МВ и ССО РСФСР

УРАЛЬСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

Математические записки

ТОМ ВОСЬМОЙ

Тетрадь 3

Свердловск
1972

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ УрГУ, ТОМ 8, ТЕТРАДЬ 3 (1972)

В.М.Ситников, А.Д.Устюжанинов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Две неинвариантные подгруппы X и Y в группе G назовем <u>связанными</u>, если существует последовательность неинвариантных подгрупп: $X_0 = X, X_1, \dots, X_n, X_{n+1} = Y$ такая, что $X_i \cap X_j \neq 1$ для $i \neq j$. В противном случае X и Y будем называть <u>несвязанными</u> в G. Число n назовем <u>длиной</u> этой последовательности. В случае, когда для неинвариантных подгрупп X и Y существует указанная последовательность, под <u>расстоянием</u> $\rho = \rho(X,Y)$ <u>между подгруппами</u> X и Y будем понимать минимальную длину таких последовательностей. Условие $\rho(X,Y) = 0$ для любой пары неинвариантных подгрупп эквивалентно условию: пересечение всех неинвариантных подгрупп нетривиально. Конечные подгруппы с этим условием были описаны в работе [1]. Если для неинвариантных подгрупп X и Y не существует определенной выше последовательности, то по определению полагаем $\rho(X,Y) = \infty$. Будем говорить, что $\rho(G) = \infty$, если в группе G существует такая пара неинвариантных подгрупп.

В данной работе описаны непростые конечные группы с парой несвязанных неинвариантных подгрупп.

Обозначения, встречающиеся в работе, можно найти в [4].

Q – группа кватернионов порядка 8,

$\Gamma_0 = Q \times \langle z \rangle$, $|z| = 2^m$, $m \geq 1$;

$\Gamma_1 = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $|[a,b]| = p$, $m \geq 1$; при $p = 2$ $|\Gamma_1| \geq 8$;

$\Gamma_2 = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle$, $|a| = p^m$, $|b| = |c| = p$, $[b,c] = a^{p^{m-1}}$, $[a,c] = [a,b] = 1$;

$\Gamma_3 = Q \cdot D$, $Q \cap D = Z(D) = Z(\Gamma_3)$, $Q_3 \leq C(D_3)$;

$\Gamma_4 = \langle a,b,c \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = a^2 b^2$, $[a,b] = 1$, $[b,c] = a^2$, $[a,c] = a^2$;

$\Gamma_5 = \langle a,b,c,d \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $c^2 = b^2$, $d^2 = a^2 b^2$, $[a,b] = [c,d] = 1$, $[a,c] = a^2$,

$[a,d] = [b,c] = a^2 b^2$, $[b,d] = b^2$;

$\Gamma_6 = \langle a,b \rangle$, $|a| = 8$, $a^4 = b^4$, $[a,b] = a^{-2}$;

$\Gamma_7 = \langle a,b,c \rangle$ $|a| = 3$, $|b| = 9$, $b^6 = c^3$ $[a,c] = c^3$, $[b,c] = a$, $[a,b] = 1$;

$R_0 = F \times H$, $F \simeq H \simeq Q$;

$R_1 = F \lambda H$, $F \simeq H \simeq Q$, $F = \langle a,b \rangle$, $H = \langle c,d \rangle$, $[a,c] = a^2$, $[a,c] = [b,c] = [d,d] = 1$;

$R_2 = \langle c \rangle \lambda Q$, $Q = \langle a,b \rangle$, $|c| = 2^m$, $m > 1$, $|[c,a]| = 2$, $[c,b] = 1$;

$R_3 = \langle a,b \rangle$, $\langle a,b^2 \rangle \simeq Q$, $[a,b] = c$; $[c,b] = b^4 = a^2$, $|c| = 2$;

$R_4 = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $|c| = p^m$, $|b| = |a| = p$, $[c,b] = a$, $[a,b] = a^{p^{m-1}}$;

$R_5 = (Q \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $Q = \langle c,d \rangle$, $|a| = |b| = 2$, $[d,b] = d^2$, $[c,b] = a$; $[a,b] = c^2$;

$R_6 = (Q \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle$, $Q = \langle c,d \rangle$, $|a| = |b| = 2$, $[a,b] = c^2$, $[d,b] = 1$, $[c,b] = a$.

τ, τ_i, σ, σ_i – всюду элементы порядка p и τ, $\tau_i \in Z(G)$. Все рассматриваемые группы – конечны.

Приведем конечные результаты, необходимые в работе.

<u>Р.I (2)</u>. Если в p-группе G существует такая инвариантная неабелева подгруппа H с двумя образующими, что $|[G:H]| = p$, то $G = H \cdot C_G(H)$.

<u>Р.2 ([3])</u>. Конечная 2-группа G, класс нильпотентности которой ≤ 2, тогда и только тогда имеет точно три инволюции, когда G – группа одного из следующих видов:

I) G – нециклическая метациклическая группа отличная от групп Q и D :

2) $G = F \lambda H$, где F, H циклические 2-группы или изоморфны группе Q, при этом инволюция из H центральна;

3) $G = \Gamma_4$, $G = \Gamma_5$.

<u>Р.3 ([4])</u>. В p-группе G из $\langle * \rangle$ тогда и только тогда существует пара несвязанных неинвариантных подгрупп, когда G группа одного из типов Γ_i, $i = 1,2,\dots,7$. (Определение класса $\langle * \rangle$ см. в [4]).

§ I. <u>p-группы с парой несвязанных неинвариантных подгрупп</u>.

Все рассматриваемые в этом параграфе группы предполагаются p-группами.

Т е о р е м а I. В конечной p-группе G тогда и толь-

Теперь $|\Omega_1(C_D(D))| = p$ (если $\sigma \in C_D(D)\setminus(D\cap C_D(D)$, то либо $\{a\}\times\{c\}$, либо $\{b\}\times\{c\} \triangleleft G$, что противоречит утверждению I)). Значит, $G = D\cdot\{z\}$ и это известный тип, либо $G = DQ_n$. Так как $Q_n = \{c, d\}$, $|c| = 2^{n-1}$, $|d| = 4$, $\{d\} \in C_G(D)$ и $\{d\}\times\{a\}$ или $\{d\}\times\{b\} \triangleleft G$, то есть $\{d\} \triangleleft Q_n$, $n = 3$. Таким образом, $G = Q\cdot D$, и полученное противоречие с выбором группы G доказывает а).

б) $\Omega_1(C_G(V_1)) = V_{p^2}$ $C = C_G(V_1)$. Допустим, что существует $\sigma \in C\setminus V_1$. Тогда $\{a\}\times\{\tau\} \ntriangleleft G$, в силу утверждения I), и поэтому необходимо $\{\tau\}\times\{\sigma\} \triangleleft G$, $(\{\tau\}\times\{\sigma\})\lambda\{b\} \triangleleft G$ и $\{\tau\}\times\{b\} = (\{\tau\}\times\{\sigma\})\lambda\{b\}\cap\{\tau, a, b\} \triangleleft G$, что противоречит утверждению а). Поэтому утверждение б) доказано. Значит, $C_G(V)$ или из $\langle * \rangle$ или, в силу Р.2, вида: $\{c\}\times\{a\}$ или $Q\times\{a\}$, то есть мы получим уже рассматриваемые в П типы группы G, что противоречиво. Итак, утверждение 2) доказано. Теперь очевидно:

3) $\Omega_1(C_G(V_1)) = V_{p^2}$ и класс нильпотентности $c \leq 2$. Следовательно, из описания класса $\langle * \rangle$ или по Р.2 и, в силу того, что $\{a\}$ и $\{b\}$ максимальные циклические в $C_G(V_1)$ либо I) $\{c\}\times\{b\}$, либо 2) $Q\times\{b\}$, то есть получили снова изученные типы групп.

Так как во всех трех возможных случаях I, П, Ш получилось противоречие с выбором группы G, то теорема I доказана полностью.

§ 2. Непримарные группы с парой несвязанных неинвариантных подгрупп.

Т е о р е м а 2. В конечной непримарной непростой группе G тогда и только тогда существует пара несвязанных неинвариантных подгрупп, когда G одного из следующих типов:

(I) $G = V_{p^k}\lambda\{b\}$ – группа Фробениуса, $|b| = n$, $(n,p) = 1$ если $k > 1$, то $(p^\varepsilon - 1, n) = 1$ для $1 \leq \varepsilon < k$;

(2) $G = (\{a_1\}\times\{a_2\})\lambda\{b\}$, $|a_1| = |a_2| = p$, $|b| = n$ $(p,n) = 1$, $a_1^b = a_1^{\varepsilon^{\mu_1}}$, $a_2^b = a_2^{\varepsilon^{\mu_2}}$, где ε – первообразный корень по $\bmod p$. Если $d = (\mu_1 - \mu_2, p-1)$, то $n = \frac{p-1}{d}$

(3) $G = \{a_1\}\lambda(\{a_2\}\lambda\{b\})$, $|a_1| = p^\alpha$, $|a_2| = p$, $\{a_2\}\lambda\{b\}$ – группа Фробениуса.

Л е м м а I. Пусть G конечная группа с тривиальным разрешимым радикалом. Тогда следующие условия эквивалентны:

(I) $\rho(G) = \infty$

(2) $\pi(G)$ разбивается на нетривиальные подмножества π, π' такие, что $\pi\cap\pi' = \phi$ и каждая собственная подгруппа либо π – группа, либо π' – группа.

Доказательство. Пусть $\rho(G) = \infty$. Каждые две инволюции порождают разрешимую неинвариантную подгруппу в G. Поэтому все неинвариантные подгруппы четного порядка связаны между собой цепочкой неинвариантных подгрупп. Пусть τ некоторая инволюция из G. Разобьем множество подгрупп из G на два класса: $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1 = \{A/A \leq G, \rho(A,\{\tau\}) < \infty\}$,

$$\mathfrak{M}_2 = \{A/A = G, \rho(A,\{\tau\}) = \infty\}.$$

По предположению, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ непустые множества. Обозначим через π и π' множество простых делителей порядков подгрупп из $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ соответственно. Теперь достаточно показать, что $\pi\cap\pi' = \phi$. Пусть $p \in \pi\cap\pi'$. Тогда соответственно существуют две подгруппы $\{x\}$ и $\{y\}$ порядка p из $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ такие, что $\rho(\{x\},\{y\}) = \infty$. Пусть $\{x\} < P_1$, $\{y\} \leq P_2$, где P_1, P_2 силовские p – подгруппы в G. Имеем $\rho(P_1,\{\tau\}) < \infty$. Но тогда $\rho(P_1^z,\{\tau\}^z) < \infty$, где $P_1^z = P_2$. Так как $\rho(\{\tau\},\{\tau\}^z) < \infty$, то $\rho(P_2,\{\tau\}) < \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\pi\cap\pi' = \phi$.

Пусть дано (2). Если существуют неинвариантные π -подгруппа и π' – подгруппа в группе G, то очевидно, что $\rho(G) = \infty$. Если в группе G существует инвариантная собственная нетривиальная инвариантная подгруппа, то легко показать, что $G = V_{p^k}\lambda\{b\}$, где V_{p^k} минимальная инвариантная подгруппа в группе G, $|b| = q$. Это противоречит предположению о неразрешимости группы G. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть G – непростая группа и $\rho(G) = \infty$. Тогда G разрешима.

Доказательство. Если $R(G) = 1$, то по лемме I в группе G существуют две максимальные подгруппы M и N взаимно простого порядка. Пусть R минимальная инвариантная подгруппа в группе G. Тогда без ограничения общности

$G = R \cdot M$ и $|G| = |R| \cdot |M|$. Поэтому $R = N$ и N – элементарная абелева p – группа, а M группа простого порядка q. Следовательно, G – разрешимая группа.

Предположим теперь, что $R(G) \neq 1$. Если $p / G : R(G)|$, то подгруппа $R(G) \cdot P$ неинвариантна в G, где P – силовская p – подгруппа в группе G. Поэтому каждую неинвариантную в G подгруппу из $R(G)$ можно вложить в неинвариантную подгруппу в G, содержащую $R(G)$. С другой стороны, каждую неинвариантную p – подгруппу в G, которая не содержится в $R(G)$, также можно вложить в неинвариантную подгруппу в G, содержащую $R(G)$. Следовательно, все неинвариантные подгруппы в группе G связаны в этом случае. Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что G разрешимая группа и $\rho(G) = \infty$.

Пусть A и B минимальные неинвариантные подгруппы в группе G такие, что $\rho(A, B) = \infty$. Ясно, что A и B примарные циклические группы. Доказательство теоремы разобьем на три случая.

Случай I. A и B лежат в различных силовских q –подгруппах группы G.

Пусть H минимальная инвариантная p – подгруппа в группе G. Тогда группа $M = N \lambda Q$ инвариантна в G, где Q – силовская q – подгруппа в G. По лемме Фраттини $G = H \cdot N_G(Q)$. По предположению $Q \ntriangleleft G$, поэтому $N = N_G(Q)$ также неинвариантна в G. Если $H_0 = H \cap N \neq 1$, то $\rho(A, B) < \infty$, так как подгруппы $H_0 \times Q$ и $H_0 \times Q_1$ неинвариантны в G, где Q и Q_1 силовские q – подгруппы в G, содержащие A и B соответственно. Следовательно, $H \cap N = 1$ и $G = H \lambda N$.

Предположим, что H собственным образом содержится в силовской p – подгруппе P из G. По модулярному закону имеем $P = H \lambda (N \cap P)$. Если P неинвариантна в G, то следующая цепочка неинвариантных подгрупп связывает A и B: $H \lambda Q$, P, $H \lambda Q_1$, где Q и Q_1 силовские q – подгруппы, содержащие A и B соответственно. Если $P \triangleleft G$, то $H \leq Z(P)$ и поэтому $P = H \times (N \cap P)$. С другой стороны, Q и Q_1, сопряжены элементом x из H. Поэтому $\rho(A, B) < \infty$, так как они связаны неинвариантными в G подгруппами $Q \times (N \cap P)$ и $Q_1 \times (N \cap P)$. Таким образом, $G = H \lambda N$,

где N – p' – группа.

Пусть элемент z из N^* перестановочен с некоторым элементом x на H^*. Если группа $F = \{x\} \times \{z\}$ инвариантна в G, то $\{z\}$ инвариантна в G и для любого элемента y из G^* имеем $N \cap N^y \geq \{z\}$. Но в этом случае $\rho(A, B) < \infty$. Если $F \ntriangleleft G$, то инвариантные подгруппы N, F, N^y, связывают A и B, $y \in H$ и $Q_1 = Q^y$, где Q_1, Q силовские q – подгруппы в G, содержащие B и A соответственно. Следовательно, G является группой Фробениуса с инвариантным множителем H. Имеем $A \leq N$, а $B \leq N^y$ для некоторого $y \in H$.

Если $T \leq N$ и $T \ntriangleleft N$, то группа $F = H \lambda T$ также неинвариантна в G. Но в этом случае $\rho(A, B) < \infty$, так как A и B связаны следующими неинвариантными подгруппами в G: N, F, F^y, N^y. Поэтому H – дедекиндова группа. Предположим, что собственная нетривиальная H_0 подгруппа из H допустима относительно подгруппы $T \neq 1$ из N. Тогда $F = H_0 \lambda T \ntriangleleft G$, а подгруппы A и B связаны неинвариантными подгруппами в G: N, F, F^y, N^y. Следовательно, N – циклическая группа, а G – группа типа (I).

Случай 2. Подгруппы A и B лежат в одной силовской p подгруппе P из G.

Ясно, что в этом случае $G = P \lambda H$, где H – дедекиндова p' – группа. Заметим также, что $C_H(P) = 1$.
(i) $\phi(P) = 1$.

Если $|P| > p^2$, то P содержит подгруппу $\{c\} \nleq A \times B$. Так как $(A \times B) \lambda H$ инвариантна в G, то можно считать, что $\{c\} \leq C_P(H)$. Но в этом случае имеем следующую связанную цепочку неинвариантных подгрупп: $\{c\} \times H$, $\{c\} A$, $\{c\} \times B$ и $\rho(A, B) < \infty$. Следовательно, $P \simeq V_{p^2}$. Группа H не содержит неединичную подгруппу, которая бы нормализовала каждую собственную подгруппу из P. В противном случае $\rho(A, B) < \infty$. Поэтому $C_H(P) = 1$, H изоморфно вкладывается в $GL(2, p)$ и $H \cap Z(GL(2p)) = 1$. Так как H дедекиндова группа, то $H = \{h\}$ – циклическая группа и $G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \lambda \{h\}$. В этом случае $\rho(\{a_1 a_2\}, \{a_1 a_2\}^h) = \infty$. Нетрудно показать, что группа G будет типа (I) или типа (2). (ii) $\phi(P) \neq 1$.

Так как $C_H(P) = 1$, то $\phi(P) \lambda H$ неинвариантна в G.

Поэтому, без ограничения общности, $A \cap \Phi(P)=1$ и $A=\{a\}$ простого порядка. Пусть $\{\tau\}$ циклическая простого порядка из $\Phi(P)\cap Z(P)$. Если $M=\{\tau\}\times\{a\}$ неинвариантна в G, то $\{\tau\}\times B$ инвариантна в G и $B\cap\Phi(P)=1$. Поэтому, без ограничения общности, $M=\{\tau\}\times\{a\}$ инвариантна в G и $\{a\}\cap\Phi(P)=1$.

Предположим, что $\Omega_1(P)=M$. В этом случае $B\cap M\neq 1$ и поэтому $M\leftthreetimes H \triangleleft G$. Заметим также, что $\{\tau\}=\Phi(P)\cap M$ инвариантна в G. Так как $C_H(M)=1$, то $p\neq 2$ и H изоморфно вкладывается в $GL(2,p)$. Каждая подгруппа из P, которая содержит M, инвариантна в P. Поэтому $P'\leq$ $\leq \Phi(P)\cap M=\{\tau\}$. Более того, $\Phi(P)$ циклическая группа. Так как $(\Phi(P)\leftthreetimes\{a\})\leftthreetimes H \triangleleft G$, то $G/\Phi(P)\simeq \bar{V}_{p^k}\times$ $\times(\{\bar{a}\}\leftthreetimes\bar{H})$, где $\{\bar{a}\}$, $\bar{H}$ образы $\{a\}$ и H соответственно. Заметим, что $H=\{h\}$ и $|h| \mid p-1$. Если $k>1$, то полный прообраз $\bar{V}_{p^k}$ будет нециклической группой, содержащей M, что невозможно. Поэтому $k=1$ и P содержит циклическую подгруппу индекса p. Так как $M\leftthreetimes H$ инвариантна в G, то H централизует циклическую подгруппу в P индекса p. Пусть $P=\{a_1\}\leftthreetimes\{a_2\}$ неабелева, $|a_1|=p^n$, $|a|=p$, $a_2^{-1}a_1a_2=a_1^{1+p^{n-1}}$. Тогда $h^{-1}ah=a_1$ и $h^{-1}a_2h=a_2^{2}$, $\tau\not\equiv 1 \pmod{p-1}$. Так как такого автоморфизма у полуабелевых p - групп нет, то P абелева группа и G - группа типа (3).

Предположим теперь, что $\Omega_1(P)\neq M$. Рассмотрим несколько возможностей для группы $B=\{b\}$.

а) Пусть $\{b\}\leq M$.

Тогда $M\leftthreetimes H\triangleleft G$ и $P=M\cdot C_P(H)$. Более того, $C_H(M)=1$. Так как $\{\tau\}\triangleleft G$, то $H=\{h\}$ и $|h| \mid p-1$. Вне M, по предположению, существует подгруппа $\{c\}$ порядка p, которая централизует H. Рассмотрим группу $L=(M\leftthreetimes\{c\})\leftthreetimes H$, $K=M\leftthreetimes\{c\}$. Если $\{a\}$ или $\{b\}$ инвариантны в K, то K абелева. Но тогда группа $\{a\}\times\{c\}$ или $\{b\}\times\{c\}$ инвариантна в G, что влечет инвариантность $\{a\}$ или $\{b\}$. Поэтому K - неабелева группа экспоненты p. Покажем, что $\{a\}$ и $\{b\}$ связаны цепочкой неинвариантных подгрупп уже в группе L. По теореме Машке $M=\{\tau\}\times\{\omega\}$, где $\{\tau\}$ и $\{\omega\}$ допустимые подгруппы относительно $\{h\}$. Пусть $\tau^h=\tau^{r_1}$, $\omega^h=\omega^{r_2}$, $\omega^c=\tau^{\omega}$. Тогда $(c^{-1}\omega c)^h=c^{-1}\omega^h c=c^{-1}\omega^{r_2}c=\tau^{r_2}\omega^{r_2}$. С другой стороны, $(c^{-1}\omega c)^h=\tau^h\omega^h=\tau^{r_1}\omega^{r_2}$. Поэтому $r_2 \equiv$ $\equiv r_1 \pmod{P}$.

Следовательно, каждая подгруппа из M допустима относительно $\{h\}$. Ясно, что $r_1\not\equiv 1 \pmod{p}$.
Так как $\{a\}\leftthreetimes\{h\}$ и $\{b\}\leftthreetimes\{h\}$ неинвариантны в L, то $\rho(\{a\},\{b\})<\infty$.

б) Пусть $\{b\}\not\leq M$.

Если $|b|=p$, то группа $K=M\leftthreetimes\{b\}$, как и в случае (а), является неабелевой группой экспоненты p и каждая подгруппа из M допустима относительно $\{h\}$. Следовательно, каждая подгруппа из M, неинвариантная в G, связана с неинвариантной подгруппой $\{\tau\}\leftthreetimes\{h\}$. Если $\{b\}$ допустима относительно $\{h\}$, то $\rho(A,B)<\infty$. Если $\{\tau\}\times\{b\}\ntriangleleft G$, то опять $\rho(A,B)<\infty$. Поэтому $(\{\tau\}\times\{b\})\leftthreetimes\{h\}$ инвариантна в G. Как и в случае (а) можно показать, что каждая подгруппа из $(\{\tau\}\times\{b\})$ в группе $L=[(\{\tau\}\times\{b\})\leftthreetimes\{a\}]\leftthreetimes\{h\}$ допустима относительно $\{h\}$. Это ведет к противоречию.
Поэтому $|b|>p$ и $\Phi(P)\cap\{b\}\neq 1$.
Так как $\{b^p\}\triangleleft G$, то можно считать, что $\{\tau\}\leq\{b^p\}$.
В группе $M\cdot\{b\}$ циклическая подгруппа $\{b\}$ индекса p.
Поэтому $M\cdot\{b\}=\{b\}\leftthreetimes\{a\}$. Как в случае (а): $H=\{h\}$ и $|h| \mid p-1$. Так как $M\leftthreetimes H\triangleleft G$, то H централизует циклическую подгруппу индекса p в группе $M\cdot\{b\}$. Теперь легко показать, что $M\{b\}$ является абелевой группой и $\{h\}$ централизует $\{b^p\}$. Так как $\Omega_1(P)M$, то существует циклическая подгруппа $\{c\}$ простого порядка вне M, централизующая $\{h\}$. Если рассмотреть теперь группу $L=(M\leftthreetimes\{c\})\leftthreetimes\{h\}$, то как и в случае (а) получим противоречие.

<u>Случай III</u>. В группе G каждые две неинвариантные p -подгруппы связаны.

В этом случае $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$ примарные подгруппы взаимно простого порядка. Пусть $\{a\}\leq P$, $\{b\}\leq Q$, где P и Q силовские p и q - подгруппы группы G, соответственно.

Покажем, что P или Q инвариантна в G. Если в группе G существует инвариантная r - подгруппа R, где $r\neq p,q$, то без ограничения общности можно считать, что $R\leftthreetimes P$ инвариантна в G и $G=R\cdot N(P)$. В случае неинвариантности группы $N(P)$ в G получаем $\rho(A,B)<\infty$, так как $\rho(B,B_1)<\infty$ по предположению, где B_1 сопряженная с B подгруппа из $N(P)$. Поэтому $N(P)\triangleleft G$, откуда следует $P\triangleleft G$.

Пусть N – минимальная инвариантная подгруппа в G.

По доказанному выше можно считать, что N – элементарная абелева p – группа. Предположим, что подгруппы P и Q неинвариантны в G. Тогда $N \lambda Q$ инвариантна в G, $G = N \cdot N(Q)$ и $N_G(Q) \ntriangleleft G$. Так как $N < P$ по предположению, то $N_G(Q)$ содержит неинвариантную p – подгруппу P_1 такую, что NP_1 – силовская p – подгруппа в G. По предположению $\rho(P, NP_1) < \infty$. Следовательно, $\rho(P, Q) < \infty$, что ведет к противоречию. Поэтому P инвариантна в G, $G = P \lambda H$, где H – P' – группа.

(i) Пусть $\Phi(P) = 1$.

Тогда $G = P_1 \times (P_2 \lambda H)$, где $P_1 = C_P(H)$.
Предположим, что $P_1 \neq 1$. Если $|P_2| > p$, то подгруппа $M = P_1 \times \{a\}$ неинвариантна в G, так как в противном случае $M \lambda H \ntriangleleft G$ и $\rho(\{a\}, \{b\}) < \infty$.
С другой стороны, если $P_1 \times H \triangleleft G$, то опять $\rho(\{a\}, \{b\}) < \infty$.
Поэтому $|P_2| = p$. Если $|P_1| > p$, то $\{c\} \times \{b\}$ и $\{d\} \times \{b\}$ неинвариантны в G, где $\{c\}$ и $\{d\}$ различные подгруппы из P_1. Так как $\{a\} \ntriangleleft G$, то без ограничения общности $\{c\} \times \{a\} \triangleleft G$. Но тогда $\rho(\{a\}, \{b\}) < \infty$, что противоречиво. Таким образом, $|P_1| = |P_2| = p$, $G = \{a_1\} \times (\{a_2\} \lambda \{h\})$, где $\{a_2\} \lambda \{h\}$ – группа Фробениуса. Получили группу типа (2).

Пусть $P = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_k$, где T_i – минимальные инвариантные подгруппы в G. Предположим, что $k > 1$.

Если $|T_i| > p$, то $\rho(a, b) < \infty$, так как в этом случае имеем следующие связанные неинвариантные подгруппы: $T_i \lambda H$, $\{c\} \times \{a\}$, где $\{c\} < T_i^{\beta}$. Следовательно, $G = (\{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_k\}) \lambda H$, где $\{a_i\} \triangleleft G$, $H = \{h\}, |h| \, p-1$. Если $k > 2$, то $\{a_1\} \times \{a\}$ и $\{a_1\} \lambda H$ неинвариантны в G и $\rho(A, B) < \infty$. Поэтому $G = (\{a_1\} \times \{a_2\}) \lambda \{h\}$. Легко показать, что группа G должна быть типа (2).

Будем теперь считать, что P минимальная инвариантная подгруппа в G. По предположению каждые две собственные подгруппы из P неинвариантные в G связаны между собой. Поэтому в P нет допустимых собственных подгрупп относительно подгруппы из H. Следовательно, группа G типа (I):

(ii) $\Phi(P) \neq 1$.

Можно считать, что $\Phi(P) \cap A = 1$. Пусть $z \in \Phi(P) \cap \Omega_1(Z(P))$. Тогда $M = \{z\} \times \{a\}$ инвариантна в G, ибо

в противном случае имеем связанные неинвариантные подгруппы M и $\Phi(P) \lambda H$. Группа $M \lambda H$ также инвариантна в G. Поэтому $G = M \cdot H \cdot C_P(H)$. Если $\Omega_1(P)$ не четверная группа, то в $C_P(H) \setminus M$ существует подгруппа $\{x\}$ порядка p и $\{x\} \times H \ntriangleleft G$. Если $\{x\} \ntriangleleft G$, то $\rho(\{x\}, \{a\}) = \infty$, что противоречит предположению о G.

Следовательно, $\{x\} \triangleleft G$. Но тогда $\{x\} \times \{a\} \ntriangleleft G$ и $\rho(\{a\}, H) < \infty$. Таким образом, $\Omega_1(P) = V_4$.
Так же как в пункте (ii) случая II получаем, что G – группа типа (3). Теорема доказана.

Литература

1. N. Blackburn. Finite groups in which the normal subgroups have nontrivial intersection. - J. Algebra, 3; 1(1966), 30-37.
2. В.А.Шериев. Конечные 2-группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами. –Сиб.матем.ж., УП : I(1967) 215-226.
3. А.Д.Устюжанинов. Конечные 2-группы с тремя инволюциями.–Сиб.матем.ж., 13 : I (1972) 182-197.
4. А.Д.Устюжанинов. Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами. –Матем.зап.Урал.ун-та, 6 : I (1967) 107-123.
5. М.Холл. Теория групп. М., ИЛ, 1962.

Поступила 25.II.1971

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ
том 8, тетрадь 3, (1972)

Редактор Е.Ф.Шамес

Подписано к печати 22/I-73 Объем 7,5 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ 386
НС 29053 Цена 52 коп.

Уральский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. А.М.Горького
Свердловск, пр. Ленина, 51.

Типолаборатория УрГУ, Свердловск, 8-е Марта, 62