МВ и ССО РСФСР

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.М.ГОРЬКОГО

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ

ТОМ ШЕСТОЙ

Тетрадь 1

537

Свердловск
1967

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ, т. У1, ТЕТРАДЬ 1 (1967)

В.М.СИТНИКОВ, А.Д.УСТЮЖАНИНОВ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ТРЕМЯ КЛАССАМИ НЕИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП.

Введение

Как известно, всякая группа, все подгруппы которой инвариантны, является абелевой или гамильтоновой. О.Ю.Шмидтом были исследованы группы с одним классом неинвариантных подгрупп [1] и группы с двумя классами неинвариантных подгрупп [2]. В работе [2] имеются два ошибочных утверждения. Помещенный на стр.254 работы [2] тип П групп исследуемого вида на самом деле не является таковым, так как группы этого типа имеют по крайней мере три класса неинвариантных подгрупп, представителями которых являются следующие подгруппы: $\{P\}$; $\{QQ_1\}$, $\{Q_1P\}$. Далее на стр.265 этой работы вместо подгруппы $\{P^2P^{p^{n-2}}\}$ ошибочно записана подгруппа $\{PP_1^{p^{n-2}}\}$, в результате чего потерян следующий класс исследуемых групп:

$$G=\{P_1\}\lambda\{P\},\ P_1^{2^n}=P^4=1,\ [P_1,P]=P_1^{2^{n-1}},\ n\geqslant 2.$$

Остальные результаты остаются верными.

Названные работы О.Ю.Шмидта вызвали ряд исследований, в которых строение группы изучалось в зависимости от числа классов ее неинвариантных подгрупп (П.И.Трофимов, Е.Н.Торонова, С.А. Сафонов и другие).

В настоящей работе описаны все конечные группы, имеющие точно три класса неинвариантных подгрупп.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.И.Старостину за постановку вопроса и научное руководство.

Мы пользуемся следующими обозначениями:

$\langle H\rangle_G$ – класс подгрупп, сопряженных с H в группе G ;
$\rho(G)$ – число классов неинвариантных подгрупп группы G ;
α,β,t,s,m,n,k – целые числа.
p,q,r – различные простые числа.

Классом подгрупп называют класс сопряженных подгрупп. Остальные обозначения такие же как в работе [3] .

§ 1. НЕПРИМАРНЫЕ ГРУППЫ С ТРЕМЯ КЛАССАМИ НЕИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП.

ТЕОРЕМА 1. Конечная непримарная группа G тогда и только тогда имеет точно три класса неинвариантных подгрупп, когда она есть группа одного из следующих видов:

1. $G=A\times\{b\},\ \rho(A)=1,\ |b|=q^2,\ (|A|,|b|)=1.$
2. $G=\{a\}\lambda\{b\},\ |a|=n,\ |b|=m,\ b^{-1}ab=a^k,$
   $k^m\equiv 1(\mathrm{mod}\,n),\ [(k-1)\cdot m,n]=1,$ где
   а) $n=pq,\ m=r^\alpha,\ k^r\equiv 1(\mathrm{mod}\,n);$
   б) $n=p^3,\ m=r^\alpha,\ k^r\equiv 1(\mathrm{mod}\,n);$
   в) $n=p,\ m=qr,\ k^q\not\equiv 1(\mathrm{mod}\,n),\ k^r\not\equiv 1(\mathrm{mod}\,n);$
   г) $n=p,\ m=r^\alpha,\ k^{r^3}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n),\ k^{r^2}\not\equiv 1(\mathrm{mod}\,n),\ \alpha\geqslant 3.$
3. $G=V_{p^n}\lambda\{b\}$ – группа Фробениуса, $|b|=q$, где
   а) $n=3,\ q=p^2+p+1;$
   б) $n=2,\ q=\frac{p+1}{2}$ (кроме $p=3$).
4. $G=Q\lambda\{c\},\ |c|=3,\ Q=\{a,b\},\ |a|=4,\ b^2=a^2,$
   $b^{-1}ab=a^{-1},\ c^{-1}ac=b,\ c^{-1}bc=ab.$
5. $G=\{a\}\times(\{b\}\lambda\{c\}),\ |a|=|b|=3,\ |c|=2,\ c^{-1}bc=b^{-1}.$
6. $G=(\{a\}\times\{b\})\lambda\{c\},\ |a|=|b|=2,\ |c|=3^2,$
   $c^{-1}ac=b,\ c^{-1}bc=ab.$
7. $G=\{c\}\lambda S,\ |c|=p,$ где
   а) $S=\{a,b\},\ |a|=4,\ b^2=a^2,\ b^{-1}ab=a^{-1},\ a^{-1}ca=c^{-1},\ b^{-1}cb=c^{-1};$
   б) $S=\{a\}\times\{b\},\ |a|=2^n,\ |b|=2,\ a^{-1}ca=c^{-1},\ bc=cb.$

Доказательство.

Необходимость. Пусть G – конечная непримарная группа, имеющая точно три класса неинвариантных подгрупп.

Случай 1. $G = A \times B$, где A и B холловские подгруппы G. Из $\rho(G)>0$ следует $\rho(A)>0$ или $\rho(B)>0$. Пусть, например, $\rho(A)>0$. Тогда, используя тот факт, что произведение неинвариантной подгруппы из A на любую собственную подгруппу из B является неинвариантной подгруппой в G, легко показать, что B имеет точно одну собственную подгруппу, а $\rho(A)=1$. Но тогда G группа типа 1.

Случай 2. G - есть Ц - группа и не распадается в прямое произведение холловских подгрупп.
По теореме 9.4.3. из [4] имеем $G=\{a\}\lambda\{b\}$, $G'=\{a\}$, $N(\{b\})=\{b\}$. Из второго условия следует, что $\{a\}$ имеет не более двух собственных подгрупп.

Если $\{a\}$ имеет точно две собственные подгруппы (то-есть порядок $\{a\}$ равен p^3 или pq), то каждая подгруппа из $\{b\}$ будет инвариантна в G, так что $|b|=r^{\alpha}$ и $\{b^r\}=Z(G)$. Следовательно, G есть группа вида 2а) или 2б).

Если $\{a\}$ имеет точно одну собственную подгруппу (то-есть $|a|=p^2$, то $\rho(G)=2$ или $\rho(G)\geqslant 4$, что невозможно.

Если, наконец, $\{a\}$ простого порядка, то $\{b\}$ имеет точно две подгруппы неинвариантные в G. В случае, когда $\{b\}$ непримарная группа, то ее порядок делится лишь на два простых числа (иначе одна из силовских подгрупп группы $\{b\}$ инвариантна в G и потому выделяется в ней прямым множителем), причем $|b|=q\cdot r$, так как в противном случае $\rho(G)>3$. Получим группу G вида 2в). В случае, когда $\{b\}$ примарная, G оказывается группой вида 2г).

Случай 3. G не является прямым произведением холловских подгрупп и не Ц - группа.

Покажем, что в этом случае

$$G=P\lambda R,$$

где P и R силовские подгруппы в G.

Допустим, что G имеет пару неинвариантных силовских подгрупп R и S различного порядка. По условию G имеет неинвариантную подгруппу T, которая не сопряжена с R и S. Если T содержится в одной из подгрупп R и S, то другая должна быть циклической и самонормализуемой. Пусть это будет R. По теореме Бернсайда (теорема 14.3.1 из [4]) $G=N\lambda R$ и,

следовательно, $N_G(S)\neq S$, так как $G=N\cdot N_G(S)$, что невозможно, ибо $N_G(S)$ дает четвертый класс неинвариантных подгрупп. Следовательно, T не содержится ни в R, ни в S, так что R и S циклические подгруппы. Если одна из них самонормализуемая, то приходим к противоречию, как выше. Пусть $N(S)\neq S$ и $N(R)\neq R$. Но тогда $T=N(S)=N(R)$, так что $T=R\times S$. Ясно, что T - циклическая группа порядка rq. Так как $N(T)=T$, то G Ц -группа, что противоречит выбору G. Итак, G имеет лишь один класс неинвариантных силовских подгрупп $\langle R\rangle_G$.

Если G имеет две инвариантные силовские подгруппы P_1 и P_2, то P_1R и P_2R вместе с R дают три класса неинвариантных подгрупп. Но тогда P_1, P_2 и R циклические и кроме P_1 и P_2 в G нет инвариантных силовских подгрупп, так что G Ц - группа, что противоречит выбору G. Поэтому имеем $G=P\lambda R$, где P и R силовские подгруппы в G.

а) $\Phi(P)\neq\{1\}$.

Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(P)=\bar{G}$. $\rho(\bar{G})>0$, ибо $\Phi(P)\lambda R \lhd G$. $\rho(\bar{G})<3$ так как два различных класса $\langle R\rangle_G$ и $\langle\Phi(P)\lambda R\rangle_G$ при гомоморфизме G на $\bar{G}$ переходят в один класс неинвариантных подгрупп. Если $\rho(\bar{G})=1$, то можно показать, что G есть Ц - группа. В случае $\rho(\bar{G})=2$ можно показать, принимая во внимание описание групп с $\rho=2$ (см. [2]), что $\bar{G}=V_{2^2}\lambda\{\bar{b}\}$, где $|\bar{b}|=3$. $\Phi(P)$ не имеет собственных подгрупп, в противном случае $\rho(G)>3$. Поэтому $|P|=2^3$. Кроме группы кватернионов, ни одна группа восьмого порядка рассматриваемого вида не имеет автоморфизма третьего порядка. Получили четвертый тип групп.

б) $\Phi(P)=\{1\}$. Тогда $G=V_{p^n}\lambda R$.

Пусть G является группой Фробениуса. Тогда R не содержит инвариантных подгрупп группы G и, следовательно, есть циклическая группа, содержащая не более двух собственных подгрупп. Если R содержит две собственные подгруппы, то G - Ц - группа. Если R содержит одну собственную подгруппу, то тогда V_{p^n} не может иметь собственных подгрупп инвари-

антных в G, так что $G=V_{3^2}\lambda\{b\}$, где $|b|=4$, а такой группы Фробениуса с $\rho=3$ не существует. Поэтому $G=V_{p^n}\lambda\{b\}$, где $|b|=q$. Понятно, что V_{p^n} не может иметь подгрупп инвариантных в G (иначе $\rho(G)>3$). Поэтому либо $n=3$ и тогда G есть группа типа 3а), либо $n=2$ и тогда G группа типа 3б).

Пусть G - не группа Фробениуса. Этот случай разобъем на два подслучая.

1) $N(R)\neq R$.

Тогда $N(R)=R\times\{a\}$, где $|a|=p$ и $G=\{a\}\times(V_{p^{n-1}}\lambda R)$, $\rho(V_{p^{n-1}}\lambda R)=1$, ибо в противном случае $\rho(G)>3$. Поэтому из [1] следует, что $G=\{a\}\times(\{b\}\lambda\{c\})$, где $|a|=|b|=p$, $|c|=r^{\alpha}$ и $\{c^r\}\subset Z(G)$. Покажем, что группа $\{a\}\times\{b\}$ не имеет, кроме $\{a\}$ и $\{b\}$, инвариантных подгрупп G. Действительно, если $\{a^t b^s\}\lhd G(0<t<p, 0<s<p)$, то $c^{-1}(a^t b^s)c=$ $=(a^t b^s)^m=a^{tm}b^{sm}=c^{-1}a^t c c^{-1}b^s c=a^t b^{sn}(0<m<p, 0<n<p)$ и тогда $tm\equiv t\ (\mathrm{mod}\ p)$, $sm\equiv sn\ (\mathrm{mod}\ p)$, откуда $m\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ и $m\equiv n(\mathrm{mod}\ p)$, то-есть $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, в противоречии с $0<n<p$. Но тогда все неинвариантные подгруппы из $\{a\}\times\{b\}$ сопряжены в G и число их равно $p-1=q$. Поэтому $q=2$, $p=3$ и G оказывается группой типа 5.

2) $N(R)=R$.

Пусть $R=\{b\}$ - циклическая. Если $\{b^r\}\ntriangleleft G$, то не может содержать инвариантных подгрупп и поэтому $\{b^{r^2}\}\lhd G$, Фактор-группа $\bar{G}=G/\{b^{r^2}\}$ будет группой Фробениуса с $\rho(\bar{G})=3$, что невозможно (см.выше). Итак, $\{b^r\}\lhd G$. Так как G не Ц - группа и не группа Фробениуса, то $\rho(G/\{b^r\})=2$. Тогда из [2]: $G/\{b^r\}=(\{\bar{a}_1\}\times\{\bar{a}_2\})\lambda\{\bar{b}\}$, где $|\bar{a}_1|=|\bar{a}_2|=$ $=2$, $|\bar{b}|=3$. Но тогда G - группа типа 6.

Пусть R - нециклическая группа. Тогда R имеет не более одной максимальной подгруппы инвариантной в G. Но максимальные подгруппы R, которые неинвариантны в G попарно не сопряжены между собой. Поэтому R содержит не более трех максимальных подгрупп, то-есть
$R/\Phi(R)=\{\bar{a}_1\}\times\{\bar{a}_2\}$, $|\bar{a}_1|=|\bar{a}_2|=2$.

Поскольку R содержит две циклические максимальные подгруппы (те, которые неинвариантны в G), то G - одного из следующих видов (теорема 12.5.1 из [4]): группа кватернионов; $\{a\}\times\{b\}$, где $|a|=2^n$, $|b|=2$; $\{a\}\lambda\{b\}$, $|a|=2^n$, $|b|=2$, $b^{-1}ab=a^{1+2^{n-1}}$. В первом случае G оказывается группой типа 7а), во втором случае группой типа 7б), третий же случай невозможен (иначе $\rho(G)>3$).

Таким образом G удовлетворяет условиям 1-7.

Достаточность этих условий проверяется без особого труда. Теорема доказана.

§ 2. p -ГРУППЫ С ТРЕМЯ КЛАССАМИ НЕИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП.

В ходе дальнейших рассуждений нам потребуются p -группы с $\rho(G)=1,2$. Это есть следующие группы (см. [1-2]):

$$\rho(G)=1: G=\{a\}\lambda\{b\}, |a|=p^n, |b|=p, [a,b]=a^{p^{n-1}}, n>1;$$

$$\rho(G)=2: G=D, |D|=8 ; G=Q_1;$$

$$G=\{a\}\lambda\{b\}, |a|=2^n, |b|=4, [a,b]=a^{2^{n-1}}, n\geqslant 2.$$

ТЕОРЕМА 2. Конечная p - группа G тогда и только тогда имеет точно три класса неинвариантных подгрупп, когда G - группа одного из следующих типов:

1. $G=(\{a\}\times\{b\})\lambda\{c\}, |a|=2^n, |b|=|c|=2, [b,c]=a^{2^{n-1}}$, $[a,b]=[a,c]=1, n\geqslant 2$;
2. $G=Q\times\{z\}, |z|=4$, Q - группа кватернионов;
3. $G=\{a\}\lambda\{b\}, |a|=4, |b|=8, [a,b]=a^2$;
4. $G=\{a,b\}, |a|=8, a^4=b^4, [a,b]=a^6$;
5. $G=\{a\}\lambda\{b\}, |a|=8, |b|=2, [a,b]=a^2$;
6. $G=\{a\}\lambda\{b\}, |a|=3^n, |b|=3^2, [a,b]=a^{3^{n-1}}, n>1$.

Доказательство. Достаточность утверждений теоремы легко проверяется.

Доказательство необходимости проведем индукцией по порядку группы G. Пусть $\rho(G)=3$ и G группа наименьшего порядка, которая не является группой типа 1-6.

Доказательство проведем в несколько этапов.

1°. В группе G существует нециклическая неинвариантная подгруппа H. Допустим противное. Из теорем 1 и 2 [3] получаем, что G - группа одного из типов 4,6. Но это противоречит выбору группы G. Поэтому утверждение 1° справедливо.

2°. Для каждой нециклической неинвариантной подгруппы H из G $H\cap Z(G)\neq\{1\}$. Пусть $H\cap Z(G)=\{1\}$. Тогда $|H|\leq p^3$.

Очевидно, что в группе G каждая неинвариантная подгруппа $V\cong V_{p^2}$ имеет порядок не больше p^3. Тогда утверждение 2° следует из того, что $H\times\{\tau\}\lhd G$ (если $H\times\{\tau\}\ntriangleleft G$, то $\rho(G/\{\tau\})\leq 2$), это невозможно.

Подсчитывая число классов неинвариантных подгрупп из G в группе $H\times\{\tau\}$ для возможных выборов H, убеждаемся, что $\rho(G)>3$. Это противоречие доказывает утверждение 2°. В силу утверждения 2° $\{\tau\}$ теперь всегда из $H\cap Z(G)$.

3°. $H=V_{p^2}$. Применяя предположение индукции, используя описание p - групп с $\rho(G)=1,2$, для неинвариантной подгруппы $H/\{\tau\}$ в $G/\{\tau\}$ получаем следующие возможности:

1) $|H/\{\tau\}|=p$, 2) $H/\{\tau\}$ - циклическая группа порядка p^2, 3) $H/\{\tau\}\cong V_{2^2}$.

В случае, когда $H/\{\tau\}$ - циклическая группа восьмого порядка сразу получаем противоречие.

Допустим, что 3° неверно. Тогда H содержит по представителю из каждого класса неинвариантных подгрупп группы G. Действительно, пусть в H только представители из двух классов. Оказывается, если H_1 - представитель третьего класса, то H_1 - циклическая группа: $H_1=\{h\}$ и $H_1\cap H\supseteq\Phi(H)$. Если $\Phi(H)\not\subseteq H_1$, то $\rho(G/\Phi(H))\leq 2$, что противоречит соотношению $H/\Phi(H)\cong V_{p^2}$. Можно полагать, что

$H=\{a\}\times\{\sigma\}$, $|a|=p^2$, $|\sigma|=p$ (так как в других возможных для $H/\{\tau\}$ случаях либо $\rho(G)\neq 3$, либо в H - представители трех классов). Поэтому $\rho(G/\{\sigma\})=1$, что противоречиво. Таким образом в H есть представители из каждого класса неинвариантных подгрупп группы G. Ясно, что $H=\{a\}\times\{\sigma\}$. Действительно, если $H=Q$, то в $G/\{\tau\}$ имеем несопряженные инволюции, что по предположению индукции невозможно. Если $H=D$, то в $G/\{\tau\}$ существует неметациклическая подгруппа $H\{q\}/\{\tau\}$, где $\{q\}\not\subseteq H$, что для p -групп с $\rho(G)=1,2$ невозможно. Наконец, если $H=\{a\}\lambda\{\sigma\}$, $|a|=p^2$; то $\Phi(H)\lhd G$ и $\rho(G/\Phi(H))\leq 2$ что также невозможно.

Поэтому, в силу 2°, для H имеют место два случая: а) $\{a^p\}\ntriangleleft G$, $\sigma\in Z(G)$ и б) $\{a^p\}\lhd G$.

Но рассматривая фактор-группу по $\{a^p\}$ или по $\{\sigma\}$ получаем противоречие. Следовательно, 3° доказано.

Завершим доказательство теоремы 2. Имеем $H\subset K\lhd G$, $|K:H|=p$, $H\ntriangleleft G$, где $K\cong V_{p^3}$ либо $K=(\{\tau\}\times\{\sigma\})\lambda\{\omega\}$. В случае $K\cong V_{p^3}$ получаем $\rho(G)>3$. Теперь пусть $p>2$. Тогда K содержит представители из каждого класса неинвариантных подгрупп группы G. Так как можно полагать $\{\tau\}\times\{\omega\}\lhd G$, то $\rho(G/\{\tau\})=1$, то есть в $G/\{\tau\}$ каждая подгруппа метациклическая, что противоречиво (так как для $\{q\}\not\subseteq K$, $K\{q\}/\{\tau\}$ неметациклическая в $G/\{\tau\}$. Поэтому $p=2$. Теперь $C_G(H)=H$, так как $C_G(H)\not\subseteq K$. Но известно (см. [5]), что если в 2-группе G существует подгруппа $V\cong V_{2^2}$ и $C_G(V)=V$, то G либо обобщенная группа диэра, либо полудиэдральная группа. Поэтому G -группа типа 5. Полученное противоречие с выбором группы G устанавливает теорему 2.

Литература

[1] Шмидт О.Ю. "Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп". Избр.труды,Математика,М., изд.АН СССР, 1959.

[2] Шмидт О.Ю. "Группы, имеющие только два класса неинвариантных подгрупп". Избр.труды, Математика,М. изд.АН СССР, 1959.

[3] А.Д.Устюжанинов . " Конечные группы с инвариантными нецикли-
ческими подгруппами", Матем.записки УрГУ,
т.У1, тетр.1 (1967).
[4] М.Холл. "Теория групп", ИИЛ, (1962).
[5] В.М.Бусаркин, А.И.Старостин. "Конечные группы, все собствен-
ные подгруппы которых обладают нильпотент-
ным расщеплением", Изд.АН СССР,сер.матем.
29, №1, (1965), стр.97-108.

СОДЕРЖАНИЕ