АЛГЕБРА, ЛОГИКА И КИБЕРНЕТИКА

Материалы международной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения профессора А. И. Кокорина

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное профессиональное
учреждение высшего профессионального образования
Иркутский государственный педагогический университет
Государственное образовательное профессиональное
учреждение высшего профессионального образования
Иркутский государственный университет

АЛГЕБРА, ЛОГИКА И КИБЕРНЕТИКА

Материалы международной конференции, посвященной
75-летию со дня рождения профессора А.И. Кокорина

(Иркутск, 25-28 августа 2004 г.)

Иркутск, 2004

Следствие. *Решетка всех тотально насыщенных формаций модулярна.*

Отметим, что данное следствие дает положительный ответ на вопрос 14.80 [3].

Список литературы

[1] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 253 с.

[2] Скиба А.Н. Алгебра формаций – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

[3] Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 15-е изд. – Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2002.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ F-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

*В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук**

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа K конечной группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех i.

Необходимые определения и обозначения можно найти в [1].

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация , H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа конечной группы G такая, что $G = F(G)H$. Тогда

$$G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = H^{\mathfrak{F}}\Phi(G).$$

Следствие [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа конечной группы G такая, что $G = F(G)H$ и $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.

*Гомель

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Если $G = F(G)\lambda H$, где H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа конечной группы G, то $G \in \mathfrak{F}$.

Список литературы

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука.- 1978.- 267 с.

2. Hawkes T. On formation subgroups of a finite solubte group.- J.London Math. Soc., 1968, 44,№ 2, с.243–250.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ МЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ФРОБЕНИУСА

*В.М. Ситников, Е.О. Шумакова**

Определения и обозначения в работе следуют [1] и [2].

Метациклические группы Фробениуса исчерпываются следующими группами: $G = \langle a\rangle_m \leftthreetimes \langle b\rangle_n$, где $b^{-1}ab = a^{\nu}$, $O(\nu \pmod m)) = n$, $G' = \langle a\rangle_m$.

В данной работе рассматриваются представления центральных расширений метациклических групп Фробениуса.

Лемма. Если $G/Z(G) = \langle \bar a\rangle_m \leftthreetimes \langle \bar b\rangle_n$ является группой Фробениуса с ядром $\langle \bar a\rangle$, то $G = (\langle a\rangle \times Z(G))\langle b\rangle$, $b^n \in Z(G)$ и коммутант $G' = \langle a\rangle_m$.

В силу леммы будем в дальнейшем рассматривать центральные расширения метациклических групп Фробениуса вида:

$G = (\langle a\rangle_m \times Z(G))\langle b\rangle$, где $Z(G) = \langle z_1\rangle_{q_1} \times \cdots \times \langle z_s\rangle_{q_s}$, $b^n = c = z_1^{\beta_1} \cdot z_2^{\beta_2} \ldots z_s^{\beta_s} \in Z(G)$, $b^{-1}ab = a^{\nu}$, $O(\nu \pmod m)) = n$, $G' = \langle a\rangle_m$. Положим $k = |Z(G)| = q_1q_2\cdots q_s$.

Теорема. Пусть конечная группа G является центральным расширением метациклической группы Фробениуса типа $Z_m \leftthreetimes Z_n$ и $G = (\langle a\rangle_m \times Z(G))\langle b\rangle$, где $Z(G) = \langle z_1\rangle_{q_1} \times \cdots \times \langle z_s\rangle_{q_s}$, $b^n = c = z_1^{\beta_1} \cdot z_2^{\beta_2} \ldots z_s^{\beta_s} \in Z(G)$, $b^{-1}ab = a^{\nu}$,

*Челябинский государственный педагогический университет
e-mail:shumakovaeo@Rambler.ru

$O(\nu \,(\mathrm{mod}\, m)) = n, k = |Z(G)|$.
Тогда группа G имеет точно $k(n + \frac{m-1}{n})$ различных неприводимых представлений над полем комплексных чисел:

а) nk одномерных представлений вида

$$\varphi_i^{(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s)} : \begin{cases} a \to (1_F), \\ z_f \to (\zeta_f^{\eta_f}), \\ b \to (\xi^{a(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s)+ki}), \end{cases}$$

где ζ_f – первообразный корень из 1 степени q_f $(\eta_f = 0,\ldots, q_f - 1;\ f = 1,2,\ldots,s)$ и ξ – первообразный корень из 1 степени nk $(i = 0,\ldots,n-1; a(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s) = \sum\limits_{f=1}^{s} \beta_f \eta_f \frac{k}{q_f})$.

б)$k(\frac{m-1}{n})$ представлений степени n вида

$$\varphi_{n-1+j}^{(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s)} : \begin{cases} a \to \begin{pmatrix} \alpha^{\nu^{n-1}t_j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha^{\nu^{n-2}t_j} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha^{t_j} \end{pmatrix}_{n\times n}, \\ b \to \begin{pmatrix} 0 & & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & \cdots & 1 \\ \zeta_1^{\eta_1\beta_1}\zeta_2^{\eta_2\beta_2}\cdots\zeta_s^{\eta_s\beta_s} & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}, \\ z_f \to \begin{pmatrix} \zeta_f^{\eta_f} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_f^{\eta_f} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_f^{\eta_f} \end{pmatrix}_{n\times n}, \end{cases}$$

где α – первообразный корень из 1 степени m $(j = 1,\ldots,\frac{m-1}{n})$ и ζ_f – первообразный корень из 1 степени q_f $(\eta_f = 0,\ldots,q_f - 1;\ f = 1,2,\ldots,s)$.

Список литературы

[1] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.– М.: Наука, 1969.

[2] Белоногов В. А., Фомин А. Н. Матричные представления в теории конечных групп. – М.: Наука, 1976.

О НЕКОТОРЫХ ПАРАХ ФРОБЕНИУСА

*А.И. Созутов**

Пусть $G > H > 1$, $|H| = m$, $|G| = mn$, $F^\# = G \setminus \cup_{x\in G} H^x$. Имеем $|F^\#| \geq n - 1 \geq 1$, и $|F^\#| = n - 1 \iff H \cap H^g = 1$ $\forall g \in G \setminus H$, при этом $G = F\lambda H$, где $F = F^\# \cup \{1\}$ (теорема Фробениуса). Если $G > H > 1$ и $H \cap H^g = 1\ \forall g \in G \setminus H$, то (G, H) называется *парой Фробениуса* (Шунков), а H — *обособленной* подгруппой (Горчаков). Классической теореме Фробениуса в 2001 г. исполнилось 100 лет, однако до сих пор не удалось найти её доказательства, свободного от теории характеров. Еще до Фробениуса существование нормального дополнения к H установил Жордан, предполагая представление группы подстановками на H^G дважды транзитивным; Холл в [1][теорема 20.7.1] обобщил эту теорему на бесконечные группы, в которых $|Hx \cap F| \leq 1\ \forall x \in G$. Теорема Фробениуса легко вытекает из условия $|Hx \cap F| = 1\ \forall x \in G \setminus H$. Действительно, из $a, b \in F$ и $ab \notin F^\#$, следует $a^x b^x \in H$ для некоторого $x \in G$, $Ha^x = Hb^{-x}$, $a^x = b^{-x}$ и $ab = 1$. Следовательно, F — нормальная в G подгруппа, и понятно, что $F\lambda H = G$. Как показывают примеры простых групп Ольшанского, в которых все собственные подгруппы сопряжены, условие $|Hx \cap F| = 1\ \forall x \in G \setminus H$ в приведённых рассуждениях нельзя заменить на условие $|Hx \cap F| \leq 1$. С другой стороны, в теореме Холла достаточно существования $x \in G \setminus H$ с $|Hx \cap F| = 1$, поскольку ввиду 2-транзитивности G имеем $G = H \cup HxH$, и все смежные классы Hy, отличные от H, сопряжены с Hx. В частности, в конечной группе

*Красноярская государственная архитектурно-строительная академия
e-mail: chm@gasa.krs.ru