МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема выпускной квалификационной работы «Решение задач на построение в школьном курсе геометрии как средство развития логического мышления учащихся в основной школе»

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
63.5 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
__________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513-086-5-1
Жеданова Надежда Романовна

Научный руководитель:
Доцент, к.п.н; доцент кафедры МиМОМ
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В программе по математике для средней общеобразовательной школы, разработанной в соответствие с основными направлениями реформы общеобразовательной школы, подчеркивается, что развитие логического мышления учащихся является одной из основных целей курса геометрии.

На мой взгляд школа должна не только формировать у учащихся прочную основу знаний, умений и навыков, но и максимально развивать им умственную активность: учить мыслить, самостоятельно обновлять и пополнять знания, сознательно использовать их при решение теоретических и практических задач.

Развитие умственной активности происходит в процессе усвоения знаний, однако не всякое усвоение обеспечивает эту активность. Необходима его особая организация, при которой учащиеся развивают свое мышление, интересы, склонности.

Развитие умственной активности при усвоении знаний – важный источник формирования личности ученика.

Актуальность дипломной работы заключается в том, что проблема развития логического мышления должна иметь свое отражение в школьном курсе геометрии в силу, недостаточности подготовки учащихся в этой части, в силу большого числа логических ошибок, допускаемых учащимися в усеваемом содержании геометрического материала.

Объектом исследования является учебная литература и уровень логического мышления учащихся.

Предмет исследования – способность учащихся решать геометрические задачи на построение.

Гипотеза исследования: можно предположить, что изучение предложенного мной курса дополнительных занятий повысит уровень логического мышления учащихся при решении геометрических задач на построение.

Проблема исследования заключается в особой организации процесса обучения решению геометрических задач на построение, при которой через решение этих задач учащиеся будут активно развивать логическое мышление.

Цель исследования: Определение и подборка геометрических задач на построение, способствующих развитию логического мышления учащихся.

Выделяя этапы достижения цели исследования, я поставили следующие задачи:

1. Дать характеристику математического мышления;

2. Выделить пути развития мышления при обучении учащихся в средней школе;

3. Дать характеристику задач на построение и выяснить, как они влияют на развитие логического мышления;

4. Разработать систему уроков с рекомендациями по развитию логического мышления через решение задач на построение.

В первой главе рассматриваются общие и наиболее важные аспекты использования задач в обучении математике, общие методы, применяемые при решении задач. Значительное внимание уделяется вопросам организации обучения решению задач на уроках.

Во второй главе представлен курс внеурочной деятельности

1 ЛОГИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И ЕГО РАЗВИТИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Эффективность и качество обучения математике определяются не только глубиной и прочностью овладения школьниками системой математических знаний, умений и навыков, предусмотренных программой, но и уровнем их математического развития, степенью подготовки к самостоятельному овладению знаниями, сформированностью умений выявлять, усваивать и запоминать основное из того большого объема информации, который содержит школьный курс математики.

Таким образом, у школьников должны быть сформированы определенные качества мышления, твердые навыки рационального учебного труда, развит познавательный интерес. Поэтому естественно, что среди многих проблем совершенствования обучения математике в средней школе большое значение имеет проблема формирования у учащихся математического мышления.

Математическое мышление имеет свои специфические черты и особенности, которые обусловлены спецификой изучаемых при этом объектов, а также спецификой методов их изучения.

Прежде всего, отметим, что математическое мышление часто характеризуют проявлением так называемых математических способностей

С шаблонностью мышления связан и эффект, называемый функциональной устойчивостью, согласно которому в большинстве случаев объекты, используемые в данной ситуации в обычных для них функциях, не используются в новом качестве.

Этим, в частности, объясняются те трудности, которые связаны с переосмысливанием школьниками условия задачи, являющимся необходимой предпосылкой ее успешного решения. Вот один из характерных примеров.

Параллельные прямые *AB* и *CD* пересечены прямой *EF*, величина одного из внутренних углов при точке *O* (рисунок 1) равна 130. *OM* – биссектриса этого угла. Определить величину угла, образованного ею с прямой *CD*.

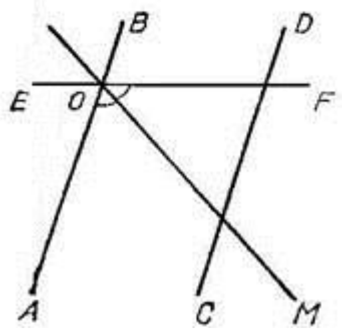


Рисунок 1

Здесь прямая *OM* выступает одновременно и как биссектриса, и как секущая. Ее роль как биссектрисы угла создает функционального устойчивость, в силу которой учащиеся часто затрудняются в: использовании этой прямой в качестве секущей.

Следует отметить, что шаблонность мышления, присущая многим школьникам, имеет как негативный, так и позитивный характер. Она избавляет школьника от необходимости заново усваивать те или иные операции, решать задачи тех типов, которые неоднократно им встречаются, безусловно, положительно сказывается на результатах обучения.

Однако шаблонность мышления мешает школьникам мыслить оригинально, отделять главное от второстепенного, отыскивать новые пути решения задач, применять известные им знания в новой ситуации. Понятно, что все это не способствует развитию творческих потенций школьника.

Наличие у школьников целенаправленного мышления особенно важно при поиске плана решения математических задач, при изучении нового материала и т. д.

Этому способствуют специально подобранные учителем задачи, вводящие в изучение новой темы, посредством которых перед учащимися раскрывается целесообразность ее изучения и последовательность рассмотрения относящихся к ней вопросов.

В числе мышления важное место занимает критичность мышления, которая характеризуется умением оценить правильность выбранных путей решения поставленной проблемы, получаемые при этом результаты с точки зрения их достоверности, значимости.

В процессе обучения математике это качество мышления у учащихся проявляется склонностью (и умением) к различного вида проверкам, грубым прикидкам найденного (искомого) результата, а также к проверке умозаключений, сделанных с помощью индукции, аналогии и интуиции.

Критичность мышления школьников проявляется также в умении найти и исправить собственную ошибку, проследить заново все выкладки или ход рассуждения, чтобы натолкнуться на противоречие, помогающее осознать причину ошибки.

С критичностью мышления тесно связана доказательность мышления, характеризуемая умением терпеливо и скрупулезно относиться к собиранию фактов, достаточных для вынесения какого-либо суждения; стремлением к обоснованию каждого шага решения задачи, умением отличать результаты достоверные от правдоподобных; вскрывать подлинную причинность связи посылки и заключения.

В обучении математике следует развивать у школьников как оперативную, так и долговременную память, обучать их запоминанию наиболее существенного, общих методов и приемов решения задач, доказательства теорем; формировать умения систематизировать свои знания и опыт.

В процессе обучения математике развитию и укреплению памяти школьников способствуют:

а) мотивация изучения;

б) составление плана учебного материала, подлежащего запоминанию;

в) широкое использование в процессе запоминания сравнения, аналогии, классификации и т. п.

Известно также, что наряду с задачей развития логического мышления, должна решаться задача воспитания логической грамотности. Содержание понятия «логическая грамотность» доставляют такие логические знания и умения, которые дают возможность для успешного обучения в школе, для дальнейшего обучения и самообразования, для успешной общественно полезной практической деятельности и повседневной жизни.

Основная форма организации изучения материала постановка и решение учебных задач в рамках проблемного подхода.

Учебная задача существенно отличается от многочисленных частных задач, входящих в программу того или иного класса при традиционном обучении. При решении учебной задачи школьник первоначально овладевает общим способом решения частных задач на уровне теоретического обобщения. Задача решается для всех однородных случаев сразу. Разрешение учебной задачи всегда заканчивается построением программы, предписания, алгоритма - получением ориентировочной основы для решения сходных задач.

Эта ориентировочная основа является основанием для анализа условия, планирования, осуществляемых учеником при решении частных задач, для рефлексивных действий, для развития соответствующих особенностей мышления, которые являются показателями развитого мышления.

Важно функционирование знания в мышлении, выработка собственных практических решений под воздействием знаний. Необходимо формировать не только систему знаний, но и интеграции знания в такую систему, которая соответствует логике решения задач.

Задача преподавания геометрии – развить у учащихся три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Разумеется, в задачи курса геометрии входит: дать учащимся основные знания и умения в области геометрии. Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключаются в трех указанных элементах.

В школьном курсе геометрии выделяют три вида чертежей:

— чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;

— чертежи, образно представляющие условие задачи или рассматриваемого математического предложения;

— чертежи, иллюстрирующие преобразования геометрических фигур.

Мы будем рассматривать работу с чертежами первых двух видов, поскольку они имеют более общее назначение.

Формируя у учащихся умение, работать с чертежом, учитель должен помнить, что если ограничиваться стандартными чертежами, то школьники достаточно быстро начнут связывать формируемое понятие только с фигурами определенного вида и положения. «Стандартный» чертеж вызывает у учащихся неверные ассоциации, в результате которых в содержание понятия вносятся лишние признаки, являющиеся частными признаками демонстрируемой фигуры.

Ученики обычно привыкают соотносить какую-либо фигуру с одним понятием, не умея переосмыслить фигуру в плане другого понятия. Для развития мышления учащихся нужно потратить много усилий на формирование и умения выделять из элементов новые фигуры, не упомянутые в тексте условия задач.

Чертежи и рисунки – эффективное средство формирования у учащихся умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований, сопоставлений.

При обучении решению геометрических задач очень важно следить за тем, чтобы формулировка задачи помогла учащимся сделать чертеж. В школьных учебниках текст, с помощью которого сформулирована задача или теорема, не всегда написан доступным, понятным языком.

Чертеж может служить опровержением какого-то общего высказывания. Учась опровергать неверные высказывания, школьники постепенно привыкают к доказательствам. Приведем три задания, которые фактически нацеливают учащихся на поиск контрпримеров.

1. Верно ли утверждение: «Любой четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом»?

2. Верно ли утверждение: «Любой четырехугольник, у которого два противоположных угла прямые, является прямоугольником»?

В пропедевтическом курсе геометрии важно воспитывать у школьников понимание необходимости того, чтобы изучаемые факты доказывались. Целесообразно показывать школьникам что v людей нет иного пути убедиться в истинности суждения, как только доказать его логическим путем.

Итак, разносторонняя работа с чертежами не только способствует общему умственному развитию школьников, но и развивает мышление.

Для повышения эффективности развивающего обучения геометрии перед учащимися следует систематически ставить серии задач (или отдельные задачи), которые вместе с обучающими функциями были бы направленны на формирование у школьников творческого математического мышления.

В качестве таких задач могут выступать, например, задачи, при постановке которых или в процессе решения которых:

— учащимся мотивируется целесообразность изучения нового материала, разумность определений геометрических понятий, полезность изучения тех или иных теорем;

— учащиеся побуждаются к самостоятельному открытию того или иного геометрического факта, к обоснованию того или иного положения, к установлению возможности применения уже усвоенных ими знаний в новой для них ситуации;

— учащиеся подводятся к самостоятельному открытию методов доказательства теорем, общих приемов решения задач, к установлению новых связей между известными им геометрическими понятиями;

— у учащихся формируются умения использовать ведущие методы научного познания (опыт, наблюдение, сравнение, анализ, обобщение и т. д.) как методы самостоятельного изучения геометрии, понимание роли и места индукции, аналогии дедукции в процессе познания;

— учащиеся обнаруживают взаимосвязь геометрии и алгебры и с другими предметами, устанавливают содержательные и структурные связи между различными вопросами самого курса геометрии, получают возможность применить математические знания к решению нематематических задач;

— учащиеся приобщаются к самостоятельным поисковым исследованиям (посредством изучения результатов решения задач, изменения условия задачи, возможных обобщений задачи, отыскания других способов ее решения и отбора того из них, который наиболее полно удовлетворяет заданным условиям, и т. п.);

— у учащихся формируются качества, присущие научному мышлению (активность, гибкость, глубина, критичность, доказательность и т. п.), умение выражать свою мысль ясно и точно и т.д.

В процессе обучения математике задачи выполняют, разнообразны» функции. Учебные математические задачи являются очень эффективным и часто незаменимым средством усвоения учащимися понятий и методов школьного курса математики, вообще математических теорий. Велика роль задач в развитии мышления и в математическом воспитании учащихся, в формировании у них умений и навыков в фактических применениях математики. Решение задач хорошо служит достижению всех тех целей, которые ставятся перед обучением математике. Именно поэтому для решения задач используется половина учебного времени уроков математики (700-800 академических часов в IV-X классах). Правильная методика обучения решению математических задач играет существенную роль в формировании высокого уровня математических знаний, умений и навыков учащиеся.

При решении математических задач ученик обучается применять математические знания к практическим нуждам, готовится к практической деятельности в будущем, к решению задач, выдвигаемых практикой, повседневной жизнью. Почти во всех конструкторских расчетах приходится решать математические задачи, исходя из запросов практики. Исследование и описание процессов и их свойств невозможно без привлечения математического аппарата, т. е. без решения математических задач. Математические задачи решаются в физике, химии, биологии, сопротивлении материалов, электро- и радиотехнике, особенно в их теоретических основах, и др.

Это означает, что при обучении математике учащимся следует предлагать задачи, связанные со смежными дисциплинами (физикой, химией, географией и др.), а также задачи с техническим и практическим, жизненным содержанием. При решении математических задач у учащихся формируется особый стиль мышления: соблюдение формально-логической схемы рассуждений, лаконичное выражение мыслей, четкая расчлененность хода мышления, точность символики.

Каждая конкретная учебная математическая задача предназначается для достижения чаще всего не одной, а нескольких педагогических, дидактических, учебных целей. И эти цели характеризуются как Содержанием задачи, так и назначением, которое придает задаче учитель. Дидактические цели, которые ставит перед той или иной задачей учитель, определяют роль задач в обучении математике. В зависимости от содержания задачи и дидактических целей ее применения из всех ролей, которые отводятся конкретной задаче, можно выделить ее ведущую роль.

Обучающую роль математические задачи выполняют при формировании у учащихся систем знаний, умений и навыков по математике и ее конкретным дисциплинам. Следует выделить несколько видов задач по их обучающей роли.

1. Задачи для усвоения математических понятий. Известно, что формирование математических понятий хорошо проходит при условии дательной и кропотливой работы над понятиями, их определения» и свойствами. Чтобы овладеть понятием, недостаточно выучить его определение, необходимо разобраться в смысле каждого слова в определении, четко знать свойства изучаемого понятия.

2. Задачи для овладения математической символикой. Одной из целей обучения математике является овладение математическим языком и, следовательно, математической символикой. Простейшая, символ и вводится еще в начальной школе и в IV-V классах (знаки действий, равенства и неравенства, скобки, знаки угла и его величины, параллельности и т. д.). Существенное значение в овладение изучаемой символикой имеет правильное ее применение при записи решений задач. Учитель должен внимательно следить за грамотным применением математических символов в записях.

3. Задачи для обучения доказательствам. Обучение доказательствам – одна из важнейших целей обучения математике.

Простейшими задачами, с решения которых практически начинается обучение доказательствам, являются задачи-вопросы и элементарные задачи на исследование. Решение таких задач заключается в отыскании ответа на вопрос и доказательстве его истинности. Задачи - вопросы обычно требуют для своего решения (доказательства истинности ответа) установления одной импликации, одного логического шага от данных к доказываемому. Доказательство же при решении более сложной задачи или доказательство теоремы представляет собой цепочку шагов-импликаций. Целью решения задач-вопросов является и осознание, уточнение и конкретизация изучаемых понятий и связей между ними. Задачи - вопросы необходимы также для усвоения учащимися вводимой символики и используемого языка. Примеры задач-вопросов:

Могут ли две биссектрисы треугольника быть перпендикулярными? А две высоты?

Существенную роль в обучении доказательствам играют упражнения в заполнении пропущенных слов, символов и их сочетаний в тексте готового доказательства. Аналогичные упражнения довольно часто применяются при изучении русского языка, на уроках же математики они встречаются редко, в учебниках и задачниках их нет.

Решение математических задач требует применения многочисленных мыслительных умений: анализировать заданную ситуацию, сопоставлять данные и искомые, решаемую задачу с решенными ранее, выявляя скрытые свойства заданной ситуации; конструировать простейшие математические модели, осуществляя мысленный эксперимент; синтезировать, отбирая полезную для решения задачи информацию, систематизируя ее; кратко и четко, в виде текста, символически, графически и т. д. оформлять свои мысли; объективно оценивать полученные при решении задачи результаты, обобщать или специализировать результаты решения задачи, исследовать особые проявления заданной ситуации. Сказанное говорит о необходимости учитывать при обучении решению математических задач современные достижения психологической навыки.

Эффективность математических задач и упражнений в значительной мере зависит от степени творческой активности учеников при их решении.

Собственно, одно из основных назначений задач и упражнений и заключается в том, чтобы активизировать мыслительную деятельность учеников на уроке.

Математические задачи должны, прежде всего, будить мысль учеников, заставлять ее работать, развиваться, совершенствоваться. Говоря об активизации мышления учеников, нельзя забывать, что при решении математических задач учащиеся не только выполняют построения, преобразования и запоминают формулировки, но и обучаются четкому мышлению, умению рассуждать, сопоставлять и противопоставлять факты, находить в них общее и различное, делать правильные умозаключения.

Правильно организованное обучение решению задач приучает к полноценной аргументации со ссылкой в соответствующих случаях на аксиомы, введенные определения и ранее доказанные теоремы. С целью приучения к достаточно полной и точной аргументации полезно время от времени предлагать учащимся записывать решение задач в два столбца: слева – утверждения, выкладки, вычисления, справа – аргументы, т.е. предложения, подтверждающие правильность вызванных утверждений, выполняемых выкладкой и вычислений.

Разумеется, нет необходимости так записывать решение каждой задачи, допустима и устная аргументация.

Как известно, упражнения в геометрии в зависимости от условия и задания делят на три группы: задачи, на вычисление, доказательство и на построение.

В задачах на вычисление требуется выразить неизвестные величины (отрезки, углы, площади, объемы) или их отношения через известные параметры. Если параметры даны в общем виде, то результат получается в буквах; если же условие содержит числовые значения параметров, ответ доводится до числа.

В задачах на доказательство необходимо установить наличие определенных соотношений между элементами рассматриваемой фигуры: равенство или неравенство отрезков, углов, параллельность или перпендикулярность прямых, плоскостей и т. д.

Мы провели среди учащихся анкетирование для того, чтобы выяснить, как они относятся к решению задач на построение.

Анкета

1. Что вам больше нравится:

а) алгебра;

б) геометрия.

2. Какие геометрические задачи вы обычно решаете успешнее:

а) на построение;

б) на доказательство.

3. Можете ли работать методом «в воображении», т.е. создавать образы предметов, мысленно представлять их себе с разных сторон, не опираясь на наглядные изображения (картинки, чертежи, схемы)?

а) да;

б) нет.

4. Как вы используете чертеж в решении геометрической задачи?

а) в основном на первом этапе работы для меня разобраться в чертеже – это уже решить задачу; на втором этапе записываю ход рассуждений;

б) обращаюсь к чертежу периодически: чередую работу с чертежом и оформление каждого смыслового куска решения.

5. Что составляет для вас большую трудность при усвоении геометрии:

а) представить в уме («по воображению») нужный образ (предмет, чертеж, схему);

б) восстановить в уме ход рассуждений в какой-нибудь теореме или решенной ранее задачи.

6. При решении геометрической задачи «средней» для вас сложности нужен ли вам чертеж?

а) большинство задач могу решить в уме, без чертежа;

б) мне было бы достаточно иметь перед глазами чертеж из учебника;

в) всегда удобнее иметь собственный чертеж в тетради, на котором можно сделать дополнительные построения, пометки, обозначения;

г) лучше, когда есть несколько вариантов чертежей: так легче представить задачу «с разных сторон».

7. Как вы относитесь к необходимости построения чертежа к задаче?

а) это трата времени, почти всегда могу обойтись без чертежа;

б) черчу с удовольствием, стараюсь выполнить чертеж как можно точнее, это помогает решить задачу;

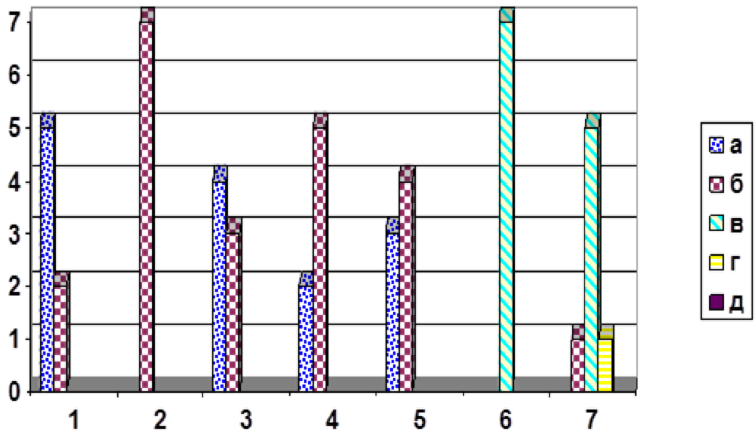
в) не очень люблю чертить, но стараюсь сделать четкий грамотный чертеж, это облегчает решение задачи;

г) чертеж, наверное, нужен, но не стоит долго им заниматься, вполне достаточно если он приблизительно соответствует условиям задачи;

д) чертеж не обязателен, удобнее делать наброски на черновике и с ними работать.

Обработка результатов анкетирования указан на рисунке 2

Кол-во учащихся



Вопросы

Рисунок 2

Выводы: По результатам проведенной анкеты можно выделить следующие факты:

1. Большинство учащихся испытывают неприязнь к выполнению чертежа.

2. При решении задач «средней» сложности учащимся недостаточно пользоваться чертежом из учебника или изображенным на доске; им необходимо каждому выполнить чертеж в своей тетради.

3. Для учащихся составляет большую трудность не только выполнение чертежа, но и самостоятельная запись решения. Поэтому решение задачи разбивается на этапы; обсуждая решение по чертежу учащимся необходимо давать время записать его ход после каждого этапа.

4. Все учащиеся без исключения не могут мысленно создать образ предмета и рассмотреть его с разных сторон «в воображении».

5. Как итогом всех этих фактов можно отметить то, что учащиеся больше предпочитают заниматься алгеброй, чем геометрией.

В преподавании математики большое значение приобретают вопросы, связанные с обучением учащихся геометрическим построениям (выполнение наиболее распространенных геометрических построений и обучение решению задач на построение).

Решая задачи на построение, учащиеся приобретают первые теоретические и практические основы «графической грамотности», знакомятся с наиболее употребительными приемами их решения, с инструментами, используемыми в различных условиях работы (о чертежно-конструкторской практике, при разметке, при выполнении построений на местности). У них развиваются пространственное воображение, конструктивные способности, сообразительность, изобретательность, т. е. такие качества, которые необходимы работникам многих профессий.

Доказательство правильности решения задачи и ее исследование способствуют лучшему усвоению учащимися теоретического материала, развитию их логического мышления.

Обучение геометрическим построениям в школе имело до последнего времени много недостатков. Так, учащиеся поздно знакомились с геометрическими построениями (в VI классе ими занимались лишь в конце учебного года). Приемы решения задач на построение часто не отвечали требованиям практики: как правило, изучались построения, выполняемые только циркулем и линейкой, а другие чертежные инструменты практически не использовались; мало уделялось внимания распространенным построениям, хотя обоснование их соответствовало программе по геометрии и целесообразность применения этих построений на уроках математики, черчения и других предметов не вызывала сомнения; при рассмотрении геометрических построений не уделялось должного внимания установлению связи между приемами построений (на бумаге, при разметке, на местности) и использованием соответствующих инструментов.

Задачей на построение называется предложение, указывающее, по каким данным, какими средствами (инструментами) и какой геометрический образ (точку, прямую, окружность, треугольник, совокупность точек и т. д.) требуется найти (начертить, построить на плоскости, наметить на местности и т. п.) так, чтобы этот образ удовлетворял определенным условиям.

Будем считать средствами построения циркуль и одностороннюю линейку; вопрос о дополнении этих инструментов чертежным прямоугольным треугольником будет рассмотрен далее.

Задача на построение может быть выражена с помощью чертежа-задания. Чертеж-задание включает в себя данные элементы и требование задачи. Рассмотрим примеры.

1. Построить треугольник по основанию а, углу при основании угол В = β и высоте на основание h_a .

2. Построить окружность данного радиуса r, проходящую через две данные точки А и В.

Чертеж-задание выделяет из элементов плоскости данные элементы. При этом возможны два случая:

1) данные элементы являются уже построенными (пример 2, точки А и В), и в этом случае перемещение их по плоскости невозможно (данные элементы определены по положению);

2) данные элементы лишь могут быть построены (пример 1 – отрезки a и h_a , угол B, пример 2 – отрезок *r);* в этом случае подразумевается, что элементы могут быть построены в «любом месте» плоскости (данные элементы не определены по положению).

Решить задачу на построение при помощи циркуля и линейки – значит свести ее к конечной совокупности пяти элементарных построений, которые заранее считаются выполнимыми:

Сведения к каждой задаче к элементарным построениям практически неудобно, так как делает решение громоздким. Иногда удобнее сводить задачи к так называемым основным построениям. Выбор некоторых построений в качестве основных в известной мере произволен.

Характеристика чертежа-задания показывает, что задачи на построение делятся на два существенно различных вида:

Задачи «метрические», в которых требуется построить геометрический образ по данным элементам, имеющим определенные размеры, но не определенными по положению на плоскости. Следовательно, и требуемый в задаче геометрический образ может занимать произвольное положение на плоскости (пример 1).

Задачи «положения», в которых построение требуемого геометрического образа выполняется на основе данных элементов, из которых хотя бы один определен по положению на плоскости. Следовательно, и требуемый геометрический образ должен занимать определенное положение на плоскости (относительно данных элементов).

Этапы решения задачи на построение.

1. Анализ

Анализ – это важный этап решения задачи, так как здесь мы составляем план построения, по существу, находим решение. Устанавливаются такие зависимости между данными и искомыми элементами, которые дают возможность построить искомую фигуру. При обучении решению задач на построение целесообразно подчеркивать аналогию, существующую между отысканием решения задач по арифметике, алгебре и геометрии ни вычисление и доказательство и анализом задач на построение. Ученик не должен считать, что для нахождения решений задач на построение нужны совершенно новые приемы. Поэтому следует помочь ученикам увидеть аналогию в применяемых приемах для отыскания решении задач на построение и задач из других дисциплин.

Сделаем анализ задачи на построение: «Построить треугольник, зная основание меньший угол при основании и разность двух других сторон».

Чтобы найти решение, нужно вначале изучить условие задачи, посмотреть, какие элементы искомого треугольники даны. Для этого начертим произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ (рисунок 3) и отметим элементы, соответствующие данным по условию. Пусть это будет сторона A_1C_1 и угол $C_1A_1B_1$. Но на чертеже нет разности двух других сторон. А так как для решения задачи мы должны учесть все данные, то нужно показать и разность.

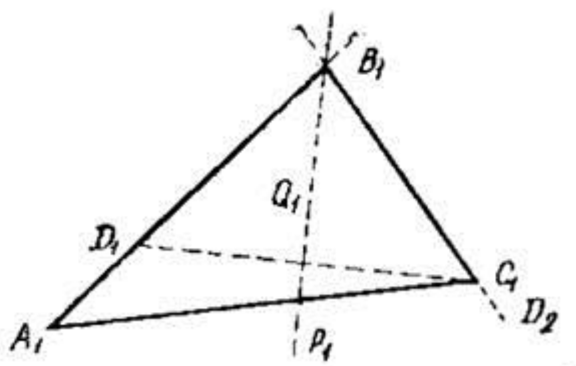


Рисунок 3

Это можно сделать четырьмя способами: на меньшей стороне отложить большую от точки C_1 или от точки B_1 либо на большей отложить меньшую и вновь откладывать как от точки B_1, так и от точки A_1. Если разность будет около точки B_1, то тогда данные не связаны между собой и нельзя наметить план решения. Если же B_1A_1 отложим от точки B_1 на B_1C_1, то данные: основание, угол при основании и разность двух других сторон – будут связаны между собой, но и эта связь не дает возможности наметить план решения, она недостаточно жестка, чтобы построить, восстановить фигуру $Д_2C_1A_1B_1$. Лучше всего ввести разность, откладывая $B_1D_1 = B_1C_1$, так как в этом случае мы уже сможем восстановить фигуру $C_1A_1Д_1$.

Построив в произвольной прямой отрезок, равный основанию, получим две вершины треугольника: A_1 и C_1.Зная угол $C_1A_1B_1$, мы можем найти и положение точки D_1, где $D_1A_1 = B_1A_1 - B_1C_1$. Остается рассмотреть, как построить точку B_1 зная положение точки D_1.Так как $C_1B_1 = B_1D_1$, то точка B_1 равноудалена от точек C_1 и D_1, поэтому она должна лежать на перпендикуляре P_1Q_1, проведенном к отрезку C_1D_1 через его середину. Точка пересечения прямой P_1Q_1 и луча A_1D_1 и будет точкой B_1. Следовательно, приходим к следующему построению. На произвольной прямой откладываем отрезок, равный основанию, и строим угол, равный данному, одна из сторон которого содержит построенный отрезок, а вершина совпадает с концом этого отрезка. На второй стороне угла откладываем отрезок, равный разности двух других сторон треугольника, и строим геометрическое место точек, равноудаленных от соответствующих концов основания и построенного отрезка. Точку пересечения этого геометрического места со стороной угла, содержащей разность, соединяем с концом основании и получаем искомый треугольник.

Из этого примера видно, что при отыскании решения задачи на построение, применяется аналитико-синтетический метод

2. Построение.

Второй этап решения задач на построение состоит из двух частей:

1. Перечисление в определенном порядке всех элементарных построений, которые нужно выполнить, согласно анализу, для решения задачи;

2. Непосредственное выполнение этих построений на чертеже при помощи чертежных инструментов. Действительно, решить задачу с помощью тех или иных инструментов – значит указать конечную совокупность элементарных, допустимых для данных инструментов, построений, выполнение которых в определенной последовательности позволяет дать ответ на вопрос задачи.

Например, допустимыми построениями, которые определяют понятие «с помощью циркуля и линейки», являются следующие:

1. Построение прямой, проходящей через две данные точки.

2. Построение точки пересечения двух данных прямых.

3. Построение окружности данного радиуса при заданном центре.

4. Построение точек пересечения двух данных окружностей.

5. Построение точек пересечении данной прямой и данной окружности.

Уже при решении простейших задач мы встречаемся с такими случаями, когда последовательность элементарных построений, нужных для построения искомой фигуры, указана, а практически осуществить их нельзя.

Например, требуется построить треугольник по трем сторонам. Всегда можно указать последовательность построений для решения этой задачи, но если одна из сторон больше суммы двух других, то треугольника не получим. И в стереометрии при решении конструктивных задач мы не всегда можем, например, выполнить построение плоскости или сферы так, как мы строим на плоскости прямые и окружности. И тогда главным является уже не фактическое построение, а указание, в какой последовательности нужно выполнять определенные построения, чтобы решить задачу.

Например: «Через данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой MN, не проходящей через точку A». Для этого через точку A и прямую MN проводим плоскость и в ней через точку A проводим прямую, параллельную прямой *MN*. Задача считается решенной, хоти эти построения мы выполнить не можем.

Из приведенных примеров видно, что решение не всегда сводится к элементарным построениям, а чаще всего к так называемым основным построениям или основным задачам на построение. Задачи, решение которых в дальнейшем часто используется, обычно относят к основным задачам на построение.

В средней школе нецелесообразно при решении каждой задачи требовать от учащихся в письменной или устной форме подробного описания построений. Такое описание, особенно в VI-VII классах, требует большой затраты времени. Интерес учащихся к решению задач на построение понижается, ибо главной трудностью становится изложение решения, сводящееся иногда к целым «сочинениям».

Если анализ задачи выполнен достаточно подробно, то и при устном пояснении к решению, и в письменных работах достаточно, если ученик указывает, например: «Строим прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету», – и верно выполняет это построение.

3. Доказательство.

После того как фигура построена, необходимо установить, удовлетворяет ли она условиям задачи. Значит, доказательство существенно зависит от способа построения. Одну и ту же задачу можно решать различными способами, в зависимости от намеченного при анализе плана построения, а поэтому, и доказательство в каждом случае будет свое, рассмотрим задачу: «Построить трапецию по четырем сторонам» (рисунок 4).

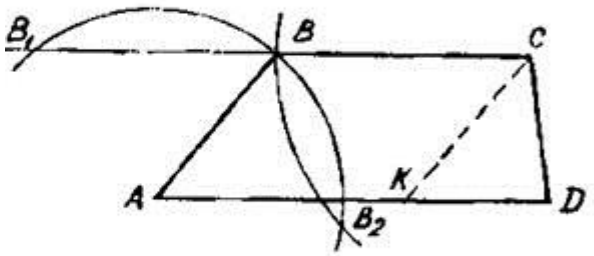


Рисунок 4

Проведя СК || *ВА*, решение задачи сводим к построению треугольника *КСD* по трем сторонам: две равны боковым сторонам трапеции (*АК = КС*), а *КD = АD – ВС*. Построим треугольник *КСD*, и, считая сторону *АD* построенной, дополним его до трапеции различными способами:

1) Проведем *ВС* || *АD* и, отложив меньшее основание, соединим полученную точку *В* с *А* Доказательство сведется к установлению равенства: *АВ = КС*.

2) Если провести *АВ* || *КС* и *ВС* || *АD*, то тогда уже надо доказать, что *АВ = КС* и *ВС = АК*.

3) Если провести прямую *СВ* || *DА* и на ней найти точки *В* и B_1, отстоящие от *А* на расстоянии, равном боковой стороне, то в этом случае точка B_1 будет посторонней и лишь точка *В* будет искомой, причем доказательство *(ВС = АК)* уже усложняется.

4) Если отыскивать точку *В,* как точку пересечения окружностей *(А; АВ)* и *(С; СВ)*, то из двух точек *В* и B_2 только точка *В* будет искомой.

Третий и четвертый случаи подчеркивают необходимость доказательства. В анализе мы находим необходимые условия, которым должно подчиняться построение, чтобы получить искомую фигуру. Надо еще установить, что найденные необходимые условия являются и достаточными, то есть, что построенная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи.

При решении простейших задач, когда все условия задачи находят непосредственное отражение в плане построения, нет необходимости доказывать, что фигура, полученная из данных элементов таким построением, является искомой. Например: «Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними». Здесь доказательство сводится к простой проверке, такие ли взяли стороны, как данные, и будет ли построенный угол равен данному. В подобных задачах доказательство является излишним, ибо правильность решения обеспечивается соответствием построения анализу и данным условия задачи.

Хотя доказательство при решении задач на построение проводится аналогично доказательству теорем, с использованием аксиом, теорем и свойств геометрических фигур, между ними имеется и некоторое различие. При доказательстве теорем в большинстве случаев без труда выделяют условие и заключение. При решении задач на построение уже труднее найти данные, на основании которых можно доказать, что построенная фигура является искомой. Поэтому при решении конструктивных задач в классе целесообразно иногда специально выделять, что дано и что требуется доказать.

4. Исследование.

Исследование является составной частью решения. Решение задачи на построение можно считать законченным, если узнаем, сколько искомых фигур получим при определенных данных, и, в частности, указано, когда не получим искомый геометрический образ. Но исследование в задачах на построение, как и исследование при решении других задач по математике, имеет и общеобразовательное значение.

В процессе исследования учащиеся упражняются в практическом применении диалектического метода мышления. Они видят, что изменение данных задачи вызывает изменение искомой фигуры. Мы имеем дело не с закостенелыми, а с изменяющимися геометрическими образами, изменение одних величин обусловлено изменением других.

Для правильного проведения исследования нужно обладать хорошо развитым логическим мышлением. Значит, с другой стороны, исследование задач на построение является хорошим материалом для развития логического мышления учащихся.

Несмотря на необходимость и целесообразность исследования при решении задач на построение, ему и в школе, и в методической литературе уделяется недостаточно внимания. Большое внимание уделяется обычно отысканию решения – анализу. Анализ – основной этап при решении задач на построение: не найдя решения, нельзя провести ни построения, ни доказательства, ни исследования. Но по трудности выполнения исследование является не менее сложным этапом. Наибольшее количество ошибок допускается именно при исследовании.

Методы решения задач на построение

1. Метод геометрических мест. Понятие «геометрическое место точек», являющееся синонимом понятия «множество», одного из основных понятий современной математики, вводится в элементарной геометрии исключительно ввиду его наглядности, образности; слово «место» как бы отвечает на вопрос, где «помещаются» точки, обладающие тем или иным свойством.

Знание геометрических мест точек, обладающих определенным свойством, облегчает нахождение решения для многих практических задач. Например, для решения задач на сопряжение окружностей и прямых, с которыми учащиеся встречаются довольно часто на уроках труда в школьных мастерских при опиливании криволинейных поверхностей (изготовление дуги для лобзика, отвертки, гаечного ключа и т. п.), при изготовлении приборов, пособий для школы, которые они часто делают не по чертежам, а по техническим рисункам, не выполняя деталировки каждой детали, необходимо знать соответствующие геометрические места. Без знания геометрических мест центров окружностей, касающихся данных прямых или окружностей при определенных ограничениях, семиклассники не смогут на уроках черчения понять способы решения задач на сопряжение углов дугами, сопряжение окружности с прямой при помощи дуги данного радиуса и т.п.

Следует учитывать, что понятие «геометрическое место точек» необходимо и в курсе алгебры при изучении графиков простейших функций в VII-VIII классах. График функции определяется как геометрическое место точек плоскости, координаты которых являются соответственными значениями аргумента и функции. Понятие графика необходимо и в курсе физики, где в последние годы все большее значение приобретает графический метод.

В VI-VII классах нельзя отказываться и от решения задач на построение методом геометрических мест, одним из основных методов конструктивной геометрии.

Решая задачи на построение, учащиеся учатся применять свои знания, ибо они должны сами отвечать на поставленные вопросы. В настоящее время главной задачей учителей математики является не столько сообщение математических фактов, определений, формул, теорем, сколько необходимость учить детей мыслить, учить их самостоятельно работать.

Учащиеся VI класса не сразу сознательно, глубоко усвоят понятие «геометрическое место точек». Важно, чтобы они с данными словами связывали более полную группу геометрических фигур, чтобы понятие охватывало целый класс, а не один – два отдельных примера. Учащиеся должны видеть различные примеры геометрических мест точек в различных формулировках, чтобы на основе анализа и синтеза осознать общность этого понятия, охватывающего обширный класс геометрических фигур, создать себе соответствующее представление об этом понятии.

Трудным для понимания шестиклассников является и абстрактное понятие «множество». Приводимые примеры множеств (множество учащихся, деревьев в саду и т.п.), в большинстве своем, есть конечные множества, а почти все геометрические места точек, рассматриваемые в школьном курсе геометрии, являются бесконечными точечными множествами.

Понятие геометрического места точек, обладающих некоторым свойством, вводим на примере геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек. После изучения признаков равенства прямоугольных треугольников решаем задачу: «Найти точку, равноудаленную от двух данных точек *А* и *В»*.

Учащиеся обычно указывают лишь точку *О*, середину отрезка *АВ*. А нет ли на плоскости еще точек, равноудаленных от *А* и В? При построении с помощью циркуля нескольких таких точек учащиеся самостоятельно припоминают свойство точек оси симметрии и говорят, что точек, равноудаленных от *А* и *В*, будет много, все они лежат на оси симметрии данных точек *А* и *В*.

Можно непосредственно, основываясь на признаках равенства прямоугольных треугольников, доказать, что всякая точка, равноудаленная от данных точек *А* и *В*, лежит на их оси симметрии, то есть на перпендикуляре, проведенном к отрезку *АВ* через его середину, и наоборот, всякая точка этого перпендикуляра равноудалена от точек *А* и *В*.

После этого даем определение геометрического места точек, обладающих некоторым свойством, как множества всех точек, обладающих этим свойством, и только таких точек, и предлагаем учащимся сформулировать результат решения задачи и записать в тетради, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек, есть ось симметрии данных точек.

Здесь впервые встречаемся не с отдельной, фиксированной точкой, а с любой точкой прямой. До этого учащиеся почти всегда имели дело с неподвижными, определенными по положению точками, а здесь точка может перемещаться, некоторым образом, но все время она обладает определенным свойством. Поэтому большую пользу окажет учащимся наглядное пособие с неподвижными точками *A* и *B* и перемещающейся по их оси симметрии точкой *O*, соединенной резинкой с точками *A* и *B,* с помощью которого хорошо разъяснить смысл выражения: «Любая точка оси симметрии равноудалена от *A* и *B*».

Примечание. Включение в определение лишних с научной точки зрения слов «и только таких точек» вызвано педагогическими соображениями. В противном случае в определении явно не выделяется необходимость доказательства двух взаимно обратных теорем для утверждения, что та или иная фигура является геометрическим местом точек, обладающих определенным свойством.

Затем надо показать учащимся, что одно и то же геометрическое место точек может встречаться в различных формулировках, для чего сравниваем, например, известное им геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, с такими, как геометрическое место точек, равноудаленных от концов дачного отрезка; геометрическое место вершин равнобедренных треугольников с общим основанием (середина основания уже исключается).

Применяя эти геометрические места точек, решаем задачи методом геометрических мест, начиная с простейшей задачи. Какие же задачи считать простейшими?

Сущность метода геометрических мест состоит в следующем:

1) Решение задачи сводим к отысканию точки, удовлетворяющей определенным условиям.

2) Отбрасываем одно из этих условий, получим геометрическое место точек, удовлетворяющих оставшимся условиям.

3) Отбрасываем затем какое-нибудь другое условие, получим новое геометрическое место точек, удовлетворяющих остальным условиям.

4) Искомая точка, удовлетворяющая всем условиям, является точкой пересечения полученных геометрических мест.

Какую задачу ни возьмем, одновременно второй и третий этапы отсутствовать не могут, ибо тогда это не была бы задача на метод геометрических мест. Но без одного из этих этапов можно обойтись, если в условии указать геометрическую фигуру, которой должна принадлежать искомая точка. Чтобы избежать и первого этапа, достаточно задачу сформулировать в виде: «Найти точку...».

Следовательно, простейшими задачами на метод геометрических мест будут задачи вида: «На какой-либо фигуре найти точку, удовлетворяющую определенным условиям».

2. Метод осевой симметрии. Осевая симметрия – это первый из видов движения, преобразования, с которым учащиеся встречаются в систематическом курсе геометрии.

В настоящее время в геометрии большое значение имеют конструктивные навыки, при помощи которых учащиеся овладевают методами преобразования одних геометрических фигур в другие, и постепенно знакомятся с важной идеей геометрического преобразования, которое является аналогом функциональной зависимости в геометрии.

В новой программе по геометрии значительное внимание уделено геометрическим преобразованиям, то есть таким операциям, когда каждой точке одной фигуры по некоторому закону ставится в соответствие определенная точка другой фигуры. В средней школе из геометрических преобразований рассматриваются различные виды движений, а также подобие фигур.

Движение должно служить одним из основных методов доказательства многих теорем геометрии в VI-VII классах. Более того, идея движения может быть положена в основу построения значительной части курса геометрии. Применяя понятие осевой симметрии, можно значительно усовершенствовать школьный курс геометрии. Например, применение свойств оси симметрии позволяет довольно просто изложить три признака равенства треугольников, специальные случаи равенства прямоугольных треугольников и ряд других тем из главы «Треугольники».

Различные виды движений дают возможность решать практически важные задачи на построение, доказательство и задачи вычислительного характера. Поэтому все изложение должно сопровождаться упражнениями, среди которых предпочтение следует отдавать задачам на построение и на доказательство.

Известно, что осознанные знания могут быть получены только в процессе активной и творческой деятельности самостоятельно или под руководством учителя. При изучении осевой симметрии имеются большие возможности привлечь учащихся к формированию самого понятия.

В школьном курсе геометрии выражение «симметрия» имеет двоякий смысл: оно обозначает и вид движения (преобразование), и свойство плоской фигуры, обладающей симметрией, которая при соответствующем движении переходит сама в себя. Это различие мы должны учитывать, ибо в преподавании приходится иметь дело с каждым из этих истолкований симметрии. И одна из задач учителя – добиться того, чтобы учащиеся восприняли симметрию как один из способов преобразования одной фигуры в другую, а не как свойство неподвижной фигуры.

Поэтому после введения определения симметричных относительно оси точек, внимание учащихся переключаем на практику построения взаимно симметричных относительно оси фигур, для чего решаем задачи вида:

1. Построить точку, симметричную данной точке относительно данной прямой.

2. Построить отрезок (прямую), симметричный данному отрезку (прямой) относительно данной прямой.

3. Построить треугольник, симметричный данному треугольнику относительно данной прямой.

4. Построить окружность, симметричную данной окружности относительно данной прямой.

5. Построить треугольник, симметричный данному прямоугольному треугольнику относительно:

а) его катета;

б) его гипотенузы.

При решении этих задач одновременно устанавливаем и равенство взаимно симметричных отрезков, углов и других фигур, иллюстрируя наши утверждения перегибанием чертежа по оси симметрии, что помогает найти и сделать понятным способ решения задачи.

Например, при решении задач вида: «Даны две прямые. Найти на них точки, симметричные относительно третьей прямой» очень удобно нанести все три прямые на кальку и перегнуть чертеж по третьей прямой. Тогда решение задачи становится очевидным и понятным для всех учащихся. Таким же образом решаем задачи:

а) даны прямая и треугольник. Найти на одной прямой и на контуре треугольника точки, симметричные друг другу относительно другой прямой;

б) даны окружность и треугольник. Найти на окружности и на контуре треугольника точки, симметричные друг другу относительно данной прямой.

Чтобы показать учащимся важность и необходимость умений и навыков в построении симметричных относительно оси точек, кроме разбора известных уже им примеров, полезно выполнить разметку какого-нибудь изделия, которое нужно будет изготовлять в ближайшее гремя.

Обучение должно вестись так, чтобы учащиеся усвоили знания не как изолированные, оторванные от других, а как подготовленные предшествующими знаниями, и которые естественно включаются в последующие. Поэтому в дальнейшем, где только возможно, следует использовать понятие и свойства осевой симметрии и правила построения симметричных фигур при изучении новых геометрических образов и при решении доступных учащимся задач на построение.

Знание свойств симметричных относительно оси фигур позволяет рассматривать решение основных задач на построение с помощью циркуля и линейки до изучения признаков равенства треугольников и понятия геометрического места точек. Сами построения являются для учащихся понятными и естественными.

Действительно, чтобы построить точку, симметричную относительно некоторой прямой данной точке A, не лежащей на этой прямой, построим две окружности, проходящие через точку A с центрами в произвольных точках O_1, и O_2 данной прямой. Так как для окружностей данная прямая является осью симметрии, то вторая их общая точка A_1 будет искомой точкой.

3. *Метод центральной симметрии*. В течение двух лет мы знакомили учащихся с центральной симметрией. Рассматривали построение и свойства точек, отрезков и треугольников, симметричных соответствующим данным фигурам относительно некоторой точки O. Затем рассматривали вопрос о центре симметрии параллелограмма, решая предварительно задачу: «Если в параллелограмме через точку O пересечения его диагоналей провести произвольную прямую, то отрезок прямой, заключенный между его сторонами, делится в точке O пополам». Получив соответствующий вывод о центре симметрии параллелограмма, вводим понятие центрально-симметричных фигур, подчеркивая, что каждой точке M фигуры, имеющей центр симметрии в точке O, соответствует другая точка M_1 этой же фигуры, отстоящая от O на такое же расстояние, как и точка M, и лежащая на прямой MO.

Решали такие задачи на построение с применением центральной симметрии;

1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

2. Дан угол и точка P внутри него. Провести через эту точку прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился в данной точке пополам.

У большинства учащихся не создавалось правильного представления о применении здесь центральной симметрии, они рассматривали эти решения, как решения задач дополнением искомых треугольников до параллелограммов.

Причины того, что это понятие оказалось трудным при таком изложении, следующие:

во-первых, понятие центральной симметрии точек и фигур вводилось формально, без активного участия учащихся в формировании этого понятия;

во-вторых, примеры задач на построение для иллюстрации применения центральной симметрии подобраны неудачно;

в-третьих, в курсе геометрии по установившейся традиции центральная симметрия не находит должного применения.

2. Результаты оказались значительно лучшими, когда понятие центральной симметрии начали вводить так же, как и понятие осевой симметрии. Объяснение этого понятия сопровождалось показом соответствующих наглядных пособий, а также изделий, для которых учащиеся данного класса выполняли разметку, принимая точку пересечения базисных линий за центр симметрии и откладывая на одной и той же прямой по разные от этой точки стороны равные отрезки.

Затем решаем задачи вида: «Построить точку (отрезок, треугольник), симметричную данной точке (отрезку, треугольнику) относительно данного центра *O*», устанавливая одновременно равенство центрально-симметричных отрезков и треугольников. Чтобы учащиеся поняли, что любые центрально-симметричные фигуры равны, предлагаем им начертить произвольную прямолинейную фигуру и найти центрально-симметричную ей фигуру по отношению к некоторому центру. Поворачивая одну из них на 180^{o} около центра *O*, учащиеся убеждаются, что эти фигуры совпадают. Затем, как и в прежнем варианте, вводим понятие центрально-симметричных фигур, рассматривая предварительно симметрию параллелограмма. Чтобы показать приложение центральной симметрии к решению задач на построение, подбираем задачи, для решения которых требуется применить действительно центральную симметрию, а не дополнение до параллелограмма.

4. Метод параллельного переноса. В средней школе умножение движений не рассматривается, и мы не можем вводить параллельный перенос как произведение двух отражений около параллельных осей, а вынуждены исходить из свойств параллелограммов.

Целесообразно с параллельным переносом знакомить учащихся в процессе решения задач па построение при изучении темы «Четырехугольники».

Имеются задачи вычислительного характера и на доказательство, требующие проведения прямых, параллельных боковой стороне трапеции, или в которых уже проведена такая прямая, например:

1. В трапеции *ABCD* из вершины *B* проведена прямая, параллельная боковой стороне *CD*, до встречи в точке *E* с большим основанием *AD*. Периметр треугольника *ABE* равен 1м, а длима *ED* равна 3дм. Определить периметр трапеции.

2. Доказать, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны. Для решения этой задачи учащиеся проводят прямую, параллельную боковой стороне, чтобы свести доказываемое предложение к свойству равнобедренного треугольника.

Таким образом, при решении задач па построение мы применяем метод параллельного переноса, сущность которого состоит в следующем:

при анализе какую-нибудь фигуру подвергаем параллельному переносу на некоторое расстояние в определенном направлении, в результат чего получаем вспомогательную фигуру, построение которой или очевидно, или не представляет затруднений. После этого производим обратный перенос и получаем искомую фигуру. Здесь же разъясняем, что параллельный перенос фигуры на некоторое расстояние означает, что все ее точки смещаются на одинаковое расстояние в определенном направлении. Следовательно, для определения параллельного переноса нужно знать направление и величину переноса.

Параллельным перенос можно задать вектором переноса, которым одновременно определял бы и направление, и интервал данного переноса, но понятие вектора для семиклассников неизвестно, поэтому мы вынуждены выделять отдельно направление и величину переноса. В дальнейшем при решении всех задач па построение методом параллельного переноса требуем от учащихся указывать как направление переноса, так и расстояние, на которое перемещается каждая точка фигуры.

5. *Метод подобия*. Понятие подобии фигур в курсе геометрии VIII класса обычно иллюстрируется многочисленными примерами подобных фигур, встречающихся в быту, в науке и технике. Используется и имеющийся у учащихся опыт применения подобия при изготовлении планов и карт на уроках географии; при проведении мензульной съемки, если она была проведена до изучения этой темы; при выполнении рабочих чертежей на уроках черчения; при разметке деталей в школьных мастерских по чертежам, выполненным в некотором масштабе.

Для лучшего усвоения метода подобия при изучении теоретического материала необходимо проводить подготовительную работу, в частности, разъяснять, хотя бы в простейших случаях (треугольники, параллелограммы), условия, определяющие форму фигуры с точностью до подобия. Так как учащиеся должны уметь выполнять построения вспомогательных фигур, подобных искомым, то нужно повторить изученные ранее методы и приемы геометрических построений, в особенности, метод геометрических мест, что можно сделать при изучении пропорциональности отрезков в связи с новым материалом.

Учащиеся, повторив материал, относящийся к методу геометрических мест, легче воспринимают метод подобия. При решении задач методом подобия, как и при решении задач методом геометрических мест, отбрасываем одно из условий, в результате чего задача становится неопределенной. Ее решением при применении метода геометрических мест является бесконечное множество точек, удовлетворяющих оставшимся условиям, а в случае метода подобия получаем бесконечное множество фигур, объединенных одним свойством; все они подобны искомой фигуре. Взяв одну из них, мы с помощью подобного преобразования, учитывая ранее отброшенное условие, получаем искомую фигуру. Эта аналогия помогает лучше усвоить метод подобия.

При изучении понятия «центр подобия» и при построении многоугольника, подобного данному, разъясняем учащимся, что соответственные точки всегда лежат на одной прямой, проходящей через центр подобия, а прямая, не проходящая через центр подобия, преобразуется в параллельную ей прямую. После того как учащиеся ознакомятся с построением многоугольника, подобного данному, разбираем сущность метода подобия, решая несложную задачу, в которой были бы ярко выражены характерные признаки этого метода. Например: «Построить треугольник, знай два его угла A и C и высоту h_b».

Эту задачу можно решить различными способами, например методом параллельного переноса или методом геометрических мест. Разобрав предлагаемые учащимися решения и повторив сущность применяемых методов, указываем на возможность решения еще одним способом: с применением подобия фигур.

Если не учитывать высоту искомого треугольника, то по двум данным углам мы можем построить бесконечное множество треугольников, но все они будут подобны искомому. Построим один из них, например треугольник $A_1B_1C_1$ (рисунок 5).

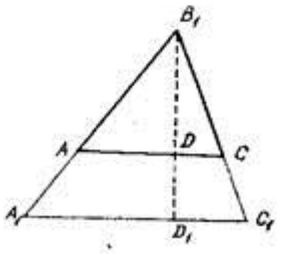


Рисунок 5

Чтобы выяснить, будет ли он искомым, проведем высоту $B_l\ D_1$ и сравним ее с данной высотой. В общем случае полученная высота не будет равна данной. Если, например, $B_l\ D_1$ меньше данной высоты в два раза, значит, и стороны треугольника нужно увеличить в два раза, ибо сходственные высоты в подобных треугольниках относятся как сходственные стороны. Если высота $B_l\ D\ _1$ больше данной в несколько раз, тогда нужно во столько же раз уменьшить и стороны треугольника. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ нужно подобно преобразовать так, чтобы высота была равна данному отрезку h_b, для чего достаточно определить коэффициент подобия и выбрать центр подобия. Коэффициент подобия равен отношению данной высоты к настроенной высоте $B_l\,D_1$, то есть $k = \frac{h_b}{B_1D_1}$. За центр подобия выберем, например, точку B_1, тогда очень легко построить точку, соответствующую точке D_1, для чего достаточно отложить отрезок $B_1D = h_в$. Проведя прямую $CA \parallel C_1A_1$, получим искомый треугольник AB_1C, который действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

Построения, выполняемые с применением транспортира и треугольника, просты, доказательство и исследование элементарны, и все внимание учащихся концентрируется на уяснении сущности нового для них способа решения задач на построение.

Повторяем решение задачи: не учитывая высоты, по данным углам построили треугольник, подобный искомому; учитывая затем заданную высоту, подобно преобразовали построенный треугольник в искомый. Такой способ решения задачи называется методом подобия. Этим методом можно решать лишь такие задачи па построение, условия которых можно разбить на две части, одна из которых определяет фигуру с точностью до подобия (два утла треугольника), а вторая часть условия определяет размеры фигуры (высота).

Таким образом, метод подобия при решении задач на построение состоит в следующем; отбросив условие, определяющее размеры фигуры, по оставшимся условиям строим фигуру, подобную искомой; учитывая затем ранее отброшенное условие, подобно преобразовываем построенную фигуру в искомую.

6.Алгебраический метод. Одним из важных методов, применяемых в школьном курсе геометрии, является алгебраический метод решения задач на построение. Уже в VI-VII классах учащиеся неоднократно применяли алгебру при решении задач вычислительного характера и задач на доказательство с целью упрощения решения. Алгебра дает очень удобный и хороший способ решения геометрических вопросов аналитическим путем.

В VI классе целесообразно рассказать, что некоторые сведения по алгебре были известны еще в глубокой древности, но вопросы алгебры не отделялись от вопросов арифметики и геометрии. Позже греческие ученые, такие, как Пифагор, Евклид, которые занимались преимущественно геометрией, получили значительные результаты и в алгебре. Но многие алгебраические тождества доказывались ими геометрически.

В IX в. н. э. узбекский ученый Мухаммед-бен-Муса ал-Хорезми написал книгу «Хисаб ал-джебр вал-мукабала», появление которой явилось как бы моментом оформления науки алгебры. В дальнейшем алгебра получила свое самостоятельное развитие и начала оказывать большую помощь при решении различных задач других математических дисциплин, в том числе и геометрии.

Алгебраический метод решения задач на построение рассматривается как дальнейшее расширение применения алгебры к геометрии. Как известно, он состоит в следующем. Предположив задачу решенной:

1. Устанавливаем, какой или какие отрезки (в редких случаях углы или дуги) нужно определить, чтобы решить задачу, и обозначаем длины этих отрезков через $x, y, z, \ldots$, а длины данных отрезков – через $a, b, c, \ldots,$ то есть вводим обозначения.

2. Из условия задачи, пользуясь известными геометрическими соотношениями между искомыми и данными отрезками, составляем уравнение или систему уравнений.

3. Решаем это уравнение или систему уравнений.

4. Исследуем полученные формулы для неизвестных отрезков по условию задачи.

5. Строим с помощью инструментов искомые отрезки, выраженные полученными формулами через данные отрезки. После того как неизвестные построены, выполняем построения, которые окончили бы решение, проводим доказательство и исследование.

Первые четыре этапа известны учащимся, так как при решении геометрических задач на вычисление и алгебраических на составление уравнений всегда выделялись такие же этапы. Это говорит о том, что задачи на построение, решаемые таким методом, можно рассматривать как обобщение задач вычислительного характера, а с другой стороны, при применении алгебраического метода всякая задача на построение заменяется вначале задачей на вычисление, так что каждая задача на построение, решаемая этим методом, является, по существу, и задачей на вычисление.

Целесообразность рассмотрения этого метода в средней школе не определяется только тем, что учащиеся ознакомятся с еще одним видом задач, для решения которых применяется алгебра. Алгебраический метод решения отдельных, даже сложных задач на построение более доступен учащимся, ибо достаточно получить соответствующую формулу для определения искомой величины, чтобы стало ясным все решение задачи.

Алгебраический метод позволяет легко установить условия возможности решения задачи, а также наличие определенного числа решений при тех или иных значениях и положениях данных.

Однако в средней школе не следует чрезмерно увлекаться этим методом за счет других важных разделов. Нужно решать доступные и интересные для учащихся задачи.

2. РАЗРАБОТКА КУРСА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Проведем анализ трех учебников по геометрии в курсе основной школы в Таблице 1.

Таблица 1 – Сравнительный анализ учебников по геометрии

Темы	Погорелов	Атанасян	Мерзляк
Метод вспомогательного треугольника	-	+	+
Метод геометрических мест	+	+	+
Построения, связанные со свойствами четырёхугольниками и замечательными точками треугольников	-	+	+
Алгебраические методы	+	+	+
Применение движения в задачах на построение	+	+	+
Построение треугольников и четырёхугольников с помощью движений	+	+	+
Необычные построения	+	+	+

На основании данной таблицы возникла необходимость в разработке внеурочного курса по геометрии для учащихся основной школы.

Пояснительная записка

Данная рабочая программа курса внеурочной деятельности составлена на основе учебно-методической литературы, которая полностью соответствует требованиям нового Федерального государственного образовательного стандарта по геометрии и реализует его основные идеи.

Программа реализует системно-деятельностный подход в обучении геометрии, идею дифференцированного подхода к обучению.

Программа реализует идею межпредметных связей при обучении геометрии, что способствует развитию умения устанавливать логическую взаимосвязь между явлениями и закономерностями, которые изучаются в школе на уроках по разным предметам.

Большое внимание уделяется формированию и развитию логического мышления учащихся при решении задач на построение.

Приобретение новых знаний обучающимися осуществляется в основном в ходе их самостоятельной деятельности. Среди задачного и теоретического материала акцент делается на упражнения, развивающие «геометрическую зоркость», интуицию и воображение обучающихся. Уровень сложности задач таков, чтобы их решения были доступны большинству обучающихся.

Методической особенностью курса является разработка системы учебных заданий для каждого урока и для всего курса в целом. Задания непосредственно адресованы ученику, обусловливая характер его учебных действий. Поэтому содержание, формулировка и система учебных заданий в данном курсе имеют целый ряд отличительных особенностей по сравнению с системой заданий, реализованных в привычных учителю пособиях по математике. Последовательность заданий выстраивается таким образом: в начале предлагается организационно-подготовительное задание, цель которого – подготовить ребенка к той деятельности, которую он будет выполнять в следующих – основных – заданиях (это может быть активизация внимания и восприятия, развитие зрительно-моторной координации, разработка мелких мышц руки и т.п.), затем предлагается задание, обязательно носящее частично поисковый характер или содержащее элементы творчества. Процесс выполнения такого задания связан с необходимостью проведения зрительного анализа или синтеза, активизацией пространственного анализа, активизацией интуиции ребенка, опирающейся на его опыт и продуцирующей догадку или на ранее усвоенные знания, умения и навыки, позволяющие включить в активную познавательную деятельность всех учеников класса. Цель такого задания – организация осознания детьми той учебной задачи, на решение которой должна быть направлена их последующая деятельность. Форма подачи задания – проблемно-поисковая, реализованная посредством вещественной или графической модели, воспринимаемой ребенком визуально, что позволяет максимально привлечь внимание и обеспечить принятие учебной задачи всеми учениками класса.

Далее следует этап закрепления, на котором также предлагаются задания, в определенной мере отличные от привычных "тренировочных" заданий. Во-первых, они, как правило, уже оформлены так чтобы позволить максимально опираться на зрительное восприятие, зрительный анализ и синтез, что немаловажно для ребенка этого возраста; во-вторых, они отличаются вариативностью способов выполнения, необходимостью активно привлекать ранее усвоенные знания, умения, навыки, а также требуют использования приемов умственных действий. Иными словами, даже тренировочные задания в приведенном курсе имеют продуктивный характер.

Таким образом, любое задание в предлагаемой системе является одновременно и обучающим, и развивающим. Ту же функцию выполняет, и система дополнительных практических (конструктивных) и логических (логико-конструктивных) заданий. Они могут выполняться как фронтально, так и отдельными детьми – самостоятельно, по их выбору. Но при этом учитель не занимает позицию объясняющего или контролирующего субъекта – он сам активно включается в процесс выполнения заданий.

Виды деятельности:

1. Теоретические (лекция, беседа, рассказ).

2. Практические (выполнение вычерчиваний, работа с книгой, словарем).

3. Индивидуальные.

4. Частично-поисковые.

Методы:

1. Словесный.

2. Частично-поисковый.

3. Исследовательский.

4. Наглядно-демонстрационный.

5. Проблемный.

Межпредметные связи: математика; русский язык; литература; искусство.

Занятие 1. Метод вспомогательного треугольника.

На этом занятии мы рассмотрим решение задач на построение треугольников по их различным элементам, как основным, так и вспомогательным.

К вспомогательным элементам треугольника чаще всего относятся: медианы, высоты, биссектрисы, периметр, радиусы описанной и вписанной окружностей. Иногда рассматривают также сумму (разность) двух сторон или двух углов.

В большинстве случаев такие задачи решаются методом вспомогательного треугольника. Суть данного метода заключается в следующем: необходимо привести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решённой задаче на построение треугольника. Таким образом, решение задачи сводится к уже известному нам построению какого-либо треугольника. Заметим, что в любом случае для построения треугольника достаточно знать три его элемента, одним из которых хотя бы один –линейный.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведённой к ней высоте.

Решение:

Пусть искомый треугольник ABC по заданным стороне b и высоте h уже построен. (рисунок 6).

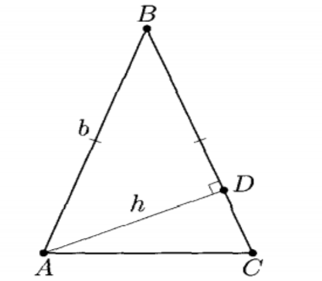


Рисунок 6

Тогда на нашем чертеже уже образовался прямоугольный треугольник ABD, у которого заданы катет и гипотенуза. Поэтому задача сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника ABD, у которого заданы катет и гипотенуза. Поэтому задача сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника ABD по катету и гипотенузе и к построению на его основе искомого треугольника (продолжим катет BD так, чтобы длина отрезка BC была равна b).

Рассмотрим более сложную задачу.

Пример 2: Постройте треугольник ABC по двум его углам и периметру. (Периметр задан в виде отрезка).

Решение: пусть искомый треугольник ABC с данным периметром P и углами α и β при вершинах A и B соответственно- построен. «Развернем» его, то есть на прямой AB отложим отрезок AD, равный AC, и отрезок BУ, равный BC. Полученные точки D и E соединим с точкой C (рисунок 7).

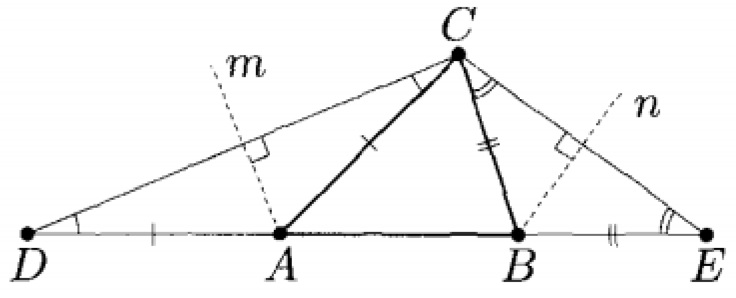


Рисунок 7

Заметим, что треугольник ACD — равнобедренный, угол CAB – внешний для этого треугольника, поэтому угол CDA = DCA = $\frac{\alpha}{2}$. Аналогично угол CED = ECB = $\frac{\beta}{2}$. Таким образом, задача сводится к построению вспомогательного треугольника CDE по стороне и двум прилежащим к ней углам (DE = P, угол CED = $\frac{\alpha}{2}$). Для того, чтобы теперь получить вершины A и B искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры m и n к отрезкам CD и CE соответственно.

Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что вспомогательного треугольника не было, но мы создали дополнительным построением.

Заметим, что в большинстве случаев при решении задач, когда задана сумма (или разность) каких-либо отрезков, необходимо сделать дополнительное построение, в результате которого заданный отрезок появляется на чертеже. Такой метод называется «спрямлением» (и он применяется только в задачах на построение).

Задачи для самостоятельного решения:

1. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведенной к боковой стороне.
2. Постройте треугольник по следующим данным:

   а) стороне и проведенным к ней медиане и высоте;

   б) двум углам и высоте (рассмотрите два случая);

   в) двум сторонам и медиане (рассмотрите два случая);

г) стороне, и прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

3. Постройте прямоугольный треугольник, если даны его острый угол и разность гипотенузы, катет.

Занятие 2. Метод геометрических мест.

Метод геометрических мест точек на плоскости (далее — ГМТ) основан на том, что часть объектов, получаемых при стандартных построениях циркулем и линейкой, являются одновременно ГМТ, обладающих определенными свойствами. Например, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от заданной точки на фиксированное расстояние; серединный перпендикуляр к отрезку — ГМТ, равноудаленных от концов отрезка; биссектриса угла – ГМТ, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон, и т.д.

Принцип ГМТ состоит в следующем:

Если некоторая точка X удовлетворяет двум условиям, то строятся ГМТ, удовлетворяющие каждому из этих условий, и тогда точка X принадлежит их пересечению.

Перед рассмотрением примеров учащимся целесообразно напомнить основные ГМТ на плоскости, которые им должны быть известны, в частности:

— ГМТ, удаленных от данной точки на заданное расстояние (окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию);

— ГМТ удаленных от данной прямой на заданное расстояние (пара параллельных прямых, каждая точка которых находится на заданном расстоянии от данной прямой);

— ГМТ, равноудаленных от двух данных точек (серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки);

— ГМТ, равноудаленных от сторон угла и лежащих внутри этого угла (биссектриса угла);

— ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом (окружность, у которой данный отрезок является диаметром, с «выколотыми» концами данного отрезка).

Пример 1. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проведенной к ней высоте.

Решение: пусть искомый треугольник ABC с гипотенузой AB, равной *c*, и высотой CD, равной h, построен (рисунок 8).

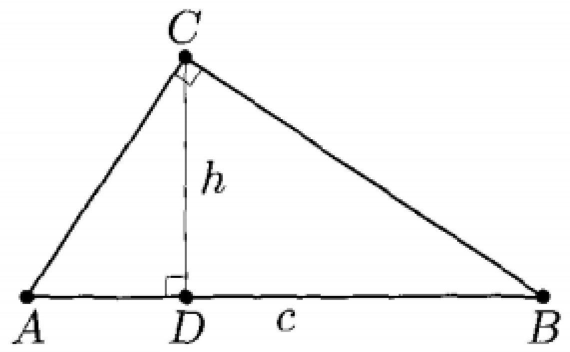


Рисунок 8

Вспомогательного треугольника нет, так как ни один из полученных на чертеже треугольников построить по имеющимся данным нельзя. Создать его путем дополнительных построений также непросто. Но про вершину C известно, что:

1) угол ABC =90°;

2) расстояние от C до прямой AB равно h.

Поэтому решение задачи сводится к построению отрезка AB, имеющего заданную длину c, затем к построению ГМТ, из которых этот отрезок «виден» под прямым углом, и ГМТ, находящийся на данном расстоянии от данной прямой AB. Вершина C является пересечением построенных ГМТ.

Заметим, что при решении этой задачи крупными «блоками» было уже не построение вспомогательных треугольников, а построение известных геометрических мест.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Объясните, как построить следующие ГМТ:

а) удалённых от данной прямой на заданное расстояние;

б) из которых данный отрезок виден под заданным углом (рассмотрите три случая: заданный угол — прямой, острый, тупой).

2. Объясните, как построить касательную к окружности, проходящую через заданную точку (рассмотрите два случая).

3. Даны три точки A, B и C. Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

4. Объясните, как построить прямую, проходящую через заданную точку M так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.

Занятие 3. Построения, связанные со свойствами четырёхугольников и с замечательными линиями и точками треугольников.

На этом занятии мы рассмотрим *решение задач на построение четырехугольников* и *решение задач на построение треугольников*, в которых применяются свойства их замечательных линий и точек.

Решение задач на построение четырёхугольников сводиться, как правило, к решению задач на построение треугольников. При этом применяются уже известные нам два основных метода: вспомогательного треугольника и ГМТ.

Пример 1. Постройте параллелограмма по углу и двум высотам.

Решение: Пусть искомый параллелограмм ABCD с углом BAD, равным α, и высотами BM и BK, длины которых h_1 и h_2, построен (рисунок 9). Так как сумма углов четырёхугольников BKDM равна 360^0, то угол KBM = 180^0- угол ADC = угол BAD $= \alpha$.

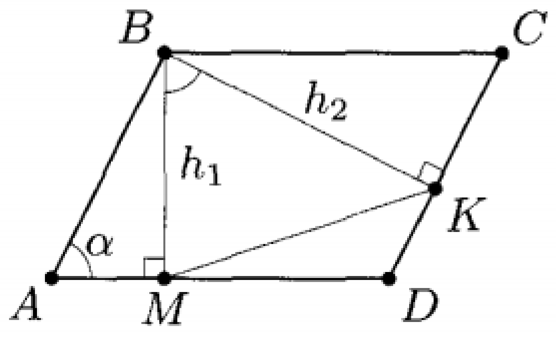


Рисунок 9

Следовательно, решение задачи сводиться к построению вспомогательного треугольника ВМК по двум сторонам и углу между ними, а затем проведя через точки В и М перпендикуляры к ВМ, а через точки В и К – перпендикуляры к ВК, можно получить остальные вершины искомого параллелограмма.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Построить ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.
2. Построить прямоугольник по диагонали и периметру.
3. Постройте треугольник по двум высотам и медиане, если все они проведены из разных вершин.
4. Постройте треугольник, если даны точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжением медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.

Занятие 4. Применение движений к решению задач на построение.

На этом занятии будет рассмотрено применение различных видов движения при решении задач на построение.

Напомним, что движением мы называем преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками. Существуют четыре основных вида движения на плоскости: центральная и осевая симметрии, параллельный перенос и поворот. Напомним также, что композиция движений так же является движением.

Примечание для учителя:

1. Решение задачи (№ 1) сводится к построению образа данной окружности при параллельном переносе на вектор заданной длины а и параллельной прямой *c*.

2. Количество решений задачи зависит от количества точек пересечения образа окружности и прямой и определяется взаимным расположением заданных прямых и окружности. Фигуры, которым принадлежат концы искомого отрезка, могли бы быть и другими, при этом способ решения задачи не меняется.

Пример 1:

Постройте отрезок, заданной длины a, параллельный данной прямой с, концы которого лежат на данной прямой m и на данной окружности с центром O (данные прямая m и окружность не пересекаются).

Решение: предположим, что искомый отрезок AB построен (точка A лежит на окружности, точка B – на прямой m, (рисунок 10).

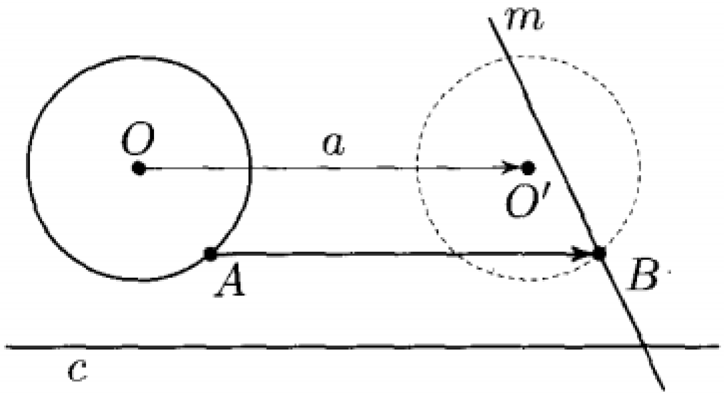


Рисунок 10

Заметим, что точка B является образом точки A при параллельном переносе на вектор длины а, который параллелен прямой с тогда, так как A принадлежит данной окружности, B должна принадлежать образу этой окружности при указанном параллельном переносе. С другой стороны, точка В принадлежит прямой m, поэтому должна принадлежать пересечению этой прямой и образа окружности.

Таким образом, решение задачи сводится к построению образа данной окружности при параллельном переносе на вектор заданной длины a и параллельной прямой c. Искомая точка В – пересечение прямой m и полученной окружности с центром O_1, выполнив затем параллельный перенос на противоположный вектор, получим точку А, АВ — искомый отрезок.

Примечание для учителя:

Решение задачи (№ 2) сводится к построению образа F_1 фигуры F при симметрии относительно О (центральная симметрия).

Пример 2: Постройте отрезок с серединой в данной точке О и концами на двух заданных фигурах F и Р.

Пример 3: (осевая симметрия)

Постройте треугольник по серединам двух его сторон и прямой, содержащий биссектрису, проведенную к третьей стороне.

Пример 4: (поворот)

Постройте квадрат, три вершины которого принадлежат трем заданным параллельным прямым.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Постройте параллелограмм АВСД по двум заданным вершинам А и В, если две другие его вершины принадлежат данной окружности.
2. Постройте ромб с центром в данной точке и тремя вершинами, лежащими на трех заданных прямых.
3. Постройте квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум заданным прямым.
4. Постройте равносторонний треугольник с вершиной в данной точке так, чтобы две другие вершины принадлежали данной прямой и данной окружности.

5. Постройте равносторонний треугольник с центром в данной точке так, чтобы две его вершины принадлежали двум заданным фигурам.

Занятие 5 Алгебраические методы.

Иногда в задачах на построение, используют записать алгебраических соотношений, выражающие неизвестные элементы предлагаемой конструкции через заданные. Научившись представлять алгебраические формулы в виде построений циркулем и линейкой, мы научимся решать такие задачи.

Примечание для учителя: для объяснения данного метода удобно обратится к теореме Фалеса, на основании которой мы умеем делить заданный отрезок на n равных частей (для любого натурального n).

Вопрос для учащихся: можно ли построить отрезки длины $a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{3}$, если задан отрезок длины a?

Ответ: да, в первом случае достаточно построить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a, тогда его гипотенуза и будет искомый отрезок. Во втором случае можно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 a и катетом a, тогда другой катет будет искомый.

Пример 1: построить угол величиной 36^0.

Решение: рассмотрим равнобедренный треугольник AOB, в котором AO = OB = R, угол AOB = 36^0 (рисунок 11).

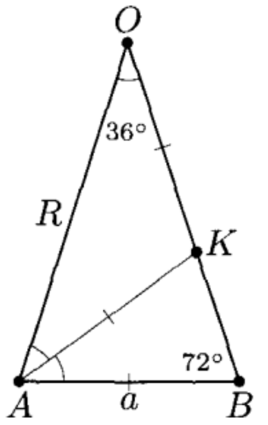


Рисунок 11

Углы при основании этого треугольника равны по 72^0. Проведем биссектрису АК, тогда угол ОАК = ВАК = 36^0, угол АКВ = 72^0. Следовательно, АК = ОК = АВ. Так как треугольники подобны АОВ ~ ВАК. Получим отношения: $\frac{\text{OA}}{\text{AB}} = \frac{\text{OK}}{\text{BK}}$(по св-ву биссектрис). Пусть АВ = a, тогда $\frac{R}{a} =$ $= \frac{a}{R-a}$, следовательно $a^2 + Ra - R^2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет один положительный корень: $a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Таким образом, решение задачи сведется к выбору произвольного отрезка длины R («единицы измерения») и построению равнобедренного треугольника с боковой стороной R и основанием $a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$. Угол при вершине построенного треугольника будет искомым.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Постройте правильный пятиугольник с заданной стороной a.

2. Постройте окружности с центрами в трех данных точках, попарно касающиеся внешним образом.

3. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенной к третьей стороне.

4. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе, проведенной к одному из катетов.

Занятие 6. Построение треугольников и четырехугольников с помощью движений.

На этом занятии мы рассмотри применение движений к традиционным задачам на построение треугольников и четырехугольников по заданным элементам.

Пример: Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих углов.

Решение: пусть искомый треугольник ABC, в котором BC = a, AC = b, угол B – угол A = α, построен (рисунок 12).

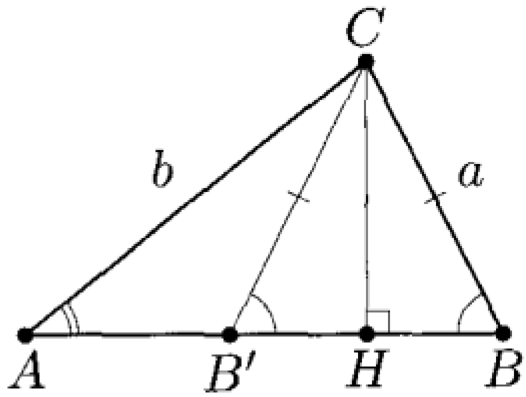


Рисунок 12

Проведем высоту CH и рассмотрим точку B_1, симметричную вершине B относительно прямой CH.

Тогда B_1C = BC = a; угол CB_1H = CBH, поэтому угол ACB_1 равен углу CB_1H — угол CAB = α. Таким образом, на чертеже образовался вспомогательный треугольник AB_1C, который можно построить по двум сторонам и углу между ними. Вершина B искомого треугольника — вторая точка пересечения прямой AB_1 с окружностью с центром C и радиусом C_1.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Постройте трапецию:

   а) по основанию и диагоналям;

   б) по основанию и боковым сторонам;

2. Даны две непересекающиеся окружности. Постройте их общую касательную:

   а) внешнюю;

   б) внутреннюю.

3. Постройте выпуклый четырехугольник АВСД, у которого диагональ АС принадлежит биссектрисе угла А, если даны все стороны четырехугольника.

4. Постройте треугольник по стороне, проведенной к ней высоте и разности углов, прилежащих к данной стороне.

5. Постройте треугольник по медианам, проведенным к двум сторонам, и углу, противолежащему третьей стороне.

Занятие 7. Необычные построения.

К необычным построениям в школьном курсе геометрии относят построения, связанные с конкретными числовыми данными и построения с заранее заданными ограничениями.

Ограничения бывают разных типов:

— ограничения, связанные с количеством проводимых линий;

— ограничения, связанные с тем, что какие-то точки чертежа «недоступны»;

— ограничения на инструменты, то есть построения одним циркулем, одной линейкой.

Указания для учителя:

Необходимо напомнить ученикам, что все построения, которые можно сделать с помощью циркуля и линейки, можно сделать с помощью только одного циркуля! А с помощью одной линейки заменить все построения, выполняемые циркулем и линейкой возможно в одном случае, если задать круг с отмеченным центром.

Пример 1 (Задача Евклида).

Постройте биссектрису угла, вершина которого «недоступна».

Решение: построим две точки, принадлежащие искомой биссектрисе. Выберем на сторонах угла произвольные точка A и B, и рассмотрим треугольник ABC с «недоступной» вершиной C (рисунок 13).

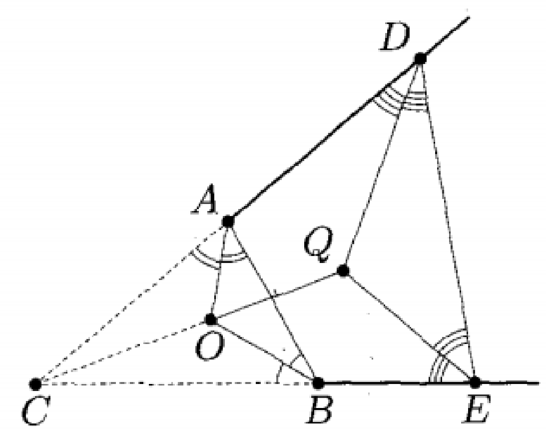


Рисунок 13

Точка O пересечение биссектрис его углов A и B является центром окружности, вписанной в этот треугольник. Следовательно, точка O принадлежит искомой биссектрисе угла C. Выбрав две другие точки D и E на сторонах данного угла и действуя аналогично, можно получить точку Q, также принадлежащую искомой биссектрисе. Таким образом, искомая биссектриса на прямой OQ.

Пример 2: Даны два параллельных отрезка, различной длины. С помощью одной линейки разделите каждый из данных отрезков на две равные части.

Решение: Пусть AB и CD – данные отрезки, тогда четырехугольник ABCD. Для искомого построения используем следующее утверждение: *точки пересечения диагоналей трапеции и продолжений её боковых сторон лежат на одной прямой с серединами оснований трапеции* (рисунок 13).

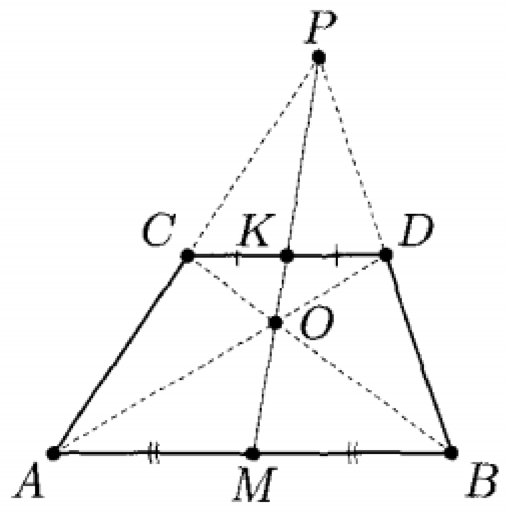


Рисунок 13

Доказать это можно либо с помощью векторов, либо используя гомотетии с центрами P и O. Таким образом, искомое построение сведется к проведению прямых AD и BC , пересекающихся в точке O и прямых AC и BD, пересекающихся в точке P. Прямая OP пересечет данные отрезки AB и CD в их серединах M и K.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой, проведя как можно меньше линий.
2. Постройте касательную к дуге окружности в данной её точке A, если центр окружности «недоступен».
3. Дан треугольник, одна из вершин которого «недоступна». Постройте точку пересечения медиан этого треугольника.

4. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в неё четырехугольник и окружность, вписанная в него, так же с отмеченным центром. Затем стираем с доски четырехугольник, (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив её центр). Восстановите какую-нибудь из убранных вершин четырехугольника, пользуясь только линейкой и проведя как можно меньше линий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучив и проанализировав психологическую и методическую литературу, я выделила следующие задачи:

1. Выделили пути развития математического мышления учащихся;

2. Дали характеристику задач на построение и описали их влияние на развитие логического мышления школьников;

3. Разработали внеурочный курс с рекомендациями по развитию логического мышления через решение задач на построение.

В результате наблюдения за учебной деятельностью учащихся в 7-9 классах общеобразовательной школы можно подвести итоги: геометрические построения играют серьезную роль в математической подготовке школьника. Ни один вид задач не дает столько материала для развития математической инициативы и логических навыков учащихся как геометрические задачи на построение. Эти задачи обычно не допускают стандартного подхода к ним и формального восприятия их учащимися.

Задачи на построение удобны для закрепления теоретических знаний учащихся по любому разделу школьного курса геометрии.

Наличие анализа, доказательства и исследования при решении задач на построение показывает, что они представляют собой богатый материал для выработки у учащихся навыков правильно мыслить и логически рассуждать.

В результате проведенного педагогического эксперимента можно сделать вывод о том, что развитию логического мышления у учащихся способствует систематическое решение задач, начиная с простых и, постепенно переходя к более сложным заданиям.

Задачи на построение — это задачи, которые значительно чаще других поражают красотой, оригинальностью и во многих случаях простотой найденного решения, что вызывает к ним повышенный интерес.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Александров, А.Д.** Геометрия: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / А.Д. Александров, Н.Ю. Нецветаев. – Москва : Наука, 1990. – 672 с.
2. **Александров, А.Д.** Основание геометрии: учебное пособие для вузов по спец. «Математика». – Москва : Наука, 1987. – 288 с.
3. **Александров, И.И.** Сборник геометрических задач на построение с решениями: пособие. – Москва : УЧПЕД ГИЗ, 1954. – 176 с.
4. **Антонов, Н.С.** Современные проблемы методики преподавания математики: учебное пособие для студентов математических и физико-математических специальностей педагогических институтов / Н.С. Антонов, В.А. Гусев. – Москва : Просвещение, 1985. – 304 с.
5. **Аргунов, Б.И.** Геометрические построения на плоскости: пособие / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. – Москва: УЧПЕД ГИЗ, 1955. – 268 с.
6. **Атанасян, Л.С.** Курс элементарной геометрии : [в 2 частях] Часть 1. Планиметрия : учебное пособие / Л.С. Атанасян. – Москва : Сантакс-Пресс,1997. – 303 с.
7. **Блудов, В.В.** К изучению темы «Геометрические построения» (в школе) / В.В. Блудов // Математика в школе. – 1994. – №4. – С. 14 – 15.
8. **Боженкова, Л.И.** Алгоритмический подход к задачам на построение методом подобия / Л.И. Боженкова // Математика в школе. – 1991. – №2. – С. 23– 25.
9. Общая психология: учебное пособие для студентов педагогических институтов / А.В. Брушлинский, В.П. Зинченко, А.В. Петровский [и др.]. – Москва : Просвещение, 1986. – 464 с.
10. **Брушлинский, А.В.** Психология мышления и проблемное обучение / А.В. Брушлинский. – Москва : Знание, 1983. – 96 с.

11. **Буловацкий, М.П.** Разнообразить виды задач: о развитии мышления на уроках математики / М.П. Буловацкий / Математика в школе. – 1988. – №5. – С. 37– 38.
12. **Варданян, С.С.** Задачи о планиметрии с практическим содержанием: книга для учащихся 6-8 классов средней школы / С.С.Варданян. – Москва : Просвещение, 1989.
13. **Векслер, С.И.** Найти и преодолеть ошибку: о развитии мышления школьников на уроках математики /С.И. Векслер / Математика в школе. – 1989. – №5. – С. 40– 42.
14. **Виноградова, Л.В.** Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005 – 252 с.
15. **Груденов, Я.И.** Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я.И. Груденов. – Москва : Педагогика, 1987.
16. **Груденов, Я.И.** Совершенствование методики работы учителя математики / Я.И. Груденов. – Москва : Просвещение, 1990. – 224 с.
17. Методика обучения геометрии / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина [и др.] – Москва: Издательский центр «Академия». – 2004. – 368 с.
18. **Гусев, В.А.** Преподавание геометрии в 6-8 классах: статей / В.А. Гусев. – Москва : Просвещение, 1979. – 287 с.
19. **Далингер, В.А.** Чертеж учит думать: к методике школьного курса геометрии /В.А. Далингер //Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 32 – 36.
20. **Клименченко, Д.В.** Задачи на построение треугольников по некоторым данным точкам / Д.В. Клименченко, Т.Д. Цикунова // Математика в школе. – 1990. – №1. – С. 19 – 21.
21. **Кушнир, И.А.** Об одном способе решения задач на построение / И.А.Кушнир // Математика в школе. – 1984. – №2. – С. 22 – 25.

22. **Мишин, В.И.** Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / В.И. Мишин. – Москва: Просвещение, 1987. – 414 с.
23. **Никитина, Г.Н.** Проверим построение / Г. Н. Никитина / Математика в школе. – 1988. – №2. – С. 55–56.
24. **Овезов, А.** Особенности рассуждений в приложениях математики: о развитии логического мышления на уроках математики / А. Овезов // Математика в школе. – 1991. – №4. – С. 45–48.
25. **Петров, К.** Метод гомотетии в решении задач / К. Петров / Математика в школе. – 1984. – №1. – С. 63–64.
26. **Погорелов, А.В.** Геометрия в 7-9 классах: методические рекомендации к преподаванию курса геометрии по учебному пособию А. В. Погорелова / А. В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 1990. – 334 с.
27. **Столяр, А.А.** Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / учебное пособие по специальности «Математика» и «Физика». – Москва: Просвещение, 1985. – 336 с.
28. **Фурман, А.В.** Влияние особенностей проблемной ситуации на развитие мышления учащихся. / А. В. Фурман // Вопросы психологии, 1985. – №2. – С. 68–72.