Ю.В. КОРЧЕМКИНА

МАТЕМАТИКА
(функции, уравнения, неравенства, делимость чисел)

Рабочая тетрадь

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный
гуманитарно-педагогический университет»

Ю.В. КОРЧЕМКИНА

МАТЕМАТИКА
(функции, уравнения, неравенства, делимость чисел)

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

Челябинск
2020

УДК 51(076)
ББК 22.1я71
К 70

Корчемкина, Ю.В. Математика (функции, уравнения, неравенства, делимость чисел): рабочая тетрадь / Ю.В. Корчемкина. – Челябинск: Изд-во ЮУрГГПУ, 2020. – 95 с.

ISBN 978-5-907409-19-4

Рабочая тетрадь предназначена для студентов образовательных организаций высшего образования, обучающихся по направлениям подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Начальное образование», 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) с профилем «Начальное образование». Рабочая тетрадь также может быть использована для организации работы со студентами колледжей, получающих образование по специальностям 44.02.01 Преподавание в начальных классах и др.

В рабочую тетрадь включены следующие разделы начального курса математики: «Соответствия между двумя множествами», «Числовые функции», «Выражения. Уравнения. Неравенства», «Делимость натуральных чисел». В учебном пособии содержится краткий теоретический материал и практические задания для выполнения в рамках аудиторных занятий и для самостоятельной работы.

Рецензенты: Махмутова Л.Г., канд. пед. наук, доцент
Овсяницкая Л.Ю., канд. техн. наук, доцент

ISBN 978-5-907409-19-4

СОДЕРЖАНИЕ

ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С РАБОЧЕЙ ТЕТРАДЬЮ

Рабочая тетрадь предназначена для организации аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов, обучающихся по педагогическим направлениям подготовки, в первую очередь будущих учителей начальных классов. Работа с тетрадью будет способствовать не только развитию практических навыков решения задач, но и углублению теоретических знаний в области начального курса математики.

При составлении рабочей тетради использовался теоретический и практический материал учебника Л.П. Стойловой «Математика» и составляющего комплект с данным учебником сборника задач авторов Л.П. Стойловой, Е.А. Конобеевой, И.В. Шадриной, а также задания из учебников математики для начальной школы по программам «Школа России», «Перспектива».

Все задания студенты могут выполнять непосредственно в тетради. Для каждого задания предусмотрено место для вписывания решения.

ТЕМА 1. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Теоретический материал

Соответствие между множествами X и Y – всякое подмножество декартова произведения этих множеств.

xSy – элемент x находится в соответствии S с элементом y.

Пусть S – соответствие между множествами X и Y. Соответствие S^{-1} между множествами Y и X называют обратным данному, если $xS^{-1}y$ тогда и только тогда, когда xSy.

Функциональное соответствие между множествами X и Y – такое соответствие, при котором каждому элементу из множества X сопоставляется не более одного элемента из множества Y.

Взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y – такое соответствие, при котором каждому элементу множества X сопоставляется единственный элемент множества Y и каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу множества X.

Равномощные множества – это множества, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Равночисленные множества – равномощные конечные множества.

Счётное множество – бесконечное множество, равномощное множеству N натуральных чисел.

Числовая функция – такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R.

Множество X – ***область определения функции***.

Функции обозначают буквами f, g, h и др. Если f – функция, заданная на множестве X, то действительное число y, соответствующее числу x из множества X, часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$. Переменную x при этом называют ***аргументом*** (или независимой переменной) функции f. Множество чисел вида $f(x)$ для всех x из множества X называют ***областью значений функции*** f [6].

Задания

1. Между множествами $X = \{4, 6, 8\}$ и $Y = \{2, 7\}$ рассматриваются различные соответствия:

а) $x \vdots y$, где $x \in X, y \in Y$;

б) $x > y$, где $x \in X, y \in Y$;

в) $x < y$, где $x \in X, y \in Y$.

Для каждого случая перечислите все пары чисел, находящихся в заданном соответствии.

а)

б)

в)

2. Между множествами $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ задано соответствие «x меньше y на 3», где $x \in X, y \in Y$. Перечислите все пары чисел, находящихся в заданном соответствии, постройте его граф и график на координатной плоскости [3].

Пары чисел:

Граф:

График:

3. Запишите множества X и Y, между которыми установлено соответствие $S = \{(3, 7), (6, 10), (8, 12), (15, 19), (22, 26)\}$. Задайте это соответствие в словесной форме и в форме равенства.

4. Решите задачу: «Петя и Катя читают одну книгу. Петя прочитывает 3 страницы, за это же время Катя прочитывает 6. Сколько страниц прочитала Катя за то время, за которое Петя прочитал 18 страниц?». Какое соотношение между величинами приводит к ее решению [3]?

5. Решите задачу: «Из куска ткани сшили несколько платьев, израсходовав на каждое по 6 м. Сколько такой же ткани пошло на пошив одной блузки, если блузок из такого же куска ткани сшили в 2 раза больше?». Какое соотношение между величинами приводит к ее решению [3]?

6. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = 5x - 2$

б) $f(x) = \frac{7}{x}$

в) $f(x) = \frac{5}{x-3}$

г) $f(x) = \frac{3x^2}{(x+1)(x-2)}$

д) $f(x) = \sqrt{x-2}$

7. Функция задана уравнением $y = 2x - 4$. Область ее определения – множество $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Найдите множество значений этой функции.

8. Постройте график функции $y = 5 - x$, если ее область определения X такова:

а) $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;

б) $X = [0; 5]$;

в) $X = R$.

9. Постройте графики следующих функций при условии, что они заданы на множестве R действительных чисел:

а) $y = x$;

б) $y = 3$;

в) $x = 5$;

г) $y = 0$.

10. Постройте график функции, заданной на множестве действительных чисел:

а) $f(x) = \begin{cases} x, если\ x < 0, \\ -2x, если\ x \geq 0 \end{cases};$

б) $f(x) = \begin{cases} x - 1, если\ x \geq 1, \\ -3x + 3, если\ x < 1 \end{cases};$

в) $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{если } x \leq 0, \\ \frac{4}{x}, \text{если } x > 0 \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} -1, \text{если } -2 \leq x \leq 0, \\ x, \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, \ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

ТЕМА 2. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Теоретический материал

Таблица 1

Основные характеристики прямой
и обратной пропорциональности [6]

Характеристика	Прямая пропорциональность	Обратная пропорциональность
1. Определение	Это функция, которая задана формулой $y = kx$, k (коэффициент пропорциональности) – любое действительное число	Это функция, которая задана формулой $y = \frac{k}{x}$, k (коэффициент пропорциональности) – любое действительное число
2. Коэффициент пропорциональности	$k = \frac{y}{x}$, x и y – переменные величины, k – постоянная величина	$k = xy$, x и y – переменные величины, k – постоянная величина
3. Свойство	Если x и y – положительные действительные числа, то с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз	Если x и y – положительные действительные числа, то с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y уменьшается (увеличивается) во столько же раз

Окончание табл. 1

4. Решение задач	*1 способ* (по определению): 1. Определить величины, рассматриваемые в задаче, и вид пропорциональности (п. 2). Построить вспомогательную модель (таблицу). Таблица должна содержать все три величины, рассматриваемые в задаче: постоянную и две переменные. 2. Найти коэффициент пропорциональности. 3. Зная коэффициент пропорциональности, определить искомые величины. *2 способ* (по свойству): 1. Определить величины, рассматриваемые в задаче, и вид пропорциональности (п. 2). Построить вспомогательную модель (таблицу). Таблица должна содержать все три величины, рассматриваемые в задаче: постоянную и две переменные. 2. Найти, во сколько раз изменилась одна из переменных величин. 3. Пользуясь свойством пропорциональности, определить искомую величину

Задания

Решить задачи двумя способами по алгоритму, представленному в таблице 1 (п. 4) [3; 5; 6].

1. С участка собрали 6 мешков картофеля по 40 кг в каждом. Этот картофель разложили в ящики по 20 кг в каждый. Сколько ящиков потребовалось?

<table>
<tr><td colspan="2">Величины:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид пропорциональности:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модель</td></tr>
<tr><td>1 способ</td><td>2 способ</td></tr>
</table>

2. Из куска ткани длиной 24 м сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 32 таких же костюма?

<table>
<tr><td colspan="2">Величины:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид пропорциональности:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модель</td></tr>
<tr><td>1 способ</td><td>2 способ</td></tr>
</table>

3. Велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч и был в пути 2 ч. Сколько времени потребуется пешеходу, чтобы пройти это расстояние со скоростью 4 км/ч?

Величины:	
Вид пропорциональности:	
Модель	
1 способ	2 способ

4. Из 100 кг свеклы при переработке получается 16 кг сахара. Сколько килограммов сахара получится из 3 т свеклы?

Величины:	
Вид пропорциональности:	
Модель	
1 способ	2 способ

5. Два опытных участка имеют одинаковую площадь. Ширина первого участка 30 м, ширина второго – 40 м. Найдите длину первого участка, если известно, что длина второго участка равна 75 м.

Величины:	
Вид пропорциональности:	
Модель	
1 способ	2 способ

6. Два столяра отремонтировали стульев поровну. Первый столяр работал 6 дней, ремонтируя по 10 стульев в день, а второй – 5 дней. Сколько стульев в день ремонтировал второй столяр?

Величины:	
Вид пропорциональности:	
Модель	
1 способ	2 способ

7. У портнихи из каждых 10 м ситца получалось 3 рубашки. Сколько таких рубашек она может сшить из 50 м ситца?

Величины:	
Вид пропорциональности:	
Модель	
1 способ	2 способ

8. В первый день магазин продал 8 одинаковых портфелей и получил за них 3200 р. Во второй день было продано 4 таких же портфеля. Сколько денег получили за портфели во второй день?

<table>
<tr><td colspan="2">Величины:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид пропорциональности:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модель</td></tr>
<tr><td>1 способ</td><td>2 способ</td></tr>
</table>

ТЕМА 3. ВЫРАЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА

Теоретический материал

I. Выражения. Числовые равенства и неравенства [3; 6].

Математический алфавит включает:

– цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

– знаки операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$;

– знаки отношений $<$, $>$, $=$;

– строчные буквы латинского алфавита (для обозначения чисел);

– скобки (технические знаки).

Используя математический алфавит, образуют слова (выражения). Из слов составляют предложения (числовые равенства и неравенства, уравнения, неравенства с переменными).

Числовые выражения образуются из чисел, скобок и знаков действий.

Значение числового выражения – число, которое получается в результате выполнения всех действий, указанных в выражении.

Про числовые выражения, значение которых нельзя найти, говорят, что они ***не имеют смысла***.

Выражения с переменной кроме чисел, скобок и знаков действия содержат буквы (***переменные***).

Область определения выражения – множество чисел, при подстановке которых вместо переменной получается числовое выражение, имеющее смысл.

Если f и g – числовые выражения, то и $(f) + (g)$, $(f) - (g)$, $(f) \cdot (g)$, $(f) : (g)$ – ***числовые выражения***. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Тождественно равными называют выражения, значения которых равны при любых значениях переменных из области определения выражений.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называется ***тождеством*** на этом множестве.

Замену выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называют ***тождественным преобразованием*** данного выражения на этом множестве.

Числовое равенство (неравенство) – это высказывание, истинное или ложное.

$f = g$ – числовое равенство (f, g – числовые выражения, имеющие смысл).

Свойства истинных числовых равенств:

1. Если $f = g$, то $f + h = g + h$.
2. Если $f = g$, то $f \cdot h = g \cdot h$.

f, g, h – числовые выражения, имеющие смысл.

$f < g$ или $f > g$ – числовое неравенство (f, g – числовые выражения, имеющие смысл).

Свойства истинных числовых неравенств:

1. Если $f > g$, то $f + h > g + h$.
2. Если $f > g$, то $f \cdot h > g \cdot h$ при $h > 0$.
3. Если $f > g$, то $f \cdot h < g \cdot h$ при $h < 0$.

f, g, h – числовые выражения, имеющие смысл.

Уравнение с одной переменной – высказывательная форма вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – выражения с переменной x и областью определения X.

II. Уравнения [3; 6].

Корень уравнения – значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство.

Решить уравнение – найти множество его корней.

Равносильные уравнения – уравнения, у которых множества корней совпадают.

Преобразования, позволяющие получать равносильные уравнения (теоремы):

Теорема 1. $f(x) = g(x)$ и $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ – равносильны, если $f(x) = g(x)$ задано на множестве X, $h(x)$ – выражение, определённое на том же множестве.

Следствие 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие 2. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. $f(x) = g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ – равносильны, если $f(x) = g(x)$ задано на множестве X, $h(x)$ – выражение, которое определено на том же множестве и не обращается нуль на этом множестве.

Следствие. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.

III. Неравенства [3; 6].

Неравенством с одной переменной называют неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – выражения с переменной x и областью определения X. Множество X – ***область определения неравенства***.

Решение неравенства – значение переменной из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество его решений.

Равносильные неравенства – неравенства, у которых множества решений равны.

Преобразования, позволяющие получать равносильные неравенства (теоремы):

Теорема 3. $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ – равносильны, если $f(x) > g(x)$ задано на множестве X, $h(x)$ – выражение, определённое на том же множестве.

Следствие 1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получим неравенство, равносильное исходному.

Следствие 2. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ – равносильны, если $f(x) > g(x)$ задано на множестве X, $h(x)$ – выражение, которое определено на том же множестве и принимает положительные значения для всех x на этом множестве.

Следствие. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 5. $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ – равносильны, если $f(x) > g(x)$ задано на множестве X, $h(x)$ – выражение, которое определено на том же множестве и принимает отрицательные значения для всех x на этом множестве.

Следствие. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Задания

1. Постройте граф соответствия между множеством математических записей (левый столбик) и множеством их названий (правый столбик) [5]:

$18 - 5 \cdot 3$	•	• Числовое равенство
$15 - 6 = 8$	•	
$9 < 12 + 3$	•	• Числовое выражение
$12 : (10 - 8)$	•	
$(17 - 7) \cdot 2 = 20$	•	• Числовое неравенство
$18 \cdot 7 > (90 + 2) \cdot 3$	•	

2. Как изменится значение каждого выражения, если:
а) убрать скобки;
б) сумму чисел в скобках заменить их разностью;
в) по-другому расставить скобки.

Даны выражения:

1) $42 - (12 + 9)$
а) ____
б) ____
в) ____

2) $(50 + 8) - 20$

а) ____

б) ____

в) ____

3) $(65 + 17) - 7$

а) ____

б) ____

в) ____

3. Поставьте знак >, <, = между числовыми выражениями. Можно ли сделать это, не вычисляя значения выражений [1]?

а. $36 : 9 + 18 \cdot 3$ _____ $11 \cdot 9 - 120 : 3$

б. $18543 + (37 + 84)$ _____ $18543 + (29 + 84)$

в. $6545 : 5 + 121$ ____ $101 \cdot 3 - 4$

4. Можно ли утверждать, что значения следующих выражений одинаковы? Запишите пары выражений, значения которых равны (при их наличии) [5].

а) $\frac{8}{9} \cdot \left(6\frac{8}{5} - 1\frac{3}{4}\right) + 4\frac{4}{5} : \frac{4}{11}$;

б) $4\frac{4}{5} : \frac{4}{11} + \frac{8}{9} \cdot \left(6\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4}\right)$;

в) $\frac{8}{9} \cdot 6\frac{5}{8} - \frac{8}{9} \cdot 1\frac{3}{4} + 4\frac{4}{5} : \frac{4}{11}$.

Ответ:

5. Купили 12 тетрадей по 30 р. каждая и 8 блокнотов по 40 р. за штуку. Какой смысл имеют следующие выражения:

а) $12 \cdot 30$

б) $8 \cdot 40$

в) $12 - 8$

г) $40 - 30$

д) $12 \cdot 30 + 8 \cdot 40$

е) $12 \cdot 30 - 8 \cdot 40$

6. Составьте выражение для решения задач [3]:

а) Было куплено 5 тетрадей по 8 рублей и 2 тетради по 15 рублей. Сколько стоила вся покупка?

б) Школа заказала для экскурсии 9 автобусов из расчета 32 человека на автобус, но автобусов пришло на 1 меньше. Сколько человек пришлось посадить в каждый автобус?

7. Постройте граф соответствия между множеством математических записей (левый столбик) и множеством их названий (правый столбик) [5]:

$5 > a + 1$	•
$7b - 3$	•
$9 < 12 + 3$	•
$27 - 9 = 18$	•
$3x - 5y = 12$	•
$2x - 4 < 3$	•
$8\mathrm{a} - 3\mathrm{b} - 22$	•

- Выражение с одной переменной
- Выражение с двумя переменными
- Уравнение с одной переменной
- Уравнение с двумя переменными
- Неравенство с одной переменной

8. Решите уравнения, поясняя решение с использованием правил нахождения неизвестных компонентов арифметических действий:

а) $(x + 70) \cdot 4 = 328$

б) $560 : (x + 9) = 56$

в) $(85x + 765) : 170 = 98$

г) $(x - 13581) : 709 = 306$

д) $240 : (70 - x) = 4$

9. Решите уравнения, поясняя преобразования с позиций теорем и правил, позволяющих получать равносильные уравнения:

а) $\frac{2x-3,2}{1,2}=\frac{5x-6}{0,5}$

б) $\frac{x-0,8}{x+0,2}=\frac{6,3}{7,3}$

в) $\frac{7x+4}{2} - x = \frac{3x-5}{2}$

г) $x - \frac{3x-2}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3}$

д) $(2 - x)^2 - x(x + 1{,}5) = 4$

10. Учащийся решил уравнение $5x + 15 = 3x + 9$ следующим образом:

1) вынес за скобки в левой части число 5, а в правой – число 3, получил уравнение $5(x + 3) = 3(x + 3)$;

2) разделил обе части на выражение $x + 3$, получил равенство $5 = 3$ и сделал вывод, что данное уравнение корней не имеет.

Прав ли учащийся? Почему? [6].

ТЕМА 4. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Задания

1. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2 = y \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 - y = -2 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y = 8 \\ y + 5 = 1 \end{cases}$

д) $\begin{cases} y = 12 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

е) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x^2 + 2x - 1 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{2} \\ \frac{4}{x}+\frac{8}{y}=3 \end{cases}$

з) $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2 \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7 \end{cases}$

2. Решить неравенства

а) $4-\frac{3}{2}x>\frac{13}{8}-\frac{1}{6}(4x-3)$

б) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{7}{12}x-0{,}3\right)<5{,}8-\left(\frac{2}{3}x+0{,}6\right)$

в) $(0{,}4x-2)-(1{,}5x+1)\geq 3{,}6+(-4x-0{,}8)$

3. Решите системы и совокупности неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - 7\frac{1}{21} \\ \frac{7x}{3} - \frac{11(x+1)}{6} > \frac{3x-1}{3} - \frac{13-x}{2} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ 2x - 4 < 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x+3}{x-2} < 1 \\ \frac{2x+3}{3x-2} < 2 \end{cases}$

г) $\left[\begin{array}{l} 5x + 3 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{array}\right.$

д) $\left[\begin{array}{l}\frac{2x-3}{5} < x-2 \\ 5x-7 < x-6\end{array}\right.$

е) $\left[\begin{array}{l}2x+3 < 7 \\ 3x-2 < 4 \\ 5x-1 > 1\end{array}\right.$

ж) $\left[\begin{array}{l} 3x + 1 > 2 \\ 4x - 2 > 2 \\ 5x - 5 < 13 \end{array}\right.$

ТЕМА 5. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Задания

Решите задачи алгебраическим методом, составив уравнение [1; 2; 3; 5]:

1. На вопрос, сколько заплатил за часы, человек ответил: «Если умножить цену на 4 и к результату прибавить 70, а из этой суммы вычесть 50, то остаток будет равен 220 долларов». Сколько он заплатил за часы?

2. Если к числу прибавить его половину, а из этого результата вычесть 20, то получим четверть первоначального числа. Что это за число?

3. Отец разделил наследство между своими тремя сыновьями так, что первый сын получил на $1000 меньше, чем половина всего наследства; второй сын получил на $800 меньше, чем треть всего наследства; третий сын получил на $600 меньше, чем четверть всего наследства. Какая сумма была всего наследства?

4. Если определенное число разделить на 12, частное, делимое и делитель, сложенные вместе, дадут 64. Что это за число?

5. Из всех деревьев в саду $\frac{3}{4}$ – яблони, $\frac{1}{10}$ – персики, а оставшиеся деревья – груши, которых на 20 больше чем $\frac{1}{8}$ всех деревьев. Сколько всего деревьев в саду?

6. Один арбуз на 5 кг легче, чем второй, и в 3 раза легче, чем третий. Первый и третий вместе в 2 раза тяжелее, чем второй. Найти массу второго арбуза.

7. У фермера было два стада овец, каждое из которых состояло из одного и того же числа животных. Продав из одного стада 39 овец, а из другого – 93 овцы, он посчитал овец и обнаружил, что в одном стаде осталось в два раза больше овец, чем в другом. Сколько первоначально овец было в каждом стаде?

8. Для перевозки 60 т груза понадобилось некоторое количество машин. Из-за ремонта на дороге на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, что привело к увеличению общего числа машин на 4 единицы. Какое количество машин было необходимо первоначально?

9. С одной станции выехал поезд со скоростью 48 км/ч, а через 2 часа с другой станции навстречу ему вышел поезд со скоростью 60 км/ч. Расстояние между станциями 528 км. Сколько времени в дороге был каждый поезд до встречи?

10. Моторная лодка, двигаясь со скоростью 20 км/ч, прошла расстояние между А и В по реке туда и обратно без остановок за 6 ч 15 мин. Расстояние между А и В составляет 60 км. Найти скорость течения реки.

11. Лодка по течению плыла 2,5 часа, а против течения – 3,6 часа. Расстояние, которое прошла лодка по течению, на 7,6 км меньше, чем расстояние, которое она прошла против течения. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения 2 км/ч.

12. Есть кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова необходимо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

ТЕМА 6. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задания

Решите задачи алгебраическим методом, составив систему уравнений [1; 3; 6; 7]:

1. Навстречу друг другу из одного города в другой, расстояние между которыми составляет 30 км, едут два велосипедиста. Если первый велосипедист выедет на 2 ч раньше своего товарища, то они встретятся через 2,5 часа после отъезда второго велосипедиста; если же второй велосипедист выедет двумя часами ранее первого велосипедиста, то встреча произойдет через 3 часа после отъезда первого. С какой скоростью движется каждый велосипедист?

2. Расстояние между городами 564 км. Навстречу друг другу из городов одновременно вышли поезда и встретились через 6 часов. Скорость одного поезда на 10 км больше скорости другого. Чему равна скорость каждого поезда?

3. Вкладчику на его сбережения через год было начислено $6 процентных денег. Добавив к вкладу с процентами $44, вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь было произведено начисление процентов, и теперь вклад вместе с процентами составил $257,5. Какая сумма составляла вклад первоначально и сколько процентов годовых начисляет банк?

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его площадь 30 см^2. Найти катеты.

5. При делении двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 6, а в остатке 4. При делении этого же числа на произведение его цифр в частном получается 2, а в остатке 16. Найти это число.

6. На двух полках 84 книги. Если с одной полки снять 12 книг, то на обеих полках книг станет поровну. Сколько книг станет на каждой полке? А сколько было сначала?

7. У мальчика в коллекции есть жуки и пауки – всего 8 штук. Если пересчитать все ноги в коллекции, то их окажется 54. Сколько в коллекции жуков и сколько пауков?

8. Бассейн наполнится, если 1 трубу открыть на 12 минут, а 2-ю трубу – на 7 мин. Если обе трубы открыть на 6 мин, то наполнится 2/3 бассейна. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть только 2-ю трубу.

9. Двое рабочих могут выполнить задания за 12 дней. Если сначала один из них сделает половину всей работы, а потом остальное сделает другой, то им потребуется 25 дней. За сколько дней каждый рабочий, работая один, может выполнить задания.

10. В двух школах 1900 учеников. В поездку отправились 5% учащихся одной школы и 8% другой, что вместе составило 125 учащихся. Сколько учеников было в каждой школе?

11. Туристическую группу из 42 человек расселили в двух- и трехместные номера. Всего было занято 16 номеров. Сколько среди них было двухместных и сколько трехместных?

12. Сплав меди и цинка содержал 82% меди. После добавления в сплав 18 кг цинка содержание меди в сплаве понизилось до 70%. Сколько меди и цинка было в сплаве первоначально?

ТЕМА 7. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Теоретический материал

Пусть даны натуральные числа a и b. Говорят, что ***число a делится на число b*** (***a*** ⋮ ***b***), если существует такое натуральное число q, что $a = bq$. При этом число b называют ***делителем*** числа a, а число a – ***кратным*** числа b.

Число 1 является делителем любого натурального числа.

В зависимости от числа делителей среди натуральных чисел различают:

Простые числа – натуральные числа, которые имеют только два делителя – единицу и само это число.

Составные числа – натуральные числа, имеющие больше двух делителей.

Число 1 имеет только один делитель, поэтому не является ни простым, ни составным.

Основные теоремы:

1. Признак делимости суммы: если каждое из натуральных чисел делится на натуральное число b, то их сумма также делится на это число.

2. Признак делимости разности: если числа a_1 и a_2 делятся на b и $a_1 > a_2$, то их разность $a_1 - a_2$ делится на b.

3. Признак делимости произведения: если число a делится на b, то произведение вида ax, где x – натуральное число, делится на b.

4. Если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b не делится.

5. Если в произведении ab множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то ab делится на mn.

6. Если произведение ac делится на произведение bc, причем c – натуральное число, то и a делится на b.

Признаки делимости натуральных чисел (теоремы):

1. Для того чтобы до x делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

2. Для того чтобы число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

3. Для того чтобы число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.

4. Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилось на 3.

5. Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилось на 9 [2; 5; 6].

Таблица 2

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Наибольший общий делитель	Наименьшее общее кратное
Определение	
Общий делитель натуральных чисел – число, которое является делителем каждого из данных чисел. Наибольший общий делитель натуральных чисел – наибольшее число из всех общих делителей этих чисел	Общее кратное натуральных чисел a и b – число, которое кратно каждому из данных чисел. Наименьшее общее кратное натуральных чисел – наименьшее число из всех общих кратных этих чисел
Алгоритм нахождения	
1. Представить каждое данное число в каноническом виде. 2. Образовать произведение общих для всех данных чисел простых множителей, каждый с наименьшим показателем, каким он входит во все разложения данных чисел. 3. Найти значение этого произведения - оно и будет наибольшим общим делителем данных чисел	1. Представить каждое данное число в каноническом виде. 2. Образовать произведение всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел. 3. Найти значения этого произведения, оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел

Задания

1. Используя определение отношения делимости, прочитайте разными способами запись $a \vdots b$ [6].

2. Докажите, что если b – делитель числа a, что частное чисел a и b также является делителем a.

3. По какой формуле можно получить числа, кратные 7.

4. Верны ли следующие утверждения:
   а) 6 – делитель 36 ____________
   б) 17 – делитель 152 __________
   в) 6 – кратное 18 _____________
   г) 156 – кратное 13 ___________
   д) 16 – делитель 4 ____________
   е) 63 – кратное 7 _____________

5. Выберите из чисел 15, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 те, которые являются:

а. Делителями числа 20 __________________________________
б. Кратными числа 4 ____________________________________
в. Кратными ***и*** делителями числа 8 ________________________
г. Кратными ***или*** делителями числа 6 ______________________

6. При делении с остатком числа a на 17 получили неполное частное 10. Каково наибольшее возможное значение делимого?

7. Найти наименьшее число, которое делится на 77, а при делении на 74 дает в остатке 48 [3].

8. Докажите, что [2]:

a. Сумма двух четных чисел есть число четное.

б. Сумма двух нечетных чисел есть число четное.

в. Сумма четного и нечетного числа есть число нечетное.

9. Делятся ли на 4 следующие числа? Почему?

а) 2264

б) 2246

в) 2256

10. В записи чисел *734, 4*37, 106*, 179*, 54*0, 5*31 вместо * вставьте такие цифры, чтобы

а) получившиеся числа делились на 9

б) получившиеся числа делились на 3, но не делились на 9

11. Делится ли число aba на 7, если $a + b$ делится на 7?

12. Делится ли число baa на 7, если сумма цифр в записи этого числа делится на 7? Докажите утверждение.

13. Докажите, что разность между трехзначным числом и числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, делится на 9.

14. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не делится на 3.

15. Докажите, что [3]:

а. Разность квадратов двух последовательных натуральных чисел есть число нечетное.

б. Если число не делится на 3, то квадрат его при делении на 3 дает остаток 1.

в. Если натуральные числа a и b при делении на 7 дают один и тот же остаток, то разность квадратов этих чисел делится на 7.

г. Произведение четырех последовательных натуральных чисел кратно 24.

д. Разность квадратов двух любых нечетных чисел кратна 8.

е. Разность квадратов двух любых четных чисел кратна 4.

ж. Число $(2a+1)^2 - 1$ кратно 8 при любом натуральном a.

з. Сумма $(b-1)^3 + b^3 + (b+1)^3$ кратна 9 при любом натуральном b.

16. Решите задачи [1; 2; 3; 6; 7]:

а. Для поездки за город было заказано несколько автобусов с одинаковым числом мест в каждом автобусе. 376 человек поехали в лес, а 423 – на озеро. Все места в автобусах были заняты, и ни одного человека не осталось без места. Сколько автобусов было заказано и сколько человек было в каждом автобусе.

б. Теплоход «Александр Радищев» выполняет рейс за 3 дня, теплоход «Сергей Кучкин» – за 8 дней, теплоход «Нижний Новгород» – за 14 дней. Сегодня эти теплоходы вышли из порта. Через сколько дней они снова встретятся в порту?

в. В магазин привезли тетради. Если их разложить в пачки по 15 штук или по 20 штук, то ни одной лишней тетради не останется. Сколько тетрадей привезли в магазин, если их было больше 800, но меньше 900 шт.?

г. В три магазина поступили яблоки в одинаковых ящиках. В первый магазин доставили 1800 кг яблок, во второй – 4848 кг, в третий – 2520 кг. Сколько ящиков с яблоками доставили в каждый магазин, если известно, что ящики были максимально возможной массы?

д. Три школьных киоска получили по одинаковому числу тетрадей с различных торговых баз, первая из которых поставила тетради в пачках по 50 шт., вторая – по 100 шт., третья – по 200 шт. в каждой пачке. Сколько тетрадей получила каждая школа, если известно, что трем школам было отправлено менее 2000 тетрадей.

ТЕМА 8. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА. НАХОЖДЕНИЕ НОД И НОК

Задания

1. Используя решето Эратосфена, выпишите все простые числа, не превосходящие 300.

2. Выпишите все простые числа, находящиеся между числами 470 и 520 [1].

3. Разложите числа на простые множители

а) 124

б) 588

в) 2700

г) 3780

4. Представьте в каноническом виде числа:

а) 216

б) 594

в) 729

г) 2348

5. Найдите НОД и НОК чисел, представив их в каноническом виде:

а) 12 и 18

б) 50 и 175

в) 675 и 825

г) 7200 и 1080

д) 324, 144 и 432

е) 320, 640 и 840

6. Являются ли взаимно простыми числа:

а) 35 и 40

б) 77 и 20;

в) 8, 12 и 22;

г) 10, 30 и 41?

7. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД чисел:

а) 846 и 246

б) 588 и 1960

в) 3762 и 4446

г) 6188 и 5880

д) 15283 и 10013

8. Докажите, что числа взаимно простые:

а) 864 и 875

б) 432 и 385

в) 2939 и 3271

9. Найдя НОД числителя и знаменателя, сократите дробь [1]:

а) $\frac{2147}{1577}$

б) $\frac{9108}{924}$

в) $\frac{7845}{11319}$

г) $\frac{609609609609}{205205205205}$

ТЕМА 9. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Задания

Решите задачи, используя понятие делимости чисел [1; 7]:

1. Ребята получили на ёлке одинаковые подарки. Во всех подарках было 123 апельсина и 82 яблока. Сколько ребят присутствовало на ёлке? Сколько апельсинов и яблок было в каждом подарке?

2. У колхозницы спросили, сколько яиц она принесла на рынок. Она сказала, что принесла не более 100 яиц. Все их можно разложить без остатка в кучки по 3 яйца, по 4 яйца и по 5 яиц. Сколько яиц принесла на рынок колхозница?

3. Шаг Володи – 75 см, а шаг Гали – 60 см. На каком наименьшем расстоянии они сделают по целому числу шагов? По сколько шагов сделает каждый?

4. Три самосвала выезжают с тока одновременно за зерном. Один возвращается каждые 20 минут, другой – через 30 минут, третий – через 40 минут. Через какой наименьший промежуток времени три самосвала одновременно прибудут на ток?

5. Мимо станции железной дороги проходят один за другим три поезда: в первом – 418 пассажиров, во втором – 494 пассажира и в

третьем – 456 пассажиров. Сколько пассажирских вагонов в каждом поезде, если известно, что в каждом пассажирском вагоне находится по одинаковому числу пассажиров и их число наибольшее из всех возможных?

6. Как разрезать торт массой 600 г на части, чтобы его можно было разделить поровну и на троих, и на четверых, сделав при этом как можно меньше кусков? Какова будет масса одного куска?

7. Имеется 36 синих и 48 красных листов бумаги. Какое наибольшее число комплектов можно сделать из этих листов, если в каждом комплекте должно быть по одинаковому числу синих и одинаковому числу красных листов?

8. 12 июня от одной пристани отправились три парохода. Первый совершает рейс за 4 суток, второй – за 9 суток, третий – за 6 суток. Определите ближайшую дату, когда одновременно отправятся в новый рейс первый и второй пароходы, второй и третий пароходы и все три парохода.

9. Личный попугай капитана Флинта изучил 60 390 слов на разных языках: 12 285 слов – на английском языке, 20 790 слов – на французском и 12 825 – на испанском. Остальные слова попугай почерпнул из русского языка. Каждый год попугай изучал равное количество слов на каждом языке. Сколько слов попугай почерпнул

из русского языка? Сколько лет он странствовал с капитаном Флинтом, если известно, что попугай был с ним до самой смерти? Сколько слов каждого языка узнавал попугай ежегодно?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеева, Г.Ю. Сборник задач и упражнений по математике: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 031200 (050708) – педагогика и методика нач. образования / Г.Ю. Алексеева, Т.П. Быкова, Н.И. Хрипченко. – Москва: Экзамен, 2008. – 191 с.: граф., табл. – (Учебник для вузов). – ISBN 978-5-377-00803-3.
2. Задачник-практикум по математике. Книга 2. Часть III–IV / Е.А. Конобеева [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – Москва: Московский городской педагогический университет, 2012. – 116 с. – URL: *http://www.iprbookshop.ru/26481.html*.
3. Математика. Сборник задач: учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / Л.П. Стойлова, Е.А. Конобеева, Т.А. Конобеева, И.В. Шадрина. – Москва: Издательский центр «Академия», 2013. – 240 с. – ISBN 978-7695-9891-3.
4. Попова, А.А. Математика / А.А. Попова. – Челябинск: ЧГПУ, 2005. – 154 с. – ISBN 5-85716-682-9.
5. Стойлова, Л.П. Задачник-практикум по математике. Книга 1. Часть I–II / Л.П. Стойлова – Электрон. текстовые данные. – Москва: Московский городской педагогический университет, 2012. – 148 с. – URL: *http://www.iprbookshop.ru/26480.html*.
6. Стойлова, Л.П. Математика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Л.П. Стойлова. – Москва: Издательский центр «Академия», 2013. – 464 с. – ISBN 978-7695-9911-8.
7. Худяков, В.Н. Сборник арифметических задач и упражнений (для начальной школы) / В.Н. Худяков. – Челябинск: Челябинский ордена «Знак Почета» государственный педагогический институт, 1990. – 117 с.

Учебное издание

Юлия Валерьевна Корчемкина

МАТЕМАТИКА (функции, уравнения, неравенства, делимость чисел)

Рабочая тетрадь

ISBN 978-5-907409-19-4

Работа рекомендована РИС университета
Протокол № 20, 2020

Издательство ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69

Редактор О.В. Кунытина
Технический редактор Т.Н. Никитенко

Подписано в печать 10.10.2020. Бумага типографская
Формат 70×90/16. Объем 1 уч.-изд. л. (7 усл.-п. л.)
Тираж 100 экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69