begin{cases} 20-\frac{9}{x} > 0, \\ 5-\frac{x}{4} > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{9}{20};+\infty\right), \\ x < 20, \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;0) \cup$

$$\left(\frac{9}{20};20\right).$$

Упростим данное неравенство, пользуясь свойствами логарифма.

$$\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right)+\log_{0{,}25}\left(5-\frac{x}{4}\right) \ge 1;$$

$$\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right)-\log_4\left(5-\frac{x}{4}\right) \ge \log_4 4;$$

$$\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right) \geq \log_4\left(5-\frac{x}{4}\right)+\log_4 4;$$

$$\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right) \geq \log_4 4\left(5-\frac{x}{4}\right);$$

$$20-\frac{9}{x} \geq 20-x;$$

$$x-\frac{9}{x} \geq 0;$$

$$\frac{x^2-9}{x} \geq 0;$$

$$(x-3)(x+3)=0,\, x \neq 0;$$

$$x = \pm 3.$$

Отмечаем точки на числовой прямой и пересекаем решение с ОДЗ (рисунок 9).

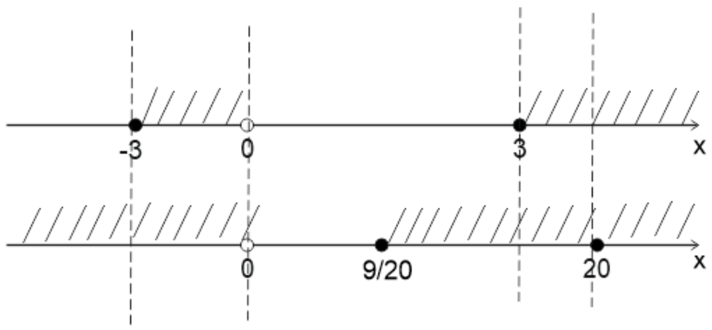

Рисунок 9 – Решение неравенства

Ответ: $x \epsilon (-3; 0) \cup (3; 20)$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить неравенства:

1) $\log_{\sqrt{2}}(x-5) \geq 2$;

2) $\log_{0,5}(x^2-25) < 1$;

3) $\log_{0,2}\left(\sqrt{x}\right)+\log_5(x)^2 < 3$;

4) $\log_2(x^2-7x+5) < \log_2(2x-3)$;

5) $\log_{0,25}\left(\sqrt{x}-4\right) > \log_{0,25}(8-x)$;

6) $\log_3(x^2-2x-3) \leq 2+\log_3\left(\frac{x+2}{x-6}\right)$;

7) $\lg(x^3-8)+\lg x > \lg 8x$;

8) $\log_8\left(16-\frac{3}{x}\right)+\log_{0,125}\left(5-\frac{x}{2}\right)\geq 1.$

Занятие 10. Основные методы решения логарифмических неравенств.

Для решения логарифмических неравенств применимы те же методы, что и для решения логарифмических уравнений.

Остановимся на методе рационализации, о котором мы не говорили при решении уравнений.

Метод рационализации – переход от неравенства со сложными логарифмическими, показательными и т.п. выражениями, к рациональному неравенству, равносильное данному.

Метод рационализации имеет смысл применять для неравенств вида $\log_{h(x)} f(x) \vee \log_{h(x)} g(x)$,где $h(x), f(x), g(x)$–функции, $\vee$– один из знаков сравнения $\{\leq, <, >, \geq\}$.

Суть метода сводится к замене приведенного логарифмического неравенства на неравенство вида$(h(x)-1)(f(x)-g(x))\vee 0$, которое, нужно решать на ОДЗ исходного неравенства.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0, \\ h(x)\neq 1. \end{cases}$$

Обратите внимание: замена неравенства происходит с сохранением знака неравенства. За возрастание/убывание и, соответственно, за знак неравенства теперь отвечает множитель$(h(x)-1)$.

Пример 1:

Решить неравенство $\log_{x^2-1}\sqrt{3-x}\leq\log_{x^2-1}\sqrt{3+x}.$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3-x>0, \\ 3+x>0, \\ x^2-1>0, \\ x^2-1\neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3, \\ x>-3, \\ x\epsilon(-\infty;-1)\cup(1;+\infty), \\ x\neq\pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отметим ОДЗ на числовой прямой (рисунок 10).

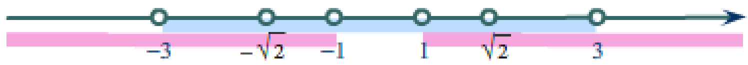

Рисунок 10 – ОДЗ для неравенства

Применим метод рационализации:

$$\log_{x^2-1}\sqrt{3-x} \le \log_{x^2-1}\sqrt{3+x} \Leftrightarrow (x^2-1-1)(\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}) \le 0.$$

Так как квадратный корень являетсяфункцией монотонно возрастающей на всей области определения, то разность$\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}$можно заменить на разность аргументов.

$$(x^2-1-1)\big((3-x)-(x+3)\big) \le 0.$$

Для решения данного неравенства применяем метод интервалов на ОДЗ (рисунок 11).

$$(x^2-2)(-2x) \le 0 \Rightarrow \big(x-\sqrt{2}\big)\big(x+\sqrt{2}\big)(-2x) \le 0.$$

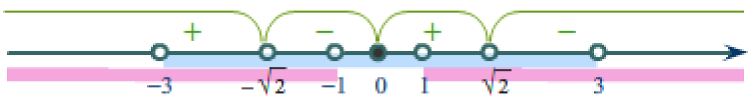

Рисунок 11 – Решение неравенства методом интервалов

В ответ включаем пересечение множеств ОДЗ и отрицательных интервалов.

Ответ: $x \in (-\sqrt{2};-1) \cup (\sqrt{2};3)$.

Пример 2:

Решите неравенство$x^2\log_{512}(9-x) \le \log_2(x^2-18x+81)$.

Решение:

Преобразуем данное неравенство:

$$x^2\log_{2^9}(9-x) \le \log_2(9-x)^2.$$

ОДЗ:$9-x>0 \Rightarrow x<9$.

Применим свойство (6) степени логарифма: $\frac{x^2}{9}\log_2(9-x)-$ $-2\log_2|9-x| \le 0$.

Так как $x<9$,то $|9-x|=9-x$.

$$\frac{x^2}{9}\log_2(9-x) - 2\log_2(9-x) \leq 0;$$

$$\log_2(9-x)\left(\frac{x^2}{9} - 2\right) \leq 0$$

$\log_2(9-x) = 0;$ $\quad\quad\frac{x^2-18}{9} = 0,$

$9 - x = 2^0;$ $\quad\quad x^2 = 18,$

$x = 8,$ $\quad\quad x = \pm 3\sqrt{2}.$

Отметим на числовой прямой полученные значения и ОДЗ. Определим знаки в промежутках и выберем те, где x принимает отрицательные значения (рисунок 12).

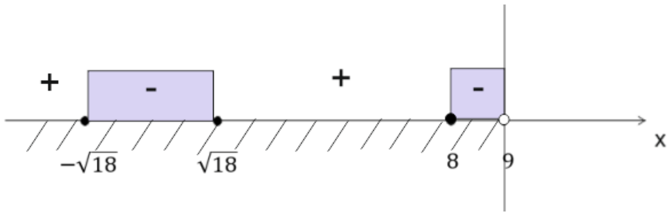

Рисунок 12 – Решение неравенства

Ответ: $x\epsilon\left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right] \cup [8; 9)$.

Также при решении неравенства нужно соблюдать правила преобразования [20]:

1. Любой член неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую, меняя при этом знак на противоположный.

2. Обе части неравенства можно умножить/разделить на одно и то же положительное число, при этом получится неравенство, равносильное данному.

3. Обе части неравенства можно умножить/разделить на одно и то же отрицательное число, меняя знак неравенства на противоположный.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить неравенства методом замены переменной:

1) $-\log_{0,2}^2 \log_2 x - \log_{0,2}\log_2^2 \leq 2;$

2) $\log_{\sqrt{5}}^2 x + 3 > 4\log_{\sqrt{5}} x$;

3) $\log_2^2(x^4) - 2\log_{0,5}(x^2) \leq 5$;

4) $\frac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5}2}{\log_{0,125x}8} \leq 1$;

Решить неравенства методоминтервалов:

5) $\log_{0,5}\left(\frac{x}{x+4,2}\right) + \log_{0,5}(x+4,2)^2 \geq 1$;

6) $\log_2\left(\frac{x-1}{x+1,3}\right) + 2\log_2(x+1,3)^2 \geq 2$;

7) $\log_2(x^2 - 7x + 6) \leq 1 + \log_2 x$;

8) $\log_2^2(-x^2 - 5x + 13) + 7\log_{0,5}(13 - 5x - x^2) + 21 > 1$;

Решить неравенства методомлогарифмирования:

9) $2^{\lg(x^2-4)} \geq (x+2)^{\lg 2}$;

10) $x^{\log_4 x} + 10x^{-\log_4 x} < 11$;

11) $3x^{\log_2 x} + 2x^{-\log_2 x} < 7$;

12) $x^{\frac{\lg x - 1}{2}} > 10^{\lg x + 2}$;

Решить неравенства методомрационализации:

13) $\frac{\lg(5x^2-2x-1)}{\lg(3x^2+5x-1)^3} > \frac{\log_{3^3} 5}{\log_3 5}$;

14) $\log_{|x+3|}(-14x^2 + 8x + 6) \leq 2$;

15) $\log_{\frac{36-x^2}{12}}\left(\frac{x^2-7x+32}{12}\right) > 1$;

16) $\left|\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right| \cdot \log_{3x}(5x^2) > \left|\log_x\left(\frac{x}{3}\right)\right|$.

Занятие 11. Решение систем логарифмических уравнений.

Виды систем логарифмических уравнений:

1. Системы, в которых оба уравнения сводятся к простейшим уравнениям.
2. Системы, которые сводятся к типовым уравнениям с помощью замены.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_2(x+y)=2,\\ \log_3(xy)=1.\end{cases}$

Оба уравнения в системе являются простейшими, поэтому применяя определение логарифма, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x+y=2^2,\\ xy=3^1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=4,\\ xy=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-y,\\ (4-y)y=3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-y,\\ -y^2+4y-3=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4-y,\\ \left[\begin{array}{l}y_1=1,\\ y_2=3,\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=3,\\ y_2=1,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y_1=1,\\ y_2=3.\end{array}\right.\end{cases}.$$

Ответ: (3;1), (1;3).

*Пример 2.*Решить систему уравнений $\begin{cases}\log_2 x+2\log_4 y=7,\\ 2\log_2 x-6\log_4 y=9.\end{cases}$

Обозначим $\log_2 x=k$, $\log_4 y=m$. Система логарифмических уравнений сведется к системе линейных уравнений.

$$\begin{cases}k+2m=7,\\ 2k-6m=9,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=7-2m,\\ 14-4m-6m=9,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=7-2m,\\ 10m=5,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=7-2m,\\ m=0{,}5,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=6,\\ m=0{,}5.\end{cases}$$

Вернемся к замене:

$$\begin{cases}\log_2 x=6,\\ \log_4 y=0{,}5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=64,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: $(64;2)$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить системы логарифмических уравнений:

1. $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(2x+6y)=6,\\ \log_4(x^2y^2)=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\lg x-3\ln y+4=0,\\ \lg^2 x+2\ln y=2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\lg x+\lg y=2\lg 2+4,\\ \lg x-\lg y=2\lg 2-2.\end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log_x\left(\frac{y}{9}\right) + \frac{3x}{y(x+9)} = 0, \\ (y-2)^{-1} = (y-2)^{-\log_9(x+8)}. \end{cases}$

Занятие 12. Решение систем логарифмических неравенств.

Для того, чтобы найти решение системы неравенств, нужно решить каждое из них по отдельности, а затем найти пересечение полученных множеств.

Пример:

Решите систему неравенств $\begin{cases} \lg^2(10x) - 2\lg(10x) \geq 5, \\ \log_3(x-3) + \log_3(x+5) \geq 2. \end{cases}$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 10x > 0, \\ x - 3 > 0, \\ x + 5 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 3, \\ x > -5, \end{cases} \Rightarrow x > 3.$$

Решим каждое неравенство по отдельности.

$$1)\ \lg^2(10x) - 2\lg(10x) \geq 5;$$

Пусть $\lg(10x) = t$, тогда:

$$t^2 - 2t - 5 \geq 0;$$

$$t^2 - 2t - 5 = 0;$$

$$t_1 = -3;\ t_2 = 5;$$

Решение данного неравенства представлено на рисунке 13.

Рисунок 13 – Решение неравенства

Вернемся к замене:

$$\lg(10x) \leq -3 \Rightarrow x \leq 10^{-4};$$

$$\lg(10x) \geq 5 \Rightarrow x \geq 10^4;$$

$$2)\ \log_3(x-3) + \log_3(x+5) \geq 2\,;$$

$$\log_3(x-3)(x+5) \geq \log_3 9\,;$$

$$(x-3)(x+5) \geq 9;$$

$$x^2+2x-24 \geq 0;$$

$$x^2+2x-24=0;$$

$$x_1=-6;\ x_1=4;$$

$$x \leq -6; x \geq 4.$$

Отметим все точки на числовых прямых и найдем пересечения (рисунок 14).

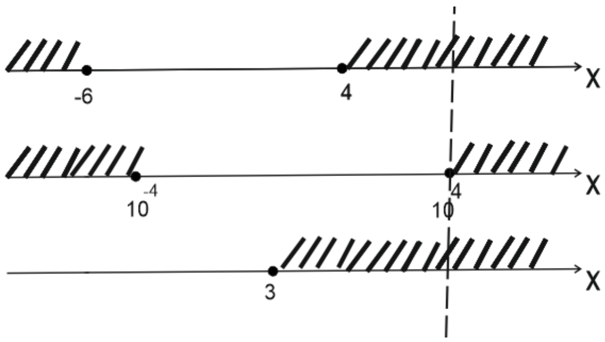

Рисунок 14 – Решение системы неравенств

Ответ: $x\epsilon(10^4;+\infty)$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решить системы логарифмических неравенств:

1. $\begin{cases} 1+\log_2(5-x) \leq \log_2(13-x^2), \\ \frac{x^2-5x+3}{x+3} \leq x-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^3-x-2) \leq 1+\log_3\frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \lg\lg(x-5) > 1, \\ \log_{x-8}\left(\frac{7-x}{x+1}\right) \leq 1-\log_{x-8}\frac{x+1}{x-7}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(1+(x^2-3x+2)^2) < 0, \\ \lg^2\sqrt{x}-3\lg x-1 \geq 0\,. \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении можно сказать, что элективные курсы в старших классах являются одним из вариантов подготовки к экзаменам. Правильно и грамотно разработанный курс способен не только научить решать тот или иной вид заданий, но и повысить интерес к науке в целом. В качестве темы для курса были выбраны логарифмические уравнения и неравенства. Выбор обусловлен тем, что данная тема является довольно обширной и интересной. При решении таких уравнений и неравенств существует большое количество ограничений и «подводных камней». Отметим также, что при решении данной темы используется новое для учащихся действие – логарифмирование, с которым, в отличие от остальных арифметических действий, до старшей школы они знакомы не были.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы все поставленные задачи были выполнены.

В первой главе рассмотрены методические особенности изучения логарифмических уравнений, неравенств и логарифма в целом. Проведен Анализ учебников по алгебре и началам анализа 10-11 классов авторов С.М. Никольского, Ш.А. Алимова и А.Г. Мерзляка, который показал небольшое содержание заданий повышенной сложности.

Во второй главе нами были рассмотрены различные виды логарифмических уравнений и неравенств и методы их решения. Приведены примеры для каждого выделенного вида.

Третья глава была посвящена разработке элективного курса по теме: «Логарифмические уравнения, неравенства и их системы».

Прежде, чем приступить к созданию курса, были проанализированы реальные заданий, встречающиеся на экзамене и выделены возможные ошибки, которые могут совершать учащиеся при их решении.

Далее представлена программа элективного курса, где дается обоснование его актуальности, раскрываются задачи и цели, решаемые с его помощью, а также тематическое планирование.

В конце работы раскрыто содержание курса. Оно состоит из занятий, в каждом из которых представлена краткая теория, примеры решения заданий и большое количество разнообразных примеров, ранжированных по уровню сложности.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что поставленная цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: учебникдля общеобразовательных организаций / Ш. А. Алимов, Ю. В. Сидоров, Ю. М. Колягин[и др.]. – Москва: Просвещение, 2015. – 384 с.
2. **Алтынов, П.И**. Учебный справочник школьника / П.И. Алтынов, С.Г. Антоненко. – Москва: Дрофа, 2004. – 164 с.
3. **Байдак, В.А.** Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография / В. А. Байдак. — 3-е изд.,, стереотип. — Москва: ФЛИНТА, 2016. – 264 с.
4. **Бочкарева, В.Д.** Сборник задач по математике для поступающих в вузы / В.Д. Бочкарева. – Москва: ОНИКС-ЛИТ, 2013. – 141 с.
5. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Методические рекомендации для учителя (углублённый уровень) / М.Л. Галицкий [и др.] – Москва: Изд-во «Мнемозина», 2015.
6. **Кирсанова, Л.В.** Методические особенности решения показательных и логарифмических неравенств в едином государственном экзамене по математике профильного уровня / Л.В. Кирсанова // Сборник трудов по материалам IV Международного конкурса научно-исследовательских работ. – 2021. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46159444 (дата обращения 29.12.2021)
7. **Мерзляк, А. Г**.Алгебра и начала анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных организаций /А. Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. – Москва: Просвещение, 2017. – 312 с.
8. **Никольский, С.М.** Алгебра и начала анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных организаций /С.М. Никольский, М.К Потапов, Н.Н. Решетников.– Москва: Просвещение, 2010. – 430 с.
9. **Сканави, М.И.** Логарифмические уравнения и неравенства.

Полный сборник решений задач для поступающих в вузы / М.И. Сканави. – Москва: Мир и Образование, 2015. – 912 с.

10. **Севрюков, П. Ф**. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие/П.Ф.Севрюков, А. Н. Смоляков.– Москва: Народное образование, 2018. – 352 с.

11. **Удалова, Н. Н.**Наглядный справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ / Н.Н. Удалова. – Москва: Эксмо, 2020. – 304с.

12. Федеральный институт педагогических измерений : официальный сайт. – Москва. – URL: http://fipi.ru/ (дата обращения: 15.05.2022).

13. **Шишкина, Л.В.** Научно – методические основы изучения темы «Решение показательных и логарифмических уравнений» в курсе математики/ Л.В. Шишкина // сборник статей XIII Международного научно-исследовательского конкурса. – 2020. - URL:https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42785126 (дата обращения 29.12.2021)

14. **Яковенко, И.В.** Особенности методикипостроения системы задач для изучения темы «Логарифмы. Логарифмические уравнения» / И.В. Яковенко, О.А. Лисаченко // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. – 2017. - URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29101862 (дата обращения 29.12.2021).

15.Решу ЕГЭ: официальный сайт. – Москва, 2016. – URL: https://oge.sdamgia.ru (дата обращения: 15.05.2022). – Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Контрольные работы по разделам курса

Контрольная работа по теме: «Логарифмические уравнения».

Вариант 1.

1. Решите уравнение $\log_2(x+2)^2 + \log_2(x+10)^2 = 4\log_2 3$.
2. Решите уравнение$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x^2} = 6$.
3. Решите уравнение$\sqrt{\log_x \sqrt{5x} =} - \log_x 5$.
4. а.Решите уравнение$16\log_9^2 x + 4\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$.

   б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

5. Решите уравнение$\frac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 =$

$= -6\log_3^2(5x-6)^3 \frac{1}{x}$.

6. а.Решите уравнение$(x^2+2x-1)(\log_2(x^2-3) + \log_{0,5}(\sqrt{3} -$

$-x)) = 0$

   б.Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$.

Вариант 2.

1. Решите уравнение$\lg^2(8x-9) = \lg^2(6x-4)$.
2. Решите уравнение$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.
3. Решите уравнение$\sqrt{\log_3 x^9 =} - 4\log_9 \sqrt{3x} = 1$.
4. а.Решите уравнение$36\log_{0,125}^2 x + 4\log_{0,25} x - 3 = 0$.

   б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

5. Решите уравнение$\frac{3}{2}\log_5^2(2x-3)^3 + 12\log_5^2 \sqrt{x} = \log_5(2x -$

$-3)^3 - \log_3 x^3$.

6. а.Решите уравнение$2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$.

   б.Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие $[4; 6]$.

Контрольная работа по теме: «Логарифмические неравенства»

Вариант 1.

1. Решите неравенство $3^{\log_2 x^2} + 2|x|^{\log_2 9} \leq 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$.

2. Решите неравенство$\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq$ $\geq \log_7\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)$.

3. Решите неравенство$\log_2(x^2 - 4) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2$.

4. Решите неравенство $\frac{\log_{11}(3x+2\sqrt{x+1}+2)}{\log_{11}(5x+3\sqrt{x+1}+3)^3} \geq \frac{\log_{27} 11}{\log_3 11}$.

Вариант 2.

1. Решите неравенство $7^{\log_5 x^2} + 6|x|^{\log_5 49} \leq 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{0,2}(3x+4)}$.

2. Решите неравенство$\log_3(x^2 + 2) - \log_3(x^2 - x + 12) \geq$ $\geq \log_3\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

3. Решите неравенство$\log_3(x^2 - 9) - 3\log_3\frac{x+3}{x-3} > 2$.

4. Решите неравенство$\frac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5} \geq \frac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Итоговая контрольная работа

Вариант 1.

1. Решите уравнение $\log_2 \log_3(x^2-16) - \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2-16} = 2.$
2. Решите уравнение$1+\log_2(9x^2+5) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14.}$
3. а.Решите уравнение$\log_2(x^2-5)\log_3^2(7-x) + 3\log_2(x^2-5) -$
$$-2\log_3^2(7-x) - 6 = 0.$$
   б.Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2\frac{1}{7};\log_2 9\right]$.
4. Решите неравенство$\log_3(x+5) \geq \log_{9-x}(9-x)$.
5. Решите неравенство$\log_4\left(20-\frac{9}{x}\right) + \log_{\frac{1}{4}}\left(5x-\frac{x}{4}\right) \geq 1.$
6. Решите неравенство $3^{\log_2 x^2} + 2|x|^{\log_2 9} \leq 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$

Вариант 2.

1. Решите уравнение $\log_2 x \log_3 x = \log_3 x^3 + \log_2 x^2 - 6.$
2. Решите уравнение$1+\log_3(x^4+25) = \log_{\sqrt{3}}\sqrt{30x^2+12.}$
3. а.Решите уравнение$\log_2(x^2-4)\cdot\log_3^2(5-x) + 3\log_2(x^2-4) -$
$$-2\log_3^2(5-x) - 2 = 0.$$
   б.Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2\frac{1}{5};\log_2 8\right]$.
4. Решите неравенство$\log_4(x+8) \geq \log_{3-x}(3-x)$.
5. Решите неравенство $\log_3\left(15-\frac{4}{x}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(5-\frac{x}{3}\right) \geq 1.$
6. Решите неравенство $7^{\log_5 x^2} + 6|x|^{\log_5 49} \leq 7\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{0,2}(3x+4)}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Справочный материал к курсу «Логарифмические уравнения и неравенства»

Определение.

Пусть $a > 0$,$b > 0$,$a \neq 1$.Тогда $\log_a b$ есть такое число с, что $\mathrm{a}^c = b$.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Свойства логарифмов:

1. $\log_a 1 = 0,$ где $a > 0, a \neq 1;$
2. $\log_a a = 1, a > 0,$ где $a \neq 1;$
3. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a,$ где c , $a, b, c > 0, a \neq 1;$
4. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a,$ где c , $a, b, c > 0, a \neq 1;$
5. $\log_a(b^x) = x\log_a,$ где $b, a, b > 0, a \neq 1;$
6. $\log_{a^x}(b) = \frac{1}{x}\log_a b,$ где $a, b > 0, a \neq 1, x \neq 1;$
7. $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b,$ где $a, b > 0, a \neq 1.$

Формулы перехода к новому основанию:

8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$ где$a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1;$
9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$ где $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1.$