МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Формирование алгоритмического мышления обучающихся при обучении математике в общеобразовательной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.04.01 Педагогическое образование

Направленность программы магистратуры
«Математическое образование в системе профильной подготовки»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
80,7 % авторского текста
Работа рекомендована к защите

«23» июня 2023 г.

Зав. кафедрой МиМОМ
__________ Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-313-131-2-1
Герасимчук Расима Ригзановна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент, начальник отдела управления реализацией образовательных программ
Шульгина Татьяна Александровна

Челябинск

2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ……………………………………………………………………4
Глава I. Психолого-педагогические аспекты формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе………………………………………………… 10
1.1.Сущность, свойства алгоритмов и правил.. 10
1.2. Формы и виды представления (записи) алгоритмов и правил в школьном курсе математики..16
1.3. Формирование алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры общеобразовательной школ…………………………20
1.3.1. Понятие алгоритмического мышления 20
1.3.2. Логико-математический анализ правил (алгоритмов) 28
1.3.3. Принципы отбора упражнений………………………………………… 49
1.3.4. Этапы изучения алгоритмов...……………53
Выводы по первой главе...……………57
Глава II. Методические аспекты формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе……………………………………………………………………..59
2.1. Темы курса алгебры и начала анализа, направленные на формирование алгоритмического мышления учащихся 59
2.2. Формирование алгоритмического мышления на примере темы «Производная функции» в 10 классе...64
2.2.1. Характеристика уровня требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Производная функции»..64
2.2.2. Обучение учащихся правилам и алгоритмам вычисления производной по учебнику А.Г.Мордковича..66
2.2.3. Проектирование изучения темы «Производная функции»…………68
Выводы по второй главе 73
Заключение 74
Список использованных источников ………………………………………..76

ВВЕДЕНИЕ

Основополагающим требованием нашего общества к современной школе, к характеру обучения в ней является формирование личности человека, который умел бы творчески решать научные, производственные, общественные задачи, самостоятельно, критически мыслить, вырабатывать и обосновывать свою точку зрения, систематически пополнять и обновлять свои знания, совершенствовать умения, творчески применять их в преобразовании действительности. Но основой для творческого решения различных задач является способность человека анализировать проблему, структурировать задачу, определять возможные варианты действий и выбирать наилучший из них, т.е. алгоритмическое мышление.

Слово «алгоритм» произошло от латинского слова «algorithmi» – формы написания имени среднеазиатского ученого Аль-Хорезми, которое затем перешло в имя «Алгоритми», так оно и вошло в употребление. Данный термин использовали ранее для обозначения четырех арифметических операций, в этом значении он применялся в ряде европейских языков

Важность формирования алгоритмического мышления подчеркивает ФГОС среднего общего образования: изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить у учащихся форсированность основ логического, алгоритмического и математического мышления, умений применять полученные знания при решении задач. Кроме того, требованиями к предметным результатам освоения учащимися базового курса математики являются владение методами доказательств и алгоритмами решения задач; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; углубленного курса - сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знание основных теорем, формул и умение их применять; умение доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач.

Формирование алгоритмического мышления обучающихся - одна из актуальных проблем преподавания математики в общеобразовательной школе, так как эффективное использование учащимися в учебном процессе определенных алгоритмов показывает, насколько они осознают изученный материал и умеют применять его при решении различных задач; облегчает процесс овладения ими различными умениями и навыками.

Л.Н. Ланда в 1961 г. впервые показал возможность применения алгоритмов в процессе обучения учащихся и их значение для формирования у них таких методов мышления, как дедукция, индукция и аналогия.

Проблема использования в обучении алгоритмов обсуждалась философами, психологами, дидактами, методистами в области теории и методики обучения математики в 60-70 годах 20 века. Ими были определены понятия алгоритмической деятельности, алгоритмического мышления и другие понятия, связанные с ними; раскрыта целесообразность изучения и применения алгоритмов при обучении определенным учебным предметам и различные способы записи алгоритмов.

В теории и методике обучения математике методическим аспектам формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике посвящены работы Л.В. Виноградовой, Я.И. Груденова, Т.А. Ивановой, Е.И. Лященко, Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой , А.А. Столяра , Л.М. Фридмана, А.Я. Хинчина и др.

В ряде исследований отмечается, что работу над формированием алгоритмического мышления у учащихся необходимо начинать в начальном курсе математики. Так, в учебниках математики 2 класса Л.Г.

Петерсон в разделе «Работа с информацией и анализ данных» рассматриваются понятие алгоритма, виды алгоритмов (линейные, разветвлённые и циклические); составление, запись и выполнение алгоритмов различных видов.

Г.В. Дорофеев отмечает, что алгоритмическое мышление может быть сформировано у учащихся только в процессе изучения математики. Для формирования алгоритмического мышления у учащихся общеобразовательной школы необходима целенаправленная, систематическая работа, специально разработанная методика.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена противоречиями между: требованиями к обязательным результатам освоения программы среднего общего образования по математике и фактическим состоянием методики формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках математики в общеобразовательной школе.

Необходимость разрешения данного противоречия определяет актуальность темы исследования.

Цель исследования: обоснование и разработка методики формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Гипотеза исследования: формирование алгоритмического мышления будет способствовать повышению уровня знаний, умений и навыков обучающихся средней школы на уроках математики.

Предмет исследования: методика формирования алгоритмического мышления учащихся старших классов при обучении математике в общеобразовательной школе.

Задачи исследования*:*

1.Провести анализ различных подходов к определению понятий алгоритм, алгоритмическое мышление.

2.Выделить основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики.

3.Выявить методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках математики в общеобразовательной школе.

4.Представить методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начал анализа.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования**: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы по проблеме исследования; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе.

Основные этапы исследования:

1 этап (2021/2022 учебный год): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

2 этап (2021/2022 учебный год): определение психолого-педагогических и методических основ исследования по теме диссертации;

3 этап (2022/2023 учебный год): разработка методики формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике на примере темы «Производная функции» и соответствующих методических рекомендаций на примере тем курса алгебры и начал анализа;

4 этап (2023/2024 учебный год): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- выявлены различные подходы к определению понятий алгоритм, алгоритмическое мышление;
- определены основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики;
- представлены методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начал анализа и разработанная соответствующая методика на примере темы «Производная функции», которые могут быть использованы учителями математики, студентами педагогических направлений подготовки при прохождении педагогической и производственной практик.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обусловлены использованием данных теории и методики обучения математике, анализом педагогической практики и личным опытом работы, сочетанием теоретических и практических методов исследования.

На защиту выносятся:

Методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начал анализа.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на методическом совете учителей естественно-математического цикла.

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе КГУ «Аятская общеобразовательная школа имени академика Т.Б. Даркамбаева»

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы и Приложения.

В Приложении представлены ответы и решения к некоторым методическим материалам (самостоятельной и контрольной работам, тренажерам), направленным на формирование алгоритмического мышления.

.

ГЛАВА I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

1.1 Сущность, свойства алгоритмов и правил

С годами объем предметных знаний увеличивается и в наше время ребенок должен усваивать много информации, уметь распределять ее по группам, видам, видеть общие признаки. Ученик не успевает усвоить весь объем информации, который ему дают, но он должен уметь вычленять главное и со временем к имеющимся знаниям прибавлять новые, связывать их между собой, понимать в каком отношении они находятся. Чтобы запомнить большой объем информации надо уметь ее «свернуть», то есть уметь выразить в сокращенном виде, так легче ее запомнить. Для этого нужно развитое мышление. В любом действии должен быть порядок и развивать эти способности можно на примерах алгоритмов. Рассмотрим, как трактуют понятие «алгоритм» С.А. Зайцева, Э.И. Александрова и В.Н. Клепиков .

«Алгоритм – это предписание, которое понятно всем, трактуется однозначно и определяет последовательность действий, позволяя добиться искомого результата»

«Под алгоритмом чаще всего понимают понятное и определенное предписание о выполнении в некоторой последовательности шагов (операций или действий) для поиска решения любой из задач, относящейся к определенному типу задач»

Алгоритм представляет собой упорядоченный набор действий, который используется в учебной деятельности для получения новых знаний, их усовершенствования, закрепления и контроля. Он может быть выражен вербально или представлен в форме моделей, схем, формул и знаков. Автор Э.И. Александрова определяет алгоритм как ясное и определенное указание на выполнение действий в определенной последовательности для решения задач, принадлежащих к определенному типу. Алгоритм разработан с целью облегчить и ускорить процесс нахождения правильного ответа. Изначально было замечено, что для решения задач одного типа существует общий подход, и чтобы избежать повторения одних и тех же действий, их сокращают и записывают в краткой форме. Алгоритмы могут быть найдены повсюду, и уже много веков назад люди использовали их даже в древних церковных книгах и азбуках, где присутствовали сокращенные записи повторяющихся действий.

Обычно алгоритмы определяются как процессы, которые выполняют серию операций до их завершения. Алгоритмы могут быть представлены разными способами: блок-схемами, естественным языком и языками программирования. С.Е. Царева считает, что алгоритмическое мышление представляет собой искусство рассуждать о процессах, связанных с алгоритмами, умение планировать свои действия, предвидеть различные ситуации и действовать соответственно им. Алгоритмическое мышление - это специфичный стиль математического мышления или система мыслительных приемов, позволяющая адекватно представлять различные обстоятельства, правильно планировать, взвешивать плюсы и минусы и принимать верные решения. Это навык, который должен быть автоматизирован, различные способы решения проблемы должны быть представлены в виде схем и алгоритмов, что позволяет связывать текущее действие со знанием о предыдущих. В этом случае работа происходит по определенному алгоритму или создается новый алгоритм. Навык алгоритмического мышления приходит с практикой, но если его развивать с первого класса, то ученики смогут быстрее размышлять, решать задачи и планировать свои действия, что положительно скажется на успеваемости по всем предметам. Развивая мышление, становится легче находить решение и составлять план действий, а также учитывать возможные ошибки. Для развития алгоритмического навыка необходимо тренироваться и усовершенствовать умения, входящие в его состав. Для этого регулярно нужно решать тренировочные задания на алгоритмы, так как большое количество школьных математических задач требует применения определенных правил, формул, понятий или теорем. Например, для решения уравнения первой степени необходимо перенести известные слагаемые в одну часть, а слагаемые с неизвестными в другую, а затем привести подобные слагаемые и разделить обе части уравнения на коэффициент. Если коэффициент равен нулю, то уравнение не имеет решений.

Данный пример представляет собой описание алгоритма решения линейного уравнения или, как его называют, алгоритмический подход. Кроме того, алгоритмами могут являться правила действий с десятичными и обыкновенными дробями, а также смешанными числами, решения различных уравнений и неравенств, и так далее.

Алгоритм определяется как набор правил, который четко описывает последовательность операций таким образом, что каждое правило является результативным и определенным, а последовательность прерывается в течение конечного времени. Согласно Л.В. Виноградовой, алгоритм является "точным и понятным общим предписанием выполнения определенной последовательности операций для решения задачи из определенного класса".

Н.Л. Стефанова и Н.С. Подходова описывают алгоритм как основное, неопределяемое понятие, рассматривая его сущность на содержательно-интуитивном уровне. Они считают, что алгоритм - это понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности следует выполнить с данными для решения задачи определенного типа.

Взаимосвязь логического и алгоритмического мышления школьников.

Умение последовательно, четко и непротиворечиво излагать свои мысли тесно связано с умением представлять сложное действие в виде организованной последовательности простых. Такое умение называется алгоритмическим. Оно находит свое выражение в том, что человек, видя конечную цель, может составить алгоритмическое предписание или алгоритм (если он существует), в результате выполнения которого цель будет достигнута.

Составление алгоритмических предписаний (алгоритмов) сложная задача, поэтому начальный курс математики не ставит своей целью ее решение. Но определенную подготовку к ее достижению он может и должен взять на себя, способствуя тем самым развитию логического мышления школьников.

Для этого, начиная с 1–го класса, нужно, прежде всего, учить детей «видеть» алгоритмы и осознавать алгоритмическую сущность тех действий, которые они выполняют. Начинать эту работу следует с простейших алгоритмов, доступных и понятных им. Можно составить алгоритм перехода улицы с нерегулируемым и регулируемым перекрестком, алгоритмы пользования различными бытовыми приборами, приготовления какого–либо блюда (рецепт приготовления), представить в виде последовательных операций путь от дома до школы, от школы до ближайшей остановки автобуса и т. д.

Числовая линия является важным компонентом программы математики для учеников 5-6 классов. В начале обучения каждой деятельности, связанной с числами, формулируется правило. Правило представляет собой компактный алгоритм и обычно включает в себя отдельные блоки, которые являются шагами (сводкой действий), не включающими все действия, необходимые для применения правила на начальном этапе. Они в основном включают действия, которые требуются для первоначального освоения правила. Важно отметить, что "каждое правило является алгоритмом, но не каждый алгоритм является правилом". Математическое правило представляет собой "описание общего метода решения стандартных задач однотипного типа".

Т.А. Иванова приводит примеры правил из различных школьных учебников математики:

1.Умножение десятичных дробей (5 класс).

2. Правило сравнения двух чисел (6 класс).

3. Квадрат разности двух чисел (7 класс).

4. Нахождение корней квадратного уравнения (8 класс).

5. Косинус суммы двух аргументов (10 класс).

6. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной и дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (11 класс).

В ходе анализа правил, изучаемых в курсе математики, проведенного Т.А. Ивановой, выявлено, что в школьных учебниках много правил; курс алгебры, в отличие от курса геометрии, содержит значительно большее количество правил; правила формулируются в различных формах: словесной (примеры 1, 4, 5), символьной (примеры 3, 6); словесной и символьной (пример 2); отдельные правила (пример 4) являются четкой последовательностью шагов для решения типовых задач определенного типа (в таких случаях будем полагать, что правило задано в алгоритмической форме); решение однотипных задач значительно облегчается, если правило имеет алгоритмическую форму (отметим, что в учебниках школьных программ далеко не каждое правило имеет такую форму); чаще всего каждое последующее правило содержит отдельные ранее изученные правила (например, правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке (пример 4) включает правило нахождения критических точек); в каждом правиле можно легко увидеть его теоретический базис (математическую основу), который может заключаться или в одной теореме (такие правила Л.М. Фридман и Е.Н. Турецкий называют «правиламитеоремами», или «правилами-тождествами», или «правилами-формулами», как в примерах 2 и 3, 6), или в одном определении (правило-определение, пример 4), или в их сочетании (пример 1);

Для того, чтобы решить задачу, мы должны применить несколько правил. Таким образом, от усвоения обучающимися правил зависит успех решения задач.

Любой алгоритм обладает определенными свойствами.

Существуют следующие свойства алгоритмов:

массовость (алгоритм должен подходить для решения любых задач определенного типа);

элементарность и дискретность шагов (излагаемы процесс нужно разбить на отдельные последовательные шаги. Должен получиться упорядоченный набор четко отделенных друг от друга действий);

детерминированность (однозначность действий алгоритма, исключающую случайность в выборе действий);

результативность (алгоритм направлен на получение определенного результата).

По данным свойствам можно определить однозначно, является ли рассматриваемый порядок действий алгоритмом или нет.

Таким образом, под алгоритмом мы будем понимать понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить задачу определенного типа. Кроме того, алгоритм должен обладать такими свойствами, как массовость, дискретность шагов, детерминированность и результативность.

1.2. Формы и виды представления (записи) алгоритмов и правил в школьном курсе математики

Алгоритм можно быть задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Алгоритм может регулировать действие с разной степенью подробности или свернутости, в зависимости от того, для кого он предназначен. Если алгоритм представлен в форме последовательности операций, то он является готовой программой действий. Л.В. Виноградова приводит пример сложения десятичных дробей (5 класс). Если алгоритм представлен в виде формулы, правила, таблицы, определения, то программы, состоящей из последовательности команд, нет. Её предстоит создать самим.

Существуют алгоритмы распознавания и преобразования. Признаки делимости, рассмотренные ранее алгоритмы подведения под определение и под понятие являются примерами алгоритмов распознавания. К примеру, признак делимости числа на 3 имеет следующий алгоритм:

1) сложить цифры, из которых состоит данное число;
2) проверить, делится ли полученная сумма на 3;
3) если полученная сумма делится на 3, то и само число делится на 3; если полученная сумма не делится на 3, то и само число не делится на 3.

Алгоритмы применения формул являются алгоритмами преобразования. Вместе с тем, при применении определенной формулы, к примеру, квадрата разности двух чисел, сначала происходит распознавание формулы, подтверждение того, что выбор формулы сделан верно, а затем производится преобразование: актуализация формулы и использование её по шагам. Описанная деятельность состоит из следующих шагов:

1) определить первый член двучлена;
2) определить второй член двучлена;
3) возвести в квадрат первый член двучлена;
4) найти произведение первого и второго членов двучлена;
5) удвоить произведение, полученное в четвертом шаге;
6) возвести в квадрат второй член двучлена;
7) из результата третьего действия вычесть результат пятого и сложить с результатом шестого.

Достаточно большой объем всевозможных правил в учебниках математики школьных программ в последнее время представляется обучающимся в форме алгоритма с выделенной последовательностью шагов. Применение правила в таком случае является менее трудным для учащихся, чем его использование при отсутствии указанных шагов или если какие-то действия в предписании опущены, только предполагаются и должны быть дополнены самими обучающимися.

Приведем пример правила сложения чисел с разными знаками (6 класс).

Чтобы сложить числа с разными знаками, нужно:

1) из большего модуля вычесть меньший;

2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Данный алгоритм требуется доработать обучающимися, т. к. в нем не обозначены следующие шаги: найти модуль каждого числа; сравнить модули этих чисел и определить, какое число имеет больший модуль; определить знак числа, которое имеет больший модуль. Эти шаги некоторыми обучающимися выполняются без затруднений, а для других их выделение представляет существенные трудности.

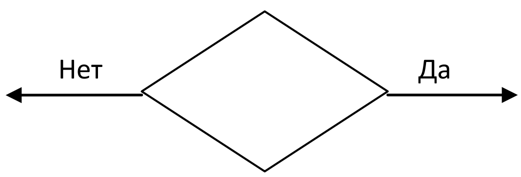
В некоторых случаях операции, входящие в состав действий, представлены в учебниках в описательной форме или показаны на примерах, и для осуществления действий обучающимся требуется выполнить отдельные шаги действия самостоятельно.

Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. Запись представляет собой набор элементов (блоков), соединенных стрелками. Каждый элемент – это «шаг» алгоритма.

В блок – схемах применяются следующие обозначения:

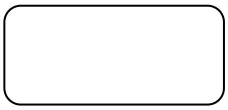
1. Процесс – выполнение операций, в результате которых изменяется значение данных.

2. Решение – выбор направления выполнения алгоритмов в зависимости от некоторых переменных условий.



Из ромбов выходят две стрелки (одна из них помечается словом «да», другая – словом «нет», они показывают, соответственно, выполнено или нет проверяемое условие).

3. Пуск – остановка – начало – конец обработки данных.



Все алгоритмы, в зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на:

а) линейные – это алгоритмы, в которых команды выполняются в естественном порядке, то есть одна за дугой;

б) разветвленные – естественный порядок выполнения команд в алгоритме может нарушиться, если предусматривается проверка выполнения некоторых условий;

в) циклические – алгоритмы, в которых определенные серии команд повторяются определенное число раз. Циклические алгоритмы могут иметь сложную структуру. Если внутри цикла содержатся другие циклы, то такие циклы называются кратными (вложенными).

Таким образом, алгоритм можно быть задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Алгоритмы можно разделить на алгоритмы распознавания и преобразования. Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. В зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на линейные, разветвленные и циклические.

1.3. Формирование алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры общеобразовательной школы

1.3.1. Понятие алгоритмического мышления

С точки зрения психологии, мышление – это «психический процесс отражения объективной действительности, представляющий собой высшую ступень человеческого познания»

Л.М. Фридман описывает мышление как «психический процесс, с помощью которого человек устанавливает внутренние свойства объектов познания, которые нельзя обнаружить с помощью восприятия, а также связи и отношения между объектами. Поэтому мышление есть внечувственный процесс решения задач (в широком смысле).

Автор подчеркивает, что, говоря о развитии мышления учащихся в процессе обучения математике, подразумевают развитие у них математического мышления. Возникает вопрос, что понимают под математическим мышлением в теории и методике обучения математике и каковы его отличия от мышления в целом.

А.Я. Хинчин выделил следующие признаки математического мышления:

1)«доведенное до предела доминирование логической системы рассуждения…»;

2)«…лаконизм, сознательное стремление всегда находить кратчайший, ведущий к данной цели логический путь, беспощадное отбрасывание всего, что не абсолютно необходимо для безупречной аргументации»;

3)«…четкая расчлененность хода аргументации»;

4)«скрупулезная точность символики»

По мнению Л.С. Трегуба, под методами познания, которые лежат в основе математики, понимают общие методы человеческого познания. Автор утверждает, что «указанные понятия (множество, отображение, преобразование, группа преобразований, симметрия, отношение, равенство) – это схемы, отображающие, моделирующие основные приемы нашего познания вообще», поэтому особого математического мышления не существует.

Л.М. Фридман не согласен с позицией, высказанное Л.С. Трегубом об особенностях математического мышления, отмечая, что оно «имеет свою специфику, свои особенности, отличающие его от мышления в других науках», так как указанное автором «единство принципов человеческого познания является лишь следствием широкого проникновения математических методов познания во все области научного исследования». При этом Л.С. Трегуб не считает это проникновение математизацией и подчеркивает, что «усиленно начавшееся в сравнительно недавнее время тщательное выяснение общих приемов, которыми мы пользуемся при обработке информации об окружающем мире, и немедленное использование полученных результатов в качестве повсеместно применимого метода научного исследования, составляет одну из замечательных и многообещающих особенностей современной науки. Часто такое внедрение четко «отпрепарированных» общих приемов познания как метода исследования в ту или иную специальную научную дисциплину ошибочно воспринимается как математизация последней. Но в только что упомянутом смысле можно говорить и о «математизации математики» (в качестве проявления такой математизации математики предстанет тогда, скажем, Эрлангенская программа Клейна).

Более полное понимание математических понятий и методов достигается посредством личной математизации самим учащимся. Под личной математизацией имеемся в виду то, что каждый учащийся в отдельности участвует в активной математической деятельности, связанной с формированием математического понятия или метода. Обучение математике должно вносить существенный вклад в развитие человека, который использует возможности математики в своей повседневной жизни.

По мнению Л.М. Фридмана, «особенность математического мышления нужно искать не в её методах, а в её объектах».

А.К. Сухотин под особенностью математического объекта видит абстракцию от абстракции или, так называемую «обобщающую абстракцию».В качестве примера математического объекта рассматривается понятие числа. Любое конкретное натуральное число отражает признаки не отдельных предметов, а их совокупностей, не конкретных элементов, а классов. Так, число «3» является определением мощности всех множеств, эквивалентных множеству (a, b, c), т. е. оно есть то общее свойство, которое присуще всем тройкам, из каких предметов они ни были составлены. «Конкретное число есть определенное свойство класса. Но сам класс… уже есть свойство. Это и означает, что количественная характеристика фиксирует свойство свойств, что конкретное число есть предикат от предиката.

По мнению автора, если говорить о натуральном числе вообще, о его понятии, то получится абстракция еще более высокого порядка, а именно свойство свойства, ибо понятие числа вообще описывает класс всех конкретных чисел, т.е. класс классов.

По мнению Л.М. Фридмана, математические объекты «находятся в определенных отношениях друг с другом, в отношениях количественных, пространственных и им подобных». Поэтому под математическим мышлением автор понимает «предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения»

В научной психологической литературе существуют различные классификации мышления, которые разделяются в зависимости от уровня обобщения, разделяются характером используемых способов мышления и т.п. На основании этих критериев выделяют виды мышления по:

1)«форме (наглядно-действенное, наглядно-образное, абстрактно логическое);

2)характеру решаемых задач – теоретическое и практическое;

3)степени развернутости и осознанности – дискурсивное и интуитивное;

4)степени новизны и оригинальности – репродуктивное и продуктивное (творческое);

5)числу участников – индивидуальное и коллективное мышление».

В зависимости от способа решения задачи и других особенностей мышления дополнительно выделяют такие его виды как эмпирическое и логическое (аналитико-синтетическое), алгоритмическое, реалистическое и интуитивное, произвольное и непроизвольное, осознанное и неосознанное и т.п.

В рамках данной работы будет рассмотрено понятие алгоритмического мышления.

В психологии алгоритмическое мышление не рассматривается как самостоятельный особый вид. Некоторые исследователи рассматривают этот тип мышления (наряду с логическим) как разновидность теоретического. Также существует точка зрения, что алгоритмическое мышление это специфический стиль мышления, характерный для определенного рода деятельности.

При таком подходе под стилем мышления, в частности, понимается «открытая система интеллектуальных стратегий, приемов, навыков и операций, к которой личность предрасположена в силу своих индивидуальных особенностей (от системы ценностей мотивации до характерологических свойств)»

Несколько иначе стиль мышления трактует А.В. Копаев. Он определяет стиль мышления как «систему мыслительных способов действий, приемов, методов и соответствующих им мыслительных стратегий, которые направлены на решение задач определенного класса, и которые детерминированы этими задачами»

В педагогической литературе кроме понятия «алгоритмическое мышление» широко используется также термин «алгоритмическая культура». Под алгоритмической культурой человека понимают комплекс личностных качеств и определенный уровень алгоритмического мышления, обеспечивающих понимание алгоритмической природы понятий, значения алгоритмов в жизни общества и его деятельности; владение умениями выполнять действия по предлагаемому алгоритму, составлять алгоритмы, производить выбор и применять алгоритмы в своей деятельности.

Рассмотрим различные подходы к понятию алгоритмического мышления в теории и методике обучения математике.

Л.В. Виноградова пишет, что под алгоритмическим мышлением понимают «особый аспект культуры мышления, характеризующийся умением составлять и использовать различные алгоритмы» Умение решать различные задачи, которые требуют составления плана действий для достижения результата связывают со способностью человека алгоритмически мыслить в широком смысле. Так, в виде процесса решения тех или иных задач можно описать любую деятельность человека. Поэтому умения человеком решать эти задачи, продумывать стратегию их решения, осуществлять прогнозирование результатов своей деятельности, анализировать и находить рациональные способы решения задач является достаточно существенным. Речь идет об умениях, которые характеризуют алгоритмическое мышление. Искусство составлять и решать задачи требует специального мыслительного навыка, которым люди, как правило, не обладают изначально. Под влиянием внешних факторов алгоритмическое мышление в течение жизни развивается. Но без специальной целенаправленной методической работы этот процесс носит стихийный характер.

Без алгоритмического мышления не обходится ни один процесс в реальности. Искусство составлять и решать задачи требует специального мыслительного навыка - алгоритмического мышления, которым люди, как правило, не обладают изначально. Это именно навык, т.е. умение решать тот или иной вид задачи, доведённое до автоматизма.

Алгоритмическое мышление - это совокупность мыслительных действий и приемов, нацеленных на решение задач, в результате которых создается алгоритм, являющийся специфическим продуктом человеческой деятельности.

Такой способ мышления отличается формальностью, логичностью, ясностью, способностью облечь любую абстрактную идею в последовательную инструкцию, пошаговое выполнение которой, воплощает эту идею в жизнь.

Алгоритмический тип мышления помогает освоению многих знаний и навыков, в том числе и школьных предметов. Способность мыслить точно, формально, если это нужно, становится одним из важных признаков общей культуры человека в современном высокотехнологическом мире.

Алгоритмический способ мышления помогает решать задачи в любой сфере деятельности людей. В процессе жизнедеятельности человек, так или иначе, применяет алгоритмический подход. Художник, мечтающий написать прекрасный пейзаж, никогда не сможет этого сделать пока не начнет мыслить алгоритмически. Он должен предпринять некоторые последовательные шаги: выбрать натуру, продумать композицию, освещение, цвета. Наконец, что-то сделать конкретно -подняться, пойти, найти, организовать, написать.

Вот некоторые умения, которые требуется во многих сферах:
- разбиение общей задачи на подзадачи;
- умение планировать этапы и время своей деятельности;
- оценивать эффективность деятельности;
- искать информацию;
- перерабатывать и усваивать информацию.

Таким образом, можно сделать вывод, что современное общество требует от нового поколения умения планировать свои действия, находить необходимую информацию для решения задачи, моделировать будущий процесс.

Алгоритмический подход применим в общеобразовательных предметах, особенно в компьютерных дисциплинах. Алгоритмическое мышление необходимо развивать, чтобы понимать, как все устроено. Для решения задач приходится с чем-то взаимодействовать, и для построения своего алгоритма надо понять алгоритм существования исходной системы. Самое главное - необходимо желание думать, без этого ничего не получиться.

По мнению Л.В. Виноградовой, в ходе проведения обобщений при решении нескольких задач одного типа, учащиеся надо обучать выделению алгоритмов и их составлению. Их также надо обучать: чтению формул, переходу от речевой формы к аналитической и обратно; составлению программ действий в случаях, когда материал в учебнике представлен в описательной форме; разворачивать, дополнять алгоритмы, предъявленные в готовой форме. Таким образом, учитель будет обучать учащихся применению теоретических знаний на практике и развивать у них алгоритмическое мышление.

Я.И. Груденов при работе с готовыми алгоритмами предлагает пользоваться компактным методом, который заключается в том, что правило (алгоритм) проговаривается по частям, на которое оно разделено по смыслу; каждая операция осуществляется вслед за произнесением имеющегося текста. Это способствует осознанному усвоению соответствующего правила. Компактный метод противопоставляется раздельному методу, в соответствии с которым произнесение правила целиком и его применение идут друг за другом.

Автор не приводит понятие алгоритмического мышления, им описывается лишь алгоритмический метод решения задач. Для того, чтобы учащиеся имели возможность выполнять упражнения с соответствующими объяснениями и в той последовательности, которую требует соблюдать учитель, предлагается алгоритм или список указаний. Он приводится или в готовом виде, или составляется вместе с классом. Учащиеся работают с ним и выполняют необходимые упражнения.

При использовании алгоритмов при обучении учащихся Л.В. Виноградова рекомендует обращаться к положениям теории деятельности: выполнять все операции, имеющиеся «в алгоритме (правиле) во внешнем плане и в развернутой форме, т.е. в написании и проговаривании всех операций без пропусков».

1.3.2. Логико-математический анализ правил (алгоритмов)

Е.И. Лященко указывает, что система упражнений является основным средством, которое используется на различных этапах формирования алгоритма. Содержание заданий в ней устанавливается на основе произведения логико-математического анализа конкретного правила (алгоритма).

Вместе с тем, умение выполнять логико-математический анализ алгоритмов (правил) позволит учителю правильно осуществлять работу по организации процесса овладения алгоритмами на уроках математики. Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова в учебном пособии отмечают, что логический анализ алгоритмов (правил) предполагает:

- ✓ «проверку наличия у данного правила характеристических свойств алгоритма;
- ✓ выделение последовательности операций и логических условий в данном правиле;
- ✓ установление связей алгоритма (правила) с другими знаниями».

Математический анализ – установление математической базы, т. е. начальных математических знаний. Если в результате логико-математического анализа какого-либо правила учитель приходит к выводу, что правило не является алгоритмом, то рационально разработать предписание выполнения определенного действия, ориентируясь на уровень подготовленности обучающихся, доступное каждому ученику. Кроме того, целесообразно вести данную работу при обучении математике в старших классах общеобразовательной школы. Для разработки таких предписаний может послужить примером стандартная задача темы «Формулы сокращенного умножения», решение линейного уравнения и так далее. На первых стадиях формированию алгоритмического мышления целесообразно привлекать обучающихся по мере возможной ситуации, в старших классах это делать необходимо для формирования у учащихся способности находить общий метод решения задач. Умение выполнять тождественные преобразования развивается так же, как и умение вычислять, на основе качественных знаний свойств операций над числами, многочленами и т. д. и алгоритмов их выполнения. Оно состоит не только в умении правильно обосновать свои действия, но и в способности найти кратчайший путь перехода от первичного выражения к тому выражению, которое наиболее соответствует цели преобразования, в умении увидеть изменение области определения выражений в цепочке тождественных преобразований, в скорости выполнения преобразований и отсутствия ошибок в них.

Е.И. Лященко различает два значения, в которых может употребляться понятие алгоритмизации обучения:

1) «под алгоритмизацией обучения понимают алгоритмизацию деятельности учителя; составление и использование алгоритмов обучения;

2) алгоритмизация деятельности учащихся есть не что иное, как обучение алгоритмам».

По мнению автора в обучении алгоритмам можно идти разными путями:

1.Обучать алгоритму в готовом виде. Этот путь достаточно экономит время, но не является лучшим.

2.Эффективно, когда обучающийся открывает алгоритмы самостоятельно или с помощью учителя.

3.Создать систему упражнений и задач, в процессе решения которых у обучающихся будут формироваться нужный порядок действий.

Е.И. Лященко отмечает, что формирование алгоритмического мышления проходит более успешно, когда эти различные пути соединяются.

Далее приведем примеры тем из курса математики основной школы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

В учебнике математики для 5 класса авторов Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. правило деления на десятичную дробь описано следующим образом: «Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо:

1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;

2) после этого выполнить деление на натуральное число».

Проведем логико – математический анализ этого правила.

Цель введения правила: сформировать умения выполнять умножение десятичных дробей.

1.Данное правило – не алгоритм, так как не обладает таким свойством алгоритма, как массовость (правило не является руководством для выполнения деления двух десятичных дробей, когда количество цифр после запятой в делителе больше, чем количество цифр после запятой в делимом).

2.Логические условия: определения понятий делимого, делителя и частного.

3.Базовые знания: понятие дроби; десятичной дроби; натурального числа; делимого, делителя и частного. Умения: выполнять деление, вычитание натуральных чисел; деление десятичного числа на натуральное; применять правило деления на 10, 100 и т.д. Запишем данное правило в виде алгоритма. Учитывая правило деления десятичной дроби на натуральное число и то, что количество цифр после запятой в делимом и делителе может совпадать, сформулируем в словесной форме алгоритм деления на десятичную дробь.

Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо:

1.Подсчитать число цифр после запятой в делителе (a);

2.Подсчитать число цифр после запятой в делимом (b);

3.В делимом перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;

4.В делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;

5.Если количество цифр после запятой в делимом и в делителе совпадают ($a = b$) или количество цифр в делителе больше чем в делимом ($a > b$), то произвести деление двух натуральных чисел;

6. Если количество цифр после запятой в делимом больше чем в делителе, то:

а) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;

б) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

Запишем данный алгоритм на *языке блок – схемы*, представленной ниже на Схеме 1.

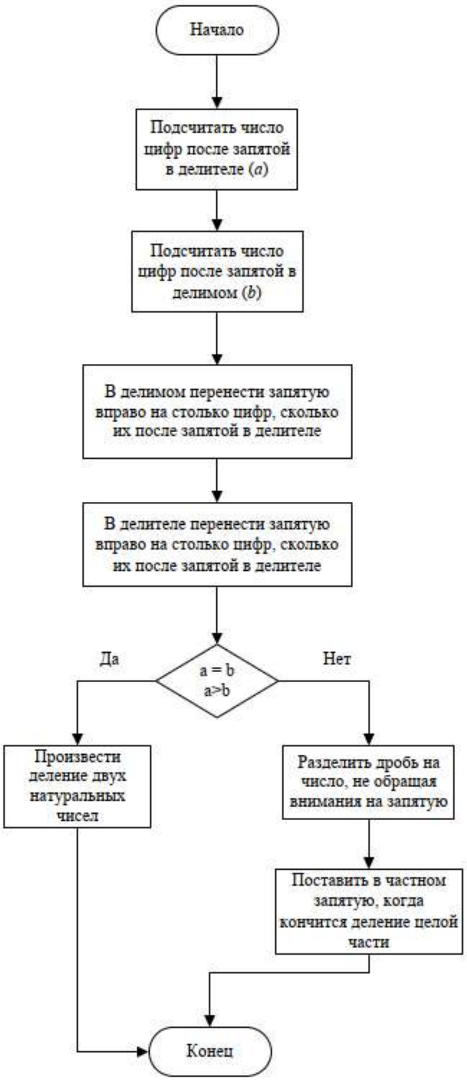


Схема 1. Алгоритм деления числа на десятичную дробь.

Согласно психологии, мышление – это высшая ступень познания, психический процесс отражения объективной действительности. Л.М. Фридман определяет мышление как процесс, при помощи которого человек устанавливает внутренние свойства объектов познания, связи и отношения между ними. В своей работе автор подчеркивает, что развитие математического мышления учащихся в процессе обучения математике подразумевает развитие у них математического мышления. Однако возникает вопрос о том, что понимается под математическим мышлением в теории и методике обучения математике и в чем его отличие от мышления в целом. А.Я. Хинчин выделил несколько признаков математического мышления, таких как доминирование логической системы рассуждения, стремление кратчайшему логическому пути, четкая расчлененность хода аргументации, скрупулезная точность символики. Согласно Л.С. Трегубу, методы познания, лежащие в основе математики, являются общими методами человеческого познания, и особого математического мышления не существует. Л.М. Фридман не согласен с этой позицией, подчеркивая, что математическое мышление имеет свои особенности и отличается от мышления в других науках. По его мнению, математическое мышление осуществляется в контексте абстрактных математических объектов, которые находятся в определенных отношениях друг с другом. Таким образом, математическое мышление является предельно абстрактным и теоретическим, при этом объекты мышления могут интерпретироваться произвольным образом, сохраняя заданные отношения между ними.

В научной психологической литературе существуют различные классификации мышления, которые разделяются в зависимости от уровня обобщения, характера используемых способов мышления.

На основании этих критериев выделяют виды мышления по:
1) «форме (наглядно-действенное, наглядно-образное, абстрактно логическое);
2) характеру решаемых задач – теоретическое и практическое;
3) степени развернутости и осознанности – дискурсивное и интуитивное;
4) степени новизны и оригинальности – репродуктивное и продуктивное (творческое);
5) числу участников – индивидуальное и коллективное мышление»

В зависимости от способа решения задачи и других особенностей мышления дополнительно выделяют такие его виды как эмпирическое и логическое (аналитико-синтетическое), алгоритмическое, реалистическое и интуитивное, произвольное и непроизвольное, осознанное и неосознанное.

В рамках данной работы будет рассмотрено понятие алгоритмического мышления.

В психологии алгоритмическое мышление не рассматривается как самостоятельный особый вид. Некоторые исследователи рассматривают этот тип мышления (наряду с логическим) как разновидность теоретического. Также существует точка зрения, что алгоритмическое мышление - это специфический стиль мышления, характерный для определенного рода деятельности. При таком подходе под стилем мышления, в частности, понимается «открытая система интеллектуальных стратегий, приемов, навыков и операций, к которой личность предрасположена в силу своих индивидуальных особенностей (от системы ценностей мотивации до характерологических свойств)». Несколько иначе стиль мышления трактует А.В. Копаев. Он определяет стиль мышления как «систему мыслительных способов действий, приемов, методов и соответствующих им мыслительных стратегий, которые направлены на решение задач определенного класса, и которые детерминированы этими задачами».

В педагогической литературе кроме понятия «алгоритмическое мышление» широко используется также термин «алгоритмическая культура». Под алгоритмической культурой человека понимают комплекс личностных качеств и определенный уровень алгоритмического мышления, обеспечивающих понимание алгоритмической природы понятий, значения алгоритмов в жизни общества и его деятельности; владение умениями выполнять действия по предлагаемому алгоритму, составлять алгоритмы, производить выбор и применять алгоритмы в своей деятельности.

Рассмотрим различные подходы к понятию алгоритмического мышления в теории и методике обучения математике. Л.В. Виноградова пишет, что под алгоритмическим мышлением понимают «особый аспект культуры мышления, характеризующийся умением составлять и использовать различные алгоритмы». Умение решать различные задачи, которые требуют составления плана действий для достижения результата связывают со способностью человека алгоритмически мыслить в широком смысле. Так, в виде процесса решения тех или иных задач можно описать любую деятельность человека. Поэтому умения человеком решать эти задачи, продумывать стратегию их решения, осуществлять прогнозирование результатов своей деятельности, анализировать и находить рациональные способы решения задач является достаточно существенным. Речь идет об умениях, которые характеризуют алгоритмическое мышление. Искусство составлять и решать задачи требует специального мыслительного навыка, которым люди, как правило, не обладают изначально. Под влиянием внешних факторов алгоритмическое мышление в течение жизни развивается. Но без специальной целенаправленной методической работы этот процесс носит стихийный характер.

Без алгоритмического мышления не обходится ни один процесс в реальности. Искусство составлять и решать задачи требует специального мыслительного навыка - алгоритмического мышления, которым люди, как правило, не обладают изначально. Это именно навык, т.е. умение решать тот или иной вид задачи, доведённое до автоматизма.

Алгоритмическое мышление - это совокупность мыслительных действий и приемов, нацеленных на решение задач, в результате которых создается алгоритм, являющийся специфическим продуктом человеческой деятельности

Такой способ мышления отличается формальностью, логичностью, ясностью, способностью облечь любую абстрактную идею в последовательную инструкцию, пошаговое выполнение которой, воплощает эту идею в жизнь.

Алгоритмический тип мышления помогает освоению многих знаний и навыков, в том числе и школьных предметов. Способность мыслить точно, формально, если это нужно, становится одним из важных признаков общей культуры человека в современном высокотехнологическом мире.

Алгоритмический способ мышления помогает решать задачи в любой сфере деятельности людей. В процессе жизнедеятельности человек, так или иначе, применяет алгоритмический подход. Художник, мечтающий написать прекрасный пейзаж, никогда не сможет этого сделать пока не начнет мыслить алгоритмически. Он должен предпринять некоторые последовательные шаги: выбрать натуру, продумать композицию, освещение, цвета. Наконец, что-то сделать конкретно - подняться, пойти, найти, организовать, написать.

Вот некоторые умения, которые требуется во многих сферах:

- разбиение общей задачи на подзадачи;

- умение планировать этапы и время своей деятельности;

- оценивать эффективность деятельности;

- искать информацию;

- перерабатывать и усваивать информацию.

Таким образом, можно сделать вывод, что современное общество требует от нового поколения умения планировать свои действия, находить необходимую информацию для решения задачи, моделировать будущий процесс.

Алгоритмический подход применим в общеобразовательных предметах, особенно в компьютерных дисциплинах. Алгоритмическое мышление необходимо развивать, чтобы понимать, как все устроено. Для решения задач приходится с чем-то взаимодействовать, и для построения своего алгоритма надо понять алгоритм существования исходной системы.

Самое главное - необходимо желание думать, без этого ничего не получиться.

Людмила Васильевна Виноградова указывает на необходимость обучения учащихся выделению алгоритмов и их составлению при проведении обобщений при решении нескольких задач одного типа. Кроме того, она предлагает обучать учащихся чтению формул, переходу от речевой формы к аналитической и обратно, а также составлению программ действий в случаях, когда материал представлен в описательной форме. Такой подход поможет развить у учащихся алгоритмическое мышление и применение теоретических знаний на практике. Иван Иванович Груденов предлагает использовать компактный метод работы с готовыми алгоритмами, при котором правило проговаривается по частям, а каждая операция осуществляется после произнесения соответствующего текста. Елена Ивановна Лященко отмечает, что логико-математический анализ алгоритмов предполагает проверку характеристических свойств алгоритмов, выделение последовательности операций и установление связей с другими знаниями. При обучении математике важно проводить логико-математический анализ алгоритмов и установление математической базы. В случае если правило не является алгоритмом, целесообразно разработать предписание выполнения действий, ориентируясь на уровень подготовки обучающихся. Кроме того, умение выполнять тождественные преобразования и вычислять развивается на основе качественных знаний свойств операций и алгоритмов их выполнения.

Е.И. Лященко различает два значения понятия алгоритмизации обучения. По его мнению, первое значение подразумевает алгоритмизацию деятельности учителя, а именно составление и использование алгоритмов обучения. Второе значение связано с алгоритмизацией деятельности учащихся и представляет собой обучение алгоритмам. Лященко считает, что существуют разные подходы к обучению алгоритмам: обучение готовому алгоритму, самостоятельное изучение алгоритмов учащимися или под руководством учителя, а также создание системы упражнений и задач для формирования нужного порядка действий у обучающихся. Он указывает, что более успешное формирование алгоритмического мышления происходит, когда эти различные пути соединяются. Для примера рассмотрим несколько тем из курса математики основной школы, где можно создать условия для формирования алгоритмического мышления учащихся. В учебнике для 5 класса авторов Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. описывается правило деления на десятичную дробь. Проведя логико-математический анализ этого правила, можно отметить, что оно не является алгоритмом, так как не обладает свойством массовости и не является руководством для деления двух десятичных дробей, если количество цифр после запятой в делителе больше, чем в делимом. При изучении данного правила необходимо усвоить определения понятий делимого, делителя, частного, а также базовые знания о дробях, десятичных дробях, натуральных числах, а также умение выполнять деление и вычитание натуральных чисел, деление десятичных чисел на натуральное и применять правило деления на 10, 100 и т.д. Для более четкого понимания данного правила, мы можем записать его в виде алгоритма. Учитывая правило деления десятичной дроби на натуральное число и возможное совпадение количества цифр после запятой в делимом и делителе, сформулируем алгоритм деления на десятичную дробь следующим образом:

1) Подсчитать число цифр после запятой в делителе.

2) Подсчитать число цифр после запятой в делимом.

3) В делимом перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе.

4) В делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе.

5) Если количество цифр после запятой в делимом и делителе совпадает или количество цифр в делителе больше, чем в делимом, то произвести деление двух натуральных чисел. Если количество цифр после запятой в делимом больше, чем в делителе, то разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую, и поставить в частном запятую, когда закончится деление целой части.

Аналогично, в учебнике для 6 класса авторов Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. приводится правило нахождения наименьшего общего кратного нескольких натуральных чисел. Чтобы найти наименьшее общее кратное, необходимо разложить числа на простые множители, выписать множители, входящие в разложение одного из чисел, добавить недостающие множители из разложений остальных чисел и найти произведение получившихся множителей.

Из учебника алгебры для 7 класса авторов Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. выпишем правила, формулы, представленные в теме «Разложение на множители суммы и разности кубов»:

1. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, т.е. сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

2. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, т.е. разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Прочитав каждое из данных правил, формул можно прийти к выводу, что не одно из них не представляет собой алгоритм в строгом своем понимании.

Разберем подробно правила «Разложения на множители суммы и разности кубов», т.е. проведем логико – математический анализ этого правила, запишем данные правила в виде алгоритма, запишем его на языке блок – схем и подберем упражнения для каждого из трех этапов работы с алгоритмом.

В данном учебнике правила разложения суммы и разности кубов на множители представлены в виде формул, данных в буквенном и словесном формах.

Проведем логико – математический анализ данных правил.

Цель введения правил: сформировать умения выполнять разложения на множители разность и сумму кубов.

1.Данные правила – не алгоритмы, так как не они не обладают соответствующими свойствами алгоритма.

2.Логическое условие: определения понятий первого и второго двучлена и неполного квадрата их суммы.

3.Базовые знания: понятие одночлена; многочлена; степени многочлена; неполного квадрата суммы и разности; формулы квадрата суммы и разности; Умения: выполнять сложение, вычитание и умножение многочленов; применять формулы суммы и разности квадратов, формулы неполного квадрата разности и суммы; работать со степенями многочлена.

Запишем данное правило в виде алгоритма.

Для того чтобы разложить сумму (разность) кубов на множители, надо:

1)найти первый член двучлена (a);

2)найти второй член двучлена (b);

3)найти сумму (разность) первого и второго двучлена ($a + b$) ((a - b));

4)возвести первый член двучлена в квадрат (a^2);

5)составить произведение первого и второго двучлена (ab);

6)возвести второй член двучлена в квадрат (b^2);

7)найти разность (сумму) результатов четвертого и пятого шагов

8)(a^2 - ab) ((a^2 + ab)); 8)результаты шестого и седьмого шагов сложить (a^2 - ab + b^2) ((a^2 + +ab+ b^2));

9)результаты восьмого и третьего шагов умножить (a + b) (a^2 - ab + b^2) (((a - b) (a^2 + ab + b^2))).

Запишем данный алгоритм на языке блок – схемы, представленной ниже на Схеме 2

Схема 2. Алгоритм разложения суммы (разности) кубов на множители.

Из учебника алгебры для 8 класса авторов Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. выпишем правила, формулы, представленные в теме «Решение квадратных уравнений по формуле»: $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

Дискриминант квадратного уравнения (1): $D = b^2 - 4ac$.

Различные возможные случаи в зависимости от D:

1)если $D > 0$,то $x1 = x2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ – формула корней квадратного уравнения;

2) если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

3) если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Таким образом, в зависимости от дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$).

Все вышеперечисленные правила и формулы алгоритмами не являются.

Разберем подробно правило решения квадратного уравнения через дискриминант, т.е. выполним логико – математический анализ данного правила, запишем его в виде алгоритма и на языке блок – схем и подберем упражнения для каждого из трех этапов работы с данным алгоритмом.

В данном учебнике нет как такового правила решения квадратного уравнения через дискриминант, записанного в словесной форме. Даются формула нахождения дискриминанта и формула корней уравнения в зависимости от D. Систематизируем материал, приведенные в учебнике в алгоритм, но для начала выполним логико – математический анализ.

Проведем логико – математический анализ данного правила.

Цель введения данной темы: сформировать умения решать квадратное уравнение, использую формулу дискриминанта.

1.Данное правило – не алгоритм, так как не обладает соответствующими свойствами алгоритма.

2.Логическое условие: определение понятия дискриминанта квадратного уравнения.

3.Базовые знания: понятие квадратного уравнения, приведенного квадратного уравнения, понятие корня квадратного уравнения, понятие дискриминанта. Умения: выполнять равносильные преобразования, решать квадратное уравнение через выделение квадратного двучлена, находить дискриминант, пользоваться формулами корней уравнения, в зависимости от значения дискриминанта.

Запишем данное правило в форме алгоритма.

Для того чтобы решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ через дискриминант, надо:

1) вычислить дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$;

2)сравнить дискриминант с нулем;

3)если дискриминант больше нуля ($D > 0$), то квадратное уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; если дискриминант равен нулю ($D = 0$), то квадратное уравнение имеет два одинаковых корня $x = -\frac{b}{2a}$; если дискриминант меньше нуля ($D < 0$), то квадратное уравнение не имеет корней.

Запишем данный алгоритм на языке блок – схемы, представленной ниже на Схеме 3.

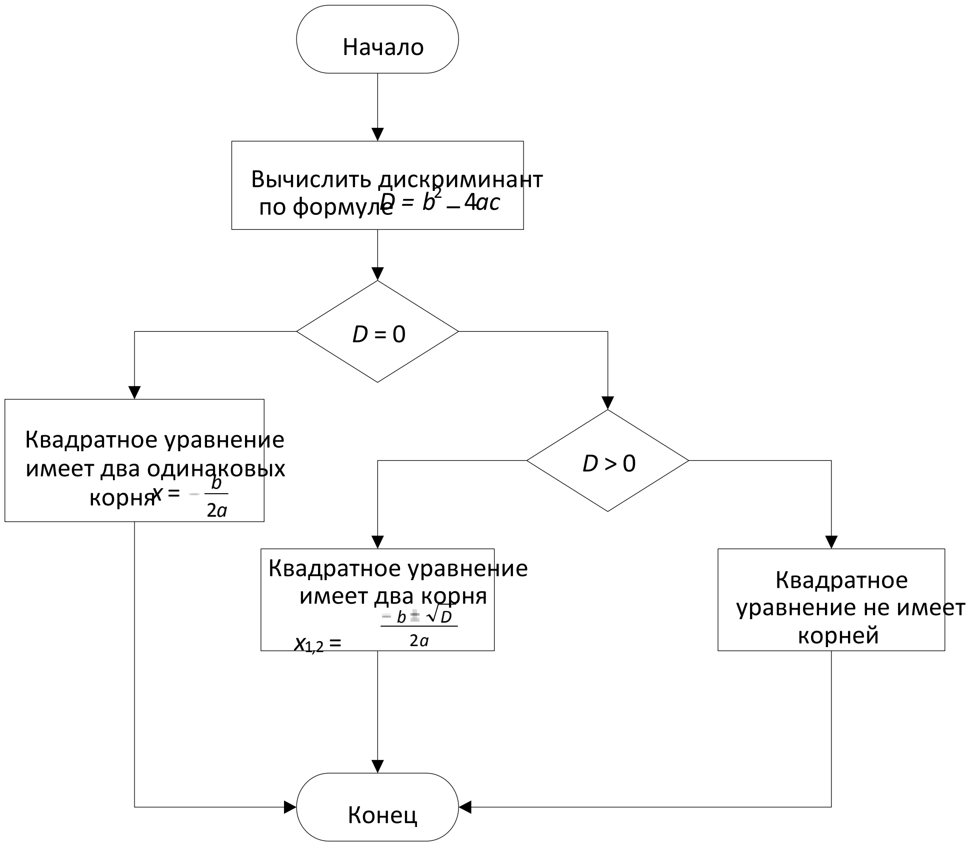


Схема 3. Алгоритм решения квадратного уравнения.

Из учебника алгебры для 9 класса авторов Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. выпишем правила, формулы, представленные в теме «Арифметическая прогрессия»:

Разность арифметической прогрессии.

«Для того чтобы найти разность арифметической прогрессии, надо из любого ее члена, начиная со второго вычесть предыдущий член, т.е. при любом натуральном *n* верно равенство: $d = a_{n+1} - a_n$, где d – разность арифметической прогрессии».

Формула n – го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то используют следующую формулу:

Sn = $\frac{2a_1 + d\,(n-1)n}{2}$.

Не одна из представленных формул и правил алгоритмом в строгом своем на является.

Разберем подробно формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии, т.е. выполним логико – математический анализ данной формулы, разработаем алгоритм нахождения суммы *n* первых членов арифметической прогрессии и подберем упражнения для каждого из этапов формирования данного алгоритма.

Выпишем еще раз формулу нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.

Проведем логико – математический анализ данной формулы.

Цель введения данной темы: сформировать умения находить сумму n первых членов арифметической прогрессии.

1.Данная формула – не алгоритм, так как не обладает соответствующими свойствами алгоритма.

2.Логическое условие: определения понятий первого и n – го члена арифметической прогрессии.

3.Базовые знания: понятие последовательности, арифметической прогрессии, разности арифметической прогрессии, n – го члена, суммы n – го члена. Умения: находить n – член арифметической прогрессии, разность, пользоваться формулой n – го члена арифметической прогрессии.

Запишем данную формулу в форме алгоритма.

Для того, чтобы найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, надо:

1)найти первый член арифметической прогрессии (a_1);

2)найти n – ый член арифметической прогрессии (a_n);

3)найти сумму первого члена и n – го члена арифметической прогрессии (a_1 + a_n);

4)умножить полученную сумму на n ((a_1 + a_n) n);

5)разделить полученное произведение на 2 ($\frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$).

Запишем данный алгоритм на языке блок – схемы представленной ниже на Схеме 4.

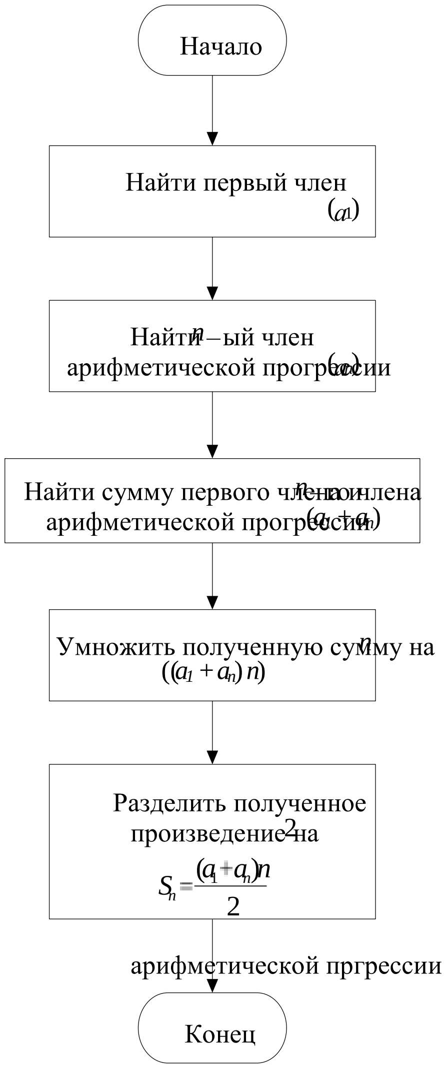


Схема 4. Алгоритм нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии

Далее приведем примеры правил, формул из курса математики 7-9 классов, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся:

- в 7 классе:

1)Правило умножения степеней.

2)Правило деления степеней.

3)Правило умножения одночлен на многочлен.

4)Правило умножения многочлен на многочлен.

5)Нахождение квадрата суммы двух выражений.

6)Нахождение квадрата разности двух выражений.

7)Нахождение произведения разности двух выражений и их суммы.

8)Нахождение разности квадратов двух выражений.

9)Нахождение суммы кубов двух выражений.

10)Нахождение разности кубов двух выражений.

- в 8 классе:

1)Нахождение корней квадратного уравнения;

2)Построение графика квадратичной функции;

3) Решение квадратных неравенств.

- в 9 классе:

1)Нахождение разности арифметической прогрессии.

2)Нахождение n – го члена арифметической прогрессии.

3)Нахождение суммы n первых членов арифметической прогрессии.

4)Нахождение знаменателя геометрической прогрессии.

5)Нахождение n – го члена геометрической прогрессии.

6)Нахождение суммы n первых членов геометрической прогрессии.

7)Нахождение бесконечной геометрической прогрессии.

8)Нахождение косинуса разности двух углов.

9)Нахождение косинуса суммы двух углов.

10)Нахождение синуса суммы двух углов.

11)Нахождение синуса разности двух углов.

12)Нахождение суммы синусов двух углов.

13)Нахождение разности синусов двух углов.

14)Нахождение суммы косинусов двух углов.

15)Нахождение разности косинусов двух углов.

Итак, в данном пункте нами приведены примеры тем из курса математики основной школы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

1.3.3. Принципы отбора упражнений

По мнению Т.А. Ивановой, при отборе содержания упражнений учителю следует придерживаться определенных принципов: «полноты, однотипности, контрпримеров сравнения, непрерывного повторения, вариативности, единственного различия». Приведем краткую характеристику данных принципов, рассмотренную и проиллюстрированную автором на примере правила умножения десятичных дробей.

Принцип полноты, который заключается в том, что система упражнений должна включать все виды упражнений на изучаемое правило, включая и особенные случаи.

В соответствии с эти принципом, задания на правило деления десятичных дробей должны содержать не менее четырех видов следующих заданий:

1) деление десятичной дроби на натуральное число;

2)в делимом достаточно десятичных знаков для перенесения запятой;

3)в делимом недостаточно десятичных знаков для перенесения запятой;

4)деление натурального числа на десятичную дробь.

Последствия несоблюдения принципа полноты очевидны. К сожалению, в школьных учебниках он не всегда реализован.

Принцип однотонности, состоящий в том, что для каждого вида заданий должны быть подобраны несколько упражнений. Т.А. Иванова отмечает, что однотипные упражнения в большей степени необходимы для «слабых учеников» и в меньшей – для «сильных». Последовательное выполнение таких упражнений является следствием снижения активности мыслительной деятельности обучающихся, так как на рассматриваемое правило они ориентируются лишь при решении первого примера.

Для каждого из четырех видов заданий из указанного выше примера учителю целесообразно подобрать или составить достаточное количество однотипных упражнений, ориентируясь на уровни их развития.

Принцип контрпримеров. Контрпримером является любая задача, которая склоняет обучающихся допустить ошибку. Применение данного принципа будет способствовать повышению положительной мотивации учащихся и вместе с этим - более глубокому пониманию изучаемого правила. Я.И. Груденов по этому поводу пишет: «В тех классах, где контрпримеры начинают использовать систематически, они воспринимаются учащимися как своеобразная игра, в которой побеждают более внимательные и сообразительные».

Т.А. Иванова замечает, что большинство учебников не содержит задания на применение принципа контрпримеров, поэтому учителю необходимо самостоятельно подбирать или составлять их. Рассмотрим пример такого упражнения.

Пример. Укажите, в каких примерах допущены ошибки, если известно, что 864:12 = 72:

1) 8,64:12 = 7,2; 2) 86,4:1,2 = 0,72; 3) 86,4:0,12 = 720; 4) 864:1,2 = 72.

Принцип сравнения, предполагающий включение некоторого ряда взаимосвязанных упражнений с целью показа их сходства или различия, в частности, упражнений «на прямые и обратные операции и действия».

Пример. Зная, что 28 *73 = 2044, поставьте запятую в делимом так, чтобы равенство было верным: 2044:0,28 = 73.

Здесь ученикам предлагается выполнить обратную операцию: сравнить количество десятичных знаков частного и делителя и сделать вывод.

Принцип непрерывного повторения. Система упражнений должна содержать задания, включающие темы из предыдущих разделов. Цель их включения: «во-первых, осуществлять систематическое повторение изученных действий, особенно тех, при выполнении которых учащиеся допускают ошибки, во-вторых, устранять отрицательное влияние однотипности упражнений, обоснованное выше».

Т.А. Иванова предлагает обратиться при работе с данным принципом к примеру на правило умножения одночленов. Автор пишет, что «полезно,

например, в такие упражнения, как: $-b^4 \times (-b^4)$, $8y^5 \times (-4y^5)$, $m \times m$ и так далее, включать упражнения на сложение одночленов: $-b^4 - b^4$, $8y^5 + (-4y^5)$, $m + m$ и так далее. Последние примеры соответствуют одновременно принципам и контрпримеров, и сравнения».

Пример. При изучении темы «Деление на десятичную дробь» необходимо предлагать обучающимся решить задания на выполнение арифметических действий с десятичными дробями, пройденных ранее, например: Найдите разность чисел 26,13 и 8,7.

Принцип вариативности, который «реализуется неоднозначно: с одной стороны, видоизменение формы выдачи заданий, с другой – разнообразие числовых и буквенных компонентов алгебраических выражений, а в упражнениях по геометрии варьирование рисунков и обозначений». Так, автор подчеркивает, что в одном из школьных учебников даны 34 упражнения на правило умножения десятичных дробей с одной формулировкой: «вычисли».

Т.А. Иванова считает, что полезно обучающихся включать в игру: «Кто больше придумает формулировок к примеру: 0,720 *370=266,4?

Вот некоторые из них:

1)вычислить;

1) найти значение числового выражения;

2) найти произведение;

4)найти число, которое в 370 раз больше данного; 5) выполнить умножение и т. д.

Принцип единственного различия. Суть этого принципа состоит в том, что при переходе от одного упражнения к другому сохраняются все элементы формы этих упражнений, кроме одного.

Пример. При анализе всех операций, которые входят в правило деления десятичных дробей, то можно сделать вывод, что новыми являются перенос запятых и постановка запятой в частном. Значит, должна быть отобрана группа упражнений на усвоение данной операции. После упражнений на нахождение частного 201,4:10,6 сразу же предлагаем серию упражнений с «плавающими» запятыми:

а) 201,4:106; б) 20,14:10,6; в) 201,4:0,106.

По мнению автора, следуя вышеуказанным принципам, учитель должен отобрать упражнения на «осознание, осмысление того или иного правила». Далее перед учителем стоит задача упорядочить их. Для упорядочивания упражнений нужно придерживаться принципа от простого к сложному.

Т.А. Иванова выделяет еще один важный принцип для определения последовательности упражнений, это принцип цикличности.

Чтобы понять его важность, обратимся к теории поэтапного формирования умственных действий. Так, в хрестоматии по психологии указано, что для того, чтобы новое действие было усвоено, оно должно перейти из внешнего плана во внутренний, преодолевая ряд этапов:

1. Выполнение действия в материальном и материализованном виде.

2. Формирование действия как внешнеречевого (в форме громкой речи).

3. Формирование действия во внешней речи про себя.

4. Выполнение действия в умственном плане». Для каждого этапа предназначен цикл упражнений, в первую очередь, удовлетворяющий принципу полноты. Там, где позволительно, при подборе упражнений 1-го этапа необходимо учитывать принцип единственного различия, при подборе упражнений других этапов – либо принцип контрпримеров, либо принцип непрерывного повторения, либо принцип сравнения. Однотипные упражнения имеются на разных этапах. Сложность упражнений возрастает при переходе от этапа к этапу, порядок упражнений нарочито меняется внутри каждого цикла.

1.3.4. Этапы изучения алгоритмов

Е.И. Лященко при формировании алгоритма выделяет три основных этапа:

1. Введение алгоритма, к которому относятся актуализация знаний учащихся, которые необходимы для введения и обоснования алгоритма; открытие учащимися под руководством учителя самого алгоритма; его формулировка.
2. Усвоение алгоритма, с которой связывают обработку отдельных операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности.
3. *Применение алгоритма,* где осуществляется отработка алгоритма с учащимися в известной и неизвестной им ситуациях.

Я.И. Груденов считает, что при использовании алгоритмического метода на уроках математики в общеобразовательной школе устраняется такая важная проблема учебников, как то, что «процесс мыслительной деятельности расчленяется на определенное число простых элементарных операций, усвоение и понимание которых для учащихся будет менее трудоёмко».

Как было отмечено, Е.И. Лященко указывает, что система упражнений является основным средством, которое используется на различных этапах формирования алгоритма. Содержание заданий в ней устанавливается на основе произведения логико-математического анализа конкретного правила (алгоритма).

Автор выделяет наиболее рациональные формы работы с учащимися на разных этапах формирования алгоритма. «На первом этапе это устная работа на повторение. На втором этапе – письменная коллективная работа с широким использованием комментирования выполняемых действий. На третьем этапе – самостоятельная работа».

На основании выполненного в предыдущем пункте логико – математического анализа алгоритмов:

- деления на десятичную дробь (5 класс);

- нахождения наименьшего общего кратного (6 класс);

- разложения суммы и разности кубов на множители (7 класс);

- нахождения корней квадратного уравнения, используя формулу дискриминанта (8 класс);

- нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии (9 класс)

приведем примеры систем упражнения для каждого этапа изучения данного алгоритма, направленные на формирование алгоритмического мышления учащихся.

Согласно Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой, при работе с алгоритмами можно выделить следующие основные этапы работы учителя по разработке определенной технологии обучения математики:

1. Подготовительный этап, который включает отбор теоретического содержания, формулировку цели, выполнение логико-математического анализа правила, разработку в случае необходимости алгоритмического предписания, разработку содержания «этапа актуализации знаний для обоснования необходимости и введения алгоритма». Авторы отмечают, что «если в результате логико-математического анализа правила учитель убеждается, что правило не является алгоритмом, то необходимо разработать предписание выполнения того или иного действия с учетом уровня подготовленности учащихся, понятное каждому ученику».

2. Этап обучения алгоритму, содержащий: «разработку алгоритмического предписания (в случае необходимости); разработку и проведение этапа актуализации знаний, необходимых для обоснования необходимости и введения алгоритма; введение алгоритмического предписания».

Выделяется два способа обучения алгоритмам:

1) сообщение учащимся готовых алгоритмов;

2) подведение учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов, который предусматривает реализацию трёх этапов изучения математического материала, схожие по смыслу с этапами формировании алгоритма, выделенные Е.И. Лященко и описанные нами выше.

На этапе формулировки алгоритма обучения предполагается осуществление описания обучающей деятельности учителя с помощью предписаний, правил, последовательности действий алгоритмического типа, способствующих решению учителем определенных дидактических задач. В этом случае процесс обучения учащихся представляется в виде «алгоритма обучения», который отражает методическую характеристику учения.

3. Этап диагностики. На этапе введения алгоритма ожидаемыми результатами станут представление и знание общего способа выполняемого действия; знание теоретической основы правила. Показателем будет правильное описание способа действия.

На этапе закрепления алгоритма ожидаемые результаты – воспроизведение алгоритма при выполнении действия; выполнение действия с объяснением операций с конкретными объектами. Правильное воспроизведение шагов алгоритма и выполнение операций в соответствии с шагами на этом этапе являются показателями успешности.

Т.А. Иванова в своей книге «Теоретические основы обучения математике в средней школе» говорит о том, что на практике учитель математики часто выделяет следующую последовательность изучения правил: повторение ранее изученных правил; сообщение обучающимся нового правила в готовом виде; показ образца решения 2 - 3 упражнений по этому правилу; выполнение упражнений из школьного учебника. При реализации такого подхода все внимание учителя направлено на усвоение информационной компоненты содержания правила. Учитель выстраивает свою работу и работу учеников согласно объяснительно-репродуктивного типа обучения, где учащимся отводится пассивная роль.

Автор подчеркивает, что «в школьной практике наравне с сообщением учащимся нового правила в готовом виде наблюдается и вариант его введения путем обобщения частных случаев».

Так, после решения определенных упражнений формулируют правило. Известный психолог В.В. Давыдов рекомендует принципиально иной подход к формированию у школьников общего способа решения типовых задач, в ходе которого у них развивался бы теоретический тип мышления. В данном подходе обучающимся предлагается решить задачу, основной целью которой является открытие общего способа решения типовых задач. Ученики решают её совместно с учителем, после чего анализируют условие и решение, не обращая внимания при этом на её частные особенности.

Таким образом, для формирования алгоритмического мышления в общеобразовательной школе учителю необходима подготовительная работа: выделить соответствующие темы; выполнить логико-математический анализ правил и алгоритмов; подобрать специальные упражнения с учетом этапов изучения алгоритмов и правил.

Выводы по первой главе

1. Проведен анализ различных подходов к определению понятия «алгоритм». Определено, что алгоритм – понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить задачу определенного типа. Выявлено, что алгоритм должен обладать такими свойствами, как

массовость, дискретность шагов, детерминированность и результативность.

2. Выделены основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики. Алгоритм можно задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Выявлено, что алгоритмы делят на алгоритмы распознавания и преобразования. Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. В зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на линейные, разветвленные и циклические.

3. Выявлены рекомендации формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе. Установлено, что для формирования алгоритмического мышления в общеобразовательной школе учителю необходима подготовительная работа: выделить соответствующие темы; выполнить логико-математический анализ правил и алгоритмов; подобрать специальные упражнения с учетом этапов изучения алгоритмов и правил.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

2.4. Темы курса алгебры и начала анализа, направленные на формирование алгоритмического мышления учащихся

Анализ учебника алгебры и начал анализа А.Г. Мордковича позволил определить темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся:

1. Числовая окружность.
2. Формулы приведения.
3. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.
4. Однородные тригонометрические уравнения.
5. Преобразования тригонометрических выражений.
6. Предел функции.
7. Определение производной.
8. Вычисление производной.
9. Уравнение касательной к графику функции.
10. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы.
11. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин.
12. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Свойства логарифмов.

Выпишем из данного учебника основные формулы, правила и алгоритмы, представленные в указанных темах.

Тема «Числовая окружность»

Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка *A* – правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие действительному числу *t* точку окружности по следующему *правилу*:

1. Если $t > 0$, то двигаясь из точки *A* в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь *AM* длины *t*. Точка *M* и будет искомой точкой *M*(*t*).
2. Если $t < 0$, то двигаясь из точки *A* в направлении по часовой стрелки (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь *AM* длины $|t|$. Точка *M* и будет искомой точкой *M*(*t*).
3. Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку *M*; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительным числом и точками окружности) будем называть числовой окружностью.

Тема «Периодичность функций y = sin x, y = cos x»

Если функция $y = f(x)$ имеет период *T*, то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины *T* (чаще всего будет промежуток с концами в точках 0 и *T* или $-\frac{T}{2}$ $\frac{T}{2}$ и), а затем сдвинуть эту ветвь по оси x вправо и влево на *T*, *2T*, *3T* и т.д.

Тема «Однородные тригонометрические уравнения»

Алгоритм решения уравнения $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ имеет вид:

1.Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.

2.Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т.е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующем введением новой переменной $z = \mathrm{tg}\, x$.

3.Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т.е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносится $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида: $a \sin 2mx + b \sin mx \cos m x + c \cos^2 mx = 0$.

Тема «Предел функции»

В данной теме можно выделить следующие правила:

I.Вычисление предела функции на бесконечности осуществляется по следующим правилам:

1. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: $\lim_{x\to\infty}(\frac{k}{x^m}) = 0$.

2.Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \lim_{x\to\infty} g(x) = c$, то

а) предел суммы равен сумме пределов: $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = b + c$;

б) предел произведения равен произведению пределов: $\lim_{x\to\infty}(f(x) \cdot g(x)) = b + c$;

в) предел частного равен частному от деления пределов (разумеется при условии, что $c \neq 0$): $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{b}{c}$;

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim_{x\to\infty} kf(x) = kb$.

II. Пусть функция $y = f(x)$ определена в токах x_0 и x_1. Разность $x_0 - x_1$ называют приращением аргумента (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_0) – f(x_1)$ называют приращением функции.

Приращение аргумента обозначают Δx. Приращение функции обозначают Δy или Δf.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Тема «Определение производной»

В данной теме можно выделить следующие алгоритмы и правила:

I. Алгоритм нахождения производной (для функции $y = f(x)$) II. Физический (механический) смысл производной.

III. Геометрический смысл производной.

Тема «Вычисление производной»

В данной теме представлены правила дифференцирования.

Тема «Уравнение касательной к графику функции» Уравнение касательной имеет вид: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Тема «Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы»

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы имеет вид:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знак производной на получившихся промежутках.
3. Опираясь на теоремы о промежутках монотонности и на теоремы о экстремальных точках, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Тема «Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин»

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции y = f(x) на отрезке [a,b] имеет вид:

1. Найти производную f '(x).

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка [a,b].

3. Вычислить значение функции y = f(x) в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это и будет $y_{\text{наим.}}$) и наибольшее (это и будет $y_{\text{наиб}}$).

Тема «Формула Ньютона – Лейбница»

Если функция y = *f* (*x*) непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то справедлива *формула*: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где *F*(*x*) – первообразная для f(x).

Тема «Свойства логарифма»

1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

2. Если *a*, *b*, *c* положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

3. Если a, b – положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство: $\log_a b^r = r \log_a b$.

Из данных перечисленных правил, некоторые представляют собой уже готовый алгоритм, а некоторые правила сформулированы в лаконичной и «сжатой» форме.

Отметим, что по темам «Определение производной», «Вычисление производной» и «Уравнение касательной к графику функции», а также по нахождению наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ правила и алгоритмы представлены в §5.

Таким образом, в данном параграфе приведены основные темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

2.2. Формирование алгоритмического мышления на примере темы «Производная функции» в 10 классе

2.2.1. Характеристика уровня требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Производная функции»

Как было отмечено, во ФГОС среднего общего образования указано, что изучение учащимися предметной области "Математика и информатика" должно обеспечить: сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления; сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач.

Вместе с этим, в Примерной программе среднего (полного) общего образования по математике отмечается, что «в результате изучения математики на профильном уровне ученик должен:

знать/понимать:

✓ значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- ✓ значение практики и вопросов, возникающих в самой математике,

для формирования и развития математической науки;

✓ значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;

- ✓ универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;
- ✓ различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;
- ✓ роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики;

уметь:

- ✓ вычислять производные и первообразные элементарных функций, применяя правила вычисления производных и первообразных, используя справочные материалы;
- ✓ исследовать функции и строить их графики с помощью производной;

✓ решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции;

✓ решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- ✓ решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа.

2.2.2. Обучение учащихся правилам и алгоритмам применения производной по учебнику А.Г. Мордковича.

А.Г. Мордкович подчеркивает, что включённые в курс алгебры старшей школы сведения о пределах имеют вспомогательный характер и необходимы для вывода формул производных. В связи с этим на этапе актуализации знаний основное внимание рекомендуется уделить проведению предельных переходов для приближённого вычисления значений конкретных функций и их приращений. Также, определению производной функции как предела разностного отношения должно предшествовать рассмотрение особенностей поведения графиков функций, приводящее к понятию касательной. «Производная функции появляется сначала как тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Тем самым с понятием производной на первом этапе связывается наглядный образ – касательная. Предельные переходы появляются как средство вычисления производной».

В дальнейшем учащиеся изучают область применения производной: это задачи на исследование функций (возрастание и убывание, нахождение точек максимума и минимума функции, непрерывность), составление уравнения касательной, а также решение прикладных задач.

Тема «Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин»

В данной теме можно выделить алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции y = f(x) на отрезке [a,b], который состоит из следующих этапов:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a,b]$.

3. Вычислить значение функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это и будет $y_{наим.}$) и наибольшее (это и будет $y_{наиб}$).

Далее опишем методические рекомендации обучения алгоритмам учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы на примере данного алгоритма.

При обучении алгоритмам учащихся 10-11-х классов на данном примере необходимо:

1) разобрать этот алгоритм с учащимися и записать его на языке блок – схемы;

2) подобрать соответствующие упражнения для каждого из трех этапов работы с этим алгоритмом.

Кроме того, прежде чем записывать данный алгоритм на языке блок – схем, запишем его на естественном языке более подробно, чем это сделано в учебнике алгебры и начал анализа.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции y = f(x) на отрезке [a,b]:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции.
3. Выбрать критические и стационарные точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$.
4. Вычислить значение функции $y = f(x)$ в критических, стационарных точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка.

5. Из найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Теперь запишем данный алгоритм на языке блок – схемы, представленной ниже на Схеме 5.

Схема 5. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции y = f(x) на отрезке [a,b].

2.2.3. Проектирование изучения темы «Производная»

Тема «Производная» - одна из основных тем курса алгебры и начала анализа в 10-11 классах. Объем темы рассчитан на 7 часов.

1.Понятие производной. Правила дифференцирования. Вычисление производной функции по определению.

Цели. Ввести понятие производной, дать представлений о правилах дифференцирования (производная суммы). Научить обучающихся вычислять производную элементарных функций по определению.

2.Производная произведения, следствия. Производная многочлена и степенной функции.

Цели. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производной произведения, следствие из нее, показать, как применяется формула на примерах. Формирование навыков вычисления производной степенной функции и многочлена.

3.Производная тригонометрических функций. Производная частного.

Цели. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производной частного, формулы для вычисления производных синуса, косинуса. Вывести формулы для вычисления производных тангенса и котангенса. Дать формулы для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

4.Производная логарифмической и показательной функций. Сложная функция, ее производная.

Цели. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производных показательной и логарифмической функций. Показать на примерах, что такое сложная функция. Привести формулу для вычисления производной сложной функции. Формирование первичных навыков по вычислению производных сложных функций.

5.Физический и геометрический смысл первой производной. Физический смысл второй производной.

Цели. Ввести в ходе занятия понятия: физический (механический) смысл первой и второй производной, геометрический смысл первой производной.

Вывести уравнение касательной и нормали, проведенных к графику функции в точке x_0.

6.Исследование функций с помощью первой производной. Схема исследования. Построение графиков.

Цели. Сформировать у обучающихся представление о том, как применяется производная к исследованию функций, привести схему исследования. Формирование умения строить графики функций на основе данных, полученных при исследовании функций.

7.Контрольная работа.

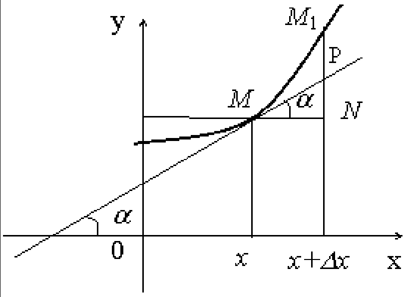
Цели. Систематизация, обобщение и контроль знаний и умений обучающихся по теме.

Приведен конспект урока по теме «Понятие производной. Правила дифференцирования»

Таблица 1.План урока в 10 классе по теме «Производная»

<table>
<tr><td colspan="2">Раздел</td><td colspan="3">10.3С Производная</td></tr>
<tr><td colspan="2">ФИО педагога</td><td colspan="3">Герасимчук Р.Р.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дата</td><td colspan="3">20.02.2024г</td></tr>
<tr><td colspan="2">Класс</td><td colspan="2">Количество присутствующих:</td><td>Количество отсутствующих</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тема урока</td><td colspan="3">Понятие дифференциала функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Цели обучения в соответствии
с учебной программой</td><td colspan="3">10.4.1.19 - знать определение дифференциала функции и геометрический смысл дифференциала;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Цели урока</td><td colspan="3">Ввести понятие дифференциала, его геометрический смысл.
Понимать отличие дифференциала функции от производной функции.
Научиться находить дифференциал функции.</td></tr>
<tr><td>Этап урока/ Время</td><td>Действия педагога</td><td>Действия ученика</td><td>Оценивание</td><td>Ресурсы</td></tr>
</table>

Начало урока 8 мин	1. Организационный момент. 2.Подготовка к восприятию новых знаний. Работа в парах. Учащиеся задают друг другу вопросы по теории: приращение функции, приращение аргумента, производная, алгоритм нахождения производной. алгоритм нахождения приращения функции. Выполняют самостоятельную работу. Аргумент функции $f(x)=x^2+x$, получил приращение $\Delta x=0{,}1$ и принял значение $x=3{,}1$. Найдите приращение функции. Найти производную функции $y=5x^3$	Выполняют самостоятельную работу.	Проверк а по образцу	Карточ ка СР
Середина урока 29 мин	3. Первичное закрепление Учитель озвучивает тему урока: Дифференциал функции и его геометрический смысл. Это новое понятие. Поэтому сформулируем цель нашего урока. Определение Геометрическая интерпретация Нахождение дифференциала Основываясь на ранее изученных знаний, учитель предлагает рассмотреть пример и ответить на ряд вопросов: Рассмотрим функцию $y=x^2$. 1.Чему равна производная этой функции? 2. Запишите формулу приращение функции? Ответ: $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$. 3.Чем является множитель 2x для нашей функции? 4. К чему стремиться второе слагаемое, если Δx стремится к нулю? 5. Тогда как выглядит формула Δy ? Учитель: Оставшееся слагаемое называется главной частью приращения и называют дифференциалом функции. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, дифференцируемую в точке x_0. Ее	Записывают дату и тему урока Формулируют цель урока 2x производной к нулю $\Delta y=2x\Delta x$, где $2x=y'$ Записывают определение		

	приращение можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где $A = f(x)'$, а $\alpha\Delta x$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Определение: Главная, линейная относительно Δx, часть приращения Δy функции $y = f(x)$ называется дифференциалом функции и обозначается $dy = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$. Для удобства записи в данном случае Δx заменяют на dx. (Но при вычислениях замену не производят) *Рассмотрим геометрический смысл дифференциала.*  Рассмотрим график функции y=f(x). На графике возьмем произвольную точку M(x;y)и дадим аргументу x приращение Δx . При этом функция получит приращение Δy =NM_1 , проведем касательную к кривой y=f(x) в точке M и обозначим угол ее наклона к оси ох через α , тогда $f(x)' = tg\alpha$, из треугольника MNP находим PN=MN $tg\alpha = \Delta x tg\alpha = f'(x)\Delta x$, то есть $dy = PN$. Какой вывод можно сделать о геометрическом смысле дифференциала? Подведение итогов по теории Чем отличается понятие дифференциала функции от производной? Вычислить приближенное числовое значение функции, зная формулу приращения функции: $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)$ или $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$.	Дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в данной точке, когда аргумент получает приращение Δx Дифференциал - это линейная часть приращения функции, а производная - это предел отношения приращен ия функции к приращению аргумента при приращении аргумента стремящемся к нулю. Записывают формулу в тетрадь Работа в парах Записывают домашние задание в дневник		График функци и

	Закрепление 1.Вычислить f(1.12), если $f(x)=x^3-x^2$. 2.Вычислить f(1.25), если $f(x)=x^3-x^2+x$. Домашняя работа 1.Вычислить f(1.24), если $f(x)=x^3-x^2$. 2.Вычислить f(1.36), если $f(x)=x^3-x^2+x$.		Оценивание по критериям	Карточка с заданием Карточка с ДЗ
Конец урока 3 мин	Подведение итогов урока. В конце урока учащиеся проводят рефлексию: - что узнал, чему научился - что осталось непонятным - над чем необходимо работать	Отвечают на вопросы		

Выводы по второй главе

1. Представлены методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начала анализа. Приведены основные темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

2. Разработаны методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся на примере темы «Производная функции» по учебнику А.Г. Мордковича. Описан опыт учителя Г.Э. Кирсанова по теме; требования к уровню знаний и умений учащихся, раскрыты этапы формирования алгоритмического мышления на примере данной темы. Разработан проект изучения темы «Производная».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные методы и полученные результаты:

1. Проведен анализ различных подходов к определению понятия «алгоритм». Определено, что алгоритм должен обладать такими свойствами, как массовость, дискретность шагов, детерминированность и результативность.

2. Выделены основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики. Алгоритм можно задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Выявлено, что алгоритмы делят на алгоритмы распознавания и преобразования. Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. В зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на линейные, разветвленные и циклические.

3. Выявлены методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе. Установлено, что для формирования алгоритмического мышления в общеобразовательной школе учителю необходима подготовительная работа: выделить соответствующие темы; выполнить логико-математический анализ правил и алгоритмов; подобрать специальные упражнения с учетом этапов изучения алгоритмов и правил.

4. Представлены методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начала анализа. Приведены основные темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

5. Разработаны методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся на примере темы «Производная

функции» по учебнику А.Г. Мордковича. Описан опыт учителей по теме; требования к уровню знаний и умений учащихся, раскрыты этапы формирования алгоритмического мышления на примере данной темы. Разработан проект изучения темы «Производная».

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.Алгебра.8 класс.Методическое пособие для учителей./ Под ред. Теляковского С.А. – Москва: Просвещение, 1977.

2.Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. /А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. – Москва: Просвещение, 2001. – 384 с.

3.Алгебра. 8 класс./Под ред. Виленкина Н.Я. - Москва: Просвещение, 1997.

4.Алгебра. 9 класс./Под ред. Теляковского С.А. - Москва: Просвещение, 1994.

5.Алгебра. 9 класс. Учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. — 7-е изд., испр. и доп. — Москва: Мнемозина, 2008. — 447 с.

6.Алгебра: Учебник для 7 класса. /Ш.А.Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и другие – Москва: Просвещение, 1999.

7.Алгебра: Учеб. Для 8 класса. / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – Москва: Просвещение, 1991.

8.Алгебра: Учебник для 9 класса. / Ш.А.Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В.Сидоров и другие – Москва: Просвещение, 1992.

9.Беседа с учителями математики: Учебно-методическое пособие/ А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 336 с.

10.Варпаховский К.М. Элементы теории алгоритмов.– Москва, 1997. – 24 с.

11.Вебер К. О математическом образовании в общеобразовательных школах // Математика в школе. – 1978. – № 2. – С. 45 – 48.

12.Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. - 252 с.
13.Галицкий М.Л., Гольдман А.Н., Завич Л.И. Курс алгебры 8-го класса в задачах// 1991. Журнал «Квантор»
14.Геометрия. 10 - 11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и другие - 18-е издание. Москва.: Просвещение, 2009. - 255 с.
15.Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителя. – Москва, 1981. – 95 с.
16.Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. Москва: Просвещение, 1990. – 224 с.
17.Кирсанова Г.Э. Использование алгоритмов при обучении математике // Сибирский учитель. -2005. -№ 2. -С. 12 – 15.
18.Копаев, А.В. О практическом значении алгоритмического стиля мышления / А.В. Копаев // Информационные технологии в общеобразовательной школе. – 2003. – № 6. – С.6-11.
19.Ланда Л.Н. Алгоритмизация в обучении. – Москва: Просвещение, 1966.
20.Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность Текст / А.Н. Леонтьев. Москва: Политиздат, 1977. - 304 с.
21.Макаренков Ю.А. Что такое алгоритм? Беседы со старшеклассником / Ю.А. Макаренков, А.А. Столяр. – Минск: Нар. Асвита, 1989. – 127 с.
22.Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – Москва: Мнемозина, 2009. – 399 с.

23.Мордкович А.Г. Алгебра. 7 – 9 класс.: Методическое пособие для учителя. – Москва: Мнемозина, 2000. – 143 с.
24.Никольский С.М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учебник для обучающихся общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С. М. Никольский. – Москва: Просвещение, 2009.
25.Пенькова М.Е. Алгоритмы в математике [Электронный ресурс] / М.Е. Пенькова // Открытый урок. Первое сентября. Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/602939/. (Дата обращения: 15.02.2024).
26.Рубинштейн С.Л. Проблемы общей психологии Текст. / С.Л. Рубинштейн. Москва: Издательсво «Педагогика», 1976. - 417 с.
27.Столяр А.А. Педагогика математики. 3-е изд. - Минск, 1986.
28.Трегуб Л.С. Элементы современного введения в математику. Ташкент, 1973.
29.Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 12.08.2022 г. № 732. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365. (Дата обращения:12.02.2024)
30.Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: кн. для учащихся старших классов средней школы. - Москва, 1989. - 192 с.
31.Хинчин А.Я. Педагогические статьи. - Москва, 1963.
32.Хрестоматия по общей психологии: Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтера, В.В. Петухова. -М., 1981. - 311 с.
33.Чада Б. Развивать алгоритмическую культуру учащихся // Математика в школе. - 1978 - № 4. - Санк-Пеербург - 62 – 63.
34.Чада Б. Развитие алгоритмической культуры учащихся // Математика в школе. -1983. - № 2. –Санк-Пеербкрг- 62 – 63.