

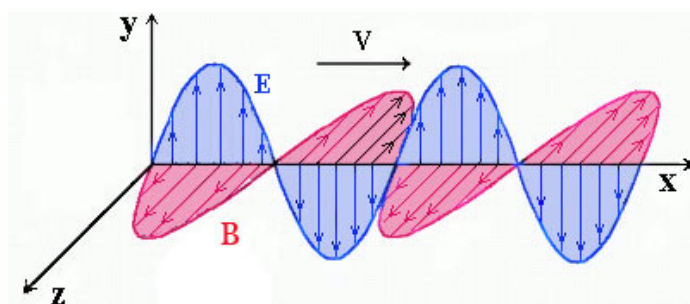
МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.М. Горяинова, Л.М. Свирская

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Курс лекций в двух частях
Часть II

Учебное пособие
для студентов физических специальностей
педагогических вузов



Челябинск 2020

УДК 538.3(021)
ББК 22.313я73
Г 71

Горяинова, С.М. Электродинамика [Текст]: курс лекций: в 2 ч. Ч. II / Г 71 С.М. Горяинова, Л.М. Свирская; под ред. Л.М. Свирской. – Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. гуман.-пед. ун-та, 2020. – 213 с.

ISBN 978-5-907210-33-2
ISBN 978-5-907409-25-5

Учебное пособие написано на основе курса лекций доцентов С.М. Горяиновой и Л.М. Свирской. В нём изложена классическая электродинамика, являющаяся частью курса «Основы теоретической физики». Часть II пособия посвящена переменному электромагнитному полю, основам микроскопической электродинамики и релятивистской формулировке электродинамики.

Предназначается для студентов физических специальностей педвузов.

**УДК 22.313я73
ББК 538.3(021)**

Рецензенты: В.П. Бескачко, д-р физ.-мат. наук, профессор
В.П. Андрейчук, канд. физ.-мат. наук, доцент

ISBN 978-5-907210-33-2
ISBN 978-5-907409-25-5

© С.М. Горяинова, Л.М. Свирская, 2020
© Издательство Южно-Уральского
государственного гуманитарно-педагогического
университета, 2020.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава V. ПЕРЕМЕННОЕ ПОЛЕ	
§ 34. Основные уравнения. Потенциалы. Градиентная или калибровочная инвариантность	6
§ 35. Дифференциальные уравнения для потенциалов в однородной среде. Калибровка Лоренца	8
§ 36. Уравнение Даламбера для потенциалов. Запаздывающие и опережающие потенциалы	10
§ 37. Электромагнитное поле линейного гармонического осциллятора	18
§ 38. Мощность излучения осциллятора	27
§ 39. Излучение ускоренно движущейся заряженной частицы. Сила лучистого трения	31
§ 40. Распространение плоских монохроматических волн в вакууме	33
§ 41. Распространение плоских монохроматических волн в однородных диэлектриках	40
§ 42. Распространение плоских монохроматических волн в однородных проводниках. Коэффициент затухания, глубина проникновения поля. Комплексная диэлектрическая проницаемость	46
§ 43. Распространение поперечно-продольных волн в волноводах	52
§ 44. Прохождение плоских монохроматических волн через границу двух диэлектриков	62
§ 45. Электромагнитная природа света	71
Глава VI. ОСНОВЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	
§ 46. Уравнения Максвелла–Лоренца – основные уравнения микроскопической электродинамики. Усреднение уравнений Максвелла–Лоренца	73
§ 47. Рассеяние плоских волн упруго-связанным электроном. Эффективное сечение рассеяния	85
§ 48. Диэлектрики в переменном электромагнитном поле. Нормальная и аномальная дисперсия	94
§ 49. Эффект Вавилова–Черенкова	103
§ 50. Теорема об импульсе поля и вещества. Закон сохранения импульса поля и вещества. Давление электромагнитных волн	113

Глава VII. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 51. Четырёхмерный мир Минковского. Координаты Минковского, законы их преобразований.....	125
§ 52. 4-векторы и 4-тензоры в СТО, законы их преобразования.....	128
§ 53. Принцип Лоренц-ковариантности и его выполнение при записи законов в четырехмерной форме	131

Глава VIII. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 54. Уравнение непрерывности в 4-форме. Инвариантность электрического заряда.....	133
§ 55. 4-вектор-потенциал электромагнитного поля. Уравнения Даламбера в четырехмерной форме	136
§ 56. Тензор электромагнитного поля	138
§ 57. Формулы Эйнштейна для преобразования полей. Инварианты. Типы полей.....	140
§ 58. Эффект Доплера.....	145
§ 59. Лоренц-ковариантная форма уравнений Максвелла–Лоренца	152
Заключение	156

ПРИЛОЖЕНИЯ

<i>Приложение 1.</i> Система уравнений Максвелла в интегральной форме.....	158
<i>Приложение 2.</i> О системах единиц в классической электродинамике.....	160
<i>Приложение 3.</i> О скорости распространения света в линейной и нелинейной электродинамике.....	171
<i>Приложение 4.</i> О связи между классической механикой и электродинамикой.....	173
<i>Приложение 5.</i> Уширение спектральных линий в модели упруго-связанного электрона.....	176
<i>Приложение 6.</i> Спектральное разложение электромагнитного поля.....	179
<i>Приложение 7.</i> Уникальный язык теоретической физики	182
<i>Приложение 8.</i> О четырехмерном формализме в классической электродинамике.....	185
<i>Приложение 9.</i> Система развития профессиональных компетенций преподавателя высшей школы (авторская концепция С.М. Горяиновой).....	189
<i>Приложение 10.</i> Юмористические рассказы Сусанны Маврикиевны	199
Библиографический список	211

Введение

Во II части учебного пособия изложены вопросы, относящиеся к лекциям № 11–17. Сюда вошли следующие разделы: переменное электромагнитное поле, основы микроскопической электродинамики, релятивистская формулировка электродинамики.

Последний раздел не только представляет самостоятельный интерес. Он приводит к пониманию того, что классическая теория электромагнитного поля, построенная Максвеллом в середине XIX столетия, оказалась теорией релятивистской, удовлетворяющей требованиям специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна (1905 г.). Таким образом, СТО позволила поднять теорию электромагнетизма Максвелла на новую высоту. При изучении этой части курса читатель ещё раз может убедиться в целесообразности использования гауссовой системы единиц в электродинамике. С целью более глубокого понимания последнего раздела добавлен математический аппарат специальной теории относительности. Наряду с традиционными вопросами подробно рассматривается эффект Вавилова–Черенкова.

Весь представленный материал является достаточно обширным и не может быть полностью рассмотрен на лекциях. Однако он изложен достаточно подробно, со всеми промежуточными выкладками, что позволяет студенту изучить ряд вопросов самостоятельно.

Курс лекций дополнен приложениями, которые могут представлять интерес для читателей.

Так же, как и в процессе подготовки к печати I части курса лекций, неоценимую помощь оказали наши студенты: Акимов Дмитрий, Антонова Надежда, Болтенко Александр, Бурцева Анастасия, Гагич Екатерина, Горюнова Мария, Назаренко Ксения, Потапова Анастасия, Раздьяконова Анастасия, Садыгов Эльдар, Самойлова Евгения, Сафронова Нина, Скворцов Николай, Сорокина Евгения, Турсунбаева Диана, Чалов Дмитрий, Шадиев Артур.

ГЛАВА V. ПЕРЕМЕННОЕ ПОЛЕ

§ 34. Основные уравнения. Потенциалы. Градиентная или калибровочная инвариантность

В этой главе рассматривается самая суть электродинамики Максвелла – переменное электромагнитное поле. В методическом плане это наиболее трудоемкая часть курса.

Основные уравнения теории переменного поля – полная система уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad (5.4)$$

и уравнения связи:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \lambda \vec{E}. \quad (5.5)$$

Система уравнений (5.1)–(5.4) означает, что переменное поле всегда вихревое. Как будет показано в дальнейшем, оно может существовать самостоятельно, в отрыве от источников – в виде электромагнитных волн.

Уравнение (5.3) и тождество векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$ позволяют так же, как и в случаях магнитостатики и квазистационарного поля, ввести векторный потенциал \vec{A} , связанный с вектором \vec{B} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (5.6)$$

Так же, как и в квазистационарном случае, вводится скалярный потенциал φ , чтобы удовлетворялось уравнение Максвелла (5.2) с учетом (5.6):

$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Потенциалы \vec{A} и φ определены неоднозначно в данной точке поля. Однако векторы \vec{B} и \vec{E} в этой точке однозначны. Покажем это.

Пусть в данной точке поля есть потенциалы \vec{A}_1, \vec{A}_2 , причем $\vec{A}_1 \neq \vec{A}_2$, а также φ_1, φ_2 , но $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Необходимо доказать, что $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$.

Выберем потенциалы в виде

$$\begin{aligned} \vec{A}_2 &= \vec{A}_1 + grad f, \\ \varphi_2 &= \varphi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Сначала докажем инвариантность вектора \vec{B} . Пусть $\vec{B}_1 = rot \vec{A}_1$ и $\vec{B}_2 = rot \vec{A}_2$.
Имеем:

$$\vec{B}_2 = rot \vec{A}_2 = rot(\vec{A}_1 + grad f) = rot \vec{A}_1 + rot grad f = rot \vec{A}_1 = \vec{B}_1.$$

При этом использовано тождество векторного анализа $rot grad f \equiv 0$.

Итак, доказано, что $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ при $\vec{A}_1 \neq \vec{A}_2$.

Докажем, что $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$. Пусть

$$\vec{E}_1 = -grad \varphi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t}, \quad \vec{E}_2 = -grad \varphi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t}.$$

Запишем подробно \vec{E}_2 , учитывая связь потенциалов \vec{A}_2 и φ_2 с \vec{A}_1 и φ_1 :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= -grad \varphi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} = -grad \left(\varphi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}_1 + grad f) = \\ &= -grad \varphi_1 + \frac{1}{c} grad \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} grad f = \\ &= -grad \varphi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \frac{1}{c} grad \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c} grad \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= -grad \varphi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = \vec{E}_1. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались свойством коммутации операторов $\frac{\partial}{\partial t}$ и $grad$:

$$\frac{\partial}{\partial t} grad f = grad \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Итак, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$.

Это и есть свойство градиентной или калибровочной инвариантности: векторы поля \vec{B} и \vec{E} инвариантны относительно преобразований потенциалов \vec{A} и φ . Это свойство позволяет налагать на потенциалы условие калибровки, что существенно упрощает дифференциальные уравнения для потенциалов, приводя их к стандартному виду. Этим мы воспользуемся в следующем параграфе.

§ 35. Дифференциальные уравнения для потенциалов в однородной среде. Калибровка Лоренца

1. Дифференциальное уравнение для вектор-потенциала \vec{A} .

Умножим уравнение (5.1) на $\mu = const$. Получаем:

$$\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (5.8)$$

Левая часть преобразуется с учетом (5.6) и тождества векторного анализа:

$$\mu \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot}(\mu \vec{H}) = \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}.$$

В правой части преобразуем второй член с учетом (5.7) и уравнения связи:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Подставляем это выражение в (5.8) и получаем:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j} - \frac{\varepsilon \mu}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Переносим в левую часть выражения с φ и \vec{A} и группируя, получаем:

$$\operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}.$$

Наложим на φ и \vec{A} условие калибровки Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (5.9)$$

Тогда остается уравнение:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}.$$

Умножая его на -1 , получаем искомое уравнение для вектор-потенциала \vec{A} :

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \vec{j}. \quad (5.10)$$

2. Дифференциальное уравнение для φ .

Используем уравнение (5.4) в случае $\mathcal{E} = \text{const}$. Преобразуем левую часть с учетом (5.7) и тождества векторного анализа:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D} &= \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon \operatorname{div}\vec{E} = \varepsilon \operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \\ &= -\varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad}\varphi - \frac{\varepsilon}{c} \operatorname{div} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\varepsilon \nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{A}. \end{aligned}$$

Из (5.9) находим

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и подставляем в левую часть предыдущего выражения:

$$\operatorname{div}\vec{D} = -\varepsilon \nabla^2 \varphi + \frac{\varepsilon^2 \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi\rho.$$

Умножив на $(-1/\varepsilon)$, получаем искомое уравнение для φ :

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.10) и (5.11) называются уравнениями Даламбера. Их решения будут получены в следующем параграфе.

§ 36. Уравнение Даламбера для потенциалов. Запаздывающие и опережающие потенциалы

План:

1. Уравнение Даламбера – наиболее общее уравнение для потенциалов.
2. Метод решения уравнения Даламбера. Фазовая скорость электромагнитных волн.
3. Запаздывающие и опережающие потенциалы.

Запишем вместо уравнения (5.10) три уравнения для проекций A_x, A_y, A_z . Введем обозначение

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2},$$

где

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (5.12)$$

Как будет показано далее, v является важнейшей физической величиной. Добавив еще уравнение (5.11) для φ , получаем четыре уравнения:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\mu j_x}{c},$$

$$\nabla^2 A_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\mu j_y}{c},$$

$$\nabla^2 A_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\mu j_z}{c},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Введем четырехкомпонентный потенциал $A_k = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, причем $A_1 = A_x, A_2 = A_y, A_3 = A_z, A_4 = \varphi$.

Тогда

$$A_k = (A_x, A_y, A_z, \varphi). \quad (5.13)$$

Аналогично вводим четырехкомпонентную плотность заряда:

$$\rho_k = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$$

$$\rho_1 = \frac{\mu j_x}{c}, \quad \rho_2 = \frac{\mu j_y}{c}, \quad \rho_3 = \frac{\mu j_z}{c}, \quad \rho_4 = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\rho_k = \left(\frac{\mu j_x}{c}, \frac{\mu j_y}{c}, \frac{\mu j_z}{c}, \frac{\rho}{\varepsilon} \right). \quad (5.14)$$

Тогда получаем четыре уравнения:

$$\nabla^2 A_1 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} = -4\pi\rho_1,$$

$$\nabla^2 A_2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} = -4\pi\rho_2,$$

$$\nabla^2 A_3 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} = -4\pi\rho_3,$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_4.$$

Эти уравнения можно в общем виде записать так:

$$\nabla^2 A_k - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = -4\pi\rho_k, \quad (5.15)$$

где $k = 1, 2, 3, 4$.

Уравнение (5.15) называется уравнением Даламбера. Левую часть можно переписать иначе, введя оператор Даламбера

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

а именно

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_k = \square A_k.$$

Уравнение Даламбера компактно записывается так:

$$\square A_k = -4\pi\rho_k,$$

но проще оно не становится! Мы будем пользоваться уравнением в виде (5.15).

Рассмотрим частные случаи.

1) Если $\rho_k = 0$, то из уравнения Даламбера следует волновое уравнение

$$\nabla^2 A_k - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0.$$

2) Если $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0$, но $\rho_k \neq 0$, тогда из (5.15) получается уравнение Пуассона

$$\nabla^2 A_k = -4\pi\rho_k.$$

3) Если $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0$ и $\rho_k = 0$, то из уравнения Даламбера получаем уравнение Лапласа

$$\nabla^2 A_k = 0.$$

Таким образом, уравнение Даламбера является наиболее общим уравнением для потенциалов в однородной среде.

Рассмотрим метод решения уравнения Даламбера.

Покажем, как можно найти решение уравнения Даламбера, не проводя строгих доказательств.

Сначала, как и положено, необходимо получить решение однородного (т.е. волнового) уравнения:

$$\nabla^2 A_k - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0. \quad (5.16)$$

Это уравнение описывает поле точечного источника в однородной среде. Поле точечного источника обладает сферической симметрией. Поэтому оператор ∇^2 можно выразить в сферических координатах. Как показывается на практическом занятии, в этом случае

$$\nabla^2 A_k = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_k).$$

Тогда уравнение (5.16) записываем так:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_k) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0.$$

Умножим обе части уравнения на r , считая r фиксированным – мы исследуем поле на каком-то фиксированном расстоянии r от источника. Поэтому можно внести r под знак производной $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Тогда получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rA_k) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rA_k) = 0.$$

Введем новую функцию

$$u = rA_k. \quad (5.17)$$

Тогда уравнение приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5.18)$$

Это известное и весьма «любимое» студентами уравнение колебаний струны или мембраны. Напишем сразу его решение в виде суперпозиции двух функций:

$$u = u_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + u_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Тогда

$$A_k^{(0)} = \frac{u_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{u_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r}. \quad (5.19)$$

Значок (0) вверху $A_k^{(0)}$ означает, что мы пока еще нашли решение однородного уравнения. Прежде чем находить решение неоднородного уравнения, то есть с $\rho_k \neq 0$, исследуем полученные решения для $A_k^{(0)}$. Интерес, конечно, представляют функции $u_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ и $u_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$

Сначала выясним физический смысл функции $u_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$. При $u_2 = 0$ имеем потенциал

$$A_k^{(0)} = \frac{u_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}.$$

Опишем вокруг точечного источника сферу радиуса r_1 . Источник находится в центре сферы – в точке O. Отметим в нескольких точках на этой сфере состояние поля в момент t_1 условно в виде «всплеска» или «горба» волны (см. рис. 1).

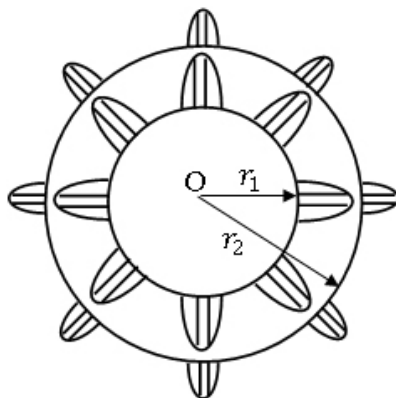


Рис. 1. Поле, описываемое функцией $u_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$

Этой сфере соответствует функция $u_1\left(t_1 - \frac{r_1}{v}\right)$. Затем проведем сферу радиуса $r_2 > r_1$, причем $r_2 = r_1 + v \cdot \Delta t$, где $\Delta t = 1$, т.е. $r_2 = r_1 + v$, и отметим поле в момент $t_2 = t_1 + 1$. Подставим для этого в аргумент функции значения r_2 и t_2 :

$$u_1\left(t_2 - \frac{r_2}{v}\right) = u_1\left(t_1 + 1 - \frac{r_1 + v}{v}\right) = u_1\left(t_1 + 1 - \frac{r_1}{v} - 1\right) = u_1\left(t_1 - \frac{r_1}{v}\right).$$

Этот простой расчет означает, что на сфере радиуса r_2 в момент t_2 потенциал оказывается в том же состоянии, т.е. фазе, что и на сфере радиуса r_1 в момент t_1 , хотя по величине и меньше. На рисунке это отмечено меньшими по величине «всплесками».

Таким образом, данное состояние поля через некоторое время приходит в точки другой сферы. А это означает распространение электромагнитного возмущения (сигнала) в пространстве! Если источник периодически выпускает сигналы, то в пространстве распространяется электромагнитная волна. Это сферическая волна. Она распространяется от источника во все стороны в бесконечность. Поэтому функция $u_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$ описывает распространение волн от источника в бесконечность.

Найдем фазовую скорость волны. Для этого учтем, что

$$v_\phi = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \frac{r_1 + v - r_1}{t_1 + 1 - t_1} = \frac{v}{1} = v.$$

Полученный результат означает, что введенная постоянная (5.12) имеет физический смысл фазовой скорости электромагнитных волн в среде:

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.20)$$

В вакууме ($\epsilon = \mu = 1$)

$$v_\phi = c. \quad (5.21)$$

Это очень важный результат. В начале курса константа вводилась как электродинамическая постоянная. А оказывается, из теории Максвелла следует, что она имеет физический смысл фазовой скорости электромагнитных волн в вакууме. Русский физик А.Г. Столетов в 1871–1876 годах разработал точный метод измерения электродинамической постоянной. Результаты экспериментов Столетова показали совпадение значения со скоростью света в вакууме. Это было первым экспериментальным подтверждением теории Максвелла.

Теперь выясним физический смысл функции $u_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$. Пусть на сфере радиуса r_1 в момент t_1 функция u_2 имеет значение $u_1\left(t_1 - \frac{r_1}{v}\right)$. В момент $t_2 = t_1 + 1$ рассмотрим

значение u_2 в точках более близкой сферы радиуса $r_2 = r_1 - \nu$. Проведем несложный расчет:

$$u_2\left(t_2 + \frac{r_2}{\nu}\right) = u_2\left(t_1 + 1 + \frac{r_1 - \nu}{\nu}\right) = u_2\left(t_1 + 1 + \frac{r_1}{\nu} - 1\right) = u_2\left(t_1 + \frac{r_1}{\nu}\right).$$

Этот результат означает, что та же фаза – состояние поля – теперь оказывается в следующий момент времени t_2 ближе к точке О. Это означает, что волна распространяется из бесконечности и сходится в точке О как в фокусе. Фазовая скорость и в этом случае та же:

$$\nu_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Перейдем к нахождению решения уравнения Даламбера, т.е. неоднородного уравнения при $\rho_k \neq 0$. Для этого воспользуемся методом электростатики (см. Глава II, §10) и аналогией с электростатикой.

По методу электростатики разбиваем объем с $\rho_k \neq 0$ на элементарные объемы ΔV^i , которые можно считать точечными источниками. Тогда можно применять решение (5.19) для ΔV^i . Но сначала запишем это решение, например, для функции u_1 , причем вблизи от источника, когда можно пренебречь в аргументе функции значением $\frac{r}{\nu}$. Получаем:

$$dA_k^i(t) = \frac{u_1(t)}{r} = \frac{\rho_k(t)\Delta V^i}{r}.$$

Вдали от источника уже не пренебрегаем r/ν в аргументе:

$$dA_k^i(t) = \frac{\rho_k\left(t - \frac{r}{\nu}\right)\Delta V^i}{r}.$$

После интегрирования получаем:

$$A_k(t) = \int_{\nu} \frac{\rho_k\left(t - \frac{r}{\nu}\right)}{r} dV. \quad (5.22)$$

Аналогично получается решение второго типа:

$$A_k(t) = \int_{\nu} \frac{\rho_k\left(t + \frac{r}{\nu}\right)}{r} dV. \quad (5.23)$$

Итак, (5.22) и (5.23) – решения уравнения Даламбера.

Запишем решения (5.22) и (5.23) подробно для потенциалов \vec{A} и φ , учитывая введенные обозначения (5.13) и (5.14). При $k = 1, 2, 3$ – решение для \vec{A} , при $k = 4$ – решение для φ . Тогда получим решения первого типа согласно (5.22):

$$\vec{A}_a^{(1)}(t) = \int_{V_q} \frac{\mu \vec{J}_q \left(t - \frac{r_{aq}}{v} \right)}{cr_{aq}} dV_q; \quad \varphi_a^{(1)}(t) = \int_{V_q} \frac{\rho_q \left(t - \frac{r_{aq}}{v} \right)}{\epsilon r_{aq}} dV_q. \quad (5.24)$$

Решения второго типа:

$$\vec{A}_a^{(2)}(t) = \int_{V_q} \frac{\mu \vec{J}_q \left(t + \frac{r_{aq}}{v} \right)}{cr_{aq}} dV_q; \quad \varphi_a^{(2)}(t) = \int_{V_q} \frac{\rho_q \left(t + \frac{r_{aq}}{v} \right)}{\epsilon r_{aq}} dV_q. \quad (5.25)$$

Напомним, что a обозначает точку наблюдения, в которой определяются потенциалы \vec{A} и φ , q – точку источника, в которой находятся источники поля – плотность тока \vec{J}_q и плотность заряда ρ_q , r_{aq} – расстояние от элемента объема источника dV_q до данной точки наблюдения. Интегрирование производится по точкам источника.

Выясним физический смысл решений (5.24) и (5.25). Сначала «разберемся» с решением первого типа. Выделим объем в источнике dV_q с плотностью ρ_q и запишем потенциал $d\varphi_a$ в точке наблюдения (рис. 2):

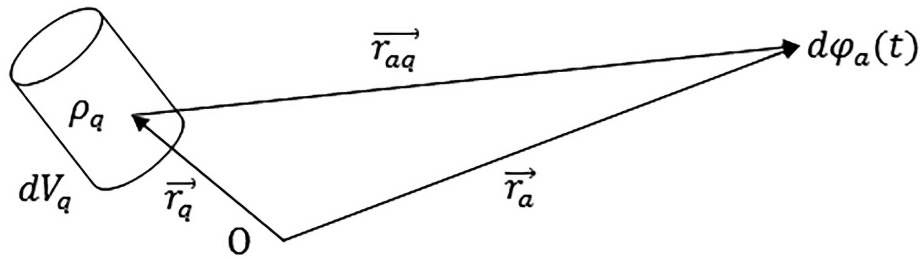


Рис. 2. Потенциал в точке наблюдения

Согласно (5.24) потенциал в точке наблюдения a в момент t имеет вид

$$d\varphi_a(t) = \frac{\rho_q \left(t - \frac{r_{aq}}{v} \right)}{\epsilon r_{aq}} dV_q, \quad \text{т. е.}$$

$$d\varphi_a(t) \sim \rho_q \left(t - \frac{r_{aq}}{v} \right).$$

Таким образом, потенциал в точке наблюдения определяется плотностью заряда в источнике, взятой в более ранний момент времени, т.е. в момент

$$t - \frac{r_{aq}}{v} = t - \tau < t,$$

где

$$\tau = \frac{r_{aq}}{v}. \quad (5.26)$$

Состояние поля, в данном случае потенциала, на некотором расстоянии от источника определяется прошлым состоянием источника. Поле запаздывает по отношению к источнику на время τ , определяемому по (5.26); τ называется временем запаздывания.

Поэтому решения первого типа называются запаздывающими потенциалами. Физика запаздывания заключается в следующем. Источник с изменяющимися плотностями $\vec{j}(t)$ и $p(t)$ возбуждает вблизи поле. Поле распространяется от источника во все стороны в виде электромагнитных волн. Поскольку скорость $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — конечна, требуется некоторое время, чтобы это возмущение пришло в данную точку a .

Может случиться так, что источник прекратил свое существование, но испущенное им электромагнитное возмущение продолжает распространяться в пространстве. Не зря говорят, что до нас доходит свет угасших звезд!

Решения (5.24) означают, что существует сдвиг фазы между характеристиками поля и источника. Но вблизи от источника, при малых r_{ad} , вследствие большой скорости v , можно пренебречь временем запаздывания, полагая $\tau \rightarrow 0$. Это значит, что вблизи поле квазистационарно, т.е. меняется в такт изменению источника (см. Глава IV, § 29).

Сложнее с интерпретацией решений второго типа. Мы должны предположить, что согласно (5.25)

$$d\varphi_a(t) \sim \rho_q \left(t + \frac{r_{aq}}{v} \right).$$

Это означает, что потенциал в точке наблюдения a в момент t определяется будущим состоянием источника, т.е. характеристиками источника в момент $t + \tau > t$. Поле, таким образом, опережает источник на время $\tau = \frac{r_{aq}}{v}$. Поэтому решения второго типа называются опережающими потенциалами. Понять при этом причинно-следственную связь действительно сложно: поле уже есть, а его источника пока еще нет! Но не забудем, что это решение получено из решения $u_2 \left(t + \frac{r}{v} \right)$ однородного уравнения. Следовательно, решение второго типа описывает волну, идущую в сторону уменьшения расстояния до источника.

Поэтому делается обычно добавочное допущение, основанное на опытах, что поле описывается запаздывающими решениями. Подробнее об этом и о попытках

построения теории с опережающими решениями можно прочитать в Фейнмановских лекциях по физике [23].

Отметим важное обстоятельство, связанное с наличием решений двух типов. Оно заключается в том, что законы электродинамики, так же как и законы механики, симметричны при изменении знака времени. Это, иначе говоря, означает, что и в прошлом, и в будущем законы остаются неизменными, одинаковыми. Посмотрим, что дают решения (5.24) и (5.25).

Отложим на оси времени в момент t_0 значение плотности $\rho(t_0)$ (рис. 3).

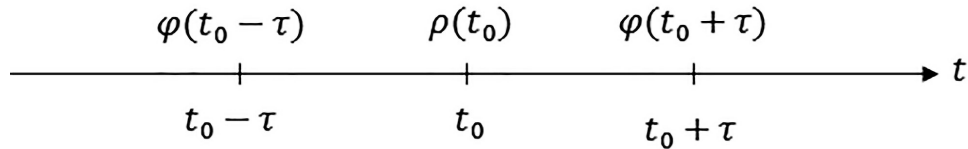


Рис. 3. Плотность $\rho(t_0)$ источника и потенциалы на оси времени

В правой части от t_0 потенциал $\varphi(t_0 + \tau) \sim \rho(t_0)$ – это запаздывающее решение, а в левой части $\varphi(t_0 - \tau) \sim \rho(t_0)$ – опережающее решение! То есть по значению плотности источника в момент t_0 с помощью запаздывающего и опережающего решений можно установить будущее и прошлое состояние поля!

И, наконец, последнее замечание. Оно снова касается времени запаздывания. Впервые в формулу электродинамики входит в явном виде скорость электромагнитного возмущения. Это соответствует концепции близкодействия. Однако на малых расстояниях от источника, как уже отмечалось, можно пренебрегать временем запаздывания, т.е. $\tau \rightarrow 0$, считая формально $\nu \rightarrow \infty$, что соответствует концепции дальнодействия.

§ 37. Электромагнитное поле линейного гармонического осциллятора

План:

1. Постановка задачи. Две основные зоны поля осциллятора.
2. Поле в волновой зоне.
3. Основные свойства волн.

1. Задача об электромагнитном поле линейного гармонического осциллятора была поставлена и решена Герцем в 1887 году. Необходимо было выяснить, какое устройство может излучать электромагнитные волны. Эта задача была теоретически решена Герцем, а затем им же экспериментально осуществлена. Таким образом впервые в лаборатории были получены электромагнитные волны и исследованы их свойства.

Рассмотрим более упрощенно задачу Герца. Пусть имеется некоторый источник поля объемом V . По нему течет ток плотности $\vec{j}(t)$. На некотором расстоянии r_{aq} от элемента объема dV_q необходимо найти \vec{H} и \vec{E} , причем такие, чтобы поле имело волновой характер. Источник объемом V является, таким образом, излучателем электромагнитных волн, осциллятором.

В поле осциллятора выделяются две основные зоны – ближняя и дальняя. В ближней зоне время запаздывания $\tau \rightarrow 0$ и поле квазистационарно. В дальней зоне время запаздывания существенно и распространяются электромагнитные волны. Конечно, наибольший интерес представляет поле в дальней зоне, которую иначе называют волновой. Но сначала получим аналитические выражения для поля в этих зонах.

Будем считать, что вокруг источника вакуум. Тогда $\epsilon = \mu = 1$ и $\nu = c$. Запишем запаздывающее решение для вектор-потенциала:

$$\vec{A} = \int_{V_q} \frac{\mu \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{\nu})}{cr_{aq}} dV_q = \int_{V_q} \frac{\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c})}{cr_{aq}} dV_q. \quad (5.27)$$

Поскольку $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, но в вакууме $\vec{B} = \vec{H}$, следовательно,

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot}_a \int_{V_q} \frac{\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c})}{cr_{aq}} dV_q.$$

В данной формуле ротор берется по точке наблюдения, а интеграл – по точкам источника. Поэтому вносим rot_a под знак интеграла:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int_{V_q} \text{rot}_a \left(\frac{\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c})}{r_{aq}} \right) dV_q.$$

Используем тождество векторного анализа:

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) \equiv \varphi \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \varphi, \vec{a}].$$

Полагаем $\varphi \equiv 1/r_{aq}$, $\vec{a} \equiv \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c})$.

Тогда

$$\text{rot}_a \left(\frac{\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c})}{r_{aq}} \right) = \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) + \left[\text{grad}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \right].$$

Подставим этот результат в интеграл для \vec{H} и сразу разобьем на два интеграла

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) dV_q + \frac{1}{c} \int_{V_q} \left[\text{grad}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \right] dV_q. \quad (5.28)$$

Во втором интеграле учтем, что

$$\text{grad}_a \left(\frac{1}{r_{aq}} \right) = -\frac{\vec{r}_{aq}}{r_{aq}^3},$$

и преобразуем его:

$$\int_{V_q} \left[-\frac{\vec{r}_{aq}}{r_{aq}^3} \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \right] dV_q = \int_{V_q} \frac{[\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \vec{r}_{aq}]}{r_{aq}^3} dV_q. \quad (5.29)$$

Перепишем \vec{H} с учетом (5.29), поменяв местами интегралы:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{[\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \vec{r}_{aq}]}{r_{aq}^3} dV_q + \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) dV_q = \vec{H}_1 + \vec{H}_2,$$

где \vec{H}_1 соответствует первому интегралу, \vec{H}_2 – второму.

Рассмотрим, как зависят от расстояния \vec{r}_{aq} подынтегральные выражения в этих интегралах. Очевидно, что

$$H_1 \sim 1/r_{aq}^2,$$

$$H_2 \sim 1/r_{aq}.$$

В ближней зоне, когда расстояния малы, $1/r_{aq}^2 \gg 1/r_{aq}$, следовательно, поле определяется первым интегралом, т.е. $\vec{H} = \vec{H}_1$:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{[\vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \vec{r}_{aq}]}{r_{aq}^3} dV_q.$$

Пренебрегая временем запаздывания, т.е. считая $\frac{r_{aq}}{c} \rightarrow 0$, получаем:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{[\vec{j}(t) \vec{r}_{aq}]}{r_{aq}^3} dV_q. \quad (5.30)$$

Это закон Био–Савара–Лапласа для переменного тока. Ничего качественно нового не получается. В ближней зоне излучения волн не происходит.

В дальней зоне, наоборот, $1/r_{aq} \gg 1/r_{aq}^2$ и поле определяется вектором:

$$\vec{H} = \vec{H}_2 = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) dV_q.$$

2. Итак, поле в дальней зоне:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) dV_q. \quad (5.31)$$

Сначала учтем, что вдали от источника для всех элементов объема dV_q расстояния r_{aq} примерно одинаковы, и вынесем r_{aq} из-под знака интеграла, опустив индексы a и q . Тогда:

$$\vec{H} = \frac{1}{cr} \int_{V_q} \text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c}) dV_q. \quad (5.32)$$

Подынтегральное выражение $\text{rot}_a \vec{j}(t - \frac{r_{aq}}{c})$ преобразуем с помощью тождества:

$$\text{rot}_a \vec{b}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \equiv \frac{1}{c} [\dot{\vec{b}}(t - \frac{r_{aq}}{c}) \vec{r}^0], \quad (5.33)$$

где $\dot{\vec{b}} \equiv \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$, $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}_{aq}}{r_{aq}}$ – единичный вектор. Применим это тождество, полагая $\vec{b} \equiv \vec{j}$. Тогда:

$$\text{rot}_{\vec{a}} \vec{j} \left(t - \frac{r_{aa}}{c} \right) \equiv \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{j} \left(t - \frac{r_{aa}}{c} \right)}{\partial t} \vec{r}^0 \right]. \quad (5.34)$$

Подставив в (5.32), получаем:

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} \int_{V_q} \left[\frac{\partial \vec{j} \left(t - \frac{r_{aa}}{c} \right)}{\partial t} \vec{r}^0 \right] dV_q. \quad (5.35)$$

Используем свойство векторных произведений, в которых множителем является один и тот же вектор:

$$[\vec{a}_1 \vec{d}] + [\vec{a}_2 \vec{d}] + \dots + [\vec{a}_k \vec{d}] = \sum_k [\vec{a}_k \vec{d}] = \left[\left(\sum_k \vec{a}_k \right) \vec{d} \right].$$

В случае (5.35) вместо суммы берется интеграл, вместо вектора \vec{d} – вектор \vec{r}^0 . Тогда (5.35) переписывается так:

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} \left[\left(\int_{V_q} \frac{\partial \vec{j} \left(t - \frac{r_{aa}}{c} \right)}{\partial t} dV_q \cdot \vec{r}^0 \right) \right]. \quad (5.36)$$

Рассмотрим интеграл в (5.36). Для краткости опустим временно аргумент $\left(t - \frac{r_{aa}}{c} \right)$ и запишем его в конце преобразований. Считая объем источника поля V_q фиксированным, вынесем производную $\frac{\partial}{\partial t}$ из-под знака интеграла. Получаем:

$$\int_{V_q} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} dV_q = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_q} \vec{j} dV_q = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_q} \rho \vec{u} dV_q = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_q} \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{u} dV_q, \quad (5.37)$$

где введена δ -функция Дирака для плотности системы точечных зарядов. Используя свойство δ -функции, получим:

$$\int_{V_q} \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{u} dV_q = \sum_k q_k \vec{u}_k.$$

Поскольку

$$\vec{u}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt},$$

вынесем производную из-под знака суммы. Тогда

$$\int_{V_q} \sum_k q_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{u} dV_q = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k q_k \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t},$$

где $\vec{p} = \sum_k q_k \vec{r}_k$ – дипольный момент системы зарядов. Тогда из (5.37) получим:

$$\int_{V_q} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} dV_q = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_q} \vec{j} dV_q = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r_{aq}}{c} \right). \quad (5.38)$$

Этот результат справедлив и для заряда, распределенного по объему с плотностью ρ , в этом случае дипольный момент равен

$$\vec{p} = \int_V \rho \vec{r} dV.$$

С учетом (5.38) окончательно получаем:

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} \left[\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r_{aq}}{c} \right) \vec{r}^0 \right]. \quad (5.39)$$

Перейдем к нахождению вектора \vec{E} в волновой зоне. Запишем 1-е уравнение Максвелла в волновой зоне:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Поскольку $\vec{H} = \vec{H} \left(t - \frac{r_{aq}}{c} \right)$, как мы только что нашли, можно применить тождество (5.33) снова, но для вектора \vec{H} . Тогда:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \vec{r}^0 \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{H} \vec{r}^0],$$

при этом производная $\frac{\partial}{\partial t}$ вынесена из-под знака векторного произведения, так как $\vec{r}^0 = \overrightarrow{const}$. Подставив в 1-е уравнение Максвелла, получаем:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{H} \vec{r}^0] = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{H} \vec{r}^0]. \quad (5.40)$$

Умножим (5.40) на dt и проинтегрируем. Выбирая постоянную интегрирования равной нулю, получаем, что:

$$\vec{E} = [\vec{H} \vec{r}^0]. \quad (5.41)$$

Итак, поле в волновой зоне:

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{r}^0], \quad (5.42)$$

$$\vec{E} = [\vec{H} \vec{r}^0]. \quad (5.43)$$

Исследуем полученные результаты. Определим направления и величины векторов \vec{E} , \vec{H} , а также состояние поля. Анализ удобно провести в сферических координатах, выбирая полярную ось вдоль векторов \vec{p} и $\ddot{\vec{p}}$ (рис. 4). Формулы (5.42) и (5.43) показывают, что $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $\vec{E} \perp \vec{r}^0$, $\vec{H} \perp \vec{r}^0$, $\vec{H} \perp \ddot{\vec{p}}$. Это значит, что вектор \vec{H} направлен по касательной к «параллели», а вектор \vec{E} по касательной к «меридиану». По величине

$$|\vec{E}| \equiv E = |\vec{H}| |\vec{r}^0| \sin(\vec{H}, \vec{r}^0) = H, \text{ т.к. } |\vec{r}^0| = 1, \quad \sin(\vec{H}, \vec{r}^0) = 1,$$

$$|\vec{H}| \equiv H = \frac{1}{c^2 r} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right| \sin \theta.$$

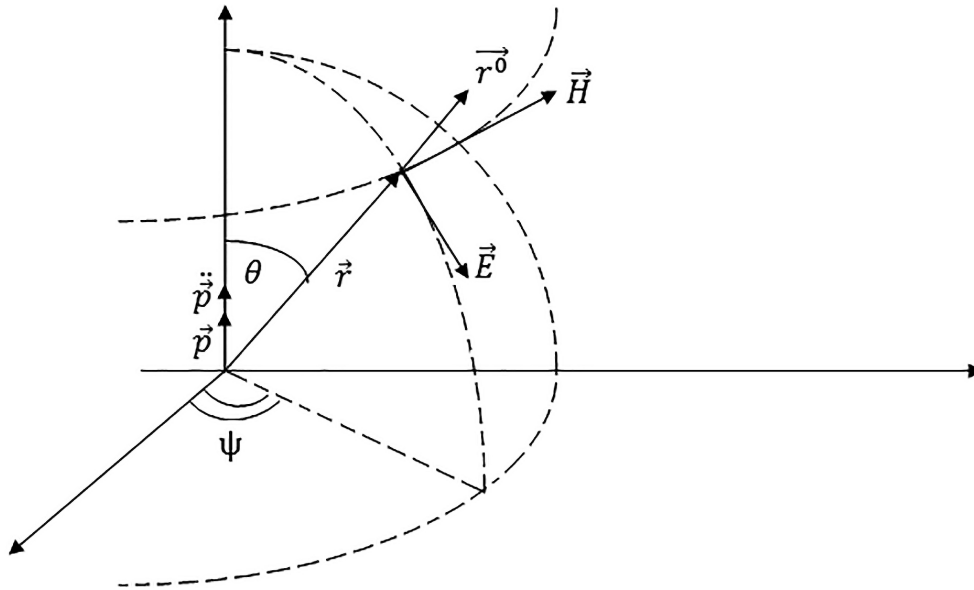


Рис. 4. Векторы \vec{E} , \vec{H} , \vec{r} в волновой зоне

Итак, имеем:

$$H = E = \frac{1}{c^2 r} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right| \sin \theta . \quad (5.44)$$

Следовательно, по величине векторы \vec{E} и \vec{H} равны, но перпендикулярны по направлению. Кроме того, векторы \vec{E} и \vec{H} по величине зависят от расстояния от источника как $\frac{1}{r}$. А это более медленное убывание с расстоянием по сравнению с теми результатами, которые получены в предыдущих разделах курса.

Далее: $H = E \sim \sin \theta$, следовательно

при $\theta = \pi/2$, $E = H = \max$,

при $\theta = 0, \pi$ (т.е. вдоль полярной оси) $E = H = 0$.

Из (5.44) следует также, что $E = H \sim \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|$. Исследуем этот результат более подробно. Пусть \vec{p} меняется по гармоническому закону:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t .$$

Тогда $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin \omega t$, но с учетом запаздывания

$$\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) . \quad (5.45)$$

Исследуем функцию

$$f = \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (5.46)$$

Начертим три разных синусоиды на разных расстояниях $r = 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > r_1$.

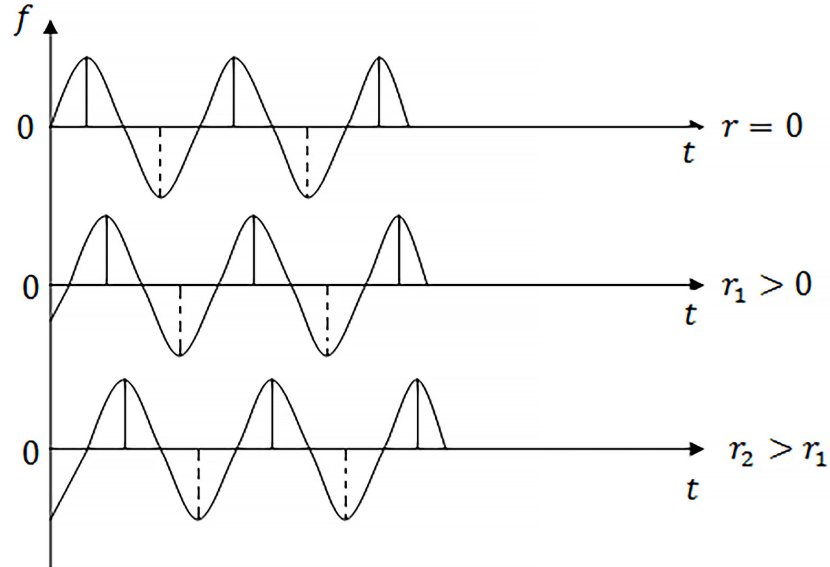


Рис. 5. Функция f на расстояниях $r = 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > r_1$

Видно, что одно и то же состояние поля (максимум), отмеченное сплошной вертикальной линией, наступает в более поздний момент времени в точках на сфере большего радиуса. Это означает, что данное состояние поля распространяется в пространстве, и, кроме того, периодически повторяется в данном месте. Значит, эта функция описывает периодический в пространстве и времени процесс, т.е. процесс распространения волн. Иначе говоря, в дальней зоне происходит излучение электромагнитных волн. Поэтому зона называется волновой.

3. Рассмотрим свойства волн, излучаемых осциллятором.

1. Исследование направлений \vec{E} и \vec{H} показало, что это волна поперечная: волна распространяется вдоль \vec{r} , а векторы \vec{E} и \vec{H} направлены перпендикулярно направлению распространения волны.

2. Это волна сферическая, так как фаза волны $\Phi = \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$ зависит только от r , но не зависит от направления.

3. Найдем фазовую скорость волн. Для этого зафиксируем фазу:

$\Phi = const$, при этом $d\Phi = 0$, т.е. $d\Phi = \omega \left(dt - \frac{1}{c} dr \right) = 0$, что дает

$$v_{\phi} = \frac{dr}{dt} = c.$$

Итак,

$$v_{\phi} = c. \quad (5.47)$$

Это не случайно, так как мы рассматриваем задачу о поле осциллятора в вакууме.

4. Частота волны ω согласно (5.46) равна частоте изменения дипольного момента системы.

5. Найдем расстояние, с которого начинается волновая зона. Для этого положим, что время запаздывания достаточно велико, так что $\omega \frac{r}{c} \geq 1$, и, следовательно

$$r \geq \frac{c}{\omega} = \frac{cT}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Поэтому волновая зона начинается с расстояния порядка длины волны излучения. Это необходимо учитывать при постановке экспериментов, например, на уроках в школе, по передаче и приему электромагнитных волн. Дело в том, что если передающие и принимающие устройства расположить на одном демонстрационном столе, то опыты могут не получиться, так как приемник находится не в волновой зоне, а ближе. Поэтому приборы необходимо располагать вдали друг от друга.

§ 38. Мощность излучения осциллятора

План:

1. Вектор Умова–Пойнтинга.
2. Мощность излучения осциллятора.
3. Средняя за период мощность излучения.

1. Согласно теореме Умова–Пойнтинга (§ 6) вектор Умова–Пойнтинга определяется выражением

$$\vec{Y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}].$$

Это означает, что $\vec{Y} \perp \vec{E}$ и $\vec{Y} \perp \vec{H}$, но так как $\vec{E} \perp \vec{H}$, то вектор \vec{Y} «идет» по \vec{r} . Это логично, так как энергия переносится волной. Найдем величину \vec{Y} :

$$Y = \frac{c}{4\pi} EH \sin(\vec{E}, \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} H^2, \text{ т. к. } E = H.$$

Подставляя выражение (5.42) для H , получим:

$$\frac{c}{4\pi c^4 r^2} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \theta.$$

Итак,

$$Y = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \theta. \quad (5.48)$$

Обсудим полученную формулу. Выражение (5.48) означает, что выполняется закон обратных квадратов, т.е. $Y \sim 1/r^2$. Такой же закон выполняется, как известно, в «Оптике» для освещенности. Освещенность и вектор Умова–Пойнтинга – по сути одно и то же. Кроме того, $Y \sim \sin^2 \theta$. Таким образом, имеет место все-таки некоторая асимметрия излучения: есть направления, в которых излучение максимально ($\theta = \pi/2, 3\pi/2$), и есть направления, где излучения нет – вдоль полярной оси ($\theta = 0, \pi$). Полярная диаграмма для Y представлена на рис. 6.

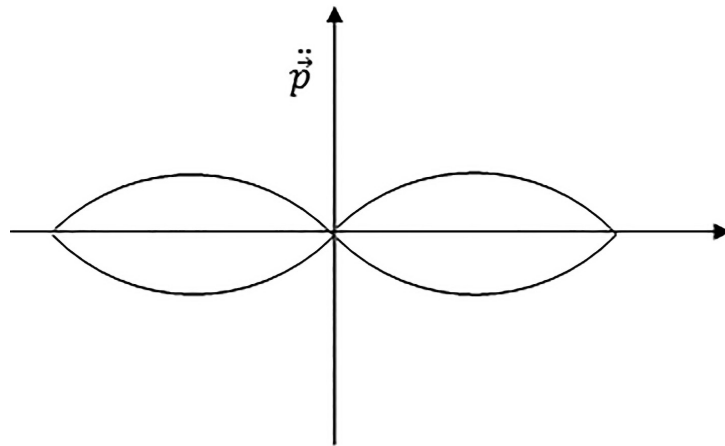


Рис. 6. Полярная диаграмма

Это свойство позволяет получать остронаправленное излучение, если комбинировать несколько излучателей.

2. Найдем мощность излучения осциллятора, используя теорему Умова–Пойнтинга и найденное значение вектора \vec{Y} :

$$W' = \oint_S Y_n dS.$$

Но так как \vec{Y} направлен по \vec{r} , то $Y_n = Y$. Тогда, учитывая что в сферических координатах $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\psi$, получаем после подстановки (5.48):

$$\begin{aligned} W' &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{4\pi c^3} \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(-\cos \theta) = \frac{4}{3}.$$

Подставив это значение в W' , получаем:

$$W' = \frac{2 \left| \ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2}{3c^3}. \quad (5.49)$$

Мы получили замечательный результат: формула (5.49) показывает, что мощность излучения не зависит от расстояния, на любом расстоянии по всей поверхности сферы любого радиуса мощность W' одна и та же! Это соответствует закону сохранения и превращения энергии: электромагнитные волны распространяются в вакууме, и электромагнитная энергия, переносимая волнами, не превращается в другие виды энергии, так как нет на их пути преобразующего энергию вещества! Поэтому электромагнитная энергия сохраняется.

Из формулы (5.49) видно, что $W' \sim 1/c^3$. Подставив значение $c = 3 * 10^{10} \text{ см/с}$, получаем, что $W' \sim 10^{-31}$. Наличие в знаменателе такого множителя существенно уменьшает мощность излучения. Не случайно поэтому, когда Герца спросили, может ли иметь применение открытые им волны, он ответил, что нет, так как их мощность чрезвычайно мала! И, однако, Герц ошибался. Есть возможность повышения мощности излучения. Поставим (5.45) в (5.49):

$$W' = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (5.50)$$

Видно, что $W' \sim \omega^4$. Это основной способ увеличения мощности – передача на больших частотах. Достаточно частоту увеличить в 10 раз, чтобы мощность возросла в 10^4 раз! Другой способ – увеличение длины или высоты передающей антенны, так как $p \sim ql$, где l – высота. Тогда мощность излучения $W' \sim l^2$.

Функция $\sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$ в (5.50) описывает пульсирующее значение мощности излучения (см. рис. 7).

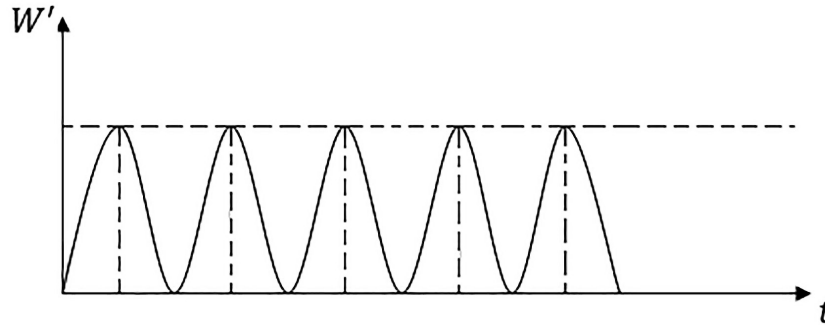


Рис. 7. Пульсация мощности излучения

Это означает, что всегда $W' \geq 0$, т.е. происходит излучение – волны распространяются от излучателя, но не приходят обратно. При этом в какой-то момент времени осциллятор «молчит», не излучает.

3. Найдем среднюю за период мощность излучения. Для этого усредним по периоду T функцию $\sin^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$. Для простоты вычисление можно провести при $r = 0$:

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}.$$

Подставим это значение в W' и получим:

$$\overline{W'} = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}. \quad (5.51)$$

Дипольным излучателем, как уже отмечалось, является линейная антенна. Но может быть и рамочная антенна – рамка, по которой течет переменный ток (рис. 7). Если $J(t)$ меняется по гармоническому закону, то и магнитный момент \vec{M} рамки тоже меняется периодически. А это приводит к излучению электромагнитных волн. Теория дает подобный же результат, только везде во всех формулах надо сделать замену $\vec{p} \rightarrow \vec{M}$, и векторы \vec{E} и \vec{H} в волновой зоне меняют местами. Мощность излучения при этом равна:

$$W' = \frac{2 \left| \ddot{\vec{M}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2}{3c^3}.$$

Задача об осцилляторе оказалась очень продуктивной. На ее основе были получены теоретические объяснения целого ряда явлений (см., например, следующий параграф, а также главу VI). Но, главное, эта задача получила колоссальное практическое применение – создание источников электромагнитных волн с заданными свойствами: частота, длина волны, мощность излучения и т.п. Значение этого эпохального открытия для человечества трудно переоценить в настоящее время. Хотя, как мы уже отмечали, сам Герц не верил в возможность практического применения электромагнитных волн вследствие очень малой мощности излучения, которая тогда была достигнута в его лаборатории. Но уже в 1895 году А.С. Попов применил электромагнитные волны для средств связи – беспроводной! И началась, и продолжается по сей день, и будет продолжаться и развиваться человечеством теория и техника создания и использования электромагнитных волн.

Макс Планк не зря отмечал: «Названным или неназванным имя Герца останется среди первых имен нашего времени, до тех пор пока вообще электрические колебания будут служить людям» (выступление Планка на заседании Физического общества в Берлине 16 февраля 1894 г., посвященном памяти Герца [14], с. 530).

§ 39. Излучение ускоренно движущейся заряженной частицы. Сила лучистого трения

Рассмотрим поле ускоренно движущейся заряженной частицы с $v \ll c$. Из задачи об осцилляторе запишем (см. формулу (5.39)):

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 R} \left[\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{R}{c} \right) \vec{R}^0 \right]. \quad (5.52)$$

Для одной частицы

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_k q_k \ddot{\vec{r}}_r = e \ddot{\vec{r}} = e \vec{a},$$

где a – ускорение. Подставив в (5.52), получаем:

$$\vec{H} = \frac{e}{c^2 R} \left[\vec{a} \left(t - \frac{R}{c} \right) \vec{R}^0 \right]. \quad (5.53)$$

Здесь R – расстояние от частицы до точки поля.

С учетом (5.43) и (5.49) находим:

$$\vec{E} = [\vec{H}\vec{R}^0], \quad (5.54)$$

$$W' = \frac{2e^2 a^2}{3c^3}. \quad (5.55)$$

Из (5.55) следует, что излучает заряженная частица, движущаяся ускоренно. Например, электрон в ускорителе. Это результат классической электродинамики. Оказалось, однако, что он не применим, например, для описания свойств электрона в атоме. Электрон в атоме подчиняется законам квантовой механики.

Вернемся к классической электродинамике. Двигаясь ускоренно, заряженная частица излучает электромагнитные волны. Следовательно, теряет энергию на излучение – в единицу времени W' согласно (5.55). Это приводит к тому, что движение частицы замедляется. Частица тормозится своим излучением, своим полем. В механике торможению сопоставляют силу трения. В электродинамике эта сила получила красивое название – сила лучистого трения, или сила радиационного трения. Найдем эту силу в предположении, что за время $\Delta t = t_2 - t_1$ скорости и ускорения частицы выровнялись, т.е.

$$\vec{v}_{t_1} = \vec{v}_{t_2}, \quad \vec{a}_{t_1} = \vec{a}_{t_2}. \quad (5.56)$$

Вычислим работу этой силы за время Δt :

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{тр}} \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} W' dt = - \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt = - \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} \vec{a} dt = \\ &= - \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} d\vec{v}. \end{aligned}$$

Последний интеграл берем по частям и получаем:

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{тр}} \vec{v} dt = - \frac{2e^2}{3c^3} (\vec{a}\vec{v}|_{t_1}^{t_2}) + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} da = \\ &= - \frac{2e^2}{3c^3} (\vec{a}_{t_2} \vec{v}_{t_2} - \vec{a}_{t_1} \vec{v}_{t_1}) + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} da. \end{aligned}$$

Выражение в скобке равно нулю согласно условию (5.56). Учтем, что

$$d\vec{a} = \frac{d\vec{a}}{dt} dt = \dot{\vec{a}} dt .$$

Тогда

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{тр}} \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} \vec{v} dt .$$

Сравнивая подынтегральные выражения, можем приравнять:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}} . \quad (5.57)$$

Формула (5.57) показывает, что сила пропорциональна $\ddot{\vec{r}}$. Такой силы не знала классическая механика. Она получается в электродинамике, которая изучает поле. Наличие силы лучистого трения приводит, как мы увидим, к затуханию колебаний заряженной частицы и особым свойствам поля.

§ 40. Распространение плоских монохроматических волн в вакууме

Покажем, что имеется принципиальная возможность существования свободного, не связанного с зарядами и токами, поля, которое распространяется в виде электромагнитных волн.

Запишем систему уравнений Максвелла для вакуума, полагая $\varepsilon = \mu = 1, \rho = 0, \vec{j} = 0$:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} ,$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ,$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 ,$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 .$$

Чтобы получить волновые уравнения для \vec{H} , \vec{E} образуем ротор от первого и второго уравнений Максвелла. Сначала получаем уравнение для \vec{H} :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Согласно тождеству векторного анализа $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$, но так как $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, то

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}.$$

В правой части сделаем перестановку операторов rot и $\frac{\partial}{\partial t}$, и затем используем 2-е уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

«Собираем» левую и правую части:

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

откуда следует волновое уравнение для \vec{H} :

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.58)$$

Аналогично образуем ротор от 2-го уравнения Максвелла, опять используем тождество векторного анализа, и с учетом 4-го уравнения Максвелла для вакуума получаем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}.$$

В правой части меняем порядок операторов rot и $\frac{\partial}{\partial t}$ и используем 1-е уравнение Максвелла для вакуума:

$$\operatorname{rot} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

В итоге получаем волновое уравнение для \vec{E} :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.59)$$

Будем искать решение уравнений (5.58) и (5.59) в виде плоских монохроматических волн:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (5.60)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (5.61)$$

В этих формулах $e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ описывает процесс, периодический в пространстве и времени, т. е. процесс распространения волны. При этом \vec{H}_0 и \vec{E}_0 – амплитуды волны. Волна монохроматическая, так как \vec{H} и \vec{E} зависят только от одной частоты ω . Несколько позднее покажем, что это плоская волна.

Для нахождения характеристического уравнения необходимо выбранное решение подставить в уравнение, предварительно вычислив вторые производные по координатам и времени. Поскольку уравнения для \vec{H} и \vec{E} по форме одинаковы, проведем преобразования для \vec{H} . Запишем:

$$\nabla^2 \vec{H} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{H}.$$

Сначала вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})},$$

где $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. С учетом этого получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot (-ik_x) = -ik_x \vec{H}.$$

Соответственно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial x} (-ik_x \vec{H}) = -ik_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{H} = (-ik_x)^2 \vec{H} = -k_x^2 \vec{H}.$$

Аналогично находим другие производные – по y и z , а также

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = i\omega \vec{H}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} = -\omega^2 \vec{H}.$$

Полученные преобразования можно обобщить, используя теорию операторов. В самом деле, \vec{H} является собственной функцией, а коэффициенты при \vec{H} – собственными значениями соответствующих операторов. Составим таблицу:

Таблица 1

Оператор	Собственное значение	Оператор	Собственное значение
$\frac{\partial}{\partial x}$	$-ik_x$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$-k_x^2$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$-ik_y$	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$	$-k_y^2$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$-ik_z$	$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$-k_z^2$
$\vec{\nabla}$	$-i\vec{k}$	∇^2	$-k^2$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$-i\omega$	$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$-\omega^2$

При этом учтено, что

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

Подставим собственные значения операторов в уравнение (5.58) и получим:

$$-k^2 \vec{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} = 0.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0,$$

или

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

откуда следует, что

$$k = \pm \frac{\omega}{c}.$$

Выберем решение с положительным знаком:

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.62)$$

Самостоятельно выясните, какое решение для \vec{H} получится при $k = -\frac{\omega}{c}$.

Для этого подставьте данное значение k в формулу (5.60) и используйте теорию

параграфа § 36, в котором рассматриваются запаздывающие и опережающие решения уравнения Даламбера.

Поскольку $\omega = 2\pi/T$, то $k = \omega/c = 2\pi/cT = 2\pi/\lambda$.

Итак,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Число k согласно (5.63) показывает, сколько длин волн укладывается в отрезке 2π . Поэтому k называется волновым числом. Из формулы (5.63) видно, что k является аналогом ω . Эта аналогия, как будет показано в курсе «Основы специальной теории относительности», не случайна и имеет глубокий физический смысл.

Покажем теперь, что формулы (5.60) и (5.61) описывают плоскую волну. Как известно, волна плоская, если ее волновая поверхность – плоскость. Это означает, что во всех точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, в фиксированный момент времени состояние, т.е. фаза, поля одинакова. Фаза волны $\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = \text{const}$, если при $t = t_0$ скалярное произведение $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$ во всех точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн. Свяжем направление распространения волны с вектором \vec{k} (см. рис. 8).

Согласно рис. 8 для точки A_0 на плоскости $\vec{k}\vec{r}_0 = kr_0$; для точки A_1 : $\vec{k}\vec{r}_1 = kr_1 \cos \alpha_1 = kr_0$ для точки A_2 : $\vec{k}\vec{r}_2 = kr_2 \cos \alpha_2 = kr_0$. Итак, для любых точек плоскости $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$ и фаза волны одинакова. Следовательно, волна является плоской. Вектор \vec{k} называется волновым вектором и показывает направление распространения волны.

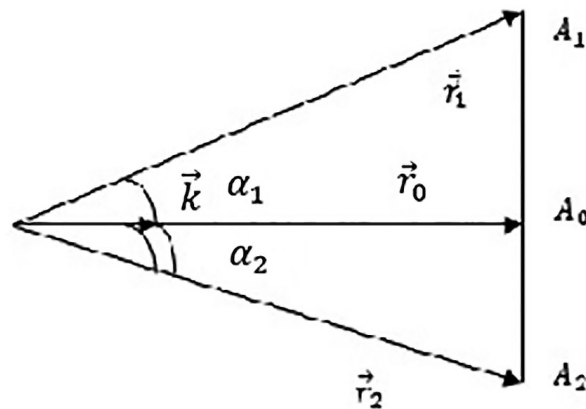


Рис. 8. Волновая поверхность

Рассмотрим свойства плоских волн.

1. Фазовая скорость.

Фиксируем фазу: $\Phi = \omega t - \vec{k}\vec{r} = const$, $\Phi = \omega t - k r = const$, предполагая, что \vec{k} направлен вдоль \vec{r} . Тогда $d\Phi = \omega dt - k dr = 0$, откуда $v_\Phi = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k}$.

С учетом (5.62) получаем:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega} \cdot c = c.$$

Итак, в вакууме фазовая скорость монохроматических волн, как и следовало ожидать, равна c .

2. Поперечность волны.

Запишем третье уравнение Максвелла: $div\vec{H} = 0$. Учтём, что $div\vec{H} = (\nabla\vec{H})$. Пользуясь таблицей 1, заменяем оператор ∇ собственным значением. Тогда $div\vec{H} = -i(\vec{k}\vec{H})$, откуда $-i(\vec{k}\vec{H}) = 0$ и $(\vec{k}\vec{H}) = 0$, что означает $\vec{H} \perp \vec{k}$. Поперечность магнитной составляющей волны доказана.

Теперь надо доказать поперечность \vec{E} . Для этого запишем 1-е уравнение Максвелла и заменим операторы их собственными значениями:

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad rot\vec{H} = [\nabla\vec{H}] = -i[\vec{k}\vec{H}] = i[\vec{H}\vec{k}], \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}.$$

Тогда получаем уравнение:

$$i[\vec{H}\vec{k}] = i\frac{\omega}{c}\vec{E},$$

откуда

$$\vec{E} = \frac{c}{\omega} [\vec{H}\vec{k}]. \quad (5.64)$$

Согласно (5.64) $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{E} \perp \vec{H}$. Это означает, что все три вектора $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ всегда взаимно перпендикулярны. Следовательно, волна поперечная.

3. Соотношение между \vec{E} и \vec{H} по величине.

Находим модуль векторного произведения (5.64):

$$E = \frac{c}{\omega} \cdot H \cdot k \cdot \sin(\vec{H}\vec{k}) = \frac{c}{\omega} \cdot H \cdot k.$$

С учетом (5.62) имеем:

$$E = \frac{c}{\omega} \cdot H \cdot \frac{\omega}{c} = H.$$

Итак, в вакууме

$$E = H. \quad (5.65)$$

В вакууме векторы \vec{E} и \vec{H} равны по величине, но перпендикулярны друг другу.

4. Плотность электромагнитной энергии.

В вакууме плотность электромагнитной энергии:

$$w_{\text{элм}} = \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 = w_{\text{эл.}} + w_{\text{м.}}$$

С учетом (5.65) находим, что плотность электрической энергии и плотность магнитной энергии равны:

$$w_{\text{эл}} = \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} H^2 = w_{\text{м.}}$$

Тогда плотность электромагнитной энергии равна:

$$w_{\text{элм}} = 2w_{\text{эл}} = \frac{E^2}{4\pi} = 2w_{\text{м}} = \frac{H^2}{4\pi}.$$

5. Вектор Умова–Пойнтинга.

Запишем вектор Умова–Пойнтинга:

$$\vec{y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}].$$

Из этой формулы видно, что $\vec{y} \perp \vec{E}, \vec{y} \perp \vec{H}$.

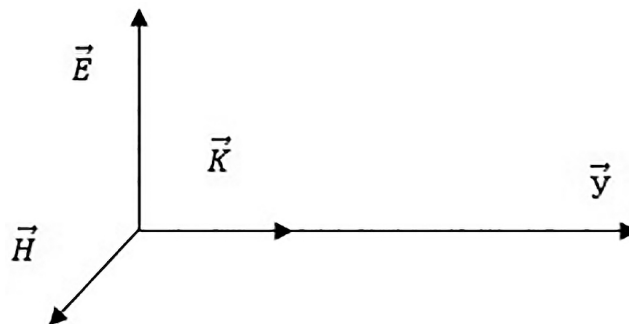


Рис. 9. Векторы $\vec{E}, \vec{H}, \vec{y}, \vec{k}$ в волне

С учетом поперечности волны получаем, что вектор \vec{V} направлен по \vec{k} . Это понятно, так как переносчиком электромагнитной энергии в пространстве является электромагнитная волна. Поэтому энергия «течет» в ту же сторону, куда распространяется волна.

Найдем величину вектора \vec{V} , подставив значение плотности электромагнитной энергии:

$$y = \frac{c}{4\pi} EH \sin(\vec{E}, \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} E^2 = w_{\text{элм}} \cdot c.$$

Итак,

$$y = w_{\text{элм}} \cdot c. \quad (5.66)$$

Это означает, что энергия распространяется со скоростью c .

Подведем итог: теоретически доказана принципиальная возможность существования электромагнитных волн. Это было одним из важнейших результатов теории Максвелла.

Но рассмотренная теория представляет не только так называемый академический интерес. Наше Солнце – источник жизни на Земле. А как на Землю попадает энергия Солнца? Огромное количество энергии, выделяемой Солнцем, попадает на Землю с помощью электромагнитных волн. Именно электромагнитные волны, распространяясь в космическом вакууме, переносят к нам на Землю солнечную энергию.

§ 41. Распространение плоских монохроматических волн в однородных диэлектриках

План:

1. Уравнения Даламбера для векторов \vec{E} и \vec{H} в однородной среде.
2. Распространение плоских волн в однородных диэлектриках.
3. Свойства плоских волн.

1а. Получим уравнение Даламбера для магнитной напряженности в однородной среде.

Полагаем, что $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Образует ротор от первого уравнения Максвелла:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) + \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right).$$

Согласно тождеству векторного анализа

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}.$$

Но в однородной среде, как это отмечалось ранее, $\text{div } \vec{H} = 0$. Тогда

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}.$$

Проведем ряд преобразований:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) &= \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}, \\ \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\varepsilon \vec{E}) = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H} \right) = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Соберем все преобразованные выражения:

$$-\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Таким образом, получаем искомое уравнение для \vec{H} :

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}. \quad (5.67)$$

16. Аналогично для нахождения уравнения для \vec{E} образуем ротор от второго уравнения Максвелла:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Затем, используя четвёртое уравнение Максвелла для однородной среды и тождество векторного анализа, преобразуем левую часть:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{4\pi \rho}{\varepsilon},$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = \text{grad} \left(\frac{4\pi \rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \text{grad } \rho - \nabla^2 \vec{E}.$$

Проведем преобразования в правой части, используя 1-е уравнение Максвелла и уравнение связи:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}) = -\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

При этом в случаях а и б использовалось свойство коммутации операторов rot и $\frac{\partial}{\partial t}$.

Собираем вместе все выражения

$$\frac{4\pi}{\varepsilon} \operatorname{grad} \rho - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

и получаем искомое уравнение для \vec{E} :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \operatorname{grad} \rho. \quad (5.68)$$

Итак, мы получили уравнения Даламбера для \vec{H} и \vec{E} в однородной среде:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{j}. \quad (5.69)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon} \operatorname{grad} \rho. \quad (5.70)$$

2. Рассмотрим распространение плоских монохроматических волн в однородных диэлектриках. Учтем, что согласно макроскопической электродинамике в диэлектрике $\vec{j} = 0$. Кроме того, в однородном диэлектрике $\rho = \operatorname{const}$. Тогда в правых частях уравнений (5.69) и (5.70) будут нули. Положим, так же как в (5.12), $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ и получим волновые уравнения для \vec{H} и \vec{E} :

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (5.71)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.72)$$

Будем искать решения этих уравнений в виде плоских монохроматических волн:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (5.73)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (5.74)$$

Для нахождения характеристического уравнения используем метод § 40, а именно, замену операторов их собственными значениями согласно таблице 1. Получаем:

$$-k^2 \vec{H} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{H} = 0.$$

Отсюда следует уравнение:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0, \quad (5.75)$$

или

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (5.76)$$

В дальнейшем используем значение $k = \omega/v$, как и в § 40.

Получаем снова, введя длину волны $\lambda = v \cdot T$,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5.77)$$

В § 40 показано, что решения для \vec{H} и \vec{E} описывают плоскую волну.

3. Рассмотрим основные свойства волн.

1) Фазовая скорость определяется, как и в вакууме при $\Phi = const$:

$$d\Phi = 0$$

$$d\Phi = \omega dt - k dx = 0, v_\Phi = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\Phi=const} = \frac{\omega}{k}.$$

Но, с другой стороны,

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega} \cdot v = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Итак, в однородном диэлектрике фазовая скорость

$$v_\Phi = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.78)$$

Поскольку в диэлектрике $\epsilon > 1$ даже при $\mu \cong 1$ то $v_\phi < c$.

В дальнейшем мы предполагаем, что ось x направлена по направлению распространения волны.

2) Поперечность волн доказывается так же, как и в случае вакуума. Связь между векторами находится также на основании 1-го уравнения Максвелла, но для диэлектриков:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Используя таблицу №1 и проведя аналогичные преобразования, находим:

$$\vec{E} = \frac{c}{\omega \epsilon} \cdot [\vec{H} \vec{k}]. \quad (5.79)$$

Эта формула показывает, что $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $\vec{E} \perp \vec{k}$. Итак, все три вектора \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} взаимно перпендикулярны, как и в вакууме. Это означает, что волна поперечная.

3) Найдём соотношение между векторами \vec{H} и \vec{E} по величине:

$$E = \frac{c}{\omega \epsilon} H k \sin(\vec{H}, \vec{k}) = \frac{c}{\omega \epsilon} H k = \frac{c}{\omega \epsilon} \cdot \frac{\omega}{v} \cdot H = \frac{c}{\epsilon} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c} H = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot H.$$

Итак,

$$E = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot H. \quad (5.80)$$

Это означает, что $E \neq H$. Кроме того, поскольку в диэлектрике ϵ и μ действительные, то нет сдвига фаз между векторами \vec{H} и \vec{E} , т.е. они колеблются в одинаковой фазе.

4) Начертим картину распространения волны вдоль оси x в фиксированный момент времени. Удобно сначала чертить график (синусоиду) для вектора \vec{E} , а затем уже для \vec{H} :

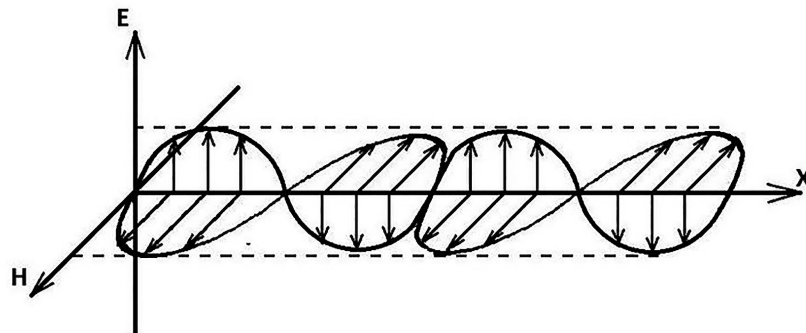


Рис. 10. Картина распространения волны вдоль оси x

5) Найдем значение плотности электромагнитной энергии:

$$w_{\text{элм}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2.$$

Согласно (5.80) $\sqrt{\varepsilon} \cdot E = \sqrt{\mu} \cdot H$. Отсюда для плотности энергии следует:

$$w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = w_{\text{м}} = \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

Для плотности электромагнитной энергии:

$$w_{\text{элм}} = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = 2w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} = 2w_{\text{м}} = \frac{\mu H^2}{4\pi}.$$

Найдем вектор Умова–Пойнтинга:

$$\vec{Y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}].$$

Он направлен в сторону распространения волны, т. е. волна переносит энергию. Найдем величину вектора Умова–Пойнтинга:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{c}{4\pi} E \cdot H \sin(\vec{E}, \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} E \cdot H = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot H^2 = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\mu}} H^2 \\ &= \frac{\mu}{4\pi} H^2 \cdot \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = w_{\text{элм}} \cdot v_{\text{ф}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$Y = w_{\text{элм}} \cdot v_{\text{ф}}. \quad (5.81)$$

Это означает, что плотность энергии переносится с фазовой скоростью. Такой результат справедлив только для монохроматических волн. Реально всегда распространяется группа волн или волновой пакет, в котором фазовая и групповая скорости различаются. В этом более общем случае энергия переносится с групповой скоростью.

Подведем итог. Наше рассмотрение позволяет сделать вывод, что диэлектрики прозрачны для всех электромагнитных волн. Так ли это на самом деле? Достаточно посмотреть на стену аудитории с окнами. Да, для радиоволн и кирпич, и стекло прозрачны. А в оптическом диапазоне – нет. Кирпич не прозрачен, а стеклокирпич – прозрачен. Следовательно, вещество обладает избирательностью – в некоторых диапазонах все вещества прозрачны, а в некоторых – одни прозрачны, другие – нет. Макроскопическая электродинамика объяснить этот эффект не может. Это недостаток макроскопи-

ческого описания вещества. Он преодолевается в микроскопической электродинамике. Уже в рамках классической микроскопической электродинамики можно объяснить эти явления (см. главу VI).

И все-таки самый главный результат этой темы – доказательство принципиальной возможности существования в природе свободного электромагнитного поля, которое распространяется в виде электромагнитных волн!

§ 42. Распространение плоских монохроматических волн в однородных проводниках. Коэффициент затухания, глубина проникновения поля. Комплексная диэлектрическая проницаемость

В однородных проводниках $\vec{j} \neq 0, \vec{j} = \lambda \vec{E}$. Кроме того, уже в квазистационарном случае можно считать, что $\rho = 0$. Тогда в правой части уравнения (5.67) будем иметь:

$$\operatorname{rot} \vec{j} = \operatorname{rot}(\lambda \vec{E}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{E} = \lambda \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\lambda \mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

и уравнение (5.67) примет вид:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.82)$$

В уравнении (5.68) $\operatorname{grad} \rho = 0$, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ поэтому получаем уравнение для \vec{E} аналогичной формы:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.83)$$

Будем искать решение этих уравнений так же в виде плоских монохроматических волн. Для простоты направим ось x по вектору \vec{k} , т.е. по направлению распространения волны. Тогда:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad (5.84)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}. \quad (5.85)$$

Находим характеристическое уравнение для k^2 , заменяя операторы согласно таблице № 1 их собственными значениями. Для \vec{H} из уравнения (5.82) получаем:

$$-k^2 \vec{H} + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{H} = i \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \vec{H}.$$

Отсюда следует характеристическое уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \vec{H} - i \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \vec{H}. \quad (5.86)$$

Уравнение (5.86) означает, что k – комплексное число. Выберем его в виде

$$k = k_1 - ik_2. \quad (5.87)$$

При этом $k_2 > 0$ и k_1 – действительное число.

Выясним физический смысл мнимой добавки. Для этого подставим (5.87) в (5.84):

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - (k_1 - ik_2)x)} = \vec{H}_0 e^{-k_2 x} \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)}.$$

Итак, в проводнике

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-k_2 x} \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)}. \quad (5.88)$$

Что означает это решение? Функция $e^{i(\omega t - k_1 x)}$ по-прежнему описывает плоскую монохроматическую волну, но ее амплитуда теперь зависит от x экспоненциально:

$$A(x) = H_0 e^{-k_2 x}. \quad (5.89)$$

С ростом x , т.е. по мере проникновения волны в проводник, амплитуда волны убывает. Это означает, что волна затухает и при $x \rightarrow \infty A(x) \rightarrow 0$. Поэтому k_2 называют коэффициентом затухания.

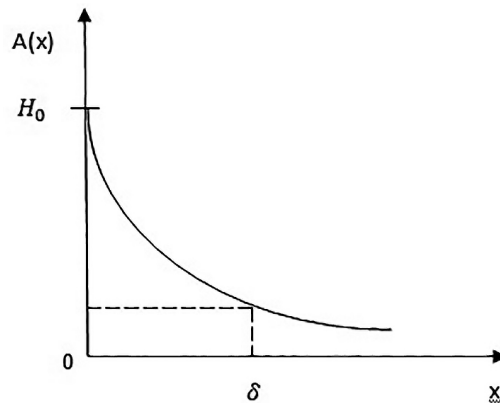


Рис. 11. Убывание амплитуды в проводнике

Найдем глубину проникновения поля в проводник, определяя ее следующим образом: глубина δ – это такое значение x , при котором

$$A(\delta) = H_0 e^{-1},$$

т.е. амплитуда убывает в e раз по сравнению с амплитудой на поверхности проводника. Из (5.89) следует, что

$$A(\delta) = H_0 e^{-k_2 \delta}.$$

Из сравнения двух последних формул получаем, что

$$\delta = \frac{1}{k_2}. \quad (5.90)$$

Чем больше коэффициент затухания, тем меньше глубина проникновения поля в проводник.

Какова физика затухания волн в проводниках? Попадая в проводник, электрическая напряженность поля волны, т.е. вектор \vec{E} , возбуждает в проводнике ток проводимости по закону Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}$. При этом по закону Джоуля–Ленца в проводнике выделяется тепло. Проводник нагревается, поглощая энергию электромагнитной волны. Поскольку энергия волны переходит в тепло, то это необратимая потеря энергии, и волна затухает.

Для волны k_2 – коэффициент затухания, а для проводника k_2 – коэффициент поглощения.

Перейдем к нахождению k_2 , а затем δ . Для этого сначала возведем волновое число в квадрат:

$$k^2 = (k_1 - ik_2)^2 = k_1^2 - k_2^2 - 2ik_1k_2.$$

Итак,

$$k^2 = k_1^2 - k_2^2 - 2ik_1k_2. \quad (5.91)$$

Сравниваем действительные и мнимые части k^2 из (5.91) и (5.86). Действительная часть $Re k^2$:

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (5.92)$$

Мнимая часть $\text{Im } k^2$:

$$2k_1k_2 = \frac{4\pi\mu\lambda\omega}{c^2}. \quad (5.93)$$

Выразим из (5.93)

$$k_1 = \frac{1}{k_2} \frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}.$$

Подставим его в (5.92):

$$\frac{1}{k_2^2} \left(\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right)^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Умножив это уравнение слева и справа на $-k_2^2$, получаем биквадратное уравнение для k_2 :

$$k_2^4 + \frac{\omega^2}{v^2} k_2^2 - \left(\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right)^2 = 0.$$

Его решением является:

$$k_2 = \pm \left[-\frac{\omega^2}{2v^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{4v^4} + \left(\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right)^2} \right]^{1/2}.$$

Из четырех решений оставляем только одно, такое, чтобы k_2 было действительным положительным числом ($k_2 > 0$). Тогда:

$$k_2 = \left[-\frac{\omega^2}{2v^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4v^4} + \left(\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right)^2} \right]^{1/2}. \quad (5.94)$$

Это точное значение k_2 . Оценим члены $\omega^4/4v^4$ и $\left(\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right)^2$ в области больших частот, порядка $\omega \sim 10^{15}$ и для $\lambda \sim 10^{17}$. Знаменатель $v^4 \sim c^4$. Поэтому сравниваем $\omega^4 \sim 10^{60}$ и $\lambda^2\omega^2 \sim 10^{64}$. Это означает, что

$$\frac{\omega^4}{4v^4} \ll \left(\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right)^2$$

и этим членом можно пренебречь. Тогда:

$$k_2 \approx \left[-\frac{\omega^2}{2v^2} + \frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2} \right]^{1/2}.$$

Снова сравниваем $\omega^2 \sim 10^{30}$ и $\lambda\omega \sim 10^{32}$. Пренебрегая $\frac{\omega^2}{2v^2}$, получаем окончательно:

$$k_2 \approx \sqrt{\frac{2\pi\mu\lambda\omega}{c^2}}. \quad (5.95)$$

Отметим, что чем меньше частота ω , тем существеннее различие в оцениваемых величинах.

Используя (5.90) и (5.95), находим глубину проникновения поля в проводник:

$$\delta = \frac{1}{k_2} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}}. \quad (5.96)$$

Полученная формула показывает, что с увеличением частоты ω падающей электромагнитной волны глубина проникновения уменьшается. Так же для более «хорошего» проводника, т.е. имеющего большую электропроводность, глубина проникновения меньше. Получается своего рода парадокс – чем лучше проводник, тем хуже пропускает он электромагнитные волны. Это объясняется тем, что чем выше электропроводность, тем больше поглощается проводником энергии электромагнитной волны. Проводник «перерабатывает» энергию волны, превращая ее в тепло. Это явление широко применяется в настоящее время в различных электронагревательных устройствах.

Оценим глубину проникновения в области высоких частот. При $\nu \sim 10^{15}$ и $\lambda_3 \sim 10^{17}$ имеем:

$$\delta = \frac{3 \cdot 10^{10}}{6,28\sqrt{10^{15} \cdot 10^{17}}} \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

Длина волны при $\nu \sim 10^{15}$

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{15}} \sim 10^{-5} \text{ см.}$$

Оценка показывает, что $\delta \ll \lambda_{\text{в}}$ и никакой пространственной периодичности поля в проводнике нет. При меньших частотах это различие сохраняется.

В проводниках диэлектрическая проницаемость является комплексной. Формально это обусловлено комплексным значением k^2 (5.86). Найдем комплексное значение ε . Полагая, что $\varepsilon(\omega)$ – комплексная величина, имеем

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2. \quad (5.97)$$

Тогда

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu,$$

или

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2),$$

то есть

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon_1 + i \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon_2. \quad (5.98)$$

Сравниваем снова действительные и мнимые части k^2 в (5.86) и (5.98). Приравняем действительные части

$$\frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon$, т.е. действительная часть $\varepsilon(\omega)$ – это статическая диэлектрическая проницаемость.

Сравниваем мнимые части k^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} \mu\varepsilon_2 &= -\frac{4\pi\lambda\omega}{c^2}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{4\pi\lambda}{\omega}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ обусловлена электропроводностью проводника и частотой электромагнитной волны.

Итак, в проводнике

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i \frac{4\pi\lambda}{\omega}. \quad (5.100)$$

Подведем итог. Согласно макроскопической электродинамике проводник имеет комплексную диэлектрическую проницаемость, обусловленную электропроводностью проводника и частотой электромагнитной волны. Диэлектрик же характеризу-

ется только статической диэлектрической проницаемостью. Это существенный недостаток макроскопической теории. Он, как будет показано в главе VI, преодолевается в микроскопической электродинамике.

§ 43. Распространение поперечно-продольных волн в волноводах

Развитие современной радиофизики, техники ускорителей потребовали передачи энергии переменного поля на небольшие расстояния в заданном направлении без искажения спектра. Эта проблема решается путем возбуждения электромагнитных волн в металлических трубах-волноводах. Кроме прикладного, эта проблема, как мы увидим, имеет и принципиальное значение.

Для простоты рассмотрим волновод прямоугольного сечения, ограниченного по осям x и y размерами a и b , неограниченного по оси z (рис. 12).

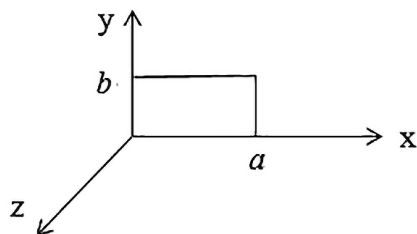


Рис. 12. Волновод прямоугольного сечения

Поле в стенки не проникает, так как они являются идеальными проводниками. Полость заполнена диэлектриком.

Запишем граничные условия металл-диэлектрик:

$$E_{\tau} = 0, \quad E_n = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon},$$

$$H_{\tau} = \frac{4\pi}{c} i, \quad H_n = 0. \quad (5.101)$$

Согласно (5.101) поле вблизи стенок внутри полости направлено следующим образом: \vec{E} по нормали к стенке, \vec{H} – по касательной.

Сначала найдем связь между поперечными и продольными компонентами волны. Предположим, что волна распространяется вдоль z . Тогда

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad (5.102)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y) \cdot e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (5.103)$$

Запишем первое и второе уравнения Максвелла для поля в полости, т.е. в диэлектрике:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.104)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (5.105)$$

Определим проекции $\text{rot}_x \vec{E}$ и $\text{rot}_y \vec{E}$:

$$\text{rot}_x \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y,$$

$$\text{rot}_y \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Учтем, что

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H}.$$

Тогда из (5.105) получаем уравнение для проекции на ось x

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -\frac{i\omega\mu}{c} H_x, \quad (5.106)$$

а затем на ось y

$$ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{c} H_y. \quad (5.107)$$

Теперь находим уравнение для проекций $\text{rot}_x \vec{H}$ и $\text{rot}_y \vec{H}$, используя уравнение (5.104):

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_x, \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_y \vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ -ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_y. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Чтобы связать поперечные компоненты с производными от продольных E_z и H_z , проводим простые преобразования, домножая соответствующие уравнения на коэффициенты так, чтобы исключить другую компоненту. Например, запишем два уравнения для нахождения E_x

$$\begin{aligned} ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{i\omega\mu}{c} H_y \Big| -k_z, \\ \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y \Big| \frac{\omega\mu}{c} \end{aligned}$$

и сложим:

$$E_x = \frac{i}{k_z^2 - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\omega\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \quad (5.110)$$

Чтобы найти E_y , запишем два уравнения:

$$\begin{aligned} ik_z E_y &= -\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\omega\mu}{c} H_x \Big| k_z, \\ \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_y &= -ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big| -\frac{\omega\mu}{c}. \end{aligned}$$

После умножения на указанные справа коэффициенты и сложения получаем:

$$E_y = \frac{1}{k_z^2 - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\omega\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right). \quad (5.111)$$

Теперь находим H_x . Записываем два уравнения, в которые входит H_x :

$$-\frac{i\omega\mu}{c} H_x = ik_z E_y + \frac{\partial E_z}{\partial y} \Big| \frac{\omega\varepsilon}{c},$$

$$-ik_z H_x = \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_y + \frac{\partial H_z}{\partial x} \Big| - k_z.$$

Отсюда находим:

$$H_x = \frac{1}{k_z^2 - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}} \left(k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\omega\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right). \quad (5.112)$$

Для получения H_y проводим аналогичные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{i\omega\mu}{c} H_y &= ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big| \frac{\omega\varepsilon}{c}, \\ ik_z H_y &= \frac{i\omega\varepsilon}{c} E_x - \frac{\partial H_z}{\partial y} \Big| - k_z, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$H_y = \frac{1}{k_z^2 - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}} \left(k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\omega\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (5.113)$$

Полученные формулы показывают, что если $k_z^2 - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} \neq 0$, то при $E_z = H_z = 0$ все компоненты $E_x = E_y = H_x = H_y = 0$. Это означает, что чисто поперечная волна распространяться не может! Могут распространяться волны с одной из продольных компонент: либо $E_z \neq 0, H_z = 0$ либо $E_z = 0, H_z \neq 0$. Соответственно возможны два типа волн в волноводах.

1) $E_z \neq 0, H_z = 0, \vec{E} = (E_x, E_y, E_z), \vec{H} = (H_x, H_y, 0)$ – это волна ТМ – поперечно-магнитная, или \vec{E} -волна.

2) $E_z = 0, H_z \neq 0, \vec{E} = (E_x, E_y, 0), \vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ – это ТЕ-волна – поперечно-электрическая, или \vec{H} -волна.

Для рассмотрения свойства этих волн напишем сначала волновые уравнения для поля в диэлектрике:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая выбранные решения (5.102) и (5.103), имеем:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k_z^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -k_z^2 \vec{H}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{H}.$$

Подставляем вычисленные производные в волновые уравнения и получаем:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \vec{E}, \quad (5.114)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \vec{H}. \quad (5.115)$$

Теперь перейдем к рассмотрению типов волн.

1) ТМ-волны ($E_z \neq 0$).

Запишем уравнение (5.114) для E_z :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) E_z. \quad (5.116)$$

Это уравнение имеет решение:

$$E_z = E_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (5.117)$$

Вычислим вторые производные

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -k_x^2 E_z, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -k_y^2 E_z$$

и, подставляя в уравнение (5.116), получим:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (5.118)$$

Формально (5.118) совпадает с характеристическим уравнением в диэлектриках. Однако, как будет сейчас показано, имеется существенное отличие.

Учтем граничные условия: $E_z = 0$ на стенках трубы.

При $x = 0$, $E_z = 0$ ($\sin 0 = 0$) – это тривиальный случай; при $x = a$, $\sin(k_x a) = 0$, если $k_x a = n\pi$. Это дает:

$$k_x = n \frac{\pi}{a}. \quad (5.119)$$

Аналогично $E_z = 0$ при $y = 0$ – тривиальный случай; при $y = b$, $\sin(k_y b) = 0$, если $k_y b = m\pi$, откуда следует:

$$k_y = m \frac{\pi}{b}. \quad (5.120)$$

При этом n и m – целые числа, начиная с единицы.

На рисунке 13 показаны силовые линии \vec{E} и \vec{H} для волны E_{11} ($n = 1, m = 1$) в фиксированный момент времени. Вдоль оси z (в направлении распространения волны) есть продольная составляющая. Магнитные силовые линии изображены пунктиром, продольная составляющая $H_z = 0$.

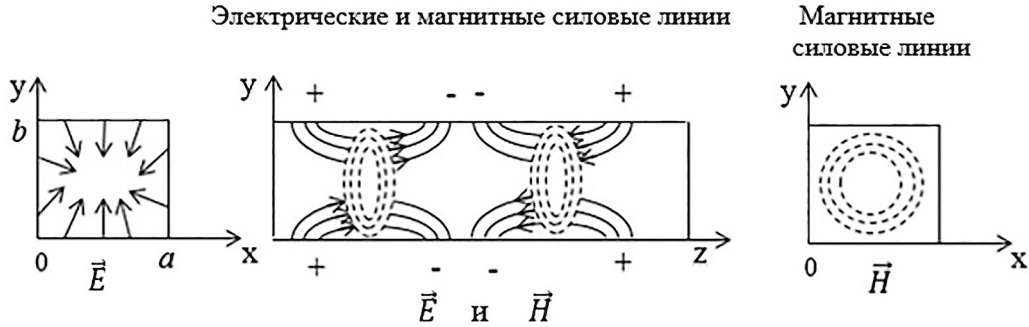


Рис. 13. Картина силовых линий волны (E_{11})

Для нахождения поперечных компонент по выбранному решению (5.117) необходимо вычислить производные по x и y от E_z и подставить их в соответствующие формулы (5.110) – (5.113). Эту несложную процедуру предоставим читателю выполнить самостоятельно.

2) ТЕ-волна, или Н-волна ($H_z \neq 0$).

Из уравнения (5.115) получаем уравнение для H_z :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) H_z. \quad (5.121)$$

Это уравнение имеет решение в виде

$$H_z = H_{0z} \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (5.122)$$

Чтобы $H_x \neq 0$ ($H_z \neq 0$), граничное условие $E_x = 0$ ($E_z = 0$) получается согласно (5.110) при $\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$. Это означает, что $\sin(k_y y) = 0$, и мы снова приходим к условию

$$k_y = m \frac{\pi}{b}.$$

Граничное условие $E_y = 0$ получается из (5.111) при $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$, это приводит к условию $\sin(k_x x) = 0$, что дает

$$k_x = n \frac{\pi}{a}.$$

Это такие же условия, что и для \vec{E} -волны, только для \vec{H} -волны числа n и m могут начинаться с нуля. Картина силовых линий волны H_{10} ($n = 1, m = 0$) показана на рисунке 14.

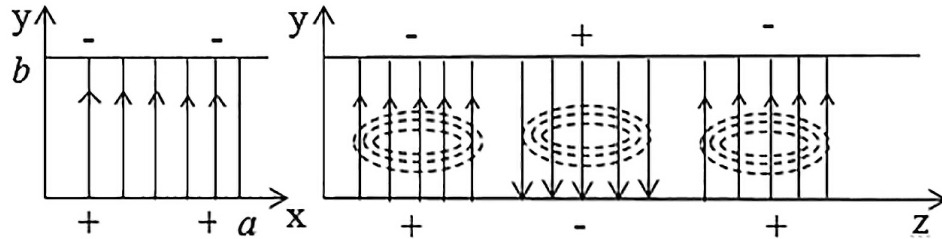


Рис. 14. Картина силовых линий для волны H_{10}

Полученные решения для TM и TE -волн означают, что в полости (x, y) получается стоячая волна. Приведем пример. Пусть волна определяется значением функции $\sin(k_x x)$. Узлы функции получаются при разном значении n . Пусть $n = 1$. Тогда первый узел будет при $x = 0$, второй – при $\frac{\pi x}{a} = \pi$, т.е. при $x = a$. Это два узла, а в середине – пучность (см. рис. 15).

Для волны $n = 2$, $\sin \frac{2\pi}{a} x$ дает узлы:

- 1) первый узел $x = 0$,
- 2) второй узел $\frac{2\pi x}{a} = \pi$, $x = \frac{a}{2}$,
- 3) третий узел $\frac{2\pi x}{a} = 2\pi$, $x = a$.

Имеются три узла и две пучности (см. рис. 15).

Для волны $n = 3$, $\sin \frac{3\pi}{a} x = 0$ – 4 узла и 3 пучности:

- 1) $\frac{3\pi}{a} \cdot 0 = 0$, $x = 0$,
- 2) $\frac{3\pi}{a} \cdot x = \pi$, $x = \frac{a}{3}$,
- 3) $\frac{3\pi}{a} x = 2\pi$, $x = \frac{2}{3} a$,
- 4) $\frac{3\pi}{a} x = 3\pi$, $x = a$.

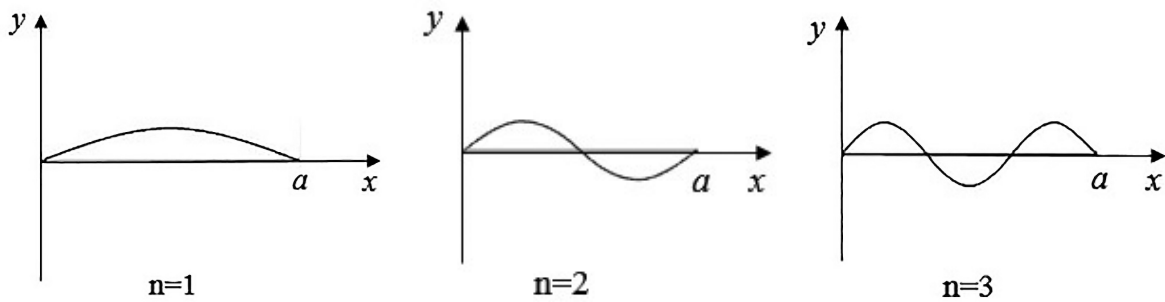


Рис. 15. Узлы и пучность при $n = 1, 2, 3$

Еще своеобразнее получаются результаты для частоты и длины волны, которая может распространяться в волноводе.

Запишем k_z^2 из (5.118), подставив k_x^2 и k_y^2 согласно (5.119) и (5.120):

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{\pi^2 m^2}{b^2}.$$

Отсюда

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} - \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}.$$

Чтобы волна распространялась вдоль оси z , необходимо, чтобы k_z был вещественным. Это приводит к условию:

$$\frac{\omega^2}{v^2} > \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} = \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{v^2}, \quad (5.123)$$

где $\omega_{\text{кр}}$ — критическая частота.

Поскольку частота связана с длиной волны, то критической частоте соответствует критическая длина волны. Найдём соотношение для $\lambda_{\text{кр}}$:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{кр}}} = \frac{\omega_{\text{кр}}}{2\pi v}.$$

И тогда из (5.123) получаем:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{кр}}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) = \left(\frac{n}{2a} \right)^2 + \left(\frac{m}{2b} \right)^2. \quad (5.124)$$

Итак, через волновод могут распространяться только волны с $\omega > \omega_{\text{кр}}$, $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$. Наименьшая критическая длина волны для ТМ-11 получается при $n = m = 1$:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{кр}}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (5.125)$$

Формулы (5.124) – общая и (5.125) – частная показывают, что критическая длина волны определяется значениями поперечного сечения волновода! Это совершенно новый и непривычный результат для физики.

Теперь рассмотрим фазовую и групповую скорости волн в волноводе.

По определению

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k_z}.$$

Преобразуем выражение для проекции волнового вектора

$$k_z = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{v^2} \left(\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2} \right)} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}$$

и подставим в формулу для фазовой скорости

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\omega} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}}.$$

Итак,

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}}. \quad (5.126)$$

Поскольку для распространения волн необходимо выполнение условия $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, то

$$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}} < 1,$$

и, следовательно,

$$v_{\phi} > \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.127)$$

Это означает, что фазовая скорость электромагнитных волн в волноводе больше фазовой скорости света в среде. А если внутри волновода вакуум? Тогда $v > c$! Это парадокс. Он разрешается просто, так как всегда распространяется группа волн, и результат интерференции отдельных компонент распространяется с групповой скоростью. Как мы сейчас покажем, групповая скорость никогда не превышает скорости света, даже в вакууме.

Запишем выражение для групповой скорости:

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z},$$

при этом

$$\frac{\omega}{v} = \sqrt{k_z^2 + k_x^2 + k_y^2}, \quad \omega = v \sqrt{k_z^2 + \left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right]}.$$

Тогда, подставляя полученное выражение для k_z через $\lambda_{\text{кр}}$, получаем:

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = v \frac{2k_z}{2\sqrt{k_z^2 + k_x^2 + k_y^2}} = \frac{vk_z}{\frac{\omega}{v}} = v \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}.$$

Итак,

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}. \quad (5.128)$$

Формула (5.128) означает, что $v_{\text{гр}}$ всегда меньше, чем $c/\sqrt{\epsilon\mu}$. Если $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$, то $v_{\text{гр}} = 0$ и волна «не идет». Однако

$$v_{\text{гр}} \cdot v_{\phi} = v^2 = \frac{c^2}{\epsilon\mu},$$

и в вакууме

$$v_{\text{гр}} \cdot v_{\text{ф}} = c^2.$$

Вот такие своеобразные свойства имеются у волн, распространяющихся в ограниченном пространстве – в волноводах. Эти свойства, конечно, учитываются при конструировании волноводов.

§ 44. Прохождение плоских монохроматических волн через границу двух диэлектриков

В оптике экспериментально установлены законы отражения и преломления света на границе двух диэлектриков. Покажем, что эти законы выполняются для любых плоских монохроматических волн. На рисунке 16 изображены волновые векторы падающей \vec{k}_1 , отраженной \vec{k}_2 и преломленной \vec{k}_3 волн. Вектор \vec{k}_1 лежит в плоскости xoz . Это плоскость падения. Ось z направлена во вторую среду. Характеристики сред: первая – ϵ_1, μ_1 вторая – ϵ_2, μ_2 . Угол φ_1 – угол падения, φ_2 – угол отражения, φ_3 – угол преломления.

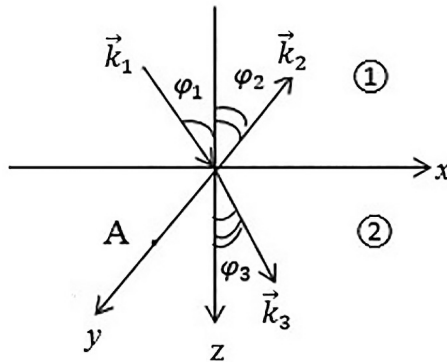


Рис. 16. Волновые векторы на границе двух сред

Запишем граничные условия для касательных составляющих на границе двух диэлектриков. Поскольку это диэлектрики, то плотность тока $i = 0$.

Тогда

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (5.129)$$

Все доказательства законов отражения и преломления проведем, используя граничное условие для E_{τ} . Падающая волна будет обозначаться цифрой 1, отраженная – 2, преломленная – 3 :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{пад.}} &= \vec{E}_{01} e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{\text{отр.}} &= \vec{E}_{02} e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})}, \\ \vec{E}_{\text{пр.}} &= \vec{E}_{03} e^{i(\omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r})}.\end{aligned}$$

Тогда граничное условие запишется так:

$$\vec{E}_{01\tau} e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} + \vec{E}_{02\tau} e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})} = \vec{E}_{03} e^{i(\omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r})}. \quad (5.130)$$

В (5.130) сначала выделим сомножители, не зависящие от частот, и обозначим соответственно:

$$E_{01\tau} e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}} = a_1, \quad E_{02\tau} e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}} = b_1, \quad E_{03\tau} e^{-i\vec{k}_3 \vec{r}} = c_1.$$

Тогда (5.130) можно переписать в виде:

$$a_1 e^{i\omega_1 t} + b_1 e^{i\omega_2 t} = c_1 e^{i\omega_3 t}.$$

Для любого t это равенство выполняется, если

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3. \quad (5.131)$$

Это означает, что частота волны при переходе через границу двух диэлектриков не меняется.

Теперь выделим в (5.130) сомножители, не зависящие от волновых векторов, и введем обозначения:

$$E_{01\tau} e^{i\omega_1 t} = a_2, \quad E_{02\tau} e^{i\omega_2 t} = b_2, \quad E_{03\tau} e^{i\omega_3 t} = c_2.$$

Тогда (5.130) примет вид:

$$a_2 e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}} + b_2 e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}} = c_2 e^{-i\vec{k}_3 \vec{r}},$$

откуда следует равенство:

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r} = \vec{k}_3 \vec{r}. \quad (5.132)$$

Полученные равенства (5.131) и (5.132) означают, что на границе фазы всех трех волн одинаковы.

Раскроем равенство (5.132):

$$k_{1x}x + k_{1y}y + k_{1z}z = k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}z = k_{3x}x + k_{3y}y + k_{3z}z.$$

Поскольку на границе $z = 0$, то остается равенство:

$$k_{1x}x + k_{1y}y = k_{2x}x + k_{2y}y = k_{3x}x + k_{3y}y. \quad (5.133)$$

Выберем любую точку A на оси y . Для нее $x = 0$. Тогда для этой точки из (5.133) получим:

$$k_{1y}y_A = k_{2y}y_A = k_{3y}y_A.$$

Поскольку $y_A \neq 0$, то из этого равенства следует, что

$$k_{1y} = k_{2y} = k_{3y}.$$

Но по построению $k_{ly} = 0$, так как \vec{k}_l лежит в плоскости xoz . Следовательно,

$$k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} = 0.$$

Это означает, что все три волновых вектора $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ лежат в одной плоскости – в плоскости падения. Сравните этот результат с законом оптики: все три луча – падающий, отраженный и преломленный – лежат в одной плоскости – плоскости падения. Только вместо лучей в электродинамике вводятся волновые векторы. Итак, доказан первый закон отражения и преломления. С учетом доказанного (5.133) записывается так:

$$k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}. \quad (5.134)$$

Теперь рассмотрим равенство

$$k_{1x} = k_{2x}. \quad (5.135)$$

По построению $k_{1x} = k_1 \sin \varphi_1$, $k_{2x} = k_2 \sin \varphi_2$.

Но волны, падающая и отраженная, распространяются в первой среде. Поэтому

$$k_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}; \quad k_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = k_1.$$

Тогда из (5.135) получаем:

$$k_1 \sin \varphi_1 = k_1 \sin \varphi_2,$$

откуда следует, что

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2.$$

Для любого угла φ_1 это равенство выполняется, если

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (5.136)$$

Итак, угол падения равен углу отражения для любого угла падения. Это так же известный из оптики закон отражения.

Теперь рассмотрим равенство

$$k_{1x} = k_{3x}.$$

Запишем:

$$k_{3x} = k_3 \sin \varphi_3 = \frac{\omega_3}{v_2} \sin \varphi_3 = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \varphi_3.$$

С учетом k_{1x} получаем:

$$\frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \varphi_1 = \frac{\omega_1}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \varphi_3.$$

Тогда

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = const. \quad (5.137)$$

Итак, отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для двух данных сред и называется показателем (коэффициентом) преломления второй среды относительно первой. Это – закон преломления, известный в оптике.

Показатель преломления обозначим через n_{21}

$$n_{21} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (5.138)$$

Если вместо первой среды – вакуум, то показатель преломления среды относительно вакуума называется абсолютным показателем преломления. Тогда абсолютные показатели преломления для первой и второй среды:

$$n_{2\text{вак}} \equiv n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}, n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}. \quad (5.139)$$

С учетом (5.139) формулу (5.138) можно записать в виде:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.140)$$

Для обычных диэлектриков, исключая ферромагнетики, $\mu \sim 1$. Тогда абсолютный показатель преломления среды можно приближенно записать так:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \simeq \sqrt{\varepsilon}. \quad (5.141)$$

В таблице 2 приведены значения показателя преломления – экспериментальные и вычисленные теоретически ($\sqrt{\varepsilon}$).

Таблица 2

Вещество	n	$\sqrt{\varepsilon}$	Вещество	n	$\sqrt{\varepsilon}$
Воздух	1,000294	1,000295	Вода	1,33	9
Водород	1,000138	1,000132	Этиловый спирт	1,36	5

Из таблицы видно, что для некоторых веществ (газы) имеется хорошее совпадение теории с экспериментом. Однако уже для жидкостей имеет место расхождение теории с экспериментом. Теория дает большой показатель преломления $\sqrt{\varepsilon} > 1$, а эксперимент дает значение, не намного превышающее единицу. Но главное расхождение – не количественное, а качественное. Согласно макроскопической электродинамике ε диэлектрика не зависит от частоты ω , значит, показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ так же не зависит от частоты. А в природе существует красивейшее явление дисперсии, которое объясняется зависимостью показателя преломления от частоты! В этом опять-таки сказывается недостаток макроскопической электродинамики. Он преодолевается в микроскопической электродинамике (см. главу VI).

Из (5.78) и (5.141) следует, что фазовая скорость электромагнитных волн в среде определяется выражением

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}. \quad (5.142)$$

В заключение темы получим формулы Френеля, используя граничные условия и (5.141). Как известно, в оптике вводится два типа поляризации р и s.

1) Для р-поляризации вектор \vec{E} лежит в плоскости падения. Свет поляризован перпендикулярно плоскости падения (рис. 17).

2) Для s-поляризации вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости падения. Свет поляризован в плоскости падения (рис. 18).

Вектор \vec{H} в первом случае перпендикулярен плоскости падения, во втором случае – лежит в плоскости падения.

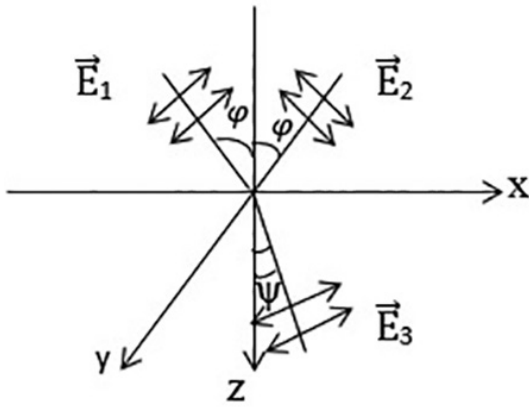


Рис. 17. Поле \vec{E} в p-поляризации

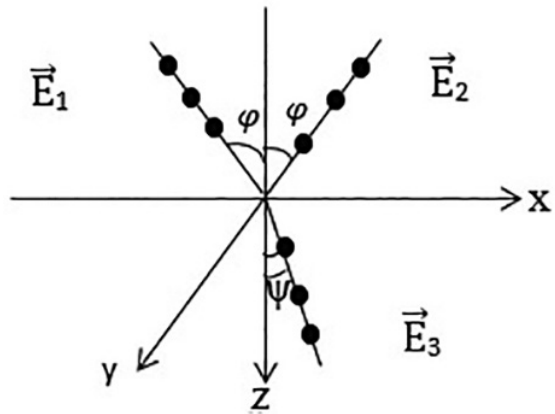


Рис.18. Поле \vec{E} в s-поляризации

Рассмотрим первый случай. Пусть векторы $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ в данный момент имеют указанную ориентацию. Угол преломления обозначим ψ (рис.19).

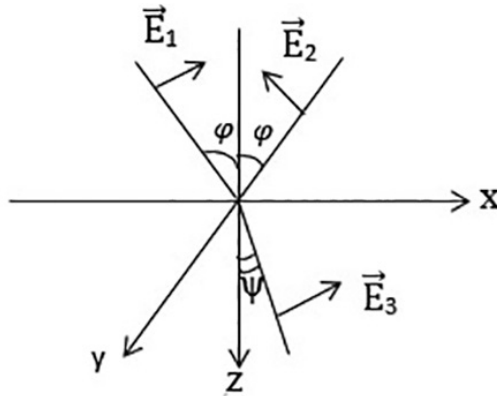


Рис. 19. Поле вектора \vec{E} в данный момент времени

Из рис. 19 находим проекции $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ на ось x – это касательные составляющие к границе раздела:

$$E_{1x} = E_1 \cos \varphi, \quad E_{2x} = -E_2 \cos \varphi, \quad E_{3x} = E_3 \cos \psi.$$

Тогда граничное условие дает:

$$(E_1 - E_2) \cos \varphi = E_3 \cos \psi. \quad (5.143)$$

Второе соотношение находим из граничных условий для $H_\tau = H_y$ и соотношений для E и H в плоской волне в диэлектриках. Так как $E = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H$ то, учитывая $\mu \approx 1$, получаем:

$$H = \sqrt{\varepsilon} E. \quad (5.144)$$

Поскольку всегда $\vec{H} \perp \vec{E}$, можно записать проекции H_y , введя E :

$$H_{1y} = \sqrt{\varepsilon_1} E_1, \quad H_{2y} = \sqrt{\varepsilon_1} E_2, \quad H_{3y} = \sqrt{\varepsilon_2} E_3.$$

Согласно граничному условию для H_t запишем:

$$H_{1y} + H_{2y} = H_{3y},$$

что дает

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_1 + E_2) = \sqrt{\varepsilon_2} E_3,$$

или

$$\frac{E_1 + E_2}{E_3} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

Тогда получаем:

$$(E_1 + E_2) \sin \psi = E_3 \sin \varphi. \quad (5.145)$$

Теперь запишем систему уравнений (5.143) и (5.145):

$$(E_1 - E_2) \cos \varphi = E_3 \cos \psi,$$

$$(E_1 + E_2) \sin \psi = E_3 \sin \varphi.$$

Домножив первое уравнение на $\sin \varphi$, второе на $\cos \psi$ и вычитая из второго первое, исключаем E_3 :

$$(E_1 + E_2) \sin \psi \cos \psi - (E_1 - E_2) \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1 \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin \psi \cos \psi}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \psi \cos \psi} = E_1 \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\psi}{\sin 2\varphi + \sin 2\psi} = \\ &= E_1 \frac{\cos(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} = E_1 \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$E_2 = E_1 \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}. \quad (5.146)$$

Поскольку интенсивность, или иначе вектор Умова–Пойнтинга пропорционален E_2 , то для интенсивностей получаем

$$I_2 = I_1 \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)}. \quad (5.147)$$

Френель ввел коэффициент отражения R как отношение интенсивности отраженной волны к интенсивности падающей. Для р-поляризации коэффициент отражения с учетом (5.147) равен:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)}. \quad (5.148)$$

Аналогичным методом, исключая E_2 , находим связь компонент E_3 и E_1 :

$$E_3 = E_1 \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin \psi \cos \psi + \sin \varphi \cos \varphi} = E_1 \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}. \quad (5.149)$$

Для интенсивностей получаем:

$$I_3 = I_1 \frac{4 \sin^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2(\varphi + \psi) \cos^2(\varphi - \psi)}. \quad (5.150)$$

Теперь рассмотрим второй случай – s-поляризацию. Везде можно заменить вектор E на H . Тогда граничное условие будет иметь вид:

$$(H_1 - H_2) \cos \varphi = H_3 \cos \psi. \quad (5.151)$$

Учитываем, что $\sqrt{\varepsilon_1} E_{1y} = H_1$, откуда:

$$E_{1y} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_1.$$

Аналогично

$$E_{2y} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_2, \quad E_{3y} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_3.$$

Тогда граничное условие $E_{1y} + E_{2y} = E_{3y}$ даёт

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (H_1 + H_2) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_3.$$

Поскольку

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi},$$

то

$$H_1 + H_2 = H_3 \frac{\sin \psi}{\sin \varphi},$$

или

$$(H_1 + H_2) \sin \varphi = H_3 \sin \psi. \quad (5.152)$$

Запишем систему уравнений на основе (5.151) и (5.152):

$$(H_1 + H_2) \sin \varphi = H_3 \sin \psi,$$

$$(H_1 - H_2) \cos \varphi = H_3 \cos \psi.$$

Домножим уравнения соответственно на $\cos \psi$ и $\sin \psi$, затем вычтем второе из первого, исключая H_3 :

$$H_1 \sin \varphi \cos \psi + H_2 \sin \varphi \cos \psi - H_1 \sin \psi \cos \varphi + H_2 \sin \psi \cos \varphi = 0.$$

В результате находим соотношение для H_2 и H_1 :

$$H_2 = -H_1 \frac{\sin \varphi \cos \psi - \sin \psi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi} = -H_1 \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

С учетом связи E и H в первой среде получаем соотношение для E_2 и E_1 :

$$E_2 = -E_1 \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad (5.153)$$

Отсюда для интенсивностей имеем:

$$I_2 = I_1 \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (5.154)$$

Коэффициент отражения для s-поляризации:

$$R_3 = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (5.155)$$

Чтобы найти связь между E_3 и E_1 , исключаем из уравнений H_2 :

$$H_1 \sin \varphi \cos \varphi + H_1 \sin \varphi \cos \varphi = H_3 \sin \varphi \cos \psi + H_3 \sin \psi \cos \varphi,$$

откуда получаем:

$$H_3 = H_1 \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi} = H_1 \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Заменяя $H_3 = \sqrt{\varepsilon_2} E_3$, $H_1 = \sqrt{\varepsilon_1} E_1$ с учетом $\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$, получаем:

$$E_3 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} E_1 \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} = E_1 \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Итак,

$$E_3 = E_1 \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad (5.156)$$

Отсюда для интенсивностей:

$$I_3 = I_1 \frac{4 \sin^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \quad (5.157)$$

Формулы Френеля позволяют объяснить многие оптические явления.

Подведем итог. С помощью граничных условий для касательных составляющих векторов \vec{H} и \vec{E} получаются все известные законы отражения и преломления, а также формулы Френеля.

§ 45. Электромагнитная природа света

Сравним свойства электромагнитных волн, предсказываемые электродинамикой, и свойства света, известные из курса оптики.

1. Согласно электродинамике фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме $v_\phi = c$. В оптике экспериментально установлено то же самое значение.
2. В электродинамике фазовая скорость волн в среде

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} < c.$$

В оптике

$$v_{\phi} = \frac{c}{n} < c,$$

причем согласно электродинамике $n = \sqrt{\epsilon\mu}$.

3. Электромагнитные волны – поперечные, свет так же представляет собой поперечные волны.

4. Вектор Умова–Пойнтинга для волн, распространяющихся от осциллятора, $U \sim 1/r^2$.

В оптике установлен закон освещенности $E \sim 1/r^2$ – закон обратных квадратов.

5. Для любых электромагнитных волн выполняются все законы отражения и преломления, которые были установлены в оптике.

Анализ свойств предсказанных электромагнитных волн позволил Максвеллу выдвинуть гипотезу о том, что свет – это электромагнитные волны. В работе 1856 года «Динамическая теория электромагнитного поля» Максвелл писал: «Совпадение результатов, по-видимому, показывает, что свет и магнетизм являются проявлением свойств одной и той же субстанции, и что свет есть электромагнитное возмущение, распространяющееся через поле в соответствии с законами электромагнетизма».

И.Е. Тамм в знаменитом учебном пособии «Основы теории электричества» так оценивает это заключение Максвелла: «Эти предположения действительно подтверждаются более глубоким изучением свойств электромагнитных волн и сравнением их со свойствами света, так что в настоящее время можно с уверенностью сказать, что выяснение электромагнитной природы света является одним из прочнейших и важнейших завоеваний физики XIX столетия». На этом закончим рассмотрение основ макроскопической электродинамики.

ГЛАВА VI. ОСНОВЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 46. Уравнения Максвелла–Лоренца – основные уравнения микроскопической электродинамики. Усреднение уравнений Максвелла–Лоренца

План:

1. Уравнения Максвелла–Лоренца – основные уравнения микроскопической электродинамики.
2. Понятие об усреднении.
3. Усреднение второго и четвёртого уравнений Максвелла–Лоренца, физический смысл векторов \vec{E} и \vec{D} макроскопической электродинамики. Связь между векторами \vec{E} , \vec{D} и \vec{P} .
4. Усреднение третьего и первого уравнений Максвелла–Лоренца, физический смысл векторов \vec{B} и \vec{H} макроскопической электродинамики. Связь между векторами \vec{B} , \vec{H} и \vec{M} .

В этой главе будут рассмотрены основы микроскопической электродинамики – уравнения Максвелла–Лоренца, их усреднение, а также классическая теория некоторых явлений, не требующая привлечения знаний квантовой механики и статистической физики.

1. В теории электромагнитного поля, созданной Максвеллом в 60-е годы XIX века, вещество описывалось с помощью некоторых феноменологических коэффициентов, которые считались постоянными для данного вещества. Например, диэлектрическая проницаемость (ϵ), или магнитная проницаемость (μ), которые определялись из опыта. Отсюда получалось, что показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu} = const$.

Однако ещё за 200 лет до этого уже было известно, что эти константы вовсе не являются постоянными! В 1666 г. Исаак Ньютон, пропустив свет через стеклянную призму, обнаружил, что белый свет разлагается на 7 цветов, т.е. имеет место дисперсия света (зависимость показателя преломления от длины волны), $n \neq const$, $n = f(\lambda)$.

Поэтому возникла задача: определить коэффициенты, которые использовал Максвелл, на основе микроструктуры вещества и определенных механизмов взаимодействия электромагнитного поля с веществом, которые приводят к наблюдаемым значениям n , ϵ , μ . Эту задачу поставил и в значительной степени решил голландский физик Хендрик Антон Лоренц в рамках классической электронной теории (1880–1909 гг.).

Созданию теории Лоренца предшествовало открытие электрона. Анализируя законы электролиза, установленные Фарадеем, Герман Гельмгольц пришел к выводу о существовании «атома электричества». В 1881 г. он ввёл термин «элементарный электрический заряд», названный впоследствии электроном. Как элементарная частица, электрон был открыт позднее, в 1897 г., Дж. Томсоном при исследовании катодных лучей (оказалось, что это пучки отрицательно заряженных частиц, которые вырываются из катода электрическим полем, приложенным между катодом и анодом в вакуумной трубке).

Лоренц предположил, что вещество состоит из положительно и отрицательно заряженных частиц, которые являются источниками микроскопического электромагнитного поля. Электроны перемещаются в неподвижном электромагнитном эфире, состояние которого описывается уравнениями Максвелла для вакуума (в дальнейшем, после создания специальной теории относительности А. Эйнштейна гипотеза Лоренца о неподвижном эфире оказалась совершенно излишней).

Микроскопические электромагнитные поля, создаваемые отдельными заряженными частицами, подчиняются уравнениям Максвелла–Лоренца. Это уравнения максвелловского вида для вакуума, однако вместо векторов электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} в них содержатся микроскопические напряжённости электрического и магнитного полей $\vec{E}_{\text{микро}}$ и $\vec{H}_{\text{микро}}$. Электрические заряды взаимодействуют между собой через создаваемые ими поля. Чтобы учесть наличие вещества, в первое уравнение Максвелла добавляется плотность тока $\vec{J}_{\text{микро}}$, обусловленная движением электрических зарядов, в четвёртое уравнение Максвелла – объёмная плотность зарядов $\rho_{\text{микро}}$, обусловленная заряженными частицами вещества.

Запишем сначала систему уравнений Максвелла для вакуума:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Основными уравнениями электронной теории являются уравнения Максвелла–Лоренца:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{H}_{\text{микро}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{микро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{\text{микро}}}{\partial t}, \\
\operatorname{rot} \vec{E}_{\text{микро}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_{\text{микро}}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \vec{H}_{\text{микро}} &= 0, \\
\operatorname{div} \vec{E}_{\text{микро}} &= 4\pi \rho_{\text{микро}}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

В дальнейшем векторы микроскопического электромагнитного поля будем обозначать маленькими буквами: $\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{e}$, $\vec{H}_{\text{микро}} = \vec{h}$. Тогда система уравнений (6.2) примет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{микро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \tag{6.2a}$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \tag{6.2b}$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0, \tag{6.2c}$$

$$\operatorname{div} \vec{e} = 4\pi \rho_{\text{микро}}. \tag{6.2d}$$

Поле каждой заряженной частицы в непосредственной близости от неё чрезвычайно быстро меняется от точки к точке. Измеряя в какой-нибудь точке среды напряжённость поля или плотность тока, мы имеем дело со средними значениями этих величин. Именно усреднённые величины, плавно меняющиеся от точки к точке и с течением времени, входят в уравнения феноменологической (т.е. макроскопической) электродинамики Максвелла.

2. Чтобы осуществить переход от микрополя к макро полю, т.е. от уравнений Максвелла–Лоренца к уравнениям Максвелла, необходимо провести пространственно-временное усреднение уравнений Максвелла–Лоренца. Усреднение проводится по физически бесконечно малому объёму ΔV_0 и физически бесконечно малому промежутку времени Δt_0 . Каждую точку надо окружить объёмом V_0 , достаточно большим, чтобы в нём содержалось достаточно много молекул, но, вместе с тем, достаточно малым, чтобы напряженности электрического и магнитного поля в нём не менялись. Необходимость усреднения по времени связана с тем, что микроскопические поля хаотически изменяются во времени в связи с беспорядочным движением заряженных частиц, создающих эти поля.

Физически бесконечно малый объём имеет линейный размер Δl_0 . При этом должны выполняться условия:

1) Δl_0 должно быть много больше меры микроскопической неоднородности поля в веществе. Такой мерой могут быть размеры атомов и молекул, параметры кристаллической решетки, расстояния между молекулами и атомами, которые можно обозначить a . Тогда $\Delta l_0 \gg a$.

2) С другой стороны, Δl_0 должно быть много меньше макроскопической неоднородности поля. Такой мерой могут быть размеры исследуемого образца, зазор между пластинами конденсатора или полюсами электромагнита, длина волны падающего на вещество излучения и т.д. Обозначим эту меру l . Тогда $\Delta l_0 \ll l$.

Итак, должно выполняться условие

$$a \ll \Delta l_0 \ll l. \quad (6.3)$$

Физически бесконечно малый промежуток времени Δt_0 так же, с одной стороны, должен быть много больше характерного времени микроскопических процессов в веществе, например, периода колебаний ионов в узлах кристаллических решеток, периода обращения электрона вокруг ядра в атоме (не забудем, что это классическая теория!), который обозначим T , т.е. $\Delta t_0 \gg T$. С другой стороны, Δt_0 должен быть много меньше времени воздействия поля на вещество, например, времени проведения измерений, периода падающей волны и т.д. Обозначим это характерное время Δt , тогда $\Delta t_0 \ll \Delta t$. Таким образом,

$$T \ll \Delta t_0 \ll \Delta t. \quad (6.4)$$

Введем понятия усредненных по этим параметрам величин. Для обозначения усреднения будем использовать угловые скобки:

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{\Delta V_0 \Delta t_0} \int_{\Delta V_0} \int_{\Delta t_0} f(x, x', y, y', z, z', t, t') dx' dy' dz' dt'. \quad (6.5)$$

Получим несколько полезных соотношений. Найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Delta V_0 \Delta t_0} \int_{\Delta V_0} \int_{\Delta t_0} f(x, x', y, y', z, z', t, t') dx' dy' dz' dt'.$$

Так как производная берется по x , а интегралы по x' , внесем производную под знак интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \frac{1}{\Delta V_0 \Delta t_0} \int_{\Delta V_0} \int_{\Delta t_0} \frac{\partial}{\partial x} f(x, x', y, y', z, z', t, t') dx' dy' dz' dt'.$$

По определению (6.5) в правой части получается усредненная производная, т.е. $\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle. \quad (6.6)$$

Это означает, что операции $\frac{\partial}{\partial x}$ и усреднения коммутируют. Аналогично доказываются следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial y} \langle f \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial y} \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle f \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial z} \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial t} \rangle. \quad (6.7)$$

От этих соотношений можно перейти к основным соотношениям электродинамики:

$$\begin{aligned} grad \langle f \rangle &= \langle grad f \rangle, \\ div \langle \vec{a} \rangle &= \langle div \vec{a} \rangle, \\ rot \langle \vec{a} \rangle &= \langle rot \vec{a} \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{a} \rangle &= \langle \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \rangle. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Этими соотношениями мы будем пользоваться в дальнейшем.

3. Проведем усреднение второго уравнения Максвелла–Лоренца по физически бесконечно малому объему и физически бесконечно малому промежутку времени:

$$\langle rot \vec{e} \rangle = \langle -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \rangle. \quad (6.9)$$

Пользуясь соотношениями (6.8), преобразуем обе части уравнения (6.9):

$$\langle rot \vec{e} \rangle = rot \langle \vec{e} \rangle,$$

$$\langle -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{h} \rangle.$$

Тогда уравнение (6.9) примет следующий вид:

$$rot \langle \vec{e} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{h} \rangle. \quad (6.10)$$

Чтобы это уравнение совпало со вторым уравнением Максвелла

$$rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.11)$$

необходимо положить, что

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}, \quad (6.12)$$

$$\langle \vec{h} \rangle = \vec{B}. \quad (6.13)$$

Усредним четвертое уравнение Максвелла–Лоренца:

$$\operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle = \langle 4\pi\rho_{\text{микро}} \rangle. \quad (6.14)$$

В левой части опять поменяем порядок операций и получим

$$\langle \operatorname{div} \vec{e} \rangle = \operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle. \quad (6.15)$$

Для преобразования правой части учтем, что заряды (заряженные частицы вещества) могут быть свободными и связанными, тогда

$$\langle 4\pi\rho_{\text{микро}} \rangle = 4\pi\langle \rho_{\text{своб}}^{\text{микро}} \rangle + 4\pi\langle \rho_{\text{связ}}^{\text{микро}} \rangle, \quad (6.16)$$

где $\langle \rho_{\text{своб}}^{\text{микро}} \rangle = \rho$ – объемная плотность свободных зарядов в макроскопической электродинамике, $\langle \rho_{\text{связ}}^{\text{микро}} \rangle = \rho_{\text{связ}}$ – соответственно объемная плотность связанных зарядов.

Учтем, что в диэлектрике, как было показано во II главе (§ 13),

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad (6.17)$$

где \vec{P} – вектор поляризации. Тогда получаем

$$\operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle = 4\pi\rho - 4\pi\operatorname{div} \vec{P},$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \vec{e} \rangle + \operatorname{div}(4\pi\vec{P}) &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}(\langle \vec{e} \rangle + 4\pi\vec{P}) &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Чтобы это уравнение совпало с четвертым уравнением Максвелла $\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$, достаточно положить:

$$\vec{D} = \langle \vec{e} \rangle + 4\pi\vec{P}. \quad (6.19)$$

Итак, мы получили связь между электрическими векторами «истинного» (как иногда говорят) микроскопического поля и векторами поля в макроскопической электродинамике. Выражение (6.12) означает, что вектор электрической напряженности в макроскопической электродинамике есть усреднённый по физически бесконечно

малому объему и физически бесконечно малому промежутку времени вектор электрической напряженности микроскопической электродинамики. Это означает, что вектор \vec{E} формально получается интегрированием вектора $\vec{E}_{\text{микро}}$ в соответствии с определением (6.5). Вектор электрической индукции \vec{D} макроскопической электродинамики согласно (6.19) отличается от вектора $\langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{e} \rangle$ в случае, если среда поляризуется, т.е. $\vec{P} \neq 0$. Это характерно для диэлектриков. Если же поляризация равна нулю, т.е. $\vec{P} = 0$, то $\vec{D} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \vec{E}$. Таким образом, в макроскопической электродинамике для характеристики поля в веществе надо вводить два вектора: \vec{D} и \vec{E} .

Найдем связь между векторами \vec{D} и \vec{E} в макроскопической электродинамике, используя (6.12) и (6.19):

$$\vec{D} = \langle \vec{e} \rangle + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Итак,

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (6.20)$$

Это общая формула, связывающая три вектора \vec{D} , \vec{E} , \vec{P} в макроскопической электродинамике. Воспользуемся случаем напомнить, что мы уже в начале курса вводили простую связь:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}. \quad (6.21)$$

Но эта формула ограниченная, она справедлива только, как мы это покажем сейчас, для изотропных сред. В самом деле, (6.21) для проекций даёт

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon E_x, \\ D_y &= \varepsilon E_y, \\ D_z &= \varepsilon E_z, \end{aligned} \quad (6.22)$$

поскольку для изотропных сред ε не зависит от направления. Другое дело – анизотропные среды. Обобщим (6.22):

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Для анизотропных сред диэлектрическая проницаемость – тензор 2-го ранга ε_{ik} , равный

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Читатель может самостоятельно написать тензор диэлектрической проницаемости для изотропных сред. Для этого надо использовать (6.22) и (6.23), (6.24). В общем можно записать кратко (6.23) следующим образом:

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \quad (6.25)$$

Теперь «вернемся» к формуле (6.20) и посмотрим, какие «богатые» возможности в ней таятся! Для изотропного случая $\vec{P} = \alpha \vec{E}$. Подставив в (6.20), получаем

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{E} = (1+4\pi\alpha) \vec{E}.$$

Из сравнения с (6.21) следует, что

$$\varepsilon = 1+4\pi\alpha. \quad (6.26)$$

Формула (6.26) дает связь между диэлектрической проницаемостью и коэффициентом поляризации.

Далее учтем, что есть вещества, которые уже в отсутствии поля поляризованы, т.е. при $\vec{E} = 0$, $\vec{P}_0 \neq 0$ и в общем $\vec{P} = \vec{P}_0 + \alpha \vec{E}$. Такими веществами, имеющими остаточную поляризацию, являются сегнетоэлектрики, электреты, пьезоэлектрики, пироэлектрики. Тогда

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}_0 + 4\pi \vec{E} = 4\pi \vec{P}_0 + (1+4\pi\alpha) \vec{E} = 4\pi \vec{P}_0 + \varepsilon \vec{E}.$$

Итак, для этих веществ

$$\vec{D} = 4\pi \vec{P}_0 + \varepsilon \vec{E}. \quad (6.27)$$

Если же вещества анизотропны, то с учетом (6.25) будем иметь:

$$D_i = 4\pi P_{0i} + \varepsilon_{ik} E_k. \quad (6.28)$$

Подведём итоги этого пункта.

1. Второе и четвёртое уравнения Максвелла являются усреднёнными вторым и четвёртым уравнениями Максвелла–Лоренца.

2. Выяснен физический смысл векторов \vec{D} и \vec{E} макроскопической электродинамики.

3. Получены более общие, нежели в начале пункта, соотношения для анизотропных сред и веществ с остаточной поляризацией.

Конечно, последние можно было вводить и в начале курса, но читатели тогда ещё не были психологически готовы к восприятию более громоздких формул. Теперь, «добравшись» до этих результатов, можно спокойно двигаться дальше.

4. Усредним третье уравнение Максвелла–Лоренца:

$$\langle \text{div } \vec{h} \rangle = 0.$$

Поскольку $\langle \text{div } \vec{h} \rangle = \text{div} \langle \vec{h} \rangle$, получим уравнение

$$\text{div} \langle \vec{h} \rangle = 0. \quad (6.29)$$

Из сравнения этого уравнения с третьим уравнением Максвелла приходим к заключению, что

$$\vec{B} = \langle \vec{h} \rangle,$$

как это уже получили при усреднении второго уравнения Максвелла–Лоренца (сравните с (6.13)).

Усредняем 1-е уравнение Максвелла–Лоренца:

$$\langle \text{rot } \vec{h} \rangle = \left\langle \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{микро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle. \quad (6.30)$$

В левой части снова проведем перестановку операторов

$$\langle \text{rot } \vec{h} \rangle = \text{rot} \langle \vec{h} \rangle. \quad (6.31)$$

В правой части

$$\left\langle \frac{4\pi}{c} \vec{J}_{\text{микро}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{J}_{\text{микро}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{e} \rangle. \quad (6.32)$$

Найдем $\langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle$. Учтем, что в веществе может быть три типа усреднённой плотности тока:

$$\langle \vec{j} \rangle = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3. \quad (6.33)$$

В данной формуле содержатся следующие члены:

1) плотность тока проводимости, обусловленная движением свободных заряженных частиц, которая в макроскопической электродинамике обозначаются просто вектором \vec{j} ;

2) плотность молекулярных токов, которая обусловлена движением связанных в атоме заряженных частиц (электронов) по некоторым орбитам и согласно гипотезе Ампера, как это было показано в главе III, связана с намагниченностью:

$$\vec{j}_{\text{молек}} = c \text{rot} \vec{M}; \quad (6.34)$$

3) наконец, возможен третий тип – плотность тока, возникающая в процессе поляризации, за счет смещения микроскопических диполей, т.е. обусловленная смещением связанных зарядов.

Найдем эту плотность тока:

$$\vec{j}_3 = \langle \vec{j}_{\text{микро,з}} \rangle = \langle \rho_{\text{микро}} \cdot \vec{u}_{\text{микро}} \rangle = \langle \rho_{\text{микро}} \cdot \frac{d\vec{r}_{\text{микро}}}{dt} \rangle.$$

Полагая $\rho_{\text{микро}}$ не изменяющейся с течением времени, получим

$$\vec{j}_3 = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_{\text{микро}} \cdot \vec{r}_{\text{микро}} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{dq_{\text{микро}}}{dV_{\text{микро}}} \cdot \vec{r}_{\text{микро}} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{d\vec{P}_{\text{микро}}}{dV_{\text{микро}}} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Здесь учтено, что при смещении на вектор $\vec{r}_{\text{микро}}$ образуется дипольный момент $d\vec{P}_{\text{микро}}$, а усредненное по объему значение дипольного момента, по определению (гл. II), есть вектор поляризации \vec{P} .

Итак, окончательно для усреднённой плотности тока имеем:

$$\langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle = \vec{j} + c \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (6.35)$$

Соберем все вычисленные выражения и подставим их в (6.30):

$$\text{rot} \langle \vec{h} \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} c \text{rot} \vec{M} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{e} \rangle.$$

Сгруппируем члены:

$$\text{rot}(\vec{h} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\langle\vec{e}\rangle + 4\pi\vec{P}).$$

Сравнивая полученное выражение с первым уравнением Максвелла, приходим к необходимости введения двух векторов:

$$\langle\vec{H}_{\text{микро}}\rangle - 4\pi\vec{M} = \vec{H}, \quad (6.36)$$

$$\langle\vec{e}\rangle + 4\pi\vec{P} = \vec{D}. \quad (6.37)$$

Формулы (6.36), (6.37) показывают, что векторы \vec{D} и \vec{H} по своей природе аналогичны, так же как аналогами являются векторы \vec{E} и \vec{B} согласно (6.12) и (6.13).

Итак, показано, что:

1) первое и третье уравнения Максвелла являются результатом усреднения первого и третьего уравнений Максвелла–Лоренца;

2) вектор \vec{B} – вектор магнитной индукции – есть усредненный «истинный» вектор магнитной напряженности микроскопической электродинамики;

3) вектор \vec{H} – вектор магнитной напряженности – есть разность усредненного вектора магнитной микроскопической напряженности и намагниченности. В вакууме векторы \vec{H} и \vec{B} совпадают.

Найдем связь между векторами \vec{H} и \vec{B} в макроскопической электродинамике. Для этого в (6.36) подставим \vec{B} согласно (6.12):

$$\vec{B} - 4\pi\vec{M} = \vec{H}, \text{ или } \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}. \quad (6.38)$$

Формально (6.38) совпадает с (6.20) для \vec{D} , отсюда и не совсем удачное название для \vec{B} – магнитная индукция. Как уже отмечалось, аналогом является вектор электрической напряженности \vec{E} .

Введем вектор намагниченности

$$\vec{M} = \chi\vec{H}, \quad (6.39)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества. Тогда, подставив в (6.38), получим:

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\chi\vec{H} = \vec{H}(1 + 4\pi\chi). \quad (6.40)$$

Сравним с уравнением связи

$$\vec{B} = \mu\vec{H}. \quad (6.41)$$

Получим

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \quad (6.42)$$

Формально (6.42) совпадает с (6.26) для ε . Если имеется спонтанная (самопроизвольная) намагниченность, т.е. $\vec{M} \neq 0$ при $\vec{H} = 0$, то (6.39) обобщается:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \chi\vec{H}.$$

Тогда вместо (6.40) получим

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}_0 + 4\pi\chi\vec{H} = 4\pi\vec{M}_0 + (1 + 4\pi\chi)\vec{H}.$$

Итак,

$$\vec{B} = 4\pi\vec{M}_0 + \mu\vec{H} \quad (6.43)$$

Это уравнение применимо для изотропных сред. Для анизотропных сред, вводя тензор магнитной проницаемости μ_{ik} , получаем:

$$B_i = 4\pi M_{0i} + \mu_{ik} H_k. \quad (6.44)$$

Подведем итоги.

1. В этом важнейшем параграфе приведены основные уравнения микроскопической электродинамики – уравнения Максвелла–Лоренца.

2. Показано, что уравнения Максвелла – это усреднённые по физически бесконечно малому объёму и физически бесконечно малому промежутку времени уравнения Максвелла–Лоренца.

3. Показано, что в макроскопической электродинамике поле в среде характеризуется четырьмя векторами \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} . Раскрыта их связь с векторами поля в микроскопической электродинамике.

4. Установлены соотношения, связывающие векторы \vec{E} и \vec{D} , \vec{B} и \vec{H} в более общем виде.

§ 47. Рассеяние плоских волн упруго-связанным электроном. Эффективное сечение рассеяния

План:

1. Модель атома Томсона. Собственные колебания упруго-связанного электрона.
2. Вынужденные колебания упруго-связанного электрона в поле падающей волны.
3. Рассеяние плоских волн упруго-связанным электроном.
4. Эффективное сечение рассеяния.

1. Первая модель атома была разработана Дж.Дж. Томсоном. Согласно Томсону атом представляет собой шар, равномерно заряженный по всему объёму положительным зарядом. Электроны, имеющие отрицательный заряд, вкраплены в шар, как изюминки в тесте для пудинга (по словам сына Дж.Дж. Томсона). Выясним, как движется электрон в таком атоме. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (6.45)$$

Учтём силы, действующие на электрон в атоме Томсона. В первую очередь, запишем выражение для силы, действующей со стороны электростатического поля:

$$\vec{F}_1 = -e\vec{E}_{\text{шара}}, \quad \text{где } \vec{E}_{\text{шара}} = \frac{q}{a^3} \vec{r}$$

– напряженность поля положительно заряженного шара радиуса a ; r – радиус-вектор электрона, отсчитываемый от центра атома (рис. 20).

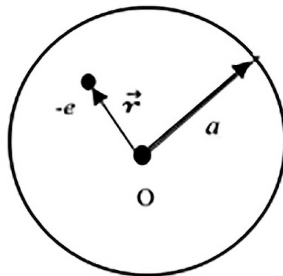


Рис. 20. Модель атома Томсона с одним электроном

Пусть заряд $q = Ze$, где Z – число электронов в атоме. Тогда

$$\vec{F}_1 = -\frac{Ze^2}{a^3} \vec{r}. \quad (6.46)$$

Формула (6.46) означает, что на электрон действует квазиупругая сила. Природа этой силы – электростатическое взаимодействие отрицательного заряда электрона с положительным зарядом атома. Поэтому такой электрон получил название упруго-связанного. Под действием квазиупругой силы электрон совершает колебания, т.е. движется с ускорением. Как было показано ранее (§ 39), ускоренно движущийся заряд должен излучать электромагнитные волны (формула (5.55)). Поскольку электрон теряет энергию на излучение, необходимо учесть ещё силу лучистого трения (см. формулу (5.57)):

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{тр}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (6.47)$$

Подставив в \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (6.45), получаем:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{Ze^2}{a^3} \vec{r} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (6.48)$$

Разделим всё почленно на массу m :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{Ze^2}{ma^3} \vec{r} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}}. \quad (6.49)$$

Будем искать решение уравнения (6.49) в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}. \quad (6.50)$$

Необходимо найти частоту колебаний ω . Учтём, что $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$ и $\ddot{\ddot{\vec{r}}} = -i\omega^3 \vec{r}$, тогда

$$-\omega^2 \vec{r} = -\frac{Ze^2}{ma^3} \vec{r} - i\omega^3 \frac{2e^2}{3mc^3} \vec{r}.$$

Сокращая на \vec{r} , получим уравнение

$$\omega^2 = \frac{Ze^2}{ma^3} - i\omega^3 \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (6.51)$$

Это уравнение третьей степени относительно ω . Как известно, стандартного решения оно не имеет. Понизим порядок уравнения, введя следующую величину:

$$\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}. \quad (6.52)$$

Далее введём обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{ma^3}. \quad (6.53)$$

Тогда уравнение для ω переписывается в виде

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0. \quad (6.54)$$

Его решениями являются

$$\omega_{1,2} = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (6.55)$$

Прежде чем двигаться дальше, оценим введённые величины ω_0 и γ для электрона в атоме. Полагая $a \sim 10^{-8}$ см, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГС(г), $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, получим $\omega_0 \sim 10^{16}$ 1/с, $\gamma \sim 10^9$ (при $\omega = \omega_0$). Следовательно, в (6.55) под корнем можно пренебречь членом $\frac{\gamma^2}{4}$. Тогда будем иметь:

$$\omega_{1,2} = \frac{i\gamma}{2} \pm \omega_0. \quad (6.56)$$

Выясним физический смысл введённых величин ω_0 и γ . Для этого подставим (6.56) в (6.50):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i(\frac{i\gamma}{2} \pm \omega_0)t} = \vec{r}_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega_0 t}. \quad (6.57)$$

Формула (6.57) означает, что электрон совершает гармонические колебания с частотой ω_0 . Назовём эти колебания собственными, а ω_0 – собственной частотой. Однако эти колебания затухающие, поскольку их амплитуда

$$A = r_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (6.58)$$

убывает с течением времени. Следовательно, γ – коэффициент затухания. Очевидно, что, совершая собственные колебания, электрон теряет энергию на излучение электромагнитных волн. Найдём время релаксации (успокоения) колебания τ . Полагая $t = \tau$, получим

$$A(\tau) = r_0 e^{-1},$$

или согласно (6.58)

$$A(\tau) = r_0 e^{-\frac{\gamma}{2}\tau}.$$

Тогда

$$-\frac{\gamma}{2}\tau = -1, \quad \tau = \frac{2}{\gamma}. \quad (6.59)$$

Учитывая значение γ , получаем $\tau \sim 10^{-9}$ с. Это очень маленькое время. Оно означает, что по истечении времени τ все электроны должны были бы «закончить» свои колебания и «собраться» в центре атома. Это была одна из принципиальных трудностей предложенной модели атома. Величина $\tau \sim 10^{-9}$ с означает также, что излучение электромагнитных волн, обусловленное собственными колебаниями электрона в атоме, также очень быстро затухает. Это мы учтём в дальнейшем.

2. Пусть на атом падает плоская монохроматическая волна

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \\ \vec{H}_{\text{пад}} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \end{cases} \quad (6.60)$$

Рассмотрим, как движется электрон в этом случае. В уравнение (6.48) надо добавить ещё силу $\vec{F}_3 = \vec{F}_L$ – это сила Лоренца – сила, действующая на электрон, движущийся в поле падающей волны (6.60).

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_L = -e\vec{E}_{\text{пад}} - \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}_{\text{пад}}]. \quad (6.61)$$

Для плоской волны в вакууме $\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{H}_{\text{пад}}$. Чтобы оценить магнитную часть силы Лоренца (6.61), оценим скорость электрона в атоме:

$$v \sim \omega r \sim \omega_0 a = 10^{16} \cdot 10^{-8} \sim 10^8 \text{ см/с},$$

тогда

$$\frac{v}{c} = \frac{10^8}{3 \cdot 10^{10}} \sim 10^{-2}.$$

Это означает, что магнитная часть силы Лоренца много меньше электрической, поэтому приближенно можно считать, что

$$\vec{F}_3 \sim -e\vec{E}_{\text{пад}} = -e\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Член, содержащий скалярное произведение $\vec{k}\vec{r}$, учитывает пространственную периодичность поля в атоме. Оценим порядок этой величины. Сначала найдём длину волны λ , соответствующую частоте $\omega \sim 10^{16}$ Гц

$$\lambda \sim \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^{16}} \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

Но размер атома $a \sim 10^{-8}$ см. Это означает, что $a \ll \lambda$. Поэтому пространственную периодичность поля в атоме можно не учитывать. Тогда

$$\vec{F}_3 = -e\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (6.62)$$

Добавим этот результат в уравнение (6.48):

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{Ze^2}{a^3}\vec{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{r}} - e\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (6.63)$$

Разделим на m и получим новое уравнение

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{Ze^2}{ma^3}\vec{r} + \frac{2e^2}{3mc^3}\ddot{\vec{r}} - \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}, \quad (6.64)$$

где $\omega = \omega_{\text{пад}}$ – частота падающей волны. Введя снова обозначения ω_0 и γ , получаем

$$-\omega^2 \vec{r} = -\omega_0^2 \vec{r} - i\omega\gamma \vec{r} - \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Находим \vec{r} :

$$\vec{r} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (6.65)$$

Комплексное число в знаменателе можно записать в следующем виде:

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} e^{i\alpha},$$

где α – сдвиг фазы. Тогда вместо (6.65) получаем

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \alpha)}. \quad (6.66)$$

Формула (6.66) показывает, что электрон под действием поля падающей волны совершает вынужденные колебания с частотой ω падающей волны. Эти колебания сдви-

нуты по фазе на α по отношению к колебаниям поля. Но самое главное – они являются незатухающими. Это объясняется тем, что падающая волна непрерывно подводит энергию к электрону.

3. Совершая вынужденные колебания, электрон излучает электромагнитные волны. Найдём поле излучения, используя результат § 39:

$$\vec{H}_{\text{изл}} = -\frac{e}{c^2 R} \left[\vec{a} \left(t - \frac{R}{c} \right) \vec{R}^0 \right], \quad (6.67)$$

где R – расстояние от электрона до точки поля, \vec{R}^0 – единичный вектор, показывающий направление от электрона к данной точке поля, \vec{a} – ускорение электрона. Находим ускорение, используя (6.66):

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r} = \frac{\omega^2 e \vec{E}_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} e^{i(\omega t - \alpha)}.$$

Но в формуле (6.67) надо учесть запаздывание, тогда

$$\vec{a} \left(t - \frac{R}{c} \right) = \frac{\omega^2 e \vec{E}_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} e^{i[\omega(t - \frac{R}{c}) - \alpha]}. \quad (6.68)$$

Подставим (6.68) в (6.67) и получим

$$\vec{H} = -\frac{e^2}{mc^2 R} \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \vec{E}_0 e^{i[\omega(t - \frac{R}{c}) - \alpha]}.$$

Введём классический радиус электрона (§14)

$$a_e = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Тогда

$$\vec{H} = -\frac{a_e}{R} \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \vec{E}_0 e^{i[\omega(t - \frac{R}{c}) - \alpha]}. \quad (6.69)$$

Полученный результат для \vec{H} аналогичен $\vec{E} = [\vec{H} \vec{R}^0]$ и означает, что электрон излучает сферическую волну, где излучение происходит во все стороны, тогда как на электрон падала плоская волна. Следовательно, происходит рассеяние падающей волны электроном. Эта часть рассеянной волны, согласно (6.69), имеет частоту ω –

частоту падающей волны. Такое рассеяние называют когерентным. Когерентное рассеяние незатухающее. Однако в рассеянной волне присутствует ещё некогерентная компонента, обусловленная излучением электроном волн вследствие собственных колебаний с частотой ω_0 . Но это быстро затухающее излучение, как было показано в пункте 2. Поэтому в дальнейшем будет учитываться только когерентная часть.

4. Найдём эффективное сечение рассеяния. Процесс рассеяния согласно нашей задаче – не механический, а электромагнитный. Поэтому эффективное сечение рассеяния определяется электромагнитными величинами.

Определим дифференциальное эффективное сечение рассеяния следующим образом:

$$d\sigma_{\text{эф}} = \frac{(dW'_{\text{изл}})_{\text{ср}}}{(Y_{\text{пад}})_{\text{ср}}}, \quad (6.70)$$

где усреднение проводится за время, равное периоду.

Вычислим вектор плотности потока электромагнитной энергии (вектор Умова–Пойнтинга, введённый в § 6, формула (1.63))

$$\vec{Y}_{\text{пад}} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_{\text{пад}} \vec{H}_{\text{пад}}].$$

Поскольку в плоской волне в вакууме $E_{\text{пад}} = H_{\text{пад}}$ и $\vec{E}_{\text{пад}} \perp \vec{H}_{\text{пад}}$, получаем

$$Y_{\text{пад}} = \frac{c}{4\pi} E_{\text{пад}}^2. \quad (6.71)$$

Подставим в (6.71) выражение для $E_{\text{пад}}$ из (6.60), оставив только действительную часть:

$$Y_{\text{пад}} = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Учитывая, что среднее значение квадрата косинуса

$$\overline{\cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = 1/2,$$

получим среднее значение плотности потока энергии

$$(Y_{\text{пад}})_{\text{ср}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2. \quad (6.71)$$

Оставляя только действительную часть (6.69), находим

$$dW'_{\text{изл}} = Y_{\text{изл}} dS = \frac{c}{4\pi} H_{\text{изл}}^2 R^2 d\Omega,$$

$$dW'_{\text{изл}} = \frac{c}{4\pi} \frac{a_e^2}{R^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} |[\vec{E}_0 \vec{R}^0]|^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) - \alpha \right] R^2 d\Omega.$$

Раскроем векторное произведение $|[\vec{E}_0 \vec{R}^0]| = E_0 \sin \theta$, где θ – угол между направлением векторов \vec{E} и \vec{R}^0 (рис. 21).

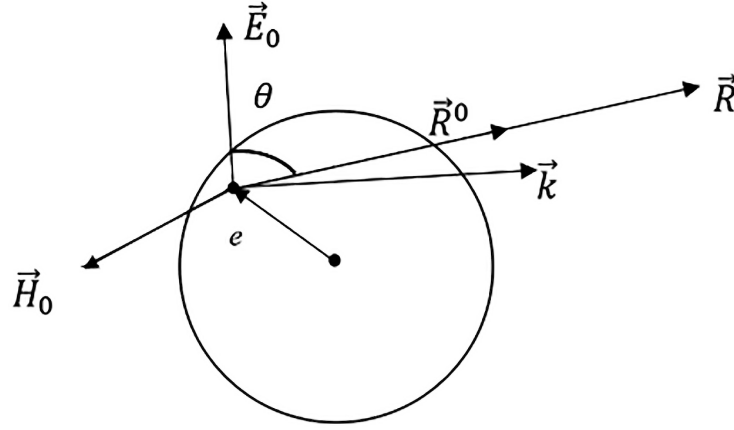


Рис. 21

Тогда после усреднения по периоду $\cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) - \alpha \right]$ получим:

$$(dW'_{\text{изл}})_{\text{ср}} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 a_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (6.73)$$

Подставляя (6.72) и (6.73) в (6.70), будем иметь:

$$d\sigma_{\text{эф}} = a_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (6.74)$$

Прежде чем двигаться дальше, обсудим полученный результат. Для этого найдём дифференциальное эффективное сечение рассеяния в единице телесного угла:

$$\frac{d\sigma_{\text{эф}}}{d\Omega} = a_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \theta. \quad (6.75)$$

Формула (6.75) показывает, что максимальное рассеяние происходит при углах $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, то есть в этом случае $\sin^2 \theta = 1$. А это направление волнового вектора \vec{k} па-

дающей волны. Рассеяния не происходит при $\theta = 0, \pi$ то есть в направлении вектора \vec{E}_0 падающей волны.

Теперь вычислим полное сечение рассеяния. Для поляризованной волны введём углы сферической системы координат θ и ψ . Тогда $d\Omega = \sin\theta d\theta d\psi$. Поэтому

$$\sigma_{\text{эф}} = a_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta.$$

Итак,

$$\sigma_{\text{эф}} = \frac{8\pi}{3} a_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Эта формула впервые была получена Планком. Дисперсионная формула Планка (6.76) показывает, что сечение рассеяния зависит от частоты падающей волны и собственной частоты колебания упруго-связанного электрона. Для неполяризованной волны получается тот же результат (см., напр., [9]).

Рассмотрим частные случаи:

1) $\omega \ll \omega_0$, тогда

$$\sigma_{\text{эф}} \simeq \frac{8\pi}{3} a_e^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^2}, \quad (6.76)$$

что совпадает с формулой Рэлея;

2) $\omega = \omega_0$ (резонанс), тогда

$$\sigma_{\text{эф}} = \frac{8\pi}{3} a_e^2 \frac{\omega^4}{\gamma^2} = \sigma_{\text{max}};$$

3) $\omega \gg \omega_0$, тогда

$$\sigma_{\text{эф}} = \frac{8\pi}{3} a_e^2 = \sigma_0,$$

где σ_0 – эффективное сечение рассеяния свободным электроном – формула Томсона. Этот результат означает, что под действием очень коротких волн (например, рентгеновских лучей) электрон в атоме ведёт себя как свободный электрон! Впоследствии это было учтено в теории эффекта Комптона.

§ 48. Диэлектрики в переменном электромагнитном поле. Нормальная и аномальная дисперсия

План:

1. Диэлектрическая проницаемость в переменном электромагнитном поле.
2. Проводимость диэлектрика в переменном электромагнитном поле.
3. Исследование поведения диэлектрика в переменном электромагнитном поле.
4. Показатель преломления. Нормальная и аномальная дисперсия.
5. Групповая скорость волн.

В этом параграфе рассматривается поведение диэлектрика в переменном поле на основе модели упруго-связанного электрона в атоме. При этом преодолеваются трудности и недостатки, которые, как отмечалось ранее (см. § 42, 44), присущи макроскопической электродинамике.

1. Найдем сначала диэлектрическую проницаемость диэлектрика в переменном электромагнитном поле. Согласно (6.26)

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha, \quad (6.78)$$

где α – коэффициент поляризации, который входит в формулу для вектора поляризации

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}. \quad (6.79)$$

Для нахождения вектора поляризации запишем сначала дипольный момент упруго-связанного электрона в атоме, который возникает при смещении электрона на вектор \vec{r} под действием переменного электромагнитного поля:

$$\vec{p} = -e\vec{r}. \quad (6.80)$$

Подставляем значение \vec{r} из § 47 (формула (6.65)):

$$\vec{P} = \frac{e^2 \vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} e^{i\omega t}. \quad (6.81)$$

Тогда для вектора поляризации будем иметь

$$\vec{P} = N\vec{p} = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} \vec{E}_0 e^{i\omega t} = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} \vec{E}. \quad (6.82)$$

Сравнив (6.82) и (6.79), находим коэффициент поляризации:

$$\alpha = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}.$$

Используя полученное выражение для α , получаем диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}.$$

Выделим отдельно действительную и мнимую части, умножая и деля на комплексно сопряженные выражения. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = \\ &= 1 + \frac{4\pi Ne^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]} - i \frac{4\pi Ne^2\omega\gamma}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]} = \varepsilon_0 + i\varepsilon_1. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Введем следующую величину

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad (6.84)$$

где ω_p – плазменная частота.

Тогда получаем, что

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]}, \quad (6.85)$$

$$\varepsilon_1 = - \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]}. \quad (6.86)$$

Чтобы выяснить физический смысл мнимой добавки к ε , то есть ε_1 , вспомним, что уже в макроскопической электродинамике при рассмотрении распространения волн в проводниках (§ 42) появлялась комплексная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ причем мнимая часть, то есть ε_2 , связана с проводимостью и, как это положено мнимой добавке, описывает процесс поглощения.

2. Найдем проводимость диэлектрика, используя формулы для мнимой части ε (6.86) и (5.99):

$$\varepsilon_1 = - \frac{4\pi\lambda(\omega)}{\omega} = - \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

Отсюда находится проводимость диэлектрика:

$$\lambda(\omega) = \frac{\omega_p^2 \omega^2 \gamma}{4\pi[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]} \quad (6.87)$$

Итак, полученная формула для проводимости означает, что диэлектрик, так же как и проводник, проводит переменное электромагнитное поле. Однако, если в (6.87) положить $\omega = 0$, то $\lambda(\omega) = 0$. Это означает, что в статическом поле диэлектрик проводимостью не обладает. Полученный результат объясняет, например, почему конденсатор не пропускает постоянный ток, но пропускает переменный.

3. Исследуем теперь зависимость поведения диэлектрика в электромагнитном поле от частоты поля.

1. Пусть $\omega \ll \omega_0$, тогда $(\omega_0^2 - \omega^2) \gg \omega^2 \gamma^2$. Поэтому в знаменателе (6.85) приближенно получим:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 \approx (\omega_0^2 - \omega^2)^2.$$

Тогда

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Итак, в этом случае

$$\varepsilon_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > 0. \quad (6.88)$$

Вспомним, что показатель преломления согласно макроскопической электродинамике $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$. В этом случае, поскольку $\varepsilon_0 > 0$, показатель преломления действителен. Это означает, что в области низких частот диэлектрик прозрачен для электромагнитных волн.

2. Пусть $\omega = \omega_0$. Это случай резонанса, как в механике. В этом случае проводимость $\lambda(\omega)$ максимальна:

$$\lambda_{max} = \frac{\omega_p^2 \omega^2 \gamma}{4\pi \omega^2 \gamma^2} = \frac{\omega_p^2}{4\pi \gamma}. \quad (6.89)$$

Поскольку $\gamma \sim 10^9$ (как было показано ранее) – сравнительно малая величина, а $\omega_p \sim 10^{15}$ в конденсированной среде, то λ имеет большое значение согласно (6.89). Это область максимального поглощения.

3. Пусть $\omega \gg \omega_0$, но снова $(\omega_0^2 - \omega^2) \gg \omega^2 \gamma^2$ уже за счет ω^4 . Тогда можно использовать приближенную формулу (6.88) для ε_0 . Знаменатель отрицательный. Если же числитель положительный, то есть если выполняется дополнительное условие

$\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_p^2 > 0$, или $\omega^2 < \omega_0^2 + \omega_p^2$, то ε_0 – отрицателен. Это означает, что показатель преломления мнимый. Следовательно, преломления не происходит, а имеет место только отражение. Диэлектрик «блестит» как металл.

4. Наконец, пусть $\omega \gg \omega_0$, но при этом $\omega^2 > \omega_0^2 + \omega_p^2$. Тогда и числитель в выражении для ε_0 тоже отрицателен, в результате $\varepsilon_0 > 0$ и n_0 действителен. В этой области частот диэлектрик прозрачен.

Итак, исследование показывает, что в разных диапазонах частот переменного поля диэлектрики ведут себя по-разному. Конечно, всё связывается с собственной частотой ω_0 , которая, как мы показали, зависит от Z – числа электронов в атоме, и различна для разных веществ.

Таким образом, в микроскопической электродинамике преодолевается недостаток макроскопической электродинамики, который мы отмечали в § 41.

4. Согласно (6.83) диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной. Поэтому и показатель преломления n тоже является комплексной величиной. При этом мнимая часть показателя преломления связана с поглощением электромагнитной волны, а действительная часть описывает явление дисперсии. Покажем, что в микроскопической электродинамике на основе модели упруго-связанного электрона можно объяснить явление дисперсии света.

Запишем вещественную часть показателя преломления:

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_0} = \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Применим разложение $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$ и получим

$$n_0 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]}. \quad (6.90)$$

Из (6.90) видно, что показатель преломления зависит от частоты ω падающего на диэлектрик электромагнитного поля. Это известно из оптики явление дисперсии. Найдем производную $\frac{dn_0}{d\omega}$, чтобы выяснить, как зависит n_0 от частоты в разных случаях.

$$\begin{aligned} \frac{dn_0}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \cdot \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_p^2 \left\{ \frac{-2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} - \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)[2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\omega\gamma^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]^2} \right\} = \\ &= \omega \omega_p^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma^2\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]^2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{dn_o}{d\omega} = \omega \omega_p^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma^2 \omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]^2}. \quad (6.91)$$

Знаменатель в этом выражении всегда положительный, следовательно, поведение $\frac{dn_o}{d\omega}$ зависит от значения числителя.

Если $(\omega_0^2 - \omega^2) > \omega_0^2 \gamma^2$, то $\frac{dn_o}{d\omega} > 0$. Это означает, что показатель преломления n_o с увеличением частоты увеличивается. Как известно из курса оптики, это нормальная дисперсия.

Если $(\omega_0^2 - \omega^2) < \omega_0^2 \gamma^2$, то $\frac{dn_o}{d\omega} < 0$. Это область аномальной дисперсии – с увеличением частоты ω показатель преломления уменьшается. Граница этих областей находится из условия

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^2 \gamma^2 = 0,$$

что приводит к биквадратному уравнению

$$\omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 - \omega_0^2 (\gamma^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Решение этого уравнения дает границы нормальной и аномальной дисперсии

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 + \omega_0^2 \gamma^2 - \omega_0^4} \right]^{1/2} = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_0 \gamma} = \\ &= \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{\gamma}{\omega_0}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$, применим разложение $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$. Тогда

$$\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\gamma}{2\omega_0} \right) = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда следует, что границы соответствуют частотам

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}.$$

Ширина области аномальной дисперсии порядка γ . Графически ход дисперсии показан на рисунке 22.

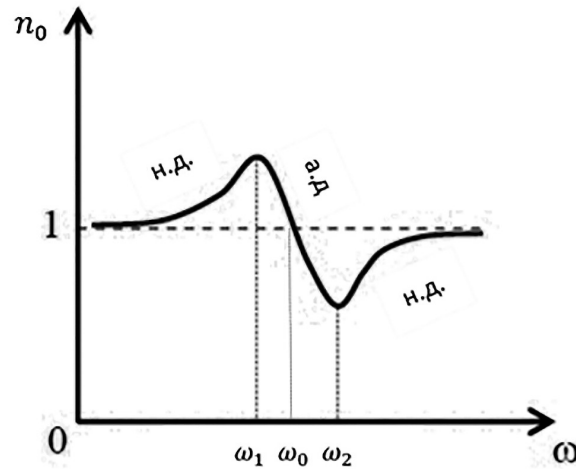


Рис. 22. Дисперсионная кривая (н.д. – нормальная дисперсия, а.д. – аномальная дисперсия)

Формулу (6.90) можно обобщить на случай нескольких «сортов» упруго-связанных электронов. Эти электроны имеют разные собственные частоты: $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0k}$. С учетом ω_p^2 перепишем n_o так:

$$n_o = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_k \frac{N_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) + \omega^2 \gamma^2}.$$

Введем так называемую «силу» осциллятора f_k , то есть долю данного сорта электронов N_k от общего числа электронов N :

$$f_k = \frac{N_k}{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} n_o &= 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_k \frac{\frac{N_k}{N} (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) + \omega^2 \gamma^2} = \\ &= 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_k \frac{f_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) + \omega^2 \gamma^2}. \end{aligned}$$

Итак, в общем случае:

$$n_o = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_k \frac{f_k (\omega_{0k}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) + \omega^2 \gamma^2}. \quad (6.92)$$

На рисунке 23 представлен график зависимости $n_o(\omega)$ для двух «сортов» электронов с частотами ω_{01} и ω_{02}

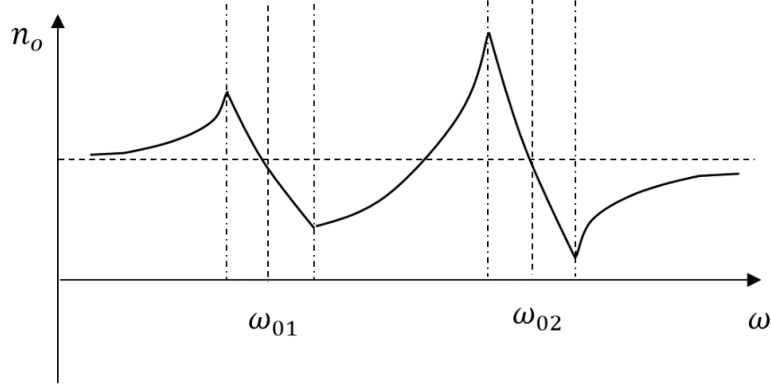


Рис. 23. Нормальная и аномальная дисперсия для электронов двух «сортов»

В области аномальной дисперсии имеет место очень сильное поглощение. Учтём, что $n = n_o - ik_o$, где k_o – коэффициент поглощения, соответствующий мнимой части ϵ и n . Тогда волновое число

$$k = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{\omega}{c} \cdot n = \frac{\omega}{c} (n_o - ik_o).$$

Подставим это выражение в формулу для напряжённости электрического поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \vec{E}_0 e^{-k_o x} e^{i(\omega t - n_o x)}. \quad (6.93)$$

Амплитуда волн согласно (6.93) убывает с ростом x . Это означает, что волна затухает, диэлектрик поглощает энергию волны.

Находим k_o из общей формулы для ϵ (6.83), извлекая приближенно корень:

$$k_o = \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]}. \quad (6.94)$$

Вблизи собственной частоты при $\omega \simeq \omega_0$ получим

$$k_0 = \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{2\omega^2 \gamma^2} = \frac{\omega_p^2}{2\omega \gamma} = k_{0,max}.$$

Это означает, что в области аномальной дисперсии поглощение максимально и затрудняет исследование аномальной дисперсии.

Академик Д.С. Рождественский разработал очень чувствительный метод исследования аномальной дисперсии (метод крюков), сконструировав специальный интерферометр. За деталями этого исследования отсылаем читателя к курсу «Оптика» Г.С. Ландсберга.

5. Для волнового пакета групповая скорость волн

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)},$$

но так как $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \cdot n$, то

$$v_{гр} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\omega n)}.$$

Рассмотрим групповую скорость в области $n > 1$ (до области аномальной дисперсии) и при $n < 1$ (за областью аномальной дисперсии):

1) Случай 1.

Имеем

$$\frac{d}{d\omega}(\omega n) = n + \omega \frac{dn}{d\omega}.$$

Далее учтем, что $\varepsilon = n^2$, тогда

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{dn^2}{d\omega} = 2n \frac{dn}{d\omega} > 0,$$

так как $n > 0$, $\frac{dn}{d\omega} > 0$, что соответствует нормальной дисперсии. Тогда

$$\frac{d}{d\omega}(\omega n) = n + \omega \frac{dn}{d\omega} > n.$$

Следовательно, $v_{гр} < \frac{c}{n}$ и $v_{гр} < c$ при $n > 1$.

2) Случай $n < 1$.

Наложим более жесткое требование (см. [8], § 64 Прозрачные среды, с. 338):

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^2(\varepsilon - 1)) > 0, \text{ т.е. } \varepsilon > 1.$$

Находим

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^2(\varepsilon - 1)) = 2\omega(\varepsilon - 1) + \omega^2 \frac{d\varepsilon}{d\omega} > 0,$$

или

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{d\varepsilon}{d\omega} &> 2\omega(1 - \varepsilon), \\ \frac{d\varepsilon}{d\omega} &> \frac{2\omega(1 - \varepsilon)}{\omega^2} = \frac{2(1 - \varepsilon)}{\omega} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\omega} > \frac{2(1 - \varepsilon)}{\omega}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\varepsilon = n^2, \quad \frac{dn^2}{d\omega} = 2n \frac{dn}{d\omega},$$

тогда

$$\begin{aligned} 2n \frac{dn}{d\omega} &> \frac{2(1 - \varepsilon)}{\omega}, \\ n \frac{dn}{d\omega} &> \frac{1 - n^2}{\omega}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\omega \frac{dn}{d\omega} > \frac{1 - n^2}{n}, \quad \omega \frac{dn}{d\omega} > \frac{1}{n} - n.$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\omega \frac{dn}{d\omega} + n > \frac{1}{n}.$$

Но это есть ничто иное как

$$\frac{d}{d\omega}(\omega n) > \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\omega n)} < \frac{c}{n},$$

то есть

$$v_{\text{гр}} < cn.$$

Тогда при $n < 1$ следует, что $v_{\text{гр}} < c$.

Поэтому в этих двух случаях групповая скорость всегда меньше c .

3. Подведем итог. Даже в рамках классической микроскопической электродинамики, применяя модель упруго-связанного электрона, удается объяснить такие явления, как дисперсия, избирательность диэлектриков по отношению к разным частотам падающего излучения. Таким образом, на уровне классической (не квантовой, заметьте!) физики преодолеваются трудности макроскопической электродинамики. И при этом используется «архаичная» модель атома – модель Томсона. Как известно, эта модель оказалась неверной и приводила, в свою очередь, ко множеству трудностей. Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц убедительно доказали, что положительный заряд атома сконцентрирован в очень малой области атома. Резерфорд назвал эту область ядром атома. Далее последовала невозможность объяснения линейчатых спектров атомов на основе классических представлений. И тем не менее, до сих пор примитивное рассмотрение на основе модели упруго-связанного электрона в атоме позволяет достаточно просто объяснить сложные физические явления.

§ 49. Эффект Вавилова–Черенкова

План:

1. Историческая справка.
2. Качественная картина излучения. Аналоги эффекта Черенкова.
3. Спектральное разложение поля.
4. Поле излучения. Условие излучения.
5. Мощность излучения. Формула Тамма–Франка.

1. В 1934 г. П.А. Черенков, аспирант С.И. Вавилова, изучая люминесценцию урановых солей под действием гамма-излучения радия, обнаружил слабое голубое свечение. На особый характер этого излучения, отличный от люминесценции, впервые обратил внимание С.И. Вавилов. Это излучение не зависит от температуры,

не тушится добавлением веществ, видно под определенными углами, но главное – оно возбуждается быстро движущимися заряженными частицами, например, электронами. Причем движение происходит равномерно, но со скоростью u , превышающей фазовую скорость света в среде, то есть $u > \frac{c}{n}$. Излучает, конечно, не сам заряд, а возбужденная, поляризованная им среда.

В 1937 г. И.Е. Тамм и И.М. Франк дали объяснение этому эффекту сначала на основе классической электродинамики, а затем на основе квантовой механики. В 1958 г. П.А. Черенков, И.Е. Тамм и И.М. Франк получили Нобелевскую премию по физике за открытие и объяснения эффекта Черенкова. Это была первая Нобелевская премия по физике в Советском Союзе.

2. Рассмотрим классическую картину излучения. Сначала отметим принципиально важное обстоятельство. Согласно классической электродинамике (см. § 39) излучать электромагнитные волны может ускоренно движущаяся заряженная частица. Но эффект Черенкова обусловлен равномерным движением заряженной частицы. Нет ли здесь какого-либо противоречия? Оказывается, нет. Объяснение тому простое. Вспомним, что процесс излучения – это отрыв поля от излучателя, отдельное существование поля и излучателя. В случае эффекта Черенкова заряженная частица, возбуждив поле в некоторой точке пространства (в среде, конечно) «убегает» от своего поля! Это возможно как раз при условии $u > \frac{c}{n}$. Отставшие волны затем интерферируют и дают весьма специфическое излучение, направленное вперед по направлению движения частицы, но под углом θ (рис. 24).

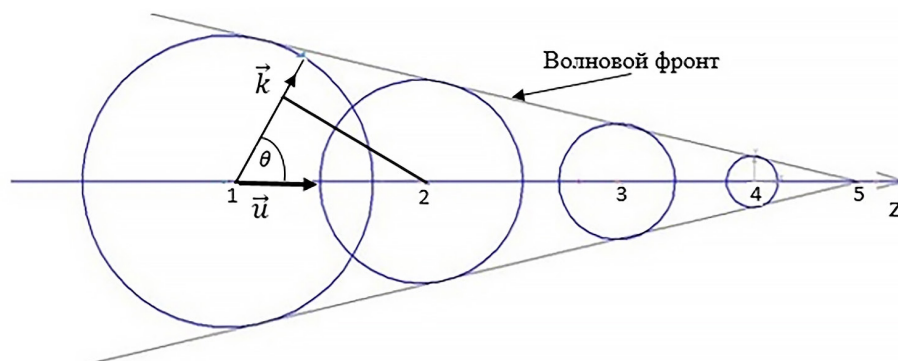


Рис. 24. Конус черенковского излучения

На рисунке показаны расходящиеся волны, излученные электроном сначала в точке 1, затем 2, 3, 4 и т.д. Понятно, что волна, выпущенная из точки 1, разошлась дальше, чем в следующих точках. Прямая линия – огибающая фронта волны, получающейся в результате интерференции волн. Этот фронт с течением времени движется, так что получается излучение под углом θ к направлению движения частицы вдоль оси Z (рис. 25).

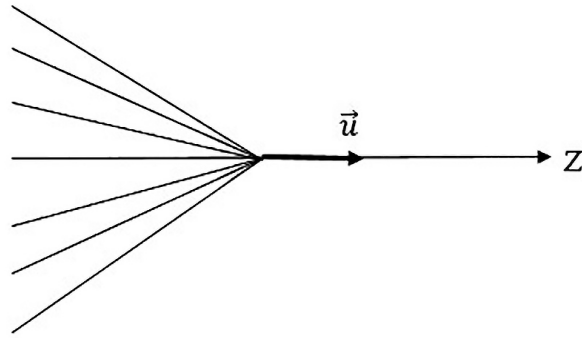


Рис. 25. Движение волнового фронта

Как объяснил И.Е. Тамм в Нобелевской лекции, эффект Черенкова имеет классические аналоги. Это так называемые «усы», образующиеся на воде от быстроходного катера или теплохода, это свист пули, вой падающей бомбы, волны Маха, идущие от носа самолета, летящего со сверхзвуковой скоростью. Поэтому И.Е. Тамм назвал эффект Черенкова эффектом «поющего электрона». Получим элементарным образом условие эффекта Черенкова.

Условие интерференционного максимума, как известно, имеет вид

$$\Delta = m\lambda, \text{ где } m = 1, 2, 3 \dots$$

Но, как следует из рисунка 24,

$$\Delta = z \cos \theta = uT \cos \theta, \text{ где } T - \text{ период волны.}$$

Учитывая, что длина волны

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{c}{n} T,$$

получаем

$$uT \cos \theta = \frac{c}{n} T,$$

то есть

$$\cos \theta = \frac{c}{nu}. \quad (6.95)$$

Поскольку

$$\cos \theta \leq 1, \text{ то } \frac{c}{nu} \leq 1,$$

следовательно,

$$u \geq \frac{c}{n}, \quad (6.96)$$

где $c/n = u_{\text{порог}}$ – пороговая скорость частицы.

Свечение в описанном эффекте является очень слабым. Сам Черенков подолгу адаптировался в тёмной комнате, чтобы увидеть излучение (в отсутствие чувствительных приёмников света инструментом для измерения служил человеческий глаз). Ситуация существенно изменилась в середине прошлого столетия с созданием фотоэлектронных умножителей, способных регистрировать весьма слабые световые потоки вплоть до отдельных фотонов.

Были созданы черенковские счетчики – детекторы релятивистских заряженных частиц, получившие широкое применение в ядерной физике, физике элементарных частиц, астрофизике.

Черенковские счетчики явились основным инструментом на ускорителях при исследованиях антивещества и процессов рождения новых частиц микромира; для регистрации космических лучей. С применением черенковских счетчиков связаны замечательные достижения гамма- и нейтринной астрономии. Излучением Вавилова–Черенкова объясняется свечение ядерных реакторов. Для контроля состояния охлаждающих контуров ядерных реакторов используются детекторы черенковского излучения. Эффектом Вавилова–Черенкова объясняется слабое свечение воды на больших глубинах в морях и океанах. Вследствие распада радиоактивных изотопов, растворенных в морской воде, возникают быстрые электроны, вызывающие черенковское свечение. В результате вместо темноты на больших глубинах царят «сумерки Вавилова-Черенкова».

В следующих пунктах будет дана классическая теория излучения.

3. Поле, возбуждаемое произвольно движущимся зарядом, можно разложить на плоские монохроматические волны с непрерывным набором частот. Эта процедура называется спектральным разложением поля.

В случае непрерывного набора частот напряженность $\vec{H}(t)$ разлагается в интеграл Фурье

$$\vec{H}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega,$$

где \vec{H}_{ω} – фурье-образ $\vec{H}(t)$, равный

$$\vec{H}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{i\omega t} dt.$$

Из (6.98) следует с очевидностью, что

$$\vec{H}_\omega^* = \vec{H}_{-\omega}, \quad (6.99)$$

поскольку $\vec{H}(t)$ – вещественна.

Аналогично можно разложить в интеграл Фурье плотность тока проводимости

$$\vec{j}(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad (6.100)$$

где

$$\vec{j}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (6.101)$$

что мы используем в дальнейшем.

4. Найдем поле излучения. Пусть заряженная частица, например, электрон, движется вдоль оси Z со скоростью \vec{u} . Рассматривая электрон как точечную частицу, можно записать плотность тока:

$$\vec{j}(t) = \rho \vec{u} = e \delta(x) \delta(y) \delta(z - ut) \vec{u}, \quad (6.102)$$

где

$$\delta(z - ut) = \begin{cases} 0, & z \neq ut \\ \infty, & z = ut \end{cases}$$

согласно свойствам дельта-функции.

Подставляя (6.102) в (6.101), получим:

$$\vec{j}_\omega = \frac{e}{2\pi} \delta(x) \delta(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{u} e^{i\omega t} \delta(z - ut) dt.$$

Пусть $\vec{u} dt = \vec{z}^0 dz$, где \vec{z}^0 – единичный вектор вдоль Z .

Вычислим отдельно интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{u} e^{i\omega t} \delta(z - ut) dt = \vec{z}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \delta(z - ut) dz = \vec{z}^0 e^{i\omega \frac{z}{u}}.$$

Тогда

$$\vec{j}(\omega) = \frac{e}{2\pi} \delta(x) \delta(y) \vec{z}^0 e^{i\omega \frac{z}{u}}. \quad (6.103)$$

Теперь вспомним, что в волновой зоне

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{1}{r_{aq}} \text{rot } \vec{j} \left(t - \frac{r}{v} \right) dV. \quad (6.104)$$

Но согласно (6.97) и (6.100) можно записать:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}_\omega e^{-i\omega t} d\omega &= \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}_\omega e^{-i\omega(t-\frac{r}{v})} d\omega dV_q = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \left[\frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}_\omega e^{i\omega \frac{r_{aq}}{v}} dV_q \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{c} \int_{V_q} \frac{1}{r_{aq}} \text{rot}_a \vec{j}_\omega e^{i\omega \frac{r_{aq}}{v}} dV_q. \quad (6.105)$$

Учтем, что $\frac{\omega}{v} = k$, где \vec{k} – волновой вектор. Поэтому

$$e^{i\omega \frac{r_{aq}}{v}} = e^{i\vec{k} \vec{r}_{aq}}.$$

На рис. 26 \vec{r}_q – радиус-вектор, характеризующий положение электрона в данный момент времени, \vec{R} – радиус-вектор точки наблюдения, в которой определяется поле, \vec{k} – волновой вектор.

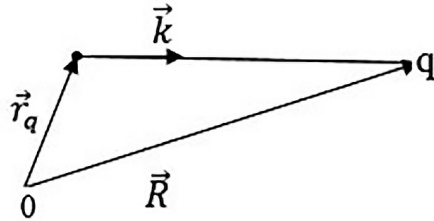


Рис. 26

Тогда $\vec{k} \vec{r}_{aq} = \vec{k} \vec{R} - \vec{k} \vec{r}_q$.

Рассмотрим теперь

$$\text{rot}_a \vec{j}_\omega e^{i\vec{k} \vec{r}_{aq}} = \text{rot}_a \vec{j}_\omega e^{i(\vec{k} \vec{R} - \vec{k} \vec{r}_q)} = e^{-i\vec{k} \vec{r}_q} \cdot \text{rot}_a \left(\vec{j}_\omega e^{i\vec{k} \vec{R}} \right).$$

Найдем $rot_a (\vec{j}_\omega e^{i\vec{k}\vec{R}})$, используя тождество

$$rot (\varphi \vec{a}) = \varphi \cdot rot \vec{a} + [grad \varphi \cdot \vec{a}].$$

Тогда

$$rot_a \vec{j}_\omega e^{i\vec{k}\vec{R}} = e^{i\vec{k}\vec{R}} rot_a \vec{j}_\omega + [grad_a e^{i\vec{k}\vec{R}} \vec{j}_\omega].$$

Учтём, что $rot_a \vec{j}_\omega = 0$, и $grad_a e^{i\vec{k}\vec{R}} = \nabla e^{i\vec{k}\vec{R}} = i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}}$,
поэтому

$$rot_a \vec{j}_\omega e^{i\vec{k}\vec{R}} = [i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}} \vec{j}_\omega] = i [\vec{k} \cdot \vec{j}_\omega] e^{i\vec{k}\vec{R}}. \quad (6.106)$$

Далее, в дальней зоне можно в формуле (6.95) принять, что $r_{aa} \approx R$. Тогда получаем с учетом (6.106):

$$\vec{H}_\omega = \frac{i}{cR} e^{i\vec{k}\vec{R}} \int_V [\vec{k} \cdot \vec{j}_\omega] e^{-i\vec{k}\vec{r}} dV. \quad (6.107)$$

Подставим в (6.107) найденное выражение для \vec{j}_ω (6.103):

$$\vec{H}_\omega = \frac{ie}{2\pi cR} e^{i\vec{k}\vec{R}} \int_V \delta(x)\delta(y) e^{i\omega \frac{z}{u}} [\vec{k} \cdot \vec{z}^0] e^{-i\vec{k}\vec{r}} dV.$$

Вспомним, что модуль векторного произведения $[[\vec{k} \cdot \vec{z}^0]] = k \sin \theta$, где θ – угол между векторами \vec{k} и \vec{z}^0 . Тогда

$$\vec{H}_\omega = \frac{iek}{2\pi cR} e^{i\vec{k}\vec{R}} \int_V \delta(x)\delta(y) \sin \theta e^{i(\omega \frac{z}{u} - \vec{k}\vec{r})} dV. \quad (6.108)$$

Интегрируем по всему пространству:

$$\mathcal{J}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ik_x x} dx = e^{-ik_x x} \Big|_{x=0} = 1,$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) e^{-ik_y y} dy = e^{-ik_y y} \Big|_{y=0} = 1.$$

В формуле (6.108) вынесем $\sin \theta$ из-под знака интеграла. Рассмотрим интеграл по z :

$$\mathcal{J}_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega \frac{z}{u} - k \cdot z \cos \theta)} dz.$$

Для среды с показателем преломления n волновое число $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n$, тогда

$$e^{i(\omega \frac{z}{u} - k \cdot z \cos \theta)} = e^{i\omega \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta \right) z}.$$

Далее удобно сделать замену

$$a = \frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta \right) z} dz = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{i\omega \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta \right) z} dz = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{iaz} dz = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2 \sin aL}{a} = 2\pi \delta(a). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\frac{\sin aL}{a}$ ведет себя как дельта-функция $\delta(a)$, имея острый максимум при $a = 0$. Это означает, что $\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta = 0$, что соответствует

$$\cos \theta_0 = \frac{c}{nu}. \quad (6.109)$$

Мы получили условие (6.95).

Тогда

$$H_\omega = \frac{i\omega n}{2\pi c^2 R} \sin \theta e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{2 \sin aL}{a}. \quad (6.110)$$

5. Найдем интенсивность излучения. Запишем выражение для мощности излучения, соответствующей площадке dS :

$$dW = \frac{c}{n} Y dS = \frac{c}{4\pi} E H dS.$$

Для волн в среде $E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot H$, но $\mu \approx 1$, $\sqrt{\varepsilon} = n$, тогда $E = \frac{1}{n}H$. Отсюда

$$dW = \frac{c}{4\pi n} H^2 dS = \frac{c}{4\pi n} H^2(t) R^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

Запишем формулу для интенсивности излучения

$$J = \int dW dt = \frac{c}{4\pi n} \int H^2(t) dt R^2 d\Omega.$$

Далее учтем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t) dt = 4\pi \int_0^{\infty} |\vec{H}_\omega|^2 d\omega \quad (6.111)$$

(см. Приложение 4). Поэтому

$$J = \frac{c}{4\pi n} 4\pi \int_0^{\infty} |\vec{H}_\omega|^2 d\omega R^2 d\Omega = \frac{c}{n} \int_0^{\infty} |\vec{H}_\omega|^2 d\omega R^2 d\Omega,$$

где интенсивность на интервал частот $d\omega$ определяется выражением

$$dJ(\omega) = \frac{c}{n} |H_\omega|^2 R^2 d\Omega d\omega = \frac{c}{n} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin\theta d\theta |\vec{H}_\omega|^2 R^2 d\omega.$$

Подставив H_ω из (6.110), получаем с учетом $\sin\theta d\theta = d(-\cos\theta)$

$$dJ(\omega) = \frac{ce^2 \omega^2 n^2}{n4\pi^2 c^4 R^2} 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin^2\theta d(-\cos\theta) \frac{4 \sin^2(aL)}{a^2} d\omega.$$

Функция $\frac{\sin^2(aL)}{a^2}$ имеет острый максимум при $a = 0$, тогда можно сделать замену $\sin^2\theta \rightarrow \sin^2\theta_0 = 1 - \cos^2\theta_0 = 1 - \frac{c^2}{n^2 u^2}$, а затем вынести это выражение из-под знака интеграла. Остается интеграл

$$\int_0^\pi d(-\cos\theta) \frac{\sin^2 L\omega \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos\theta\right)}{\omega^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos\theta\right)^2},$$

который вычислим, введя замену переменной:

$$\begin{aligned}
x &= L\omega \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta \right), \\
dx &= L\omega \frac{n}{c} d(-\cos \theta), \\
d(-\cos \theta) &= dx \frac{c}{L\omega n}, \\
\omega^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{n}{c} \cos \theta \right)^2 &= \frac{x^2}{L^2}.
\end{aligned}$$

Получаем

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x^2} L^2 \frac{c}{Ln\omega} dx = \frac{\pi cL}{2 n\omega}.$$

Тогда интенсивность излучения, соответствующая интервалу частот $d\omega$,

$$dJ = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2} \right) L\omega d\omega. \quad (6.112)$$

Это формула Тамма–Франка. Она означает, что интенсивность:

- 1) непрерывно зависит от частоты, т.е. спектр излучения сплошной. Чем больше ω , тем больше интенсивность. Это объясняет, почему свечение в основном голубовато-синее;
- 2) не зависит от массы частиц;
- 3) не зависят от знака заряда.

Из (6.112) следует, что $dJ > 0$, если

$$1 - \frac{c^2}{n^2 u^2} > 0.$$

Таким образом, снова получаем условие

$$u > \frac{c}{n}.$$

Заметим, что поскольку путь электрона является конечным, интеграл J_3 вычислялся в пределах от $-L$ до L . В расчете на единицу длины из формулы (6.112) следует

$$\frac{dJ}{dL} = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 u^2} \right) \omega d\omega. \quad (6.112.a)$$

**§ 50. Теорема об импульсе поля и вещества.
Закон сохранения импульса поля и вещества.
Давление электромагнитных волн**

План:

1. Сведение объемных сил к поверхностным натяжениям. Тензор натяжений.
2. Теорема об импульсе поля и вещества. Тензор натяжений Максвелла.
3. Закон сохранения импульса поля и вещества. Импульс поля.
4. Давление электромагнитных волн.

1. Пусть по всему объему V , занятому некоторой средой, действуют силы с плотностью \vec{f} . При этом поверхность S , ограничивающая данный объем, оказывается в напряженном или натянутом состоянии (рис. 27). Можно привести простой пример из курса общей физики – поверхностное натяжение жидкости.

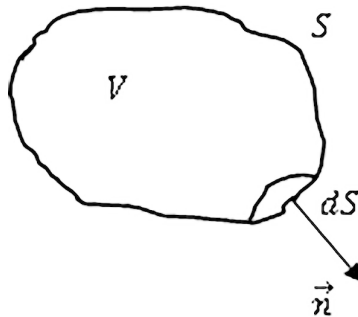


Рис. 27

Этот результат запишем в следующем виде:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \oint_S \vec{T}_n dS, \quad (6.113)$$

где \vec{f} – объемная плотность силы, \vec{T}_n – сила натяжения элемента поверхности с нормалью \vec{n} (рис. 27).

$$\vec{T}_n = (T_{xn}, T_{yn}, T_{zn}). \quad (6.114)$$

Здесь T_{xn}, T_{yn}, T_{zn} – проекции силы натяжения, действующей на элемент поверхности dS , на оси x, y, z соответственно.

Необходимо найти связь между \vec{f} и компонентами \vec{T}_n . Рассмотрим частные случаи. Пусть

$$1) \vec{n} \text{ параллельна оси } x. \text{ Тогда } \vec{T}_x = \vec{i}T_{xx} + \vec{j}T_{yx} + \vec{k}T_{zx}. \quad (6.115)$$

$$2) \vec{n} \text{ параллельна оси } y. \text{ Тогда } \vec{T}_y = \vec{i}T_{xy} + \vec{j}T_{yy} + \vec{k}T_{zy}. \quad (6.116)$$

$$3) \vec{n} \text{ параллельна оси } z. \text{ Тогда } \vec{T}_z = \vec{i}T_{xz} + \vec{j}T_{yz} + \vec{k}T_{zz}. \quad (6.117)$$

В произвольном случае можно записать

$$\vec{T}_n = \vec{T}_x \cos(\vec{n}, x) + \vec{T}_y \cos(\vec{n}, y) + \vec{T}_z \cos(\vec{n}, z). \quad (6.118)$$

Введем направляющие косинусы \vec{n} с осями x, y, z . Если в (6.118) подставить (6.115), (6.116), (6.117), то можно убедиться, что сила натяжения \vec{T}_n определяется девятью компонентами, которые образуют тензор натяжений T_{ik} :

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.119)$$

Необходимо найти связь между плотностью силы \vec{f} и компонентами T_{ik} .

Для простоты рассмотрим все для одной проекции соотношения (6.113), например, на ось x :

$$F_x = \int_V f_x dV = \oint_S T_{xn} dS, \quad (6.120)$$

где

$$T_{xn} = T_{xx} \cos(\vec{n}, x) + T_{xy} \cos(\vec{n}, y) + T_{xz} \cos(\vec{n}, z). \quad (6.121)$$

Обобщим первую теорему Гаусса на случай тензоров. Для вектора \vec{a} теорема Гаусса в компактной форме имеет вид

$$\oint_S a_n dS = \int_V \text{div} \vec{a} dV.$$

Запишем левую и правую часть в развернутой форме:

$$\begin{aligned} & \oint_S [a_x \cos(\vec{n}, x) + a_y \cos(\vec{n}, y) + a_z \cos(\vec{n}, z)] dS \\ &= \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Тогда для компоненты тензора T_{xn} можно записать (с учетом (6.121)):

$$\begin{aligned} \oint_S T_{xn} dS &= \oint_S [T_{xx} \cos(\vec{n}, x) + T_{xy} \cos(\vec{n}, y) + T_{xz} \cos(\vec{n}, z)] dS = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right] dV. \end{aligned} \quad (6.123)$$

Подставляем результат в (6.120) и получаем:

$$F_x = \int_V f_x dV = \int_V \left[\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right] dV. \quad (6.124)$$

Отсюда следует, что

$$f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}. \quad (6.125)$$

Аналогично получаем, что

$$f_y = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \quad (6.126)$$

$$f_z = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}. \quad (6.127)$$

Полученные результаты показывают, что плотность силы \vec{f} выражается через частные производные по координатам x, y, z от компонент тензора натяжения T_{ik} .

2. Теперь перейдем к электродинамике. Пусть в объеме \vec{V} , ограниченном поверхностью S , находятся поле и вещество (рис. 28). Примером такой области является наша лекционная аудитория. На заряженные частицы, из которых состоит вещество, действует поле. Тогда, согласно классической механике, импульс вещества в данном объеме изменяется под действием силы \vec{F} со стороны поля

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (6.128)$$

причем

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}_L dV,$$

где \vec{f}_L – плотность силы Лоренца.



Рис. 28. Объем, заполненный полем и веществом

Запишем выражение для силы Лоренца

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{u}\vec{H}].$$

Для элемента объема dV , имеющего заряд $dq = \rho dV$, имеем

$$d\vec{F} = \rho dV \vec{E} + \frac{\rho dV}{c} [\vec{u}\vec{H}] = \rho \vec{E} dV + \frac{1}{c} [\rho \vec{u}\vec{H}] dV = \rho \vec{E} dV + \frac{1}{c} [\vec{j}\vec{H}] dV. \quad (6.129)$$

Тогда

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \int_V \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j}\vec{H}] \right) dV = \int_V \rho \vec{E} dV + \int_V \frac{1}{c} [\vec{j}\vec{H}] dV. \quad (6.130)$$

Используя уравнения Максвелла–Лоренца, находим ρ и \vec{j} :

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E},$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

После подстановки в (6.130) получаем:

$$\vec{F} = \int_V \frac{1}{4\pi} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} dV + \int_V \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{H} \vec{H}] dV - \int_V \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right] dV. \quad (6.131)$$

Для упрощения дальнейших преобразований запишем (6.128) в проекции на ось x с учетом (6.131):

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x,$$

где

$$F_x = \int_V \frac{1}{4\pi} E_x \operatorname{div} \vec{E} dV + \int_V \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{H} \vec{H}]_x dV - \int_V \frac{1}{4\pi c} \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right]_x dV. \quad (6.132)$$

Для преобразования (6.132) сделаем математическое отступление. В векторном анализе есть тождество (Часть I, Приложение III):

$$(\vec{a} \nabla) \vec{a} = \frac{1}{2} \nabla a^2 + [\operatorname{rot} \vec{a} \vec{a}], \quad (6.133)$$

где

$$(\vec{a} \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.134)$$

Для проекции на ось x тождество имеет вид

$$(\vec{a} \nabla) a_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} a^2 + [\operatorname{rot} \vec{a} \vec{a}]_x. \quad (6.135)$$

С другой стороны, можно записать:

$$(\vec{a} \nabla) a_x = \frac{\partial}{\partial x} (a_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (a_x a_y) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x a_z) - a_x \operatorname{div} \vec{a}. \quad (6.136)$$

В самом деле, с учетом (6.134) левая часть равна

$$(\vec{a} \nabla) a_x = a_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial a_x}{\partial z}.$$

В правой части (6.136) проведем все операции и получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (a_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (a_x a_y) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x a_z) - a_x \operatorname{div} \vec{a} \\ &= 2a_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_x \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial a_x}{\partial z} - a_x \frac{\partial a_x}{\partial x} \\ & - a_x \frac{\partial a_y}{\partial y} - a_x \frac{\partial a_z}{\partial z} = a_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial a_x}{\partial z}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

С учетом (6.136) вместо (6.135) запишем сразу:

$$a_x \operatorname{div} \vec{a} + [\operatorname{rot} \vec{a} \vec{a}]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (a_x a_y) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x a_z). \quad (6.137)$$

Применим (6.137) к подынтегральному выражению в первом интеграле силы F_x (6.132), полагая $\vec{a} \equiv \vec{E}$:

$$E_x \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - [\operatorname{rot} \vec{E} \vec{E}]_x.$$

Заменим $\operatorname{rot} \vec{E}$ по второму уравнению Максвелла-Лоренца и получим

$$E_x \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - \frac{1}{c} \left[\vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right]_x. \quad (6.138)$$

Аналогично во втором интеграле, полагая $\vec{a} \equiv \vec{H}$, получаем:

$$[\operatorname{rot} \vec{H} \vec{H}]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x H_z) - H_x \operatorname{div} \vec{H}.$$

Но $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, поэтому

$$[\operatorname{rot} \vec{H} \vec{H}]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (H_x H_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x H_z). \quad (6.139)$$

Выражения (6.138) и (6.139) подставляем в силу F_x (6.132), сгруппировав подобные члены, и получаем:

$$\begin{aligned} F_x = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4\pi} \left[E_x^2 + H_x^2 - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{4\pi} [E_x E_y + H_x H_y] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi} [E_x E_z + H_x H_z] \right\} dV \\ - \int_V \frac{1}{4\pi c} \left\{ \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right]_x + \left[\vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right]_x \right\} dV. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Сравним подынтегральное выражение в первом интеграле с (6.124). Сравнение показывает, что можно ввести компоненты тензора натяжений T_{xx} , T_{xy} , T_{xz} , которые соответственно равны:

$$\begin{cases} T_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left[E_x^2 + H_x^2 - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \right] \\ T_{xy} = \frac{1}{4\pi} [E_x E_y + H_x H_y] \\ T_{xz} = \frac{1}{4\pi} [E_x E_z + H_x H_z]. \end{cases} \quad (6.141)$$

Во втором интеграле произведем преобразования, считая объем фиксированным:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{4\pi c} \left\{ \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right]_x + \left[\vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right]_x \right\} dV &= \int_V \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E} \vec{H}]_x dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}]_x dV. \end{aligned} \quad (6.142)$$

С учетом (6.141), (6.142) и обобщенной на тензор первой теоремы Остроградского–Гаусса запишем:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_V \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dV - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}]_x dV \\ &= \oint_S T_{xn} dS - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}]_x dV. \end{aligned} \quad (6.143)$$

В отличие от (6.124), для поля объемная плотность силы f_x не сводится только к силе натяжения, но появляется дополнительный интеграл, физический смысл которого нам предстоит выяснить. Но сначала запишем теорему для проекции на ось x и в векторной форме

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= \oint_S T_{xn} dS - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}]_x dV, \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= \oint_S \vec{T}_n dS - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}] dV. \end{aligned} \quad (6.144)$$

При этом сила натяжения выражается через компоненты тензора натяжений Максвелла. Мы нашли в явном виде три компоненты (см. (6.141)), аналогично можем найти еще шесть компонент. В общем виде можно записать:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + H_i H_k - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \delta_{ik} \right], \quad (6.145)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Проверку предоставляем читателю.

3. Рассмотрим изолированную в электромагнитном отношении область, содержащую поле и вещество. Это означает, что на поверхности выполняются условия: $\vec{E} = 0$, $\vec{H} = 0$ и все компоненты тензора натяжений Максвелла $T_{ik} = 0$ согласно (6.145). Тогда вместо (6.144) запишем

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}] dV. \quad (6.146)$$

Слева стоит производная от импульса вещества, в правой части – производная от импульса, характеризующего поле. Введем импульс поля:

$$\vec{G} = \int_V \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}] dV. \quad (6.147)$$

Тогда

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = - \frac{d\vec{G}}{dt}, \text{ или } \frac{d}{dt} (\vec{P} + \vec{G}) = 0,$$

это означает, что

$$\vec{P} + \vec{G} = \text{const}. \quad (6.148)$$

Итак, для области, изолированной в электромагнитном отношении, сохраняется суммарный вектор импульса поля и вещества! По отдельности в результате взаимодействия импульсы поля и вещества меняются, но это изменение должно происходить так, чтобы сумма импульсов не менялась! (В этом отличие от классической механики). Обращаем внимание читателя на нашу аудиторию: является ли она изолированной в

электромагнитном отношении? Конечно нет. Это понятно. Значит, для нашей аудитории закон сохранения импульса поля и вещества не выполняется. Продумайте самостоятельно, что надо сделать с аудиторией, чтобы закон сохранения импульса поля и вещества в ней выполнялся.

Запишем теперь окончательно теорему об импульсе поля и вещества для неизоллированной области, с учетом введенного импульса поля, в виде:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{G}) = \oint_S \vec{T}_n dS. \quad (6.149)$$

Обсудим подробно полученное выражение (6.147) для импульса поля.

Подынтегральное выражение в (6.147) означает, что импульс поля распределен по всему объему V , занятому полем, с плотностью импульса \vec{g} , где \vec{g} определяется согласно (6.147):

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}\vec{H}]. \quad (6.150)$$

Это означает, что $\vec{g} \perp \vec{E}$, $\vec{g} \perp \vec{H}$, и направление вектора \vec{g} совпадает с направлением волнового вектора \vec{k} , что вполне логично (см. рис. 29).

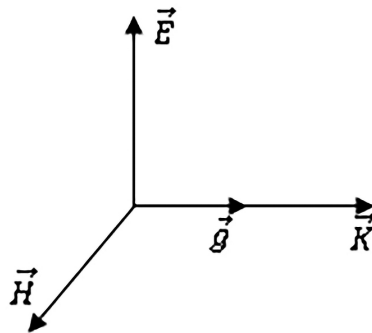


Рис. 29. Взаимная ориентация векторов \vec{E} , \vec{H} , \vec{g} и \vec{k}

Сравним с классической механикой. В классической механике, как известно, вводится понятие импульса, определяемого выражением

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

где m – масса тела, \vec{v} – его скорость. Наличие плотности импульса \vec{g} и импульса \vec{G} у поля означает, что поле, так же как и вещество, имеет инертную массу! Записав $\vec{g} = mc$, найдем плотность массы поля

$$m = \frac{g}{c} = \frac{1}{4\pi c^2} EH \sin(\vec{E}, \vec{H}). \quad (6.151)$$

Непосредственные оценки показывают, что это очень малая величина, но тем не менее, она есть!

Формула (6.150) показывает, что плотность импульса совпадает по направлению с вектором Умова–Пойнтинга \vec{Y} . Это так же вполне логично – импульс направлен в ту же сторону, в которую происходит перенос энергии электромагнитной волной. Получим еще одно соотношение, учитывая, что

$$\vec{Y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}] = c^2 \vec{g}. \quad (6.152)$$

Для волны в вакууме

$$Y = cw_{\text{элм}},$$

где $w_{\text{элм}}$ – плотность электромагнитной энергии. Тогда

$$cw_{\text{элм}} = c^2 g,$$

откуда

$$w_{\text{элм}} = cg. \quad (6.153)$$

Это означает, что плотность энергии и плотность импульса поля связаны линейной связью. Для сравнения, в классической механике для частицы массой m связь квадратичная:

$$\varepsilon_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} \sim p^2.$$

В СТО показывается, что такая же линейная связь между энергией и импульсом существует для фотона – кванта электромагнитного поля.

Учитывая полученные результаты, имеем

$$w_{\text{элм}} = cg = ctc = mc^2.$$

Итак,

$$w_{\text{элм}} = mc^2. \quad (6.154)$$

Формула (6.154) показывает связь плотности энергии поля с плотностью массы. Впервые эта формула появилась в электродинамике. Затем уже в специальной теории

относительности (1905 г.) Эйнштейн показал универсальность этого соотношения для любых материальных объектов.

4. Наличие у электромагнитного поля импульса приводит к замечательному физическому явлению – давлению электромагнитных волн. Покажем на простейшем примере принципиальную возможность существования этого эффекта. Пусть плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность некоторого образца из вещества (рис. 30).

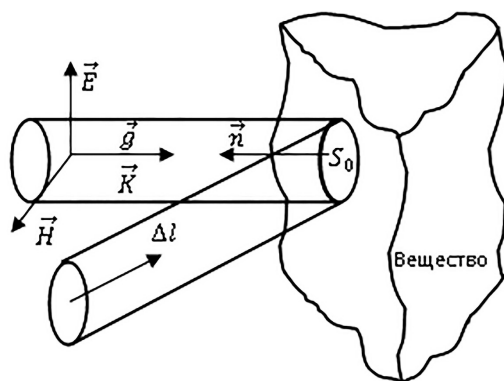


Рис. 30. К объяснению давления электромагнитных волн

Это значит, что волновой вектор \vec{k} направлен перпендикулярно S . По определению, давление

$$P_{\text{дав}} = \frac{F_n}{S_0}.$$

Согласно классической механике

$$F_n = \frac{\Delta P_n}{\Delta t},$$

где ΔP – изменение импульса в объеме ΔV . В данном случае $\Delta P_n \equiv \Delta g_n \Delta V = (g - g_0)_n \Delta V$. Пусть волна поглощается, тогда $g = 0$ и $\Delta P_n = -(g_0)_n \Delta V = g_0 \Delta V$, т.к. вектор плотности импульса \vec{g} противоположен \vec{n} .

Учтем, что $\Delta V = \Delta l \cdot S_0$ и тогда

$$F_n = \frac{\Delta P_n}{\Delta t} = \frac{g_0 \cdot \Delta l \cdot S_0}{\Delta t} = g_0 c S_0.$$

Отсюда давление

$$P_{\text{дав}} = \frac{g_0 c S_0}{S_0} = g_0 c.$$

Поскольку $w_{\text{элм}} = g_0 c$, получаем

$$P_{\text{дав}} = w_{\text{элм}} = \frac{U}{c}. \quad (6.165)$$

Итак, согласно (6.165) давление электромагнитных волн (при нормальном падении и полном поглощении, т.е. отражения нет) равно объемной плотности электромагнитной энергии или значению вектора Умова–Пойнтинга, деленному на скорость света c .

Для солнечного света в яркий полдень на поверхности Земли величина U есть солнечная постоянная, равная $1,4 * 10^3 \text{ Дж/м}^2 \cdot \text{с}^2$. Тогда давление равно

$$P = \frac{1,4 * 10^3}{3 * 10^8} = 4,7 * 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Вспомним, что нормальное атмосферное давление $1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Оценка давления света показывает, что оно очень мало. Однако, как известно из курса общей физики, в начале XX века замечательный физик П.Н. Лебедев, сконструировав поистине ювелирную установку, экспериментально доказал существование давления света. Серия экспериментов П.Н. Лебедева произвела в свое время огромное впечатление на физиков. Так, например, патриарх физики Кельвин сказал Столетову: «Я всю жизнь воевал с Максвеллом, и только ваш Лебедев заставил меня сдать».

Уже в 1906 г. русский астроном, академик Бредихин объяснил давлением солнечного света отклонение хвостов комет от Солнца. Таким образом, существование давления электромагнитных волн, предсказанное теорией Максвелла, и его экспериментальное определение явились убедительным доказательством материальности электромагнитного поля.

В земных условиях мощное световое давление создаётся с помощью лазеров. Мощность современных лазеров достигает 10^{15} Ватт (петаватт)! С помощью лазеров удается отклонять нейтральные атомные пучки и останавливать их. На этом основан один из способов получения сверхнизких температур – лазерное охлаждение. Получение неподвижных атомов может иметь значение и для изучения их энергетического спектра. Если атом движется, то происходит сдвиг частоты излучаемого кванта вследствие эффекта Доплера (глава VIII, § 58). А если удастся остановить атом, то можно обнаружить истинную боровскую частоту при квантовых переходах.

ГЛАВА VII. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 51. Четырёхмерный мир Минковского. Координаты Минковского, законы их преобразований

Эта глава является вспомогательной для заключительной главы VIII «Релятивистская формулировка электродинамики». Более детально вопросы главы VII рассматриваются в курсе «Основы специальной теории относительности (СТО)». Здесь же даются только сведения, которые необходимы для получения результатов в главе VIII.

Запишем преобразования Лоренца, известные в СТО

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Минковский, анализируя преобразования Лоренца (7.1), выдвинул представление о том, что для описания физических явлений в СТО необходимо ввести новое понятие – четырёхмерное многообразие или континуум, который он назвал пространство–время. Иначе пространство–время Минковского называют мир Минковского. Точка, изображающая событие в мире Минковского, называется мировой точкой.

В самом деле, всегда все события происходят в трехмерном пространстве, которое можно охарактеризовать тремя пространственными координатами (x, y, z) и во времени t . Из сравнения первой и четвертой формулы в (7.1) видно, что координата x пространства и время t преобразуются одинаково и связаны между собой.

Обобщённо вводятся четыре координаты Минковского. Первоначально использовались координаты первого типа. Это

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict.$$

Первые три координаты (x_1, x_2, x_3) характеризуют трехмерное пространство, а x_4 – временная координата. Введение x_4 как мнимой координаты упрощает многие

математические преобразования, и в главе 8 мы будем пользоваться этими, несколько архаичными, координатами.

Другой способ описания используется в современной теоретической физике:

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^0 = ct.$$

В этом способе временная координата вещественная, а пространственные координаты – те же самые. Преимущества и недостатки того и другого способа выясняются в курсе «Основы СТО».

Преобразования Лоренца (7.1) линейные. Найдем матрицу преобразований Лоренца. Для этого сначала запишем в общем виде линейные преобразования для координат первого типа:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Коэффициенты при координатах (x_1, x_2, x_3, x_4) согласно (7.2) образуют матрицу преобразований

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Найдем теперь все 16 элементов матрицы для преобразований Лоренца (7.1). Для этого сначала «переведем» их на язык Минковского и получим:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (7.5)$$

Сравниваем конкретные выражения (7.4) с (7.2). Например, запишем в духе (7.2) первые преобразования Лоренца (7.4):

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x_1 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x_4.$$

Сравниваем с первым преобразованием (7.2) и находим, что

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{14} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Аналогичные сравнения дают все остальные элементы матрицы:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Эту матрицу называют матрицей преобразований Лоренца.

Запишем преобразования (7.2) в более компактной форме. Сначала запишем:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \\ x'_2 &= \sum_{k=1}^n a_{2k} x_k \\ x'_3 &= \sum_{k=1}^n a_{3k} x_k \\ x'_4 &= \sum_{k=1}^n a_{4k} x_k. \end{aligned} \quad (7.7)$$

А теперь в общем виде, для любой координаты из (7.7) будем иметь:

$$x'_i = \sum_{k=1}^4 a_{ik} x_k,$$

где a_{ik} — матрица (7.6).

По предложению Эйнштейна в формулах теории относительности знаки сумм (Σ) опускаются, т.е.

$$x'_i = \sum_{k=1}^4 a_{ik} x_k \equiv a_{ik} x_k . \quad (7.8)$$

Итак,

$$x'_i = a_{ik} x_k .$$

Сформулируем правила Эйнштейна:

1. В формулах преобразований в правой части должны быть дважды повторяющиеся индексы. Эти индексы можно обозначать произвольной буквой (в данном случае это k , а можно l или m , но не i !). Они называются немymi. По немым индексам производится суммирование, хотя знак сумм опущен.

2. В формулах преобразований в левой и правой части должны быть одинаковые индексы. Эти индексы обозначаются строго определённой буквой или цифрой. Они называются «зажатыми» или фиксированными. По фиксированным индексам суммирование не производится. В наших примерах это либо 1, либо 2, либо 3, либо 4 согласно (7.7), либо i согласно (7.8).

Эти же правила в дальнейшем стали использоваться в ОТО – общей теории относительности.

§ 52. 4-векторы и 4-тензоры в СТО, законы их преобразования

Введём понятие 4-вектора.

Совокупность четырех компонент (A_1, A_2, A_3, A_4) образуют 4-вектор A_n , если его компоненты преобразуются линейно с помощью матрицы преобразований Лоренца. Согласно этому определению

$$A'_p = a_{pn} A_n, \quad (7.9)$$

где a_{pn} – матрица преобразований Лоренца (7.6).

Найдем в явном виде преобразования всех четырёх компонент 4-вектора. Используем определения (7.9) элементов матрицы (7.6) и получаем:

$$A'_1 = a_{1n} A_n = a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{14} A_4 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} A_1 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} A_4 = \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
A'_2 &= a_{2n} A_n = a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3 + a_{24} A_4 = A_2 \\
A'_3 &= a_{3n} A_n = a_{31} A_1 + a_{32} A_2 + a_{33} A_3 + a_{34} A_4 = A_3 \\
A'_4 &= a_{4n} A_n = a_{41} A_1 + a_{42} A_2 + a_{43} A_3 + a_{44} A_4 = \\
&= -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} A_1 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} A_4 = \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
A'_1 &= \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
A'_2 &= A_2 \\
A'_3 &= A_3 \\
A'_4 &= \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Полученные результаты (7.10) показывают, что компоненты 4-вектора преобразуются как соответствующие координаты Минковского (сравните формулы (7.10) и (7.4)).

Покажем, что скалярное произведение двух любых 4-векторов является инвариантом, т.е. имеет абсолютное, одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчета (ИСО).

Составим произведение

$$A'_k B'_k = A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 + A'_3 B'_3 + A'_4 B'_4. \tag{7.11}$$

Требуется доказать, что такие же 4 члена получатся и в «нештрихованной» ИСО. Для доказательства воспользуемся формулами (7.10). Получим:

$$\begin{aligned}
A'_k B'_k &= A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 + A'_3 B'_3 + A'_4 B'_4 = \\
&= \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{B_1 + i\beta B_4}{\sqrt{1-\beta^2}} + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{B_4 - i\beta B_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\
&= \frac{A_1 B_1 + i\beta A_4 B_1 + i\beta A_1 B_4 - \beta^2 A_4 B_4 + A_4 B_4 - i\beta A_1 B_4 - i\beta A_4 B_1 - \beta^2 A_1 B_1}{1-\beta^2} \\
&+ A_2 B_2 + A_3 B_3 = \\
&= \frac{(1-\beta^2)A_1 B_1}{1-\beta^2} + \frac{(1-\beta^2)A_4 B_4}{1-\beta^2} + A_2 B_2 + A_3 B_3 \\
&= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4.
\end{aligned}$$

Итак,

$$A_i B_i = \text{invar.} \quad (7.12)$$

Подставив вместо $B_i \equiv A_i$, нетрудно убедиться, что квадрат любого 4-вектора также является инвариантом.

Введём понятие 4-тензора. Четырёхмерный тензор 2-го ранга T_{pl} может быть записан в виде матрицы из 16-и элементов

$$T_{pl} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

При этом все компоненты T_{pl} преобразуются линейно с помощью матрицы (7.6). Найдем закон преобразований компонент тензора T_{pl} . Для этого воспользуемся формальным правилом: компоненту тензора T_{pl} можно представить как произведение 4-векторов $A, B, C \dots$. При этом первому сомножителю, т.е. A , приписывается первый индекс тензора, т.е. индекс p , второму (B) – второй индекс (l) и т.д. Например,

$$T_{pl} = A_p B_l C_k, \quad \text{или } T_{12} = A_1 B_2.$$

Воспользуемся этим правилом для нахождения закона преобразования компонент тензора T_{pl} . Записываем:

$$T'_{pl} = A'_p B'_l = a_{pn} A_n \cdot a_{lk} B_k = a_{pn} a_{lk} A_n B_k = a_{pn} a_{lk} T_{nk}.$$

Итак,

$$T'_{pl} = a_{pn} a_{lk} T_{nk}. \quad (7.14)$$

Полученный результат означает, что компоненты тензора преобразуются линейно, но в отличие от (7.9), в преобразования (7.14) входят уже два сомножителя – элементы матрицы (7.6). Это и означает, что ранг тензора равен двум.

Вводя понятие тензора как обобщающее, приходим к заключению, что 4-вектор есть тензор 1-го ранга, а скаляр (инвариант) – тензор нулевого ранга.

Напомним, что согласно правилам Эйнштейна, в формуле (7.14) индексы p, l – фиксированные, а n и k – немые, по которым проводится суммирование. Причем вместо n и k можно брать любые индексы (кроме p, l), но при этом разные, например, i и m .

Обобщая формулу (7.14), получим закон преобразования для тензора 4-го ранга:

$$T'_{iklm} = a_{in} a_{kp} a_{lk} a_{mt} T_{npkt}.$$

Найдем, например, в явном виде закон преобразования для некоторой компоненты тензора 2-го ранга, например T_{12} . Для этого проще воспользоваться не (7.14), а формальным правилом для компонент тензора и формулой для преобразования 4-вектора (7.10). Записываем:

$$T'_{12} = A'_1 B'_2 = \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot B_2 = \frac{A_1 B_2 + i\beta A_4 B_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_{12} + i\beta T_{42}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Итак,

$$T'_{12} = \frac{T_{12} + i\beta T_{42}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.15)$$

Этот простой прием в дальнейшем (см. гл. VIII) будет использоваться для получения формул Эйнштейна.

§ 53. Принцип Лоренц-ковариантности и его выполнение при записи законов в четырехмерной форме

В СТО сформулирован принцип Лоренц-ковариантности физических законов, который является математическим воплощением первого постулата СТО. Он гласит:

При переходе из одной ИСО в другую физические величины, входящие в левую и правую части равенства, выражающего физический закон, по отдельности могут меняться, но это изменение должно быть согласованным (ковариантным), таким, чтобы равенство левой и правой части не нарушалось ни в одной ИСО. Для этого на физические величины соответствующего ранга необходимо налагать законы линейного преобразования с помощью матрицы (7.6).

Докажем это для простого случая. Пусть в системе К физический закон записан в виде $\alpha A_n = B_n$, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha A_1 &= B_1 \\ \alpha A_2 &= B_2 \\ \alpha A_3 &= B_3 \\ \alpha A_4 &= B_4, \text{ где } \alpha = \textit{invar}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Требуется доказать, что в системе К' этот же закон имеет вид $\alpha A'_p = B'_p$, т.е.

$$\begin{aligned}
\alpha A'_1 &= B'_1 \\
\alpha A'_2 &= B'_2 \\
\alpha A'_3 &= B'_3 \\
\alpha A'_4 &= B'_4
\end{aligned}
\tag{7.17}$$

Докажем это, используя формулы (7.10):

$$\alpha A'_1 - B'_1 = \alpha \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{B_1 + i\beta B_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(\alpha A_1 - B_1) + i\beta(\alpha A_4 - B_4)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0.$$

То есть $\alpha A'_1 = B'_1$,

$$\alpha A'_2 - B'_2 = \alpha A_2 - B_2 = 0, \text{ т.е. } \alpha A'_2 = B'_2,$$

$$\alpha A'_3 - B'_3 = \alpha A_3 - B_3 = 0, \text{ т.е. } \alpha A'_3 = B'_3,$$

$$\alpha A'_4 - B'_4 = \alpha \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{B_4 - i\beta B_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(\alpha A_4 - B_4) - i\beta(\alpha A_1 - B_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0,$$

т.е. $\alpha A'_4 = B'_4$

Итак, доказано, что и в системе K'

$$\alpha A'_n = B'_n.$$

Подведем итог. Чтобы выполнялся «автоматически» принцип Лоренц-ковариантности, физический закон должен иметь четырехмерную формулировку, т.е. записан в виде равенств 4-тензоров соответствующего ранга, в виде математических операций над 4-тензором в 4-мерном пространстве–времени. Если закон записан в 4-форме, то дополнительной проверки (как мы только что проделали) уже не нужно.

В общей теории относительности (ОТО) этот принцип обобщается в виде принципа общей ковариантности физических законов. При этом физический закон должен иметь также 4-мерную (тензорную) форму.

ГЛАВА VIII. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 54. Уравнение непрерывности в 4-форме. Инвариантность электрического заряда

Вся четырехмерная, т.е. Лоренц-ковариантная формулировка электродинамики, была разработана Минковским и опубликована в работе «Основные уравнения электродинамических явлений в движущихся телах» (1908 г.).

Выдающийся физик-теоретик Макс Борн писал в статье «Воспоминания о Германе Минковском»: «В этой работе был развит весь арсенал релятивистской математики, понятие собственного времени, массы покоя, четыре-вектора и шести-вектора (тензор второго ранга) и т.п., которыми с тех пор повседневно пользуется каждый физик-теоретик». (журнал «Успехи физических наук», 1959, т. 69, вып. 2, С. 300 – 301).

В этой главе будет рассмотрена Лоренц-ковариантная формулировка уравнений электродинамики и, конечно, уравнений Максвелла–Лоренца, введены обобщающие четырехмерные понятия. Кроме того, будут получены простыми преобразованиями 4-векторов и 4-тензоров соотношения электродинамики для движущихся тел, которые до этого получались очень сложно. Как отмечал Зоммерфельд, оценивая метод Эйнштейна (до Минковского), «Путь, которым шел Эйнштейн при открытии специальной теории относительности в 1905 г., был крут и утомителен. Чтобы пройти его, потребовался глубокий анализ понятий пространства и времени и некоторые остроумнейшие мысленные эксперименты». (А. Зоммерфельд, Электродинамика. М. 1958, С. 293).

Сначала рассмотрим уравнения непрерывности, которые являются, как это было показано в главе I, дифференциальной формой фундаментального закона природы – закона сохранения электрического заряда. Запишем его обычную форму (т.е. трехмерную), а затем получим четырехмерную, т.е. Лоренц-ковариантную форму. Итак, имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

или

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Введем координаты Минковского $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ic\rho$.
Получаем:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x_1} + \frac{\partial j_y}{\partial x_2} + \frac{\partial j_z}{\partial x_3} + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial x_4} = 0.$$

Написанное уравнение формально похоже на уравнение для четырехмерной дивергенции некоторого 4-вектора. Введем этот 4-вектор, при этом

$$j_x = j_1, j_y = j_2, j_z = j_3, ic\rho = j_4.$$

Назовем этот четырехмерный вектор так: 4-вектор плотности тока проводимости. В СТО есть традиция давать название, образно говоря, «имя новорожденному» 4-вектору по названию трехмерного вектора.

Итак, мы ввели 4-вектор плотности тока проводимости:

$$j_k = (j_1, j_2, j_3, j_4) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) = (\vec{j}, ic\rho). \quad (8.1)$$

Как показывает (8.1), пространственную часть 4-вектора j_k составляют компоненты трехмерного вектора \vec{j} , а временную часть – объемная плотность заряда ρ (с множителем ic). Отметим, что мнимая единица i появляется в формулах СТО, если пользоваться временной координатой $x_4 = ict$, но в конечном результате i исчезает, как будет видно из дальнейшего.

С учетом (8.1) уравнение непрерывности принимает вид:

$$\frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} + \frac{\partial j_4}{\partial x_4} \equiv \frac{\partial j_k}{\partial x_k}. \quad (8.2)$$

Это означает, что уравнение непрерывности имеет Лоренц-ковариантную форму.

Найдем теперь закон преобразования объемной плотности заряда, учитывая, что ρ входит в j_4 и закон преобразования для четвертой компоненты 4-вектора в формулах (7.10).

Пусть заряд с плотностью $\rho' \equiv \rho_0$ неподвижен в системе K' , т.е. плотность тока $\vec{j}' = 0$. В системе K он движется вместе с K' со скоростью \vec{v} вдоль оси x , так что $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Объемную плотность заряда в системе K обозначим ρ . Плотность тока в системе K обозначим \vec{j} . Сначала используем закон преобразования для компонент j_x, j_y, j_z , т.е.:

$$j'_x = j_x = 0 = \frac{j_x + i\beta j_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Это дает $j_x = -i\beta j_4$. Но $j_x = j_x, j_4 = ic\rho$. Тогда

$$j_x = -i\beta(ic\rho) = c\rho\frac{v}{c}.$$

Итак, $j_1 = j_x = v \cdot \rho$. При этом, поскольку $j'_2 = j'_y = 0$, то согласно (7.10) и $j'_2 = j_2 = j_y = 0$, аналогично $j_z = 0$.

Теперь запишем закон для четвертой компоненты

$$j'_4 = \frac{j_4 - i\beta j_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

и, учитывая, что $j'_4 = ic\rho' = ic\rho_0$, получаем:

$$ic\rho_0 = \frac{ic\rho - i\beta v\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

что дает

$$\rho_0 = \frac{\rho(1 - \beta^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \rho\sqrt{1 - \beta^2},$$

или

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.3)$$

Формула (8.3) означает, что объемная плотность движущегося заряда больше, чем объемная плотность этого же заряда в покое.

Введем теперь полный заряд $q = \rho V = \rho l_x l_y l_z$ и $q' \equiv q_0 = \rho_0 l_{ox} l_{oy} l_{oz}$. Используем кинематическое следствие из преобразований Лоренца, так называемое Лоренцовское сокращение длины

$$l_x = l_{ox}\sqrt{1 - \beta^2}, \quad l_y = l_{oy}, \quad l_z = l_{oz}.$$

Получим:

$$q = \rho l_x l_y l_z = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} l_{ox}\sqrt{1 - \beta^2} l_{oy} l_{oz} = q_0.$$

Итак,

$$q = q' = q_0 = \text{invar}. \quad (8.4)$$

Таким образом, электрический заряд имеет абсолютное, одинаковое значение во всех ИСО.

§ 55. 4-вектор-потенциал электромагнитного поля. Уравнения Даламбера в четырехмерной форме

Запишем уравнения Даламбера для скалярного потенциала φ и вектор-потенциала \vec{A} сначала в «привычной» трехмерной форме, а затем постепенно перейдем к записи в 4-форме. Итак, уравнения Даламбера для \vec{A} и φ :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho.\end{aligned}\tag{8.5}$$

Расписывая подробно первое уравнение для проекций A_x, A_y, A_z получаем систему четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_x, \\ \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_y, \\ \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_z, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho.\end{aligned}$$

Чтобы в правой части этих уравнений ввести 4-вектор j_k умножим обе части четвертого уравнения на i , а также его правую часть на c/c . Тогда получим:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_1, \\ \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_2, \\ \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_3, \\ \nabla^2 (i\varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (i\varphi)}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_4.\end{aligned}\tag{8.6}$$

Эти уравнения означают, что и в левой части находятся компоненты 4-вектора, который мы назовем 4-вектором-потенциалом электромагнитного поля и введем соответственно обозначения:

$$A_x = A_1, A_y = A_2, A_z = A_3, i\varphi = A_4, \quad (8.7)$$

где

$$A_n = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi) = (\vec{A}, i\varphi). \quad (8.8)$$

Объединение \vec{A} и φ таким образом, вполне логично. Оно означает, что вектор-потенциал \vec{A} и скалярный потенциал взаимно дополняют друг друга до единого 4-вектора-потенциала электромагнитного поля. Тогда уравнение (8.6) записывается подробно:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_1, \\ \nabla^2 A_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_2, \\ \nabla^2 A_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_3, \\ \nabla^2 A_4 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_4}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j_4, \end{aligned}$$

или в общем виде

$$\nabla^2 A_k - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j_k. \quad (8.9)$$

Теперь покажем, что операции ∇^2 и $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ тоже имеют 4-форму:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_k - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} &= \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_k, \\ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \equiv \square. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Итак, оператор Даламбера \square , в самом деле, согласно (8.10) имеет 4-форму. Тогда вместо (8.9) с учетом (8.10) запишем

$$\square A_k = -\frac{4\pi}{c} j_k. \quad (8.11)$$

Это и есть компактная запись уравнений Даламбера для потенциалов. Она означает, что уравнения Даламбера во всех ИСО имеют одинаковую форму.

§ 56. Тензор электромагнитного поля

Отметим, что в этой главе мы везде используем результаты микроскопической электродинамики как более глубокой теории. Поэтому вместо $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ макроскопической теории пишем $\vec{H}_{\text{микро}} = \text{rot} \vec{A}_{\text{микро}}$, но в дальнейшем часть «микро» опускаем. Это означает, что везде $\vec{A} \equiv \vec{A}_{\text{микро}}, \varphi \equiv \varphi_{\text{микро}}, \vec{H} \equiv \vec{H}_{\text{микро}}, \vec{E} \equiv \vec{E}_{\text{микро}}$. Тогда

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (8.12)$$

«Зацепимся» сначала за первую формулу из (8.12) и постепенно перейдем к 4-форме.

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем для примера

$$H_z = \text{rot}_z \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1.$$

Каков закон преобразования этого выражения? Составим это же выражение в системе K' :

$$H'_z = \frac{\partial}{\partial x'_1} A'_2 - \frac{\partial}{\partial x'_2} A'_1$$

и запишем закон преобразования для производных как компонент 4-вектора и для 4-вектора-потенциала. Тогда

$$H'_z = \frac{\partial}{\partial x'_1} A'_2 - \frac{\partial}{\partial x'_2} A'_1 = a_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{2k} A_k - a_{2i} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{1k} A_k.$$

Сделаем во втором члене замену немых индексов $i \rightleftharpoons k$, тогда:

$$\begin{aligned} H'_z &= a_{i1} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{2k} A_k - a_{2k} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{1i} A_i = a_{1i} a_{2k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_k - \frac{\partial}{\partial x_k} A_i \right) \\ &= a_{1i} a_{2k} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение для выражения в скобках:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad (8.13)$$

тогда

$$H'_z = a_{1i} a_{2k} F_{ik}. \quad (8.14)$$

Полученный результат означает, что H'_z преобразуется как тензор второго ранга. И можно записать, что $H'_z = F'_{12}$. Тогда (8.14) запишется так:

$$F'_{12} = H'_z = a_{1i} a_{2k} F_{ik}. \quad (8.15)$$

Аналогично преобразуются H'_x и H'_y . Теперь, «разберемся» с компонентами вектора \vec{E} . Запишем

$$E_x = -grad_x \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

и перейдем к 4-форме, умножив на i :

$$iE_x = -\frac{\partial}{\partial x} (i\varphi) - \frac{i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{i}{i^2 c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (i\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_4} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_4.$$

Покажем, что iE'_x преобразуется так же как компоненты тензора второго ранга F_{ik}

$$iE'_x = F'_{41} = \frac{\partial}{\partial x'_4} A'_1 - \frac{\partial}{\partial x'_1} A'_4 = a_{4i} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{1k} A_k - a_{1i} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{4k} A_k.$$

Снова во втором члене заменим $i \rightleftharpoons k$ и получаем:

$$F'_{41} = iE'_x = a_{4i} a_{1k} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) = a_{4i} a_{1k} F_{ik}. \quad (8.16)$$

Полученный результат означает, что компонента E_x (с точностью до i) преобразуется как тензор второго ранга, и главное – это компонента того же самого тензора второго ранга, что и H'_z , H'_x , H'_y , то есть вектора \vec{H} . Это означает, что проекции векторов \vec{E} и \vec{H} взаимно дополняют друг друга до единого тензора второго ранга F_{ik} , который на-

зывается тензором электромагнитного поля. Из определения для F_{ik} (8.13) видно, что это антисимметричный тензор, то есть $F_{ik} = -F_{ki}$, причем диагональные компоненты его равны нулю. Запишем тензор в явном виде – в виде матрицы:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.17)$$

Мы нашли только компоненты $F_{12} = H_z$, $F_{21} = -H_z$, $F_{41} = iE_x$, $F_{14} = -iE_x$ и диагональные, равные нулю. Аналогичным методом находятся $F_{31} = -F_{13}$, $F_{23} = -F_{32}$, ... $F_{42} = -F_{24}$, $F_{43} = -F_{34}$.

Мы получили теперь важный результат. Согласно СТО электромагнитное поле характеризуется одной величиной – тензором электромагнитного поля F_{ik} . Это означает, что вводимые в курсах физики по отдельности векторы E и H , согласно СТО, взаимно дополняют друг друга до единого тензора F_{ik} . Так что в СТО найдена более общая характеристика поля. Оказалось, что трехмерные векторы \vec{E} и \vec{H} в 4-мерном пространстве–времени Минковского являются компонентами 4-мерного тензора второго ранга. Это означает более глубокое понимание единства электрических и магнитных явлений и приводит к весьма важным результатам электродинамики, которые мы рассмотрим в следующих параграфах.

Итак, согласно СТО электромагнитное поле – единый материальный объект с единой характеристикой – тензором F_{ik} .

§ 57. Формулы Эйнштейна для преобразования полей. Инварианты. Типы полей

Формулы для преобразования векторов \vec{E} и \vec{H} были получены Эйнштейном еще в 1905 году. Однако путь этот, по словам Зоммерфельда, был, как мы уже отмечали выше, крут и утомителен.

Применение методов тензорной алгебры позволяет получать эти результаты более простым способом, к чему мы сейчас и приступим.

Итак, пусть в системе K заданы векторы $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Необходимо найти $E'_x, E'_y, E'_z, H'_x, H'_y, H'_z$.

Сначала найдем $H'_z = F'_{12}$ согласно (8.17). Используя формальное правило, запишем F'_{12} через произведение 4-векторов $F'_{12} = A'_1 B'_2$ с учетом соотношений (7.10) между «штрихованными» и «нештрихованными» компонентами:

$$F'_{12} = A'_1 B'_2 = \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} B_2 = \frac{A_1 B_2 + i\beta A_4 B_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_{12} + i\beta T_{42}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Теперь подставим $T_{12} = H_z$ и $T_{42} = iE_y$ из (8.17):

$$F'_{12} = H'_z = \frac{H_z + i\beta(iE_y)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Итак,

$$H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} H'_y = F'_{31} = A'_3 B'_1 &= A_3 \frac{B_1 + i\beta B_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_{31} + i\beta T_{34}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{H_y + i\beta(-iE_z)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned}$$

то есть

$$H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$H'_x = F'_{23} = A'_2 B'_3 = A_2 B_3 = F_{23} = H_x, H'_x = H_x;$$

$$\begin{aligned} iE'_x = F'_{41} = A'_4 B'_1 &= \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{B_1 + i\beta B_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{A_4 B_1 - i\beta A_1 B_1 + i\beta A_4 B_4 + \beta^2 A_1 B_4}{1 - \beta^2} = \\ &= \frac{T_{41} - i\beta T_{11} + i\beta T_{44} + \beta^2 T_{14}}{1 - \beta^2} = \frac{iE_x + \beta^2(-iE_x)}{1 - \beta^2} = iE_x \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Это дает

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \\ iE'_y = F'_{42} = A'_4 B'_2 &= \frac{A_4 B_2 - i\beta A_1 B_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_{42} - i\beta T_{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{iE'_y - i\beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= i \frac{(E_y - \beta H_z)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned}$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$iE'_z = F'_{43} = \frac{T_{43} - i\beta T_{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{iE_z - i\beta(-H_y)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = i \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

таким образом,

$$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Сведем все формулы в таблицу 3:

Таблица 3

$E'_x = E_x$	$H'_x = H_x$
$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
$E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	$H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$

Это и есть формулы Эйнштейна для преобразования полей. Формулы показывают, что продольные по отношению к движению ИСО (E_x и H_x) компоненты абсолютны, не меняются при переходе из одной ИСО в другую. Поперечные, то есть (y, z) компоненты изменяются. Самое существенное состоит в том, что в электрическую напряженность входят магнитные компоненты, а в магнитную – электрические! Это означает, что векторы \vec{E} и \vec{H} не абсолютны. Однако электромагнитное поле имеет два инварианта:

$$\mathcal{J}_1 = (\vec{H}\vec{E}) \text{ и } \mathcal{J}_2 = H^2 - E^2. \quad (8.19)$$

Докажем это.

Пусть в системе K'

$$\mathcal{J}_1 = (\vec{H}'\vec{E}') = H'_x E'_x + H'_y E'_y + H'_z E'_z.$$

Требуется доказать, что в системе K

$$\mathcal{J}_1 = (\vec{H}\vec{E}) = H_x E_x + H_y E_y + H_z E_z.$$

Доказательство основано на подстановке формул (8.18). В самом деле,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= H'_x E'_x + H'_y E'_y + H'_z E'_z \\
&= H_x E_x + \frac{(H_y + \beta E_z)(E_y - \beta H_z)}{1 - \beta^2} + \frac{(H_z - \beta E_y)(E_z + \beta H_y)}{1 - \beta^2} \\
&= H_x E_x \\
&\quad + \frac{H_y E_y + \beta E_z E_y - \beta H_y H_z - \beta^2 E_z H_z + H_z E_z - \beta E_y E_z + \beta H_z H_y - \beta^2 E_y H_y}{1 - \beta^2} \\
&= H_x E_x + H_y E_y \frac{(1 - \beta^2)}{1 - \beta^2} + H_z E_z \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = H_x E_x + H_y E_y + H_z E_z = \mathcal{J}_1,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается второй инвариант. Это доказательство предлагается проделать читателю самостоятельно. В СТО на основе формул Эйнштейна (8.18) и инвариантов (8.19) проводится классификация возможных типов электромагнитных полей.

Первый тип. Пусть в системе K имеется «чисто» электрическое поле. Это означает, что $\vec{E} \neq 0, \vec{H} = 0$, инварианты $\mathcal{J}_1 = 0, \mathcal{J}_2 = -E^2 < 0$.

Получим, используя формулы (8.18), выражения для \vec{E}' и \vec{H}' в системе K' :

$$\begin{aligned}
E'_x &= E_x \neq 0 & H'_x &= H_x = 0 \\
E'_y &= \frac{E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq 0 & H'_y &= \frac{\beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq 0 \\
E'_z &= \frac{E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq 0 & H'_z &= -\frac{\beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq 0.
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Эти формулы показывают, что в системе K' , кроме электрической \vec{E}' , появляется магнитная \vec{H}' компонента! Поле оказывается электромагнитным. Но инварианты по-прежнему $\mathcal{J}_1 = 0, \mathcal{J}_2 < 0$. Поле такого типа стали называть электроподобным.

Дадим определение. Электроподобным называется такое электромагнитное поле, которое в одной ИСО может быть только электрическим. При этом инварианты этого поля $\mathcal{J}_1 = 0, \mathcal{J}_2 < 0$.

Эту ситуацию можно объяснить качественно, не прибегая к формулам. Вспомним раздел «электростатика». Мы тогда специально отмечали, что электростатическое поле – это электромагнитное поле, связанное с неподвижными зарядами. Но заряды,

неподвижные в данной ИСО, во всех остальных ИСО движутся равномерно и прямолинейно. Это значит, что во всех других ИСО идет ток, обусловленный движением этих зарядов. А, как известно, с током связано магнитное поле, силовые линии которого существуют вокруг линий тока. Таким образом, существует электромагнитное поле, но для данного типа поля можно выбрать такую ИСО, в которой проявляется только его электрическая компонента. Это ИСО, в которой заряды неподвижны. Поэтому в начале раздела «электростатика» подчеркивалось, что все рассмотрения проводятся только для этой одной ИСО.

Еще раз отмечаем: специальным подбором ИСО можно выделить электрическую компоненту поля. При этом магнитная часть поля проявляется в этой ИСО не будет.

Второй тип поля. В системе K поле «чисто» магнитное. Это значит, что $\vec{E} = 0, \vec{H} \neq 0$. Тогда $J_1 = 0, J_2 = H^2 > 0$.

Формулы Эйнштейна для K' дают:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = 0 & H'_x &= H_x \neq 0 \\ E'_y &= \frac{-\beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0 & H'_y &= \frac{H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0 \\ E'_z &= \frac{\beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0 & H'_z &= \frac{H_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0. \end{aligned}$$

Это поле – электромагнитное в K' , но по-прежнему $J_1 = 0, J_2 = H^2 > 0$. Поле такого типа называется магнитоподобным.

Магнитоподобное – это такое электромагнитное поле, которое в одной ИСО может быть только магнитным. Проблема в другом – может ли в какой-нибудь области Вселенной реализоваться такое поле – «чисто» магнитное, оторванное от электрического? Во всяком случае, СТО такой тип предсказывает.

Третий тип. В системе K обе компоненты поля $\vec{E} \neq 0, \vec{H} \neq 0$, но $J_1 = 0, J_2 = 0$. Это значит, что $(\vec{H}\vec{E}) = 0$, то есть $\vec{E} \perp \vec{H}, H^2 - E^2 = 0, H = E$.

В системе K' согласно (8.18) $\vec{E}' \neq 0, \vec{H}' \neq 0$, но $J_1 = 0$ дает по-прежнему $\vec{E}' \perp \vec{H}'$ (рис. 31), $H'^2 - E'^2 = 0 \Rightarrow E' = H'$.

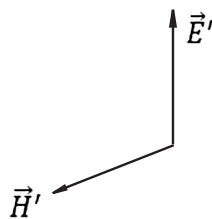


Рис. 31

Это – плоские электромагнитные волны. Отделить для этого типа поля электрическую часть от магнитной так, чтобы были либо только электрическая, либо только магнитная компонента, не удастся ни в одной ИСО. Эти векторы (\vec{E} и \vec{H}) связаны во всех ИСО. И во всех ИСО распространяется электромагнитная волна.

§ 58. Эффект Доплера

План:

1. Инвариантность фазы электромагнитной волны. Четырехмерный волновой вектор.
2. Общая формула преобразования частот.
3. Продольный эффект Доплера в нерелятивистском случае.
4. Продольный эффект Доплера в релятивистском случае. Скорость удаления объекта при $z \geq 1$.
5. Поперечный эффект Доплера.

1. В 1842 г. Появилась небольшая работа Доплера «О свете двойных звезд и некоторых других небесных тел». В этой работе впервые исследовалось влияние движения источника электромагнитных волн на принимаемую частоту.

В 1905 г. В работе «К электродинамике движущихся тел» А. Эйнштейн целый параграф посвятил эффекту Доплера, получив общую формулу преобразования частот на основе совершенно новых в то время представлений, которые затем легли в основу СТО.

Ниже будет получена общая формула эффекта Доплера, проведен анализ в частных случаях, при этом будет использован четырехмерный формализм, существенно упрощающий процедуру «вывода» формул.

Сначала рассмотрим некоторые особенности распространения плоских волн. Пусть в системе K распространяется плоская монохроматическая волна:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}.\end{aligned}\tag{8.21}$$

Как было показано в §57, в системе K' это тоже плоская монохроматическая волна с компонентами:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E}'_0 e^{i(\omega' t' - \vec{k}' \vec{r}')}, \\ \vec{H}' &= \vec{H}'_0 e^{i(\omega' t' - \vec{k}' \vec{r}')}.\end{aligned}\tag{8.22}$$

Используем одну из формул Эйнштейна (8.18), например, для E'_y , и подставим значения проекции согласно (8.21) и (8.22):

$$E'_{0y} e^{i(\omega' t' - \vec{k}' \vec{r}')} = \frac{E_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} - \beta H_{0z} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E_{0y} - \beta H_{0z}}{\sqrt{1 - \beta^2}} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}.$$

Это выражение означает, что амплитуда волны E'_{0y} в K' отлична от амплитуды E_{0y} , т.к.

$$E'_{0y} = \frac{E_{0y} - \beta H_{0z}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq E_{0y} \text{ при } \beta \neq 0.$$

Но фаза волн неизменна:

$$\Psi' = \omega' t' - \vec{k}' \vec{r}' = \omega t - \vec{k} \vec{r} = \Psi.$$

Итак,

$$\Psi = \omega t - \vec{k} \vec{r} = \text{const.}$$

Запишем в 4-форме, введя координаты Минковского

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict:$$

$$\begin{aligned} \Psi = \omega t - \vec{k} \vec{r} &= \omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega \frac{ict}{ic} - k_x x - k_y y - k_z z = \\ &= -k_x x_1 - k_y x_2 - k_z x_3 - \frac{i\omega}{c} x_4. \end{aligned}$$

Это выражение можно записать как скаляр, если ввести новый 4-вектор с компонентами: $k_1 = k_x, k_2 = k_y, k_3 = k_z, k_4 = \frac{i\omega}{c}$, т.е.

$$k_i = (k_1, k_2, k_3, k_4) = \left(\vec{k}, \frac{i\omega}{c} \right). \quad (8.23)$$

По традиции «имя» новому 4-вектору даем по имени пространственной части – вектора \vec{k} . Итак, (8.23) означает, что 3-мерный волновой вектор \vec{k} и частота ω взаимно дополняют друг друга до единого четырехмерного волнового вектора k_i .

Тогда фаза волны компактно запишется в виде:

$$\Psi = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4 = -k_i x_i = \text{invar}. \quad (8.24)$$

Итак, фаза волны есть согласно (8.24) четырехмерный скаляр или тензор нулевого ранга и является инвариантом.

2. Используем введенные значения 4-вектора k_i для получения общей формулы, описывающей эффект Доплера.

Пусть источник электромагнитных волн излучает частоту $\omega' \equiv \omega_0$. При этом свяжем систему K' жестко с источником. В системе K частота волны ω принимается наблюдателем. Запишем преобразование

$$k'_4 = \frac{k_4 - i\beta k_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.25)$$

Согласно (8.23)

$$k'_4 = i \frac{\omega'}{c} = i \frac{\omega_0}{c}, \quad k_4 = \frac{i\omega}{c}, \quad k_1 = k_x = k \cos(\vec{n}, x) = k \cos\theta.$$

Обозначив $\cos(\vec{n}, x) \equiv \cos\theta \equiv n_x$, получим $k_1 = kn_x$. Но $k = \omega/c$, откуда $k_1 = \frac{\omega}{c} n_x$. Подставим все значения в (8.25):

$$\frac{i\omega_0}{c} = \frac{i \frac{\omega}{c} - i\beta \frac{\omega}{c} n_x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

откуда сразу получим

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta n_x}. \quad (8.26)$$

Это и есть общая формула эффекта Доплера, которая означает, что если $\beta = \frac{v}{c} \neq 0$, то $\omega \neq \omega_0$. Т.е. частота принимаемая отличается от излучаемой.

3. Рассмотрим частные случаи (8.26). Выделяют обычно продольный и поперечный эффект Доплера.

Сначала рассмотрим продольный эффект в нерелятивистском случае, когда можно в (8.26) пренебречь членом β^2 по сравнению с β , $\beta^2 \ll 1$. Тогда:

$$\omega \simeq \frac{\omega_0}{1 - \beta n_x}. \quad (8.27)$$

Выясним значения n_x при различных видах относительного движения источника и приемника. При сближении $n_x = 1$, при удалении $n_x = -1$ т.к. в первом случае вектор \vec{n} направлен по скорости системы \vec{v} , а во втором – противоположно скорости.

Сразу для двух случаев запишем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \beta(\pm 1)} = \frac{\omega_0}{1 \mp \beta}. \quad (8.28)$$

Причем, верхний знак соответствует сближению, а нижний – удалению. Поскольку $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, то можно (8.28) разложить в ряд:

$$(1 - x)^k \simeq 1 - kx.$$

Тогда получаем

$$\omega = \omega_0(1 \mp \beta)^{-1} \cong \omega_0(1 \pm \beta).$$

Рассмотрим оба случая по отдельности.

1) Сближение: $\omega = \omega_0(1 + \beta)$ – это означает, что $\omega > \omega_0$, т.е. принимаемая частота больше излучаемой. Такое смещение спектра стали называть фиолетовым.

2) Удаление: $\omega = \omega_0(1 - \beta)$, т.е. $\omega < \omega_0$ – принимаемая частота меньше излучаемой. Это – красное доплеровское смещение спектра.

Особое значение эффект Доплера имеет в астрономии, астрофизике. Измеряя сдвиг частот, можно получать значения лучевых скоростей астрофизических объектов. Так, например, было доказано вращение Солнца. Но особенно впечатляющими оказались работы Хаббла, американского астронома. Хаббл в 1929 г. интерпретировал наблюдаемое к тому времени красное смещение в спектрах галактик как доплеровское и выдвинул гипотезу о том, что все галактики изотропно удаляются не только от нас, земных наблюдателей, но и друг от друга. Появился термин «разбегание» галактик. Необходимо отметить, что в 1922–24 годах советский ученый А.А. Фридман показал, что применение уравнений Эйнштейна – основных уравнений ОТО – к Вселенной в целом дает нестационарные решения. Это означало, что Вселенная не статична, как считалось до Фридмана, а эволюционирует, т.е. развивается во времени. Открытия Хаббла подтвердили решения Фридмана о том, что на современном этапе эволюции Вселенная расширяется. В естественнонаучном мировоззрении произошел переворот!

Можно считать без преувеличения, что открытие расширения Вселенной является самым главным достижением физики XX века. И всё это следует из некоего весьма абстрактного на первый взгляд формального применения 4-мерного аппарата теоретической физики!

Но вернемся к красному смещению спектра. Преобразуем формулу

$$\omega = \omega_0(1 - \beta) = \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \omega_0 - \omega_0 \frac{v}{c},$$

откуда

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{v}{c}, \quad (8.29)$$

и, следовательно,

$$v = c \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}. \quad (8.30)$$

Обозначим сдвиг частоты через $\Delta = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$, тогда $v = c\Delta$.

В астрономии красное смещение обозначают следующим образом:

$$z = \frac{\lambda_{\text{набл}} - \lambda_{\text{изл}}}{\lambda_{\text{изл}}}. \quad (8.31)$$

Поскольку

$$\lambda_{\text{набл}} = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}, \text{ а } \lambda_{\text{изл}} = \frac{c}{\nu_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0},$$

то из (8.31) получаем

$$z = \frac{\frac{2\pi c}{\omega} - \frac{2\pi c}{\omega_0}}{\frac{2\pi c}{\omega_0}} = \frac{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}}{\frac{1}{\omega_0}} = \frac{(\omega_0 - \omega)\omega_0}{\omega\omega_0} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega}.$$

Итак, согласно астрономии

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega}. \quad (8.32)$$

Сравнение (8.30) и (8.32) показывает, что величина красного смещения Δ в СТО и z в астрономии отличаются знаменателем, но если z достаточно мало, то $\omega \simeq \omega_0$, но $\omega \neq \omega_0$ тогда $z \simeq \Delta$. Возникает вопрос, можно ли пользоваться этим приближением при больших z ? На этом часто «ловят» студентов, т.к. известно, что есть объекты (галактики и квазары), у которых $z > 1$. Кажется, что в этом случае согласно (8.29) $v > c$. Так ли это на самом деле? В следующем пункте покажем, что при $z \geq 1$ связь скорости v удаления от объекта с z более сложная, но при любом z всегда $v < c$.

4. Рассмотрим продольный эффект Доплера в релятивистском случае. В этом случае пренебрегать членом с β^2 нельзя. Запишем с учетом $n_x = \pm 1$ общую формулу (8.26)

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta(\pm 1)}.$$

Рассмотрим случай сближения, полагая $n_x = +1$. Тогда

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Итак,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (8.33)$$

Это означает, что $\omega > \omega_0$, т.е. имеет место фиолетовое смещение спектра. Рассмотрим случай удаления, для которого $n_x = -1$. Тогда

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad (8.34)$$

Это означает, что $\omega < \omega_0$ – красное смещение.

Теперь найдем связь между β и z . Для этого сначала умножим (8.34) слева и справа на $\sqrt{1+\beta}$:

$$\omega\sqrt{1+\beta} = \omega_0\sqrt{1-\beta}.$$

Возведя в квадрат, получим:

$$\omega^2(1+\beta) = \omega_0^2(1-\beta),$$

или

$$\omega^2 + \omega^2\beta = \omega_0^2 - \omega_0^2\beta,$$

что дает

$$(\omega^2 + \omega_0^2)\beta = \omega_0^2 - \omega^2,$$

откуда

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2}. \quad (8.35)$$

Проведем простые алгебраические преобразования, позволяющие в (8.35) ввести z согласно (8.32):

$$\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 + \omega_0^2} = \frac{a}{b}.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} \cdot \frac{\omega_0 + \omega}{\omega} = z \frac{\omega_0 - \omega + 2\omega}{\omega} = z \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} + \frac{2\omega}{\omega} \right) = \\ &= z(z + 2) = z^2 + 2z. \end{aligned}$$

С другой стороны, знаменатель имеет вид:

$$b = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\omega^2}{\omega^2} = z^2 + 2z + 2.$$

Итак,

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2},$$

что дает

$$v = c \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}. \quad (8.36)$$

Формула (8.36) означает, что при любом z , даже $z > 1$, всегда получим $v < c$.

При малых $z \ll 1$ в числителе можно записать $z^2 + 2z \approx 2z$, а в знаменателе $z^2 + 2z + 2 \simeq 2$. Тогда вместо (8.36) получаем просто

$$v \cong c \cdot z.$$

Но в общем случае, более сложная формула (8.36) опровергает некоторые современные «ретивые» высказывания о том, что согласно последним астрофизическим данным (т.е. $z > 1$), например, для квазаров, получается $v > c$, что якобы ниспровергает теорию относительности. Никакого ниспровержения на самом деле нет, есть просто некорректное, некомпетентное применение формул СТО!

5. Рассмотрим поперечный эффект Доплера. В этом случае $n_x = 0$ и согласно (8.26)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (8.37)$$

Полученный результат означает, что поперечный эффект Доплера всегда дает красное смещение спектра, т.е. $\omega < \omega_0$, причём это эффект второго порядка ($\sim \frac{v^2}{c^2}$), т.е. более слабый. Он обусловлен замедлением времени в СТО.

Экспериментально корневая ($\sqrt{1 - \beta^2}$) зависимость от β была подтверждена опытами Айвса в 1938 г.

Рассмотрим полный эффект Доплера. Сначала в случае сближения при $n_x = 1$:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}.$$

Умножим и разделим это выражение на $\sqrt{1 - \beta^2}$ и затем преобразуем:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0 \frac{1-\beta^2}{(1-\beta)\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0 \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1-\beta)\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \omega_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}$$

Для удаления $n_x = -1$, тогда

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega_0(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Среднее значение

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.38)$$

Мы видим, что среднее значение смещения спектра пропорционально $1/\sqrt{1-\beta^2}$. Эта корневая зависимость и была подтверждена опытами Айвса.

§ 59. Лоренц-ковариантная форма уравнений Максвелла–Лоренца

Согласно СТО 4 уравнения Максвелла–Лоренца могут быть записаны в четырехмерной форме в виде двух уравнений

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = 0. \quad (8.40)$$

Вывод этих уравнений получается вариационным методом (см. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теория поля») и рассматривается в курсе «Вариационное исчисление». Мы в этом параграфе покажем, что в уравнении (8.39) в компактной форме содержатся 1 и 4 уравнения Максвелла–Лоренца, а в уравнении (8.40) – 2 и 3 уравнения.

Итак, запишем уравнение (8.39) для $i = 1$:

$$\frac{\partial F_{1k}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_1.$$

Раскрываем сумму по k :

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1. \quad (8.41)$$

Теперь переходим от 4-формы к трёхмерной, используя значение компонент тензора F_{ik} согласно (8.17). Подставляя $J_1 = J_x$ и координаты Минковского, получаем:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{\partial(-iE_x)}{ic\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Учитывая, что $\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \text{rot}_x \vec{H}$ и перенося вправо член с $\frac{\partial E_x}{\partial t}$, получаем

$$\text{rot}_x \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (8.42)$$

Это и есть проекция 1-го уравнения Максвелла–Лоренца на ось x . При $i = 2$ получаем сначала в 4-форме:

$$\frac{\partial F_{2k}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_2,$$

или

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_2. \quad (8.43)$$

Подставляя значения компонент тензора F_{ik} из (8.17), $J_2 = J_y$ и координаты Минковского, получаем

$$\text{rot}_y \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (8.44)$$

При $i = 3$ аналогично получаем, что

$$\text{rot}_z \vec{H} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (8.45)$$

Итак, при $i = 1, 2, 3$ из общего уравнения (8.39) получается 1-е уравнение Максвелла–Лоренца

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.46)$$

Обратите внимание, что «автоматически» из четырёхмерной формы следует существование плотности тока смещения $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$!

Теперь положим $i = 4$:

$$\frac{\partial F_{4k}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_4,$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_4. \quad (8.47)$$

Переходим к трёхмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}(iE_x) + \frac{\partial}{\partial y}(iE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(iE_z) = \frac{4\pi}{c} ic\rho,$$

или

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

Иначе,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (8.48)$$

Из общего уравнения (8.39) получается при $i = 4$ четвёртое уравнение Максвелла–Лоренца. Теперь рассмотрим уравнение (8.40). Используем таблицу значений i, k, l (таблица 4):

Таблица 4

№	i	k	l	Уравнение Максвелла–Лоренца
a)	1	2	3	3-е уравнение
b)	2	3	4	2-е уравнение в проекции на ось x
c)	3	4	1	2-е уравнение в проекции на ось y
d)	4	1	2	2-е уравнение в проекции на ось z

a) Пусть $i = 1, k = 2, l = 3$. Подставляем в (8.40):

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} = 0. \quad (8.49)$$

Используем значения (8.17) и координаты Минковского, тогда получаем

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0,$$

или

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (8.50)$$

Это третье уравнение Максвелла–Лоренца. Отметим, что согласно этому уравнению, в самом деле, в природе отсутствуют свободные магнитные заряды, и силовые линии магнитного микроскопического поля всегда замкнуты!

б) Теперь положим $i = 2$, $k = 3$, $l = 4$. Тогда

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} = 0. \quad (8.51)$$

В трёхмерной форме получаем:

$$\frac{\partial H_x}{\partial(ict)} + \frac{\partial(iE_y)}{\partial z} + \frac{\partial(-iE_z)}{\partial y} = 0,$$

что даёт

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0.$$

Или

$$\text{rot}_x \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0,$$

то есть

$$\text{rot}_x \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}. \quad (8.52)$$

Это проекция второго уравнения Максвелла–Лоренца на ось x .

Самостоятельно проверьте уравнение (8.40) в случаях с) и d) и убедитесь, что получаются проекции 2-го уравнения Максвелла–Лоренца на оси y и z . Итак, в случаях б), с), d) из уравнения (8.38) получаем второе уравнение Максвелла–Лоренца в векторной форме

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (8.53)$$

Обратите внимание на то, что без великих дополнительных соображений, «автоматически» получается в правой части знак «минус». А этот знак вводится исторически в соответствии с правилом Ленца!

Подведём итог: уравнения (8.39) и (8.40) есть компактная форма известных четырёх уравнений Максвелла–Лоренца. Более того, четырёхмерная форма уравнений Максвелла–Лоренца означает выполнение принципа Лоренц-ковариантности основных уравнений электродинамики. Для получения этих уравнений не потребовалось пересматривать основы электродинамики. Электродинамика, таким образом, оказалась исторически первой релятивистской теорией. Это не случайно, так как сам объект электродинамики – электромагнитное поле – является релятивистским объектом.

Заключение

В заключении рассмотрим кратко важнейший методологический вопрос – материальность электромагнитного поля. Выделим два аспекта – общепhilософский и естественнонаучный.

Общепhilософский аспект: электромагнитное поле – объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания. Объективность поля приводит к важнейшему для человечества обстоятельству – воспроизводимости результатов. Это и позволяет осуществлять техническое внедрение электромагнитных явлений, что привело и приводит к невиданным ранее достижениям современной цивилизации.

Естественнонаучный аспект означает, что поле, так же как и вещество, является видом материи. При этом поле имеет такие же материальные характеристики как и вещество, которые в физике называют физическими величинами. Это энергия, импульс, масса, скорость. Поле оказывает давление на вещество, что убедительно доказано опытами Лебедева. Однако поле имеет специфические свойства. Поле характеризуется, как мы уже отмечали на протяжении всего курса, векторами электрической и магнитной напряженности и индукции, потенциалами. Это дифференциальные характеристики поля. В отличие от вещества, поле не имеет электрического заряда. Эти свойства отличают поле от вещества.

Необходимо отметить так же, что на протяжении более чем двух веков человечество научилось не только исследовать свойства поля, но и создавать поля с заданными наперёд свойствами. Поэтому значение электродинамики в современном мире трудно переоценить!

К сожалению, самой Сусанне Маврикиевне уже не суждено увидеть данное учебное пособие, в основу которого положен курс её лекций. Созданию и совершенствованию этого курса она отдала почти полвека.

В годы нашего обучения Сусанна Маврикиевна читала лекции для потока из 75 слушателей в большой аудитории, со стен которой на нас «смотрели» портреты выдающихся учёных прошлого: Ньютона, Максвелла, Фарадея, Эйнштейна, Планка. И это создавало особую атмосферу, способствующую осознанию величия физики, которую мы постигали.



**Горяинова Сусанна Маврикиевна
(1936–2014)**

*Вы смогли раскрыть неординарно
Свет идей давно прошедших дней,
И глядят с портретов благодарно
Максвелл, и Эйнштейн, и Фарадей.
Стройный мир великих уравнений, –
В них звучит начало всех начал,
Курсу Ваших лекций, без сомнений,
Сам Эйнштейн завидовать бы стал...*

**Л.М. Свирская,
научный редактор**

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

В первой части курса были рассмотрены уравнения Максвелла в дифференциальной форме (§5, таблица 1). В таблице 5 для сравнения приведены две формы уравнений Максвелла: дифференциальная и интегральная. С целью получения последней используем две интегральные теоремы:

1) теорема Стокса для циркуляции вектора по замкнутому контуру

$$\oint_{\ell} \vec{a} d\vec{\ell} = \int_S \text{rot}_n \vec{a} dS;$$

2) теорема Остроградского–Гаусса для потока векторного поля

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV.$$

Таблица 5

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$
$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}$
$\text{div} \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$
$\text{div} \vec{D} = 4\pi\rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$

Обсудим физический смысл уравнений Максвелла в интегральной форме. Первое уравнение, обобщающее опытные факты об источниках вихрей магнитного поля, можно записать в следующем виде:

$$\oint_{\ell} \vec{H} \, d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}.$$

Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по любому замкнутому контуру определяется суммой двух токов: тока проводимости и тока смещения, протекающих через поверхность, опирающуюся на этот контур.

Согласно второму уравнению Максвелла циркуляция вектора напряжённости электрического поля, или ЭДС в контуре, определяется взятой с противоположным знаком скоростью изменения магнитного потока через поверхность, опирающуюся на этот контур. Это уравнение, обобщающее закон электромагнитной индукции Фарадея, можно записать в виде:

$$\oint_{\ell} \vec{E} \, d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Физический смысл третьего уравнения Максвелла: магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю. Это уравнение выражает экспериментальный факт отсутствия магнитных зарядов, аналогичных электрическим.

Согласно четвёртому уравнению Максвелла поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен полному заряду, умноженному на 4π , находящемуся в объёме, ограниченном этой поверхностью. Это уравнение, по форме совпадающее с электростатической теоремой Остроградского–Гаусса (см. часть I, формула (1.13)), обобщает её на случай полей, произвольно зависящих от времени.

О системах единиц в классической электродинамике

В нашем курсе за основную систему единиц принята система Гаусса (СГС). В этой системе основными механическими величинами являются сантиметр, грамм, секунда, а единица электрического заряда определяется из закона Кулона, который для вакуума имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}. \quad (\text{П.1})$$

Гауссова система содержит единственную постоянную – электродинамическую константу c , имеющую ясный физический смысл: это скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Предпочтительное использование гауссовой системы обусловлено тем, что международная система единиц СИ, рекомендованная к широкому применению в учебных целях (при написании учебных пособий и в процессе преподавания), имеет ряд принципиальных недостатков. Особенно отчетливо эти недостатки проявляются в теории электромагнитных явлений.

В системе СИ к основным механическим величинам (метр, килограмм, секунда) добавляется независимо четвертая величина – сила тока, измеряемая в Амперах. При этом в системе уравнений электродинамики появляются две размерные константы – электрическая постоянная ϵ_0 и магнитная постоянная μ_0 (которые первоначально именовались так: диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума). По существу, это искусственно введенные постоянные, не имеющие непосредственного физического смысла. Наличие этих констант делает очень громоздкими уравнения, что затрудняет понимание их физического содержания.

Отметим существенные недостатки системы СИ.

1. Уравнения Максвелла в этой системе записаны в рационализированной форме, которая не содержит никаких численных множителей. В таблицах 6 и 7 система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах записана для сравнения в двух системах единиц – СИ и гауссовой (см. часть I, §5).

Таблица 6

Дифференциальная форма уравнений Максвелла

Система Гаусса	Система СИ
$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$
$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

Таблица 7

Интегральная форма уравнений Максвелла

Система Гаусса	Система СИ
$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{S}} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$
$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} d\vec{S}$	$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} d\vec{S}$
$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} d\vec{S} = 0$
$\oint_{\mathcal{S}} \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q$	$\oint_{\mathcal{S}} \vec{D} d\vec{S} = q$

Идея «рационализации» системы уравнений Максвелла принадлежала английскому физик О. Хевисайду. Изменив единицы электрического заряда, а также напряженностей электрического и магнитного полей, он освободил уравнения Максвелла от численного множителя 4π . Но, исчезая из одних уравнений, численные множителя появлялись в других, так что общее число коэффициентов не изменялось.

Идея Хевисайда была развита Г.А. Лоренцем. В системе Хевисайда-Лоренца уравнения Максвелла выглядели также, как в системе Гаусса, только один безразмерный множитель 4π был заменён другим безразмерным множителем – единицей.

В системе СИ происходит дальнейшая «рационализация»: в уравнениях Максвелла исчезает не только 4π , но и размерная величина, представляющая собой основную константу электромагнитной теории – скорость света c ! Это всё равно, что исключить из фундаментальных соотношений квантовой теории её основную константу – постоянную Планка h ! А между тем, электродинамическая константа c удовлетворяет второму постулату специальной теории относительности (СТО), и сама электромагнитная теория Максвелла по своей сути является релятивистской теорией.

2. Материальные уравнения (или уравнения связи), связывающие векторы \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} с электрическими и магнитными характеристиками среды, также различаются в системах СИ и Гаусса. Неизменным остаётся только закон Ома в дифференциальной форме. Эти уравнения представлены в таблице 8.

Таблица 8

Система Гаусса	Система СИ
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$
$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп.}})$	$\vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп.}})$

В уравнениях системы СИ содержатся относительная диэлектрическая проницаемость среды ϵ (показывающая, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме) и относительная магнитная проницаемость магнетика μ (показывающая, во сколько раз магнитная индукция в данном веществе больше, чем в вакууме), которые являются безразмерными величинами. Для вакуума $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$.

Определим численные значения электрической и магнитной постоянных, содержащихся в уравнениях системы СИ. Запишем закон Кулона в вакууме:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{II.2})$$

Пусть $q_1 = q_2 = 1$ Кл, $r = 1$ м. Тогда:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ Ньютонов}. \quad (\text{II.3})$$

Теперь вычислим по закону Кулона (II.1) ту же силу в системе Гаусса. В этом случае $r = 100$ см, $1\text{Кл} = 10 \cdot c$ СГС(q) = $10 \cdot 3 \cdot 10^8$ СГС(q) = $3 \cdot 10^9$ СГС(q).

Тогда:

$$F = \frac{c^2}{100} \text{ дин} = c^2 10^{-7} \text{ Н}. \quad (\text{II.4})$$

Из сравнения (II.3) и (II.4) находим, что

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}. \quad (\text{II.5})$$

Аналогичным образом определим магнитную постоянную μ_0 . Используем формулу для силы взаимодействия двух проводников, по которым текут токи J_1 и J_2 :

$$F = \mu_0 \frac{J_1 J_2}{2\pi r} \ell, \quad (\text{II.6})$$

где ℓ – длина участка одного из проводников, к которому приложена сила F . Полагая в формуле (II.6) $J_1 = J_2 = 1$ А и $\ell = r = 1$ м, получаем:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{ Н}. \quad (\text{II.7})$$

В гауссовой системе единиц

$$F = \frac{2J_1 J_2}{r(100 \text{ с})^2} \ell. \quad (\text{II.8})$$

В знаменателе учтено, что скорость света c измеряется в м/с, как и в предыдущих расчётах. Полагая в (II.8) $\ell = r = 100$ см, $J_1 = J_2 = 10 \cdot c$ СГСЭ, получим:

$$F = 2 \cdot 10^{-2} \text{ дин} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}. \quad (\text{II.9})$$

Из сравнения (II.7) и (II.9) находим, что

$$\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_{\text{Н}}}{\text{м}}. \quad (\text{II.10})$$

Величина $\epsilon\epsilon_0$ называется абсолютной диэлектрической проницаемостью среды, а $\mu\mu_0$ – абсолютной магнитной проницаемостью среды. Таким образом, в системе СИ вводится абсолютно излишнее раздвоение диэлектрической и магнитной проницаемостей на абсолютные и относительные.

3. Наличие размерных постоянных ϵ_0 и μ_0 приводит к тому, что в системе СИ уже в вакууме размерности \vec{E} и \vec{D} , а так же \vec{H} и \vec{B} оказываются различными. Однако уже в электронной теории Лоренца было установлено, что для описания электромагнитного поля в вакууме достаточно одного вектора электрической напряженности \vec{E} и одного вектора магнитной напряженности \vec{H} (см. главу VI, §46). Раздвоение электрического поля в вакууме на \vec{E} и \vec{D} , а также магнитного на \vec{H} и \vec{B} является искусственным и излишним усложнением.

4. В системе СИ размерности векторов \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} и \vec{B} разные. Тем самым нарушается равноправие полей. Этот факт противоречит выводу СТО об относительном характере полей. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное относительно, оно зависит от выбора системы отсчета. В одной инерциальной системе отсчета (ИСО) поле может проявлять себя как электрическое, а в другой ИСО – как магнитное. Этот вывод с очевидностью следует из преобразований Лоренца (8.18), рассмотренных в § 57. Действительно, согласно (8.18):

$$E'_y = \frac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Эту формулу можно переписать так:

$$E_y - \frac{v}{c} H_z = E'_y \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (\text{II.11})$$

Из (II.11) следует, что в ИСО K' , движущейся со скоростью v , есть только электрическое поле (E'_y). А в ИСО K появляется магнитное поле и изменённое электрическое поле. Поскольку $\beta = v/c$ является безразмерной величиной, размерности напряженностей электрического и магнитного полей должны совпадать.

Более того, согласно СТО электромагнитное поле характеризуется одной величиной – тензором электромагнитного поля F_{ik} (см. § 56). В гауссовой системе этот тензор имеет вид:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.12})$$

Компоненты одного и того же тензора должны иметь одинаковую размерность. Таким образом, должна быть одинаковой не только размерность \vec{E} и \vec{D} , а также \vec{H} и \vec{B} , но и все четыре вектора \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} должны иметь одинаковые размерности. Этому требованию удовлетворяет только система Гаусса. Удивительно, что электромагнитная теория Максвелла в гауссовой системе, созданная задолго до появления теории относительности Эйнштейна, оказалась полностью удовлетворяющей её требованиям.

В системе СИ тензор электромагнитного поля имеет вид:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.13})$$

Из (II.13) видно, что в системе СИ для уравнивания размерностей компонент тензора вводятся дополнительные размерные множители. Т.е. система СИ не удовлетворяет требованиям СТО. Как справедливо заметил Д.В. Сивухин – автор фундаментального курса общей физики [19], «в этом отношении система СИ не более логична, чем, скажем, система, в которой длина, ширина и высота предмета измеряются не только различными единицами, но и имеют разные размерности» (система СИ подвергнута им резкой критике на страницах журнала «Успехи физических наук», 1979, т. 129, вып.2, с. 335–338 и в § 85 учебника [19]).

При наличии электрического и магнитного поля на движущийся заряд действует сила Лоренца. Запишем выражение для этой силы в двух системах единиц – гауссовой и СИ:

Система Гаусса	Система СИ
$\vec{F}_L = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v}\vec{H}]$	$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]$

Она состоит из двух составляющих – электрической и магнитной. Часто под силой Лоренца подразумевают её магнитную составляющую. В ряде случаев её можно отбросить. При каком условии это возможно? Корректный ответ на этот вопрос даёт формула, записанная в гауссовой системе. Для этого перепишем её так:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}\right]. \quad (\text{II.14})$$

Из (II.14) следует, что при условии

$$v/c \ll 1$$

(нерелятивистский случай, достаточно медленные движения) $\vec{F}_L = q\vec{E}$, т.е. остаётся чисто электрическая часть. Этот результат согласуется с выводом СТО о том, что разделение силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие относительно. Оно зависит от выбора системы отсчёта. Если в ИСО, движущейся со скоростью \vec{v} , заряд покоится, то магнитная составляющая силы Лоренца в этой системе равна нулю.

В рамках системы СИ такого надёжного критерия, как условие (II.15), получить нельзя.

Система единиц СИ оказывается абсолютно неприемлемой в физике элементарных частиц и квантовой электродинамике. В научных статьях, монографиях, в ведущих учебных пособиях по теоретической физике (напр., [2,6–9,19–22]) преимущественно используется гауссова система единиц, обеспечивающая ясное понимание физического смысла уравнений. Фактически вся лучшая физическая литература опирается на систему Гаусса. Система СИ более пригодна для инженерных расчетов, где численные результаты получаются в практических единицах – вольтах, амперах, омах, джоулях.

В таблице 9 приведены некоторые физические постоянные в двух системах единиц – СИ и гауссовой.

Таблица 9

Физические постоянные	СИ	Система Гаусса
Скорость света в вакууме (c)	$2,99792 \cdot 10^8$ м/с	$2,99792 \cdot 10^{10}$ см/с
Заряд электрона (e)	$1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл	$4.8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ
Масса электрона (m_e)	$9.1 \cdot 10^{-31}$ кг	$9.1 \cdot 10^{-28}$ г
Масса протона (m_p) $m_p = 1836 \cdot m_e$	$1.67 \cdot 10^{-27}$ кг	$1.67 \cdot 10^{-24}$ г
Классический радиус электрона (r_e)	$2.818 \cdot 10^{-15}$ м	$2.818 \cdot 10^{-13}$ см
Магнетон Бора (μ_B) (магнитный момент электрона)	$9.27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл	$9.27 \cdot 10^{-21}$ эрг/Гс
Электрическая постоянная (ϵ_0)	$8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$	1
Магнитная постоянная (μ_0)	$1.256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	1

В таблице 10 приводятся соотношения между единицами физических величин в системах СИ и Гаусса.

Таблица 10

Физическая величина	Обозначение единицы в СИ	Обозначение единицы в гауссовой системе	Соотношение между единицами
Сила	Н	дин	$1\text{Н} = 10^5 \text{дин}$
Работа A , энергия W	Дж	эрг	$1 \text{Дж} = 10^7 \text{эрг}$
Мощность N	Вт = Дж/с	эрг/с	$1 \text{Вт} = 10^7 \text{эрг/с}$
Количество электричества, электрический заряд q	Кл	СГС	$1\text{Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{СГС}$
Потенциал φ , напряжение U	В	СГС	$1\text{В} = 1/300 \text{СГС}$
Напряженность электрического поля E	В/м	СГС	$1\text{В/м} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \text{СГС}$
Электрическая индукция D	Кл/м ²	СГС	$1 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 12\pi \cdot 10^5 \text{СГС}$
Дипольный момент p	Кл · м	СГС	$1\text{Кл} \cdot \text{м} = 3 \cdot 10^{11} \text{СГС}$
Поляризация \mathcal{P}	Кл/м ²	СГС	$1 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 3 \cdot 10^5 \text{СГС}$
Сила тока \mathcal{J}	А	СГС	$1\text{А} = 3 \cdot 10^9 \text{СГС}$
Сопротивление R	Ом	сек/см	$1\text{Ом} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \frac{\text{с}}{\text{см}}$
Удельное сопротивление ρ	Ом · м	сек	$1\text{Ом} \cdot \text{м} = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{с}$
Удельная электропроводность λ	1/Ом · м	1/сек	$1 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} = 9 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{с}}$
Емкость C	Ф	см	$1\text{Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{см}$
Магнитная индукция B	Тл	Гс	$1\text{Тл} = 10^4 \text{Гс}$
Напряженность магнитного поля H	А/м	Э	$1\text{А/м} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{Э}$
Магнитный поток Φ	Вб	Мкс	$1\text{Вб} = 10^8 \text{Мкс}$
Магнитный момент тока \mathcal{M}	А · м ²	СГС	$1\text{А} \cdot \text{м}^2 = 10^3 \text{СГС}$
Вектор-потенциал A	Вб/м	СГС	$1\text{Вб/м} = 10^6 \text{СГС}$
Намагниченность M	А/м	Гс	$\frac{1}{4\pi} 10^4 \text{Гс}$
Индуктивность L	Гм	см	$1\text{Гн/м} = 10^9 \text{см}$
Магнитный момент атома $\mu_{ат} = p_m$	Дж/Тл	эрг/Гс	$1\text{Дж/Тл} = 10^3 \text{эрг/Гс}$

В таблице 11 даны основные формулы электродинамики в двух системах единиц – СИ и гауссовой.

Таблица 11

Наименование	СИ	Гауссова система
1	2	3
Закон Кулона	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r}$	$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r}$
Напряженность поля точечного заряда	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^3} \vec{r}$	$\vec{E} = \frac{q}{\epsilon r^3} \vec{r}$
Напряженность поля бесконечной плоскости	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}$
Напряженность поля между обкладками плоского конденсатора и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}$
Связь между электрической индукцией и напряженностью электрического поля	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
Уравнение Пуассона для скалярного потенциала	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}$	$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon}$
Потенциал точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r}$	$\varphi = \frac{q}{\epsilon r}$
Связь между поляризацией и напряженностью электрического поля	$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$	$\vec{P} = \alpha \vec{E}$
Связь между электрической индукцией и поляризацией	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon = 1 + \alpha$	$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha$
Теорема Гаусса для потока вектора электрической индукции	$\oint_s D_n dS = \sum_i q_i$	$\oint_s D_n dS = 4\pi \sum_i q_i$
Ёмкость плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Плотность энергии электрического поля	$w_{\text{эл.}} = \frac{\epsilon E^2}{2}$	$w_{\text{эл.}} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$
Связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля	$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$

1	2	3
Связь между магнитной индукцией и намагниченностью	$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$	$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$
Связь намагниченности с напряженностью магнитного поля	$\vec{M} = \chi\vec{H}$	$\vec{M} = \chi\vec{H}$
Магнитная проницаемость	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
Закон Био-Савара-Лапласа	$\vec{H} = \frac{J}{4\pi} \oint_l \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}$	$\vec{H} = \frac{J}{c} \oint_l \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}$
Магнитное поле бесконечного прямого тока	$B = \frac{\mu\mu_0 J}{2\pi r}$	$B = \frac{2\mu J}{cr}$
Закон Ампера для линейных токов	$d\vec{F} = J[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$	$d\vec{F} = \frac{J}{c}[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$
Закон Ампера для объёмного тока	$d\vec{F} = [j\vec{B}]dV$	$d\vec{F} = \frac{1}{c}[j\vec{B}]dV$
Уравнение Пуассона для векторного потенциала	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}$	$\nabla^2 \vec{A} = -4\pi \frac{\mu j}{c}$
Вектор-потенциал магнитного поля	$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{j}}{r} dV$	$\vec{A} = \frac{\mu}{c} \int_v \frac{\vec{j}}{r} dV$
Закон полного тока (циркуляция вектора магнитной напряженности)	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = J$	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J$
Теорема Гаусса для \vec{B}	$\oint_s B_n dS = 0$	$\oint_s B_n dS = 0$
Сила Лоренца (магнитная часть)	$\vec{F}_L = q[\vec{v} \vec{B}]$	$\vec{F}_L = \frac{q}{c}[\vec{v} \vec{H}]$
Магнитный момент линейного тока	$\vec{M} = JS$	$\vec{M} = \frac{1}{c} JS$
Магнитный поток, создаваемый током	$\Phi = LJ$	$\Phi = \frac{LJ}{c}$
Закон Фарадея	$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$	$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

1	2	3
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{LJ^2}{2}$	$W = \frac{LJ^2}{2c^2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w_m = \frac{\mu H^2}{2}$	$w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия электромагнитного поля	$W = \int_v \frac{(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})}{2} dV$	$W = \int_v \frac{(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})}{8\pi} dV$
Вектор Умова-Пойнтинга	$\vec{Y} = [\vec{E}\vec{H}]$	$\vec{Y} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\vec{g} = \frac{1}{c^2} [\vec{E}\vec{H}]$	$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}\vec{H}]$
Скорость электромагнитных волн в среде	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Толщина скин-слоя	$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\lambda\omega}}$	$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}}$

О скорости распространения света в линейной и нелинейной электродинамике

Как уже отмечалось ранее (§ 5, часть I), уравнения Максвелла – это линейные уравнения, соответствующие принципу суперпозиции полей. Содержащаяся в них скорость света c является величиной постоянной. Такая ситуация имеет место в линейной электродинамике. Как показал М.С. Свирский [15], в нелинейной электродинамике скорость света не является константой. Здесь имеется аналогия между общей теорией относительности (ОТО) Эйнштейна и нелинейной электродинамикой Борна–Инфельда.

Теория Борна–Инфельда является обобщением электродинамики Максвелла, так же, как ОТО Эйнштейна является обобщением теории тяготения Ньютона. Согласно ОТО имеет место замедление светового луча, движущегося в гравитационном поле. Для составляющей скорости света, перпендикулярной силовым линиям гравитационного поля, ОТО приводит к следующему выражению:

$$c_1 = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (\text{III.1})$$

где v – скорость, связанная с гравитационным потенциалом в данной точке пространства

$$v^2 = \frac{2GM}{R} = 2\varphi.$$

В случае светового луча, распространяющегося перпендикулярно к электростатическому полю, электродинамика Борна–Инфельда приводит к следующей зависимости скорости света от напряженности электростатического поля в данной точке пространства:

$$c_1 = c \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}{b^2}}, \quad (\text{III.2})$$

где b – максимальное поле, существующее на «крае» электрона

$$b = \frac{m^2 c^4}{e^2}.$$

Видно, что имеется полная аналогия между соотношениями (III.1) и (III.2).

Из равенства (III.2) следует, что заметные отклонения в скорости света от величины c могут иметь место в чрезвычайно сильных электростатических полях. Например, для замедления света на 1 м/с требуется поле

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx 10^{11} \text{ СГСЭ.}$$

В природных условиях заметный эффект можно ожидать вблизи элементарных заряженных частиц, порождающих столь сильные электростатические поля. Таким образом, в нелинейной электродинамике имеет место эффект замедления распространения плоской электромагнитной волны в электростатическом поле, направленном перпендикулярно к направлению распространения волны и к направлению её электрического поля.

О связи между классической механикой и электродинамикой

Система уравнений Максвелла – это уравнения электромагнитного поля. В книге «Эволюция физики» (раздел «Реальность поля») А. Эйнштейн заметил: «Формулировка этих уравнений является самым важным событием со времени Ньютона... Их простая форма скрывает глубину, обнаруживаемую только при тщательном изучении» [24].

Во второй половине XIX века обнаружилось, что принципы классической механики неприменимы к электромагнитным явлениям, описываемым теорией Максвелла. Уравнения Максвелла противоречили преобразованиям Галилея. Характерной особенностью электромагнитной теории Максвелла, отличающей её от классической механики Галилея–Ньютона, является наличие константы c – скорости света в вакууме. В классической механике такой универсальной константы не было.

Существенно различны и законы, описывающие механические и электромагнитные явления. В механике, зная положения и скорости частиц в начальный момент времени и действующие силы, можно рассчитать траектории частиц в последующие моменты времени. А электромагнитное поле не определяется заданием координат и скоростей частиц. Задавая поле в какой-либо момент времени, мы можем из уравнений Максвелла определить, как будет изменяться поле в пространстве и во времени. Как заметил Эйнштейн, «уравнения Максвелла позволяют нам следить за историей поля так же, как уравнения механики позволили следить за историей материальных частиц» [24].

В теории дальнего действия, характерной для ньютоновской механики, сила зависит от положений взаимодействующих частиц (что имеет место в законе тяготения Ньютона). Например, Солнце и Земля весьма далеки друг от друга. Но, по выражению Эйнштейна, «оба принимают участие в игре сил». Совсем другая ситуация в полевой теории, к которой относится теория Максвелла: сила, действующая на пробное тело, зависит от поля в окрестности этого тела. Поле в данной точке пространства и в данный момент времени зависит от поля в точке, бесконечно близкой к данной в пространстве и во времени.

Несмотря на столь существенно различную картину в описании механических и электромагнитных явлений, можно получить очень важные результаты в теории электромагнетизма, опираясь на аналитическую механику [18], которая является высшей ступенью, «венцом» классической механики. Например, можно получить уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого используем принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона)

$$\delta S = 0, \quad (\text{IV.1})$$

из которого следует уравнение движения в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (\text{IV.2})$$

Полагая в качестве обобщённых координат q_α и скоростей \dot{q}_α декартовые координаты и скорости, приходим к уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}, \quad (\text{IV.3})$$

где лагранжиан определяется выражением

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - e\varphi. \quad (\text{IV.4})$$

Из (IV.3) и (IV.4) следует уравнение движения частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{A}], \quad (\text{IV.5})$$

из которого автоматически вытекают определения напряжённости электрического поля

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \quad (\text{IV.6})$$

и напряжённости магнитного поля

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (\text{IV.7})$$

С учетом (IV.6) и (IV.7) уравнение движения принимает вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}]. \quad (\text{IV.8})$$

В правой части этого уравнения стоит сила Лоренца.

Из уравнения Лагранжа можно получить и систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Используя выражение для плотности функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 - (\operatorname{rot} \vec{A})^2 \right\} \quad (\text{IV.9})$$

и условие калибровки для векторного потенциала магнитного поля $div\vec{A} = 0$, получаем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{A}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{A}} = 0. \quad (\text{IV.10})$$

Решая это уравнение, получаем первое уравнение Максвелла

$$rot\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{IV.11})$$

С учетом (IV.6) и (IV.7) получаются и три остальных уравнения

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad div\vec{B} = 0, \quad div\vec{E} = 0. \quad (\text{IV.12})$$

Такой метод получения уравнений Максвелла рассматривается в учебнике А.С. Давыдова «Квантовая механика» (§80) при обсуждении вторичного квантования свободного электромагнитного поля.

Уширение спектральных линий в модели упруго-связанного электрона

Опыт показывает, что линии в спектрах испускания атомов являются не строго монохроматическими, а уширенными. Контур спектральной линии имеет резонансный характер (рис. 32). Используя модель упруго-связанного электрона, находящегося в поле световой волны, можно установить зависимость интенсивности излучения от частоты $I(\omega)$ и определить величину уширения спектральной линии.

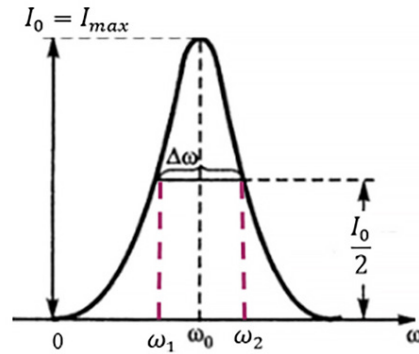


Рис. 32. Кривая Лоренца

Как показано в § 39, мощность излучения осциллятора определяется выражением (5.55):

$$W' = \frac{2e^2}{3c^3} a^2. \quad (V.1)$$

Входящее в эту формулу ускорение запишем для одномерных колебаний: $a = \ddot{x}$. Воспользуемся формулой (6.65) из § 47:

$$\vec{r} = \frac{-e\vec{E}_0 e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}, \quad (V.2)$$

которая в одномерном случае принимает вид:

$$x = \frac{-eE_{0x} e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (V.3)$$

С учётом (V.3) имеем $a = -\omega^2 x$. Тогда из (V.1), обозначая $W' = I$, получим для интенсивности излучения:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \omega^4 x^2 \sim x^2. \quad (\text{V.4})$$

Более строго, следует найти не просто квадрат координаты электрона, а квадрат модуля:

$$|x|^2 = |x_0|^2 e^{i\omega t} e^{-i\omega t} = |x_0|^2.$$

Поэтому в одномерном случае из (V.3) следует:

$$|x|^2 = \frac{e^2 E_{0x}^2}{m^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Тогда интенсивность излучения:

$$I(\omega) = \frac{\text{const}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (\text{V.5})$$

Впервые эту формулу получил Х.А. Лоренц в рамках классической электронной теории. Из (V.5) видно, что зависимость интенсивности излучения от частоты имеет резонансный характер, что хорошо согласуется с опытом. Вблизи резонанса $\omega \approx \omega_0$, т. е. $\omega_0^2 - \omega^2 = 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 = 4\omega_0^2 \left[(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right].$$

Тогда формула (V.5) примет вид:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (\text{V.6})$$

Для половинной интенсивности, как видно из графика,

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{2},$$

поэтому:

$$\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

Приравнивая знаменатели, можно получить квадратное уравнение

$$(\omega - \omega_0)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Оно имеет два решения:

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\gamma}{2},$$

то есть ширина спектральной линии

$$\Delta\omega = \gamma. \quad (V.7)$$

Теперь надо вспомнить, а что такое γ . Это коэффициент затухания, обусловленный силой лучистого (или радиационного) трения, который даёт конечное время колебаний электрона:

$$\tau = \frac{2}{\gamma}, \quad \tau \sim 10^{-9} \text{с}.$$

Мы приходим к очень важным выводам:

1. Уширение спектральной линии обусловлено радиационным трением.
2. Ширина спектральной линии определяет интервал частот вблизи частоты собственных колебаний электрона ω_0 , в пределах которого излучается основная часть энергии.
3. Из (15) следует, что ширина спектральной линии

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}. \quad (V.8)$$

обратно пропорциональна продолжительности излучения.

4. То, что представляло определённую трудность в модели Томсона (по истечении времени $\tau \sim 10^{-9}$ с все электроны должны были бы «закончить» свои колебания и «собраться» в центре атома), теперь можно рассматривать как вполне разумный результат, приводящий к конечной длительности самого процесса испускания света атомом.

5. И, пожалуй, самое удивительное заключение. Формула (V.8), вытекающая из классической электронной теории Лоренца, полностью согласуется с соотношением неопределённостей Гейзенберга для энергии и времени, установленным в квантовой механике:

$$\Delta E \Delta t \geq h, \quad (V.9)$$

из которого следует, что:

$$\Delta t \sim \frac{h}{\Delta E}. \quad (V.10)$$

В стационарном состоянии: $\Delta E = 0, \Delta t \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0$, никакого уширения спектральной линии нет. Уширение спектральных линий связано с конечным временем жизни атома в возбуждённом состоянии.

Согласно формуле (V.8) уширение спектральной линии связано с конечным временем затухания колебаний электрона.

Спектральное разложение электромагнитного поля

Как было отмечено в § 49 (пункт 3), поле можно разложить на плоские волны с помощью интеграла Фурье, содержащего непрерывный ряд различных частот. Такое разложение носит название спектрального разложения поля.

Согласно (6.97) напряженность магнитного поля разлагается в интеграл Фурье:

$$\vec{H}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{VI.1})$$

где \vec{H}_ω – фурье-образ $\vec{H}(t)$, равный

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{VI.2})$$

Для доказательства последнего выражения напомним некоторые математические сведения. Из курса «Математическая физика» известно, что одним из представлений δ -функции Дирака является:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin(Lx)}{x}. \quad (\text{VI.3})$$

Используя (VI.3), покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x). \quad (\text{VI.4})$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin(Lx)}{x} = \delta(x).$$

Полагая $k = t, x = \omega' - \omega$, с помощью (VI.4) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega' - \omega). \quad (\text{VI.5})$$

Далее найдём фурье-образ функции, которая разлагается в интеграл Фурье (VI.1). Для этого умножим обе части выражения (VI.1) на $e^{i\omega' t}$ и проинтегрируем по времени:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{i\omega' t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega' t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}_{\omega} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt.$$

С учетом (V.5) получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{i\omega' t} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}_{\omega} \delta(\omega' - \omega) d\omega = 2\pi \vec{H}(\omega').$$

Таким образом,

$$\vec{H}(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{i\omega' t} dt,$$

а для частоты ω :

$$\vec{H}(\omega) = \vec{H}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{i\omega t} dt,$$

что совпадает с формулой (VI.2).

Очевидно, что амплитуды \vec{H}_{ω} могут быть комплексными и

$$\vec{H}(-\omega) = \vec{H}^*(\omega). \quad (\text{VI.6})$$

Действительно,

$$\vec{H}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

С учётом (VI.6) вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega'} e^{-i\omega' t} d\omega' \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega'} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega')t} dt. \end{aligned}$$

Согласно (VI.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega + \omega').$$

Поэтому:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega'} d\omega' \delta(\omega + \omega').$$

Учитывая свойство δ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a),$$

будем иметь: $\omega' = -\omega$, $H(\omega') = H(-\omega) = H^*(\omega)$. Поэтому:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)H(-\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\omega}|^2 d\omega.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt = 4\pi \int_0^{\infty} |H_{\omega}|^2 d\omega, \quad (\text{VI.7})$$

что совпадает с соотношением (6.111) из § 49, которое было использовано при выводе формулы Тамма–Франка в теории излучения Вавилова–Черенкова.

Уникальный язык теоретической физики

(Статья С.М. Горяиновой, опубликованная в сборнике материалов XVIII Международной научно-практической конференции «Усовские чтения», 2011 г.)

Очень часто приходится слышать обвинения в формализме физики: дескать, одни только формулы, никакой физики! И этим страдают не только учителя физики средней школы, но и преподаватели физики вузов. Почему-то считается, что физики тем больше в учебнике или на лекции, чем больше написано или сказано слов родного языка, а вот формулы – это очень плохо, это сухой формализм и никакой физики! Так ли это?

Да, действительно, в настоящее время в теоретической физике явно преобладает *пресловутый* формализм, но является ли это бедствием или достижением? Попробуем разобраться в этом.

В каждом разделе курса теоретической физики имеется свой круг понятий, причем часть из них – общая для всех разделов. Самое главное – каждое понятие, как правило, обозначается одним символом – буквой латинского или греческого алфавита. Например, инертная масса – m , ускорение – a , сила – F , волновая функция – ψ , удельное сопротивление – ρ , частота – ν , угловая частота – ω , квант действия – постоянная Планка – h и т.п. Для сравнения – в разговорном языке одно понятие обозначается сложным сочетанием символов в виде слова, записанного через буквы соответствующего алфавита. Например, в русском языке – «мать» или «мама» – четыре символа – буквы так называемой кириллицы, в английском языке – "*mother*" – шесть букв, во французском – "*maman*" – пять букв латинского алфавита и т.д.

Что же дает такой формализм физике? Вспомним известный со школьных времен *второй* закон Ньютона, записанный так

$$ma = F. \quad (\text{VII.1})$$

Подсчитаем число бит информации, включая, как положено, пробелы. Оказывается в формуле (VII.1) 6 бит. А теперь попробуем этот же закон проговорить словами русского языка: «Произведение массы тела на его ускорение равно силе, действующей на это тело». 77 бит! Различие очевидно!

Итак, формальная запись закона в отличие от разговорной речи оказывается весьма компактной подачей информации, что в наш век информатизации весьма существенно.

В физике проводится интерпретация символической записи законов или уравнений, т.е. осуществляется перевод их на разговорный язык. Эта процедура называется раскрытием физического смысла данного закона или уравнения. И вот это и считается «настоящей» физикой в отличие от формальной записи той же самой физики. Но интерпретация необходима только на первых порах обучения – для «непосвященных» или для тех, кто не собирается профессионально заниматься теоретической физикой.

Аналогичная ситуация сложилась в искусстве, музыке, например. Колоссальный прогресс был достигнут с изобретением нотной грамоты. Музыкальное произведение, созданное композитором, стало возможно записать на языке символов и оставить потомкам! Так появилась партитура. Однако очень часто на концерте перед исполнением музыкального произведения ведущий – музыковед объясняет слушателя смысл каждой части вещи, сонаты, например, которая будет исполнена. Причем это разъяснение зависит как от квалификации самого музыковеда, так и от уровня подготовленности слушателей, который приходится учитывать ведущему. Нет необходимости отмечать огромную разницу в воздействии исполнения самого музыкального произведения и вступительного слова музыковеда. Отметим, что специалисты – композиторы, музыканты-исполнители читают партитуру и понимают ее без всяких слов и проигрывания на инструменте.

То же самое в живописи. Экскурсовод – искусствовед в музее объясняет группе экскурсантов смысл художественного произведения, у которого они остановились. При этом разные экскурсоводы по-разному интерпретируют одно и то же произведение. Автор данной статьи специально прослушала три разных объяснения трех разных экскурсоводов одной и той же картины Чюрлениса «Соната моря» в музее Чюрлениса. Правда, Чюрленис – символист и этим, по-видимому, объясняется столь разительная субъективность интерпретации его картин, но, конечно, не только.

В теоретической физике подобного, как правило, нет, но с учетом развития нашего знания о мире происходит углубление физических законов и меняется соответствующая этому интерпретация. Сами физики-теоретики общаются на языке символов и хорошо понимают друг друга без слов.

Но самое главное не это. С символами, обозначающими физические величины, в теоретической физике обращаются как с алгебраическими величинами. Их, оказывается, можно складывать и вычитать, делить и умножать. Вспомните сложение векторов электрической напряженности или сил в данной точке. Более того, можно делить на символ и получить искомую величину. Например, из второго закона Ньютона ускорение a получается просто делением

$$a = \frac{F}{m}. \quad (\text{VII.2})$$

Сравните с разговорным языком – можно ли разделить какое-нибудь предложение на какое-то слово и получить нечто новое? Ни в одном разговорном языке этих операций просто нет.

Но пойдём дальше. Можно к символам, обозначающим физические понятия, а также к формулам применять методы высшей математики, такие, как дифференцирование, интегрирование, варьирование, разложение в ряд и т.п. В итоге получаются новые результаты, что и является целью исследования физика-теоретика.

Уравнения физики не просто констатируют некоторый факт в виде закона. Уравнения теоретической физики описывают процесс и позволяют раскрывать сущность явления. Вспомним соответствующее уравнение Максвелла, которое раскрывает сущность явления электромагнитной индукции, или, например, уравнение теплопроводности.

Очень важным является то, что формулы физики позволяют проводить вычисления – «доводить до числа», что даёт выход в технику. Именно это обстоятельство обеспечило невиданный в истории человеческой цивилизации научно-технический прогресс XX века! Никакими словами, разговорами не спроектировать, не построить то здание, не создать космические корабли. Не запустить их в космос, не создать компьютеры, мобильники и многое другое, что существенно изменило нашу жизнь.

Язык теоретической физики – международный, понятен без перевода всем физикам-теоретикам. Это обеспечивает свободный обмен информацией между учеными разных стран.

Вот такой уникальный язык разработан многими поколениями ученых. Этот язык осваивают студенты, изучающие физику в вузах. Но, к сожалению, и в настоящее время недооценивается все значение этого особенного языка, даже многими преподавателями физики в вузах, не говоря уже об учителях физики в школах. Автор статьи в процессе преподавания теоретической физики обращает внимание студентов на уникальность языка, который им приходится осваивать. Особенное впечатление на студентов производит предлагаемый им простой подсчет бит информации второго закона Ньютона, приведенный в тексте статьи. В заключительной лекции раздела «Основы специальной теории относительности» автор посвящает некоторое время обсуждению специфического языка теоретической физики и призывает студентов успешно им овладевать.

В заключение статьи необходимо отметить, что наличие уникального языка теоретической физики, конечно, не умаляет значение родного языка, который является не только средством общения, но и играет определяющую роль в духовной жизни каждого народа.

О четырехмерном формализме в классической электродинамике

(Статья С.М. Горяиновой, опубликованная в сборнике материалов

XX Международной научно-практической конференции

«Усовские чтения», 2013 г.)

В настоящей статье продолжается идея автора об уникальности языка теоретической физики. Но будет подчеркнуто, что за формализмом теоретической физики скрывается очень глубокий физический смысл. Ограничимся лишь тремя важными моментами четырехмерного формализма в классической электродинамике. Сначала необходимо отметить, что вся идея четырехмерия, включая понятие «пространство–время», вся математика в приложении к СТО – заслуга Германа Минковского, а не Эйнштейна, как обычно думают! Первая работа Г. Минковского посвящена новым – четырехмерным представлениям – доклад, сделанный им в Кельне 21 сентября 1908 года на 80 собрании немецких естествоиспытателей и врачей, назывался «Пространство и время». В начале доклада было сделано заявление: «Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции, и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность». Как отмечал Макс Борн: «То, что сделал сам Г. Минковский – это выработка представления о четырехмерном мире». В том же 1908 году появилась основная работа Г. Минковского «Основания теории электромагнитных процессов в движущихся телах». М. Борн писал: «В этой работе был развит весь арсенал релятивистской математики, понятия собственного времени, массы покоя, четырехвектора и шестивектора и т.п., которыми с тех пор повседневно пользуется каждый физик-теоретик». Отметим важнейшие понятия и достижения идеи четырехмерия в применении к классической электродинамике. Эти вопросы последовательно излагаются в разделе «Релятивистская формулировка электродинамики» курса «Основы СТО».

1. Тензор электромагнитного поля. Согласно СТО вектор-потенциал \vec{A} и скалярный потенциал φ электромагнитного поля взаимно дополняют друг друга до единого четырехмерного вектор–потенциала. Причем \vec{A} является его пространственной частью, а φ – временной. Такое объединение естественно получается из анализа релятивистской – четырехмерной формы уравнений Даламбера для потенциалов в электродинамике. Возникает вопрос, что собой представляют векторы \vec{E} и \vec{H} – истинные электрическая

и магнитная напряженности – в четырехмерном мире. Эти векторы вместе имеют шесть компонент – по три проекции ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$) и, конечно, составить четырехвектор не могут! Необходимо выяснить «судьбу» векторов. Для этого сначала используется известная в электродинамике их связь с вектор-потенциалом \vec{A} и скалярным φ в обычной трехмерной форме. В качестве примера рассматриваются компоненты H_z и E_x . Переходя к четырехмерным представлениям, показываем, что эти компоненты выражаются через разность частных производных от компонента четырехвектора – потенциала по координатам Минковского. Но самое главное, они преобразуются как компоненты тензора второго ранга. Этот тензор получил название тензора электромагнитного поля и обозначается F_{ik} . Он имеет 16 компонент и является антисимметричным тензором второго ранга. Таким образом, устанавливается, что все шесть компонент векторов \vec{H} и \vec{E} взаимно дополняют друг друга до единого тензора – тензора электромагнитного поля. В явном виде выражение для F_{ik} просто записывается в виде матрицы 4×4 . Итак, согласно СТО электромагнитное поле имеет единую характеристику – тензор F_{ik} . Такое представление электромагнитного поля используется в современной теоретической физике. Тем самым идея единства электрических и магнитных явлений находит свое современное оформление. Это новое глубокое понимание нерасторжимости электричества и магнетизма. Отметим, что в настоящее время нахождения явного вида доступно любому студенту 3-го курса физического факультета педагогического вуза, изучающему «Основы СТО».

2. Формулы Эйнштейна для преобразования полей. Инварианты. Типы полей. Шесть формул для преобразования компонент $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ были получены Эйнштейном в 1905 году весьма сложным способом. В настоящее время формулы Эйнштейна получают студенты 3-го курса самостоятельно на практическом занятии по СТО. При этом они применяют законы преобразования соответствующих компонент тензора второго ранга и явный вид тензора F_{ik} . Формулы Эйнштейна имеют глубокий физический смысл. Они показывают, что \vec{E} и \vec{H} относительны, зависят от выбора системы отсчета, и более того, взаимно дополняют друг друга. А это приводит к важным следствиям, которые дают более глубокое понимание природы электромагнитного поля.

Поле имеет два инварианта ($E^2 - H^2$ и $(\vec{E} \cdot \vec{H})$). Совместный анализ формул Эйнштейна и инвариантов показывает, что согласно СТО существует три типа поля: электроподобное, магнитоподобное и плоские электромагнитные волны.

Электроподобное поле – электромагнитное поле, которое в одной ИСО является только электрическим. Это ИСО, в которой электрические заряды неподвижны. В электродинамике такое поле называется электростатическим. Магнитная компонента поля в этой ИСО отсутствует. Но во всех других ИСО есть уже магнитная и электрическая компоненты, т.е. поле – электромагнитное. Объяснить это можно даже школьникам без формул Эйнштейна. Магнитоподобное поле – электромагнитное поле, которое в одной какой-то ИСО является только магнитным. Но во всех других ИСО поле имеет и электрическую, и магнитную компоненты, т.е. является электромагнитным. Анализ этих двух типов поля означает, что отделить электрическое и магнитное поля друг от друга возможно не всегда, а лишь для соответствующего типа поля – с определенными инвариантами и в специально подобранной ИСО. Для третьего типа поля – электромагнитных волн – анализ показывает, что отделение электрического от магнитного поля в принципе невозможно ни в одной ИСО. Электрическая и магнитная компоненты всегда связаны во всех ИСО. Кроме того, во всех ИСО происходит распространение электромагнитных волн.

3. Четырехмерная форма уравнений Максвелла–Лоренца. Согласно СТО математическим воплощением принципа относительности является принцип Лоренц-ковариантности физических законов. Для выполнения принципа Лоренц-ковариантности необходимо, чтобы физический закон имел четырехмерную форму. В разделе «Релятивистская формулировка электродинамики» показывается, что уравнения Максвелла–Лоренца без каких-либо новых добавок могут быть записаны в четырехмерной форме в виде двух обобщённых уравнений. Первое уравнение – неоднородное, в правой части содержит четырехмерный вектор плотности тока проводимости. В левой части – частные производные от компонент F_{ik} по координатам Минковского. Это уравнение получают обычно вариационным методом. Второе уравнение – однородное, есть сумма трех членов из частных производных от F_{ik} по координатам Минковского и удовлетворяется тождественно при подстановке F_{ik} через производные от компонент 4-потенциала. Обычно студентам показывают, что из первого уравнения формально следуют I и IV уравнения Максвелла–Лоренца, а из второго – III и II уравнения Максвелла–Лоренца. Но при этом упускают весьма эффектные результаты. Например, такие: 1) из первого обобщённого уравнения следует «автоматически» плотность тока смещение в виде $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, которую провидче-

ски ввел Максвелл за 50 лет до создания СТО и работ Минковского; 2) из второго обобщённого уравнения получается трехмерная форма II уравнения Максвелла–Лоренца, которое, как известно, является обобщением закона электромагнитной индукции. Но при этом опять-таки «автоматически» без всяких дополнительных соображений получается знак «минус», что соответствует известному правилу Ленца! Четырёхмерная форма уравнений Максвелла–Лоренца означает, что выполняется принцип Лоренц-ковариантности.

Общий итог очень важен – электродинамика является релятивистской теорией, несмотря на то, что была создана задолго до создания СТО. И это неслучайно, так как электромагнитное поле является релятивистским объектом. Эти три примера (хотя в учебном курсе получаются и многие другие результаты) означают, что использование четырехмерного формализма приводит к современному глубокому пониманию свойств электромагнитного поля и электромагнитного взаимодействия.

**Система развития профессиональных компетенций
преподавателя высшей школы**
(авторская концепция С.М. Горяиновой)

В данной работе этот вопрос обсуждается применительно к профессии преподавателя теоретической физики педагогического вуза. Развитие профессиональных компетенций преподавателя высшей школы должно происходить по следующим направлениям:

1. Теоретическая подготовка.
2. Повышение научной и педагогической квалификации.
3. Самостоятельная работа по различным направлениям.

Раскроем кратко каждое из этих направлений.

1. Теоретическая подготовка

Её главной составляющей должна являться аспирантура по теоретической физике, поскольку уровень преподавания и содержание самого курса теоретической физики не соответствует её современному состоянию. Трёхгодичная аспирантура, в частности, позволяет овладеть методами научного исследования в современной теоретической физике (метод вторичного квантования, метод функций Грина, диаграммная техника и т.д.). Подготовка через аспирантуру обеспечивает широту и глубину научного исследования современных проблем. При этом широта обусловлена общими методами исследования, глубина – узкой, остронаправленной тематикой исследования. И, кроме того, аспирант учится находиться на острие проблем, чутко реагировать на самые современные достижения науки. Работа над кандидатской диссертацией позволила, например, мне осуществить глубокое проникновение в проблемы квантовой теории антиферромагнетизма и, тем самым, функционировать на переднем крае науки.

2. Повышение научной и педагогической квалификации по линии стажировок и факультетов повышения квалификации (ФПК)

На протяжении всех лет работы в вузе преподаватель должен систематически повышать свою научную и педагогическую квалификацию. В этом отношении мне повезло больше, чем многим другим преподавателям нашего вуза. Начиная с 1964 г., я регулярно участвовала в работе Всесоюзной школы-симпозиума по физике твёрдого тела – в «Коуровке», организуемой Академией наук СССР (затем РАН) и Институ-

том физики металлов УНЦ РАН. В «Коуровке» удалось прослушать лекции выдающихся физиков-теоретиков не только по проблемам теории твёрдого тела, но и по целому ряду проблем, относящихся к «фронтальным» направлениям современной науки (физика элементарных частиц и объединения взаимодействий; исследования планет Солнечной системы и т.д.). Большое впечатление и влияние на мировоззрение оказали лекции знаменитого физика Н.В. Тимофеева-Рессовского. Следует отметить также важность неформального общения, обсуждения научных проблем с учеными из академических институтов. Так, например, при подготовке спецкурса «Магнитные свойства вещества» удалось получить ценные указания даже по методике изложения некоторых вопросов магнетизма от специалистов в области теории магнетизма. Были установлены научные контакты с учеными из Академии наук.

В 1979 г. прошла трёхмесячную научную стажировку в лаборатории теории твёрдого тела при ИФМ УНЦ АН СССР, в рамках которой были проведены теоретические расчеты по современным проблемам квантовой теории магнетизма. По результатам исследований опубликованы две статьи в соавторстве с научным руководителем стажировки М.В. Медведевым в международном физическом журнале. Стажировка позволила окунуться в атмосферу «чистой» – академической науки, проверить свои способности функционировать в качестве физика-теоретика. Связь с академической наукой является необходимым условием профессионализма преподавателя высшей школы.

Не менее значительным является повышение квалификации на ФПК ведущих вузов страны, где можно прослушать лекции крупных специалистов по теоретической физике (например, ФПК при кафедре теоретической физики и астрономии ЛГПИ им. Герцена, или при кафедре теоретической физики МПГУ им. Ленина). Огромное влияние оказал, например, спецкурс «Введение в современную космологию», прочитанный учёным с мировым именем, космологом и астрофизиком И.Д. Новиковым. Общение с таким выдающимся учёным позволило мне преодолеть психологический барьер в отношении космологии и в дальнейшем разработать спецкурс «Основы общей теории относительности и релятивистской космологии». Прохождение ФПК при ведущих вузах страны в то же время позволило мне самоутвердиться как преподавателю теоретической физики, преодолеть некоторую закомплексованность, характерную для преподавателей периферийных вузов.

3. Самостоятельная работа

Основа развития профессионализма – систематическая самостоятельная работа по повышению научно-методического уровня. Эта работа должна проводиться по следующим направлениям.

1) Изучение научной, философской и научно-учебной литературы по специальности

Преподавателю теоретической физики необходимо обязательно следить за публикациями в основных академических журналах по физике (Успехи физических наук – УФН, Журнал экспериментальной и теоретической физики – ЖЭТФ, Теоретическая и математическая физика – ТМФ, Элементарные частицы и атомное ядро – ЭЧАЯ), а также в иностранных журналах. Статьи в этих журналах использованы мною непосредственно в лекционных курсах и на семинарах. Так, например, в спецкурсе «Теория относительности и астрофизика» подробно обсуждалась статья советских физиков В.В. Брагинского и В.И. Панова «Проверка эквивалентности инертной и гравитационной масс», опубликованной в ЖЭТФ в 1971 г., в которой описан фундаментальный эксперимент, проведенный авторами, лежащий в основе общей теории относительности (ОТО). В спецкурсе «Элементы общей теории относительности» обсуждается статья И. Шапиро «Fourth test of general relativity» о четвертом тесте общей теории относительности, опубликованная в американском физическом журнале Physical Review Letters в 1964 году, а затем даётся подробный теоретический расчет на современном уровне. Использование журнальных публикаций приобщает студентов к достижениям современной физики.

Изучение монографий по проблемам современной физики является необходимой компонентой повышения научного уровня преподавателя высшей школы. К числу таких монографий относится фундаментальный труд С.В. Вонсовского «Магнетизм» (1032 страницы). Эта книга используется мною в спецкурсе «Магнитные свойства вещества», рекомендуется студентам для курсовых и выпускных работ.

Особенное значение имеет 10-томный курс теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, который не имеет аналогов в мире по глубине и широте охвата научных проблем, по строгости и ясности изложения. Настольной книгой при подготовке курса «Электродинамика и теория относительности» явилась для меня «Теория поля» – второй том упомянутого издания. Разбор соответствующего вопроса по курсу Ландау и Лифшица означает самостоятельное выполнение всех теоретических расчетов (то, что студенты называют «вывод формул»), опущенных авторами, понимание физической сущности полученных результатов. Поэтому систематическое «общение» с курсом Ландау и Лифшица является необходимым условием роста профессионализма преподавателя высшей школы.

Но ограничиваться одним курсом Ландау и Лифшица ещё недостаточно. К работе подключаются ещё десятки учебных пособий для университетов и педвузов. По курсу

электродинамики, – это, в первую очередь, книга «Основы теории электричества» И.Е. Тамма, которая рекомендуется студентам для самостоятельной работы.

Особенно обширна в настоящее время библиография по теории относительности, насчитывающая несколько тысяч изданий. Конечно, ни один человек не в состоянии полностью охватить всё, что написано по специальной (СТО) и общей теории относительности. Но изучение основных работ А. Эйнштейна по теории относительности, собранных в 1-м и 2-м томах четырёхтомного «Собрания научных трудов», является обязательным для преподавателя теории относительности в вузе. Некоторые из этих статей доступны студентам и рекомендуются для изучения. В сборнике «Принцип относительности» собраны работы классиков релятивизма Г. Минковского, А. Пуанкаре, Г. Лоренца. Книга В. Паули «Теория относительности» в компактной форме знакомит со специальной и общей теорией относительности. Фундаментальной является «Гравитация» в трёх томах Мизнера, Торна, Уилера. Часть вопросов этой монографии рассмотрена на уровне, доступном для студентов, и рекомендуется при выполнении курсовых и выпускных работ. Глубокое и своеобразное изложение теории относительности даётся в книгах В. Фока «Пространство, время и тяготение», С. Вейнберга «Гравитация и космология», Г. Мак-Вити «Общая теория относительности и космология». Связь теории относительности с астрофизикой прослеживается в фундаментальных монографиях Я.Б. Зельдовича и И.Д. Новикова «Теория тяготения и эволюция звёзд», «Строение и эволюция Вселенной», в одной из первых монографий по общей теории относительности «Теория относительности» А. Эддингтона и во многих других изданиях. Этот список можно продолжать. Кроме того, имеется много учебных пособий, в которых излагаются основы СТО. Но, к сожалению, вопросы ОТО до сих пор не находят своего достойного места. Авторов учебных пособий отпугивает сложность математического аппарата ОТО, трудоёмкость изложения и, как следствие, отсутствие вопросов ОТО в современных образовательных стандартах.

Преподавателю теоретической физики необходимо изучать философскую литературу, посвящённую методологическим проблемам современной физики. Литература эта обширна. В ней имеются работы как философов, так и физиков. Особенно много публикаций по философским проблемам относительности, как СТО, так и ОТО, а также по проблемам современной космологии и квантовой механики. Преподаватель вуза должен ориентироваться в основных проблемах, обсуждаемых в этих работах, и по возможности в более или менее популярной форме доносить их до студентов.

2) Изучение психолого-педагогической литературы

Большое впечатление в свое время произвели на меня труды выдающегося советского психолога Н.С. Выготского. Для преподавателя высшей школы имеют значение труды А.В. Усовой по психолого-дидактическим основам формирования понятий. Особенно хочется отметить работы ленинградских психологов под руководством Е.Г. Ананьева, которые показали, что и после 18 лет происходит развитие высших психических функций человека. Оказалось, что к 20 годам у студентов формируется абстрактное мышление, что особенно существенно для успешного усвоения теоретической физики. Поэтому преподавание теоретической физики разумно начинать на 3 курсе вуза, что и реализуется в ныне действующем учебном плане. Студенты в этом возрасте уже способны к быстрым обобщениям, скачкообразным переходам на более высокий уровень понимания физики. Эти психологические особенности используются в работе преподавателя теоретической физики.

3) Дидактическая обработка определённого раздела теоретической физики

Современная теоретическая физика имеет чётко определённую систему понятий и законов, структуру, сложный математический аппарат. Перед преподавателем высшей школы стоит двуединая задача:

а) самому разобраться в данной области теоретической физики;

б) дидактически обработать материал так, чтобы сделать его доступным для студентов педвуза.

Почти в каждом курсе теоретической физики преподавателю приходится рассматривать специфический для этого курса математический аппарат. Так, например, в курсе «Классическая механика» даются основы вариационного исчисления, в курсе «Квантовая механика» – теория линейных самосопряжённых операторов.

Особенно трудоёмкой оказалась подготовка к преподаванию элементов ОТО, которая и до настоящего времени методически не разработана. По крайней мере, нет учебных пособий для студентов педвуза. Основной математический аппарат ОТО – тензорный анализ в искривлённом пространстве-времени не преподаётся студентам. Поэтому необходимо специально выделять время на подготовку студентов по этой математике. Анализ многих монографий по СТО, статей Эйнштейна привёл меня к выводу, что наиболее доступный путь для студентов имеется в книге Ландау и Лифшица «Теория поля». В отличие от других авторов, Ландау и Лифшиц «не сваливают на голову» читателя сразу весь математический аппарат, а дают его постепенно, порциями, «разбавляя» его физикой. Этот метод был использован мною.

Но при этом необходимая математика давалась на практических занятиях, которые построены таким образом, чтобы студенты могли постепенно и самостоятельно получать новые формулы и соотношения. Новые понятия вводятся так же постепенно, причём необходимость их появления обуславливается как математикой, так и физикой. Приводятся наглядные примеры, которые тщательно анализируются, а затем проводится обобщение и математическая запись. Развитый математический аппарат уже без доказательств используется на лекциях для получения физического результата.

На подготовительную работу ушло три года: сначала самой надо было разобраться, изучить ОТО, так как, по выражению студентов, «мы этого не проходили», а затем адаптировать материал к студенческому уровню. В результате сначала появился курс «Элементы общей теории относительности» и раздел курса «Вопросы современной физики», а затем спецкурс по общей теории относительности и релятивистской космологии.

При дидактической обработке курса обязательно следует использовать как внутрипредметные, так и межпредметные связи.

4) Методическая работа над курсами

Сюда входит рациональная организация преподаваемого курса, составление авторских программ, подготовка к чтению лекций (по теоретической физике – это очень трудоёмкое дело. Лекции по теоретической физике – это сплав, органическое единство физики, математики, философии, методики преподавания физики в школе), разработка и чтение спецкурсов.

Чтение спецкурсов – это необходимое условие роста профессионализма преподавателя. Спецкурс – это целиком творчество автора. Как правило, спецкурсы находятся в русле научных исследований лектора. Спецкурс вводит студентов в круг современных проблем данной области науки. Мною в разные годы были разработаны и читались спецкурсы «Магнитные свойства вещества», «Теория относительности и астрофизика», «Элементы общей теории относительности и релятивистской космологии». Подготовка и чтение спецкурсов – ещё более трудоёмкое дело, чем чтение программных курсов теоретической физики.

5) Организация самостоятельной работы студентов

Мною разработана система организации самостоятельной работы студентов по наиболее объёмному курсу – «Электродинамика». Курс структурирован в виде 6 блоков, по каждому из которых проводится коллоквиум. Эта кропотливая индивидуальная работа преподавателя приносит плоды: студенты на глазах

преподавателя «растут», начинают глубоко вникать в научные проблемы, более прочно усваивать основы науки. Успешное прохождение всех коллоквиумов освобождает студента от сдачи экзамена. Эти мероприятия пользуются большой популярностью у студентов. Например, в 1997/98 учебном году на третьем курсе было 426 посещений коллоквиумов. Общий итог успеваемости составил при 100 %-ной абсолютной успеваемости 77,4 % качества. Рекорд тогда поставила 351 группа, в которой из 23 человек 13 получили оценку «отлично».

Существенно при такой организации работы учитывать психологические особенности студентов. Участие в коллоквиумах – дело добровольное. Это позволяет студентам самим планировать свою работу, давать самооценку своей подготовке. Студента следует вдохновить на дальнейшее продвижение по освоению курса, вне зависимости от того, «сдал» он коллоквиум, или «не сдал». В процессе собеседования необходимо отметить положительные моменты в ответе, тактично подсказать, на что следует обратить внимание. В случае неудачи – утешить, объяснить, что нет никакой трагедии, можно лучше подготовиться и вновь прийти на собеседование. При такой работе от преподавателя, кроме такта и доброжелательности в сочетании с требовательностью, требуется очень большое терпение, чтобы заставить каждого студента заговорить на заданную тему. Немаловажно и то, что систематическое участие в коллоквиумах помогает снизить у студентов уровень стресса, характерный для экзамена.

6) Систематическая работа в физической лаборатории – учебной или научной

Необходимо участие в постановке новых лабораторных работ, модернизации старых, оснащении их современными приборами и материалами. Обязательно участие в создании пособий к лабораторным работам, которые зачастую являются результатом коллективного творчества преподавателей.

7) Педагогический поиск. Новации

Преподаватель всё время должен находиться в состоянии поиска форм и методов обучения, дающих оптимальный эффект. За прошедшие годы мною были разработаны и реализованы следующие формы и методы работы:

а) Десятиминутные проверочные работы на практических занятиях по электродинамике. При этом решаются следующие основные задачи:

- облегчается оргмомент (все студенты сразу включаются в работу);
- психологическая разминка, «разогрев» мозга (все студенты «погружаются» в электродинамику, включаются в памяти основные понятия и законы);

– система проверочных работ стимулирует более углублённое изучение основ науки;

– осуществляется еженедельный контроль за учебной деятельностью студентов.

б) Алгоритмизация решения задач.

Составление алгоритмов по разным предметам существенно облегчает организацию самостоятельной работы студентов по решению задач. Мною составлены алгоритмы решения типовых задач по электродинамике и теории относительности, что позволило более эффективно проводить практические занятия и повысить уровень самостоятельности студентов в решении задач.

в) Система вводных коллоквиумов как начальный этап организации самостоятельной работы студентов.

Анализ учебных планов и пособий различных разделов физики по цепочке школьный курс физики – общая физика – теоретическая физика позволил установить, что происходит разрыв иногда в 2-3 года в изучении данного раздела на разных уровнях. Так, например, механика изучается в школе в 8 классе, в вузе – во втором семестре на 1 курсе в рамках общей физики и на третьем курсе – в теоретической физике. Естественно, что студенты забывают основные понятия и законы данного раздела к моменту их изучения на более высоком уровне. Чтобы ликвидировать эти пробелы, восстановить в памяти основные понятия, экспериментальные факты и законы, разработана система вводных коллоквиумов. Такой коллоквиум должен проводиться на первой– второй неделе изучения дисциплины. Его цель – в индивидуальной беседе помочь студенту разобраться в основных понятиях, фактах и законах, которые он ранее изучал по данному разделу. Эта система вводных коллоквиумов является лишь начальным этапом, за которым должны последовать систематически проводимые коллоквиумы по данному курсу уже на новом уровне.

Предложенная система обсуждалась на Совете физического факультета ЧГПИ и была рекомендована к внедрению. Она также обсуждалась и нашла отражение в тезисах доклада на XXV Зональном совещании преподавателей физических дисциплин в г. Новосибирске в 1990 г. Система вводных коллоквиумов является универсальной и может быть применена на любом факультете любого вуза.

г) Еженедельные коллоквиумы по блокам курса «Электродинамика».

Проведение таких коллоквиумов даёт высокие результаты: высокое качество при 100 %-ной абсолютной успеваемости. Но для этого необходимо структурирование

курса и чёткое определение вопросов каждого блока. При этом содержание завершающего блока должно способствовать обобщению и более глубокому пониманию основ данного курса.

д) Реферат-обобщение.

Студентам предлагается составить реферат-обобщение двух разделов: «Электростатика» и «Магнитостатика». При этом используется определённый план и методические указания по составлению реферата. Цель такой работы, по образному выражению студентов, – «разложить всё по полочкам», т.е. научиться выбирать самое основное из данного раздела физики; расположить его в виде стройной системы; провести сравнение свойств двух полей – электростатического и магнитостатического. Полученный опыт студенты затем используют при подготовке к экзаменам по другим дисциплинам, самостоятельно составляя рефераты-обобщения.

е) «Минимум» по электродинамике.

Предлагаемый студентам «минимум» основных вопросов курса электродинамики содержит 8 пунктов, знание которых является обязательным для всех студентов. «Минимум» в компактной форме охватывает всё содержание курса электродинамики. В содержательном отношении «минимум» является достаточно высоким. Оценку «удовлетворительно» студент может получить только в том случае, если даст ответы на все 8 пунктов. Внедрение минимума способствует повышению абсолютной успеваемости, но главное – заостряет внимание студентов на основах данной науки.

ж) Зачётная конференция слушателей спецкурса.

Каждый студент обязан выступить с докладом на такой конференции. Тема доклада выбирается из списка тем, предложенных преподавателем. Освоив содержание спецкурса, студент оказывается в состоянии самостоятельно рассмотреть новую, не прочитанную в спецкурсе, проблему и сделать по ней доклад. Преподаватель даёт консультации студентам в ходе работы над выбранной темой. Конференция выполняет роль зачёта и вызывает у студентов повышенный интерес и активность.

Необходимо отметить, что после внедрения каждой новой формы или метода обучения проводилось анкетирование студентов. Они высоко оценивают предложенные виды работы. Более того, многие выпускники внедряют их в своей работе в школе, так же, как и преподаватели физического факультета.

8) Написание методических рекомендаций и пособий

Был написан комплект методических рекомендаций по общей теории относительности; по организации самостоятельной работы по курсу «Электродинамика»; мето-

дические разработки лекций; пособия к лабораторным работам по курсу «Экспериментальная физика» (совместно с доцентом Б.П. Виравым).

9) Участие в конференциях, совещаниях, семинарах

Преподаватель вуза проходит хорошую школу, принимая участие в конференциях, совещаниях, семинарах разного уровня, на которых докладываются результаты научных или методических исследований. На них даётся оценка деятельности преподавателя наиболее компетентными и заинтересованными лицами. Кроме того, преподаватель получает информацию о деятельности своих коллег, перестаёт «вариться в собственном соку». Подводя итог, можно охарактеризовать систему развития профессиональных компетенций преподавателя вуза следующим образом:

Во-первых, фундаментальная подготовка;

– во-вторых, систематическая упорная самостоятельная работа по самообразованию и повышению научного уровня;

– в третьих, методическая работа по разработке и совершенствованию преподаваемых дисциплин;

– в четвёртых, творческий подход к работе, педагогический поиск, внедрение новых форм и методов преподавания;

– в пятых, всестороннее обсуждение с коллегами достижений науки и методики преподавания;

– в шестых, разработка учебных пособий и методических рекомендаций.

Юмористические рассказы Сусанны Маврикиевны

Поэма о топоре

Мои братья – старший Вадим и младший Андрей, отличались крайней неразговорчивостью. Я была своего рода посредником между ними, переводя междометия с языка одного братца на язык другого. В итоге у нас троих получался очень слаженный разговор.

Но вот однажды ... Было это в конце октября. Родители отдыхали в Кисегаче. Старший брат, уже женатый, навестил нас после работы. Братья заняли обычные места по разные стороны дивана и впали в привычное состояние крайней задумчивости. Я уже собиралась было приступить к своему делу – их «разговаривать». И вдруг Вадим изрек: «Собираюсь в поход». «Вот это да!» – подумала я и пошла скорей на кухню чистить картошку на ужин братцам. Начистила половину внушительной кастрюли и вошла в комнату как раз вовремя. Младший важно отвечивал: «Да!».

Я дочистила картошку, потрясенная болтливостью братьев, и пришла опять вовремя, чтобы услышать, как младший вопрошал: «Топор нужен?» Затем последовало длительное молчание, в течение которого я варила картошку. Вернулась как раз, когда старший ответил: «Да!».

Я пошла на кухню, картошка сварилась. И мы сели ужинать со всякими добавками к ней.

Когда вернулись родители, я в лицах рассказала все это необыкновенное событие. Папа, наделенный большим чувством юмора, назвал эту выдающуюся семейную историю – «Поэма о топоре».

Наш папа – рыбак (серия зарисовок с натуры)

1. Наш папа, Маврикий Сергеевич Горяинов, был главным инженером Химфармзавода. Выйдя на пенсию, он увлекся рыбалкой. Река была рядом, в конце улицы Володарского. Он попросил разрешения у знакомого – директора крупозавода, чтобы его

пропускали к реке, и подолгу там пропадал. Рыба хорошо клевала, и они с мамой все лето питались свежей рыбкой.

Потом начались проблемы с экипировкой. На рыбалку папа ходил в некогда очень модных польских брюках – светло-серых, в мелкий вельвет. Надо отметить, что папа в бытность главным инженером много вращался в дамском обществе высокого ранга (Горздрав, Облздрав, главные врачи) и поэтому всегда был одет с «иголочки».

Рыба тоже признавала эту модную одежду и дружно клевала. Но все не вечно! И брюкам пришел конец, – они, как водится, протерлись на обычном месте. Папа обратился к маме на предмет ремонта. Мама ответила отказом – в этом месте ремонтировать уже нельзя. Предложила папе использовать другие брюки. Он провел испытания, но рыба полностью проигнорировала новую одежду. Тогда он обратился ко мне, но получил отказ, то же было и с Нэлей (снохой). Пришлось папе самому взяться за это дело, т.е. за ремонт. Первым делом надо было найти подходящий материал, главное, прочный, чтобы хватило надолго. В закромах у мамы такую ткань папа отыскал. Это было бывшее покрывало на диван из плотной мебельной ткани, х/б, некогда яркой, как считали, турецкой расцветки – по красному полю синие загогулины, так называемые в народе огурцы. Со временем краски потускнели, но все равно не утратили свой колорит. Как ни смеялась мама до слез, как ни отговаривала я, папа решил, что это то, что надо. Дело в том, что папа был дальтоник.

Наступила зима, и он занялся ремонтом. В ход шли, видимо, леска и шило. Сделано было все крепко. К весне работа была закончена. Папа гордо отправился на реку – испытывать изделие. Рыба отчаянно клевала. По-видимому, привлеченная экзотическим небом в турецкую расцветку. С тех пор папа не расставался с этой одеждой.

2. У папы была кожаная куртка. Она существовала «с доисторических времен» – еще до знакомства с мамой. Приехала с ним в Челябинск и служила ему «верой и правдой». Естественно, стала неотъемлемой частью гардероба рыбака. Со временем куртка приобрела фантастическую, я бы сказала, хипповую расцветку. Дело в том, что папа заменял изношенные детали новыми лоскутами, которые он выкраивал из моих старых сумок. Сумки, правда, тогда были кожаные, сравнительно дешевые, но расцветки были самые разные. Тут я дала ему весьма дельный совет. У папы был друг – Кирилл Александрович, директор обувной фабрики (ныне «Юничел»). К.А. недавно вернулся из Италии, и фабрика приступила к изготовлению потрясающей модельной обуви. «Надо попросить у Кирилла Александровича баночку лака покрыть куртку». Лак был выделен и началась эпопея с покраской.

Даже папа сразу понял, что красить можно только в подвале. У нас там у всех жильцов были свои сарайчики. Красилась куртка долго, так как даже папин энтузиазм и привычка к отравленному воздуху на заводе не позволяли долго находиться в месте покраски. Но к весне куртка отвиселась в подвале и перестала пахнуть. Папа продемонстрировал нам новое изделие. Вид был более приличный, чем до покраски. Весной прошло первое испытание. Рыба не возражала. Возражали мыши и тараканы нашего подвала. Они очень обиделись на папу и на некоторое время нас покинули.

3. Как-то папа посетовал, что во время дождя вода с куртки стекает прямо в его болотные сапоги. Я посоветовала ему подшить внизу куртки клеенку. Сделать так, чтобы ее можно было подгибать под куртку, если нет дождя. Папе идея понравилась. Он отправился, как выяснилось, в ближайшую аптеку, где и поделился с доброжелательными аптекаршами своей проблемой. Они ему щедро выделили аж целых две клеенки нежно-розового цвета, младенческие. Папа очень довольный приступил к работе. Мы с мамой все-таки его кое-чему научили, хотя бы не надеяться на нас. Все было сделано аккуратно и в сухую погоду не заметно. Ну, а в дождь людям обычно не до того, чтобы кого-то рассматривать. То же касалось и рыб. Они все папины нововведения принимали доброжелательно.

4. Но как-то раз пришел нас провести после работы Кирилл Александрович. Спросил, где Маврикий. Мама сказала, что он вот-вот появится с рыбалки, тем более, что начал моросить дождь. И папа появился во всей красе! На голове старая серая фетровая шляпа, черная блестящая куртка, а из-под нее свисает на сапоги нечто вроде юбочки нежно-розового цвета. Сразу видно, что детская клеенка, правда, не использованная младенцами. Но всё равно... Кирилл Александрович был в шоке – всегда элегантный Маврикий, и тут такой вид! Он в ужасе замахал руками и бросился бежать от этого зрелища. Но скоро он навестил нас снова.

5. Как-то раз мама из любопытства решила навестить папу на рыбалке. Она всегда очень следила за собой, хорошо одевалась, подкрашивала губы. Вид у нее всегда был нарядный и привлекательный. Её появление на берегу произвело фурор. Все местные рыбаки были потрясены. Оказывается, у Сергеича – так они звали папу – такая приличная жена! Надо же, а они-то думали... Так что рейтинг папы, как мы теперь бы сказали, резко повысился. Правда, на рыбе это не сказалось, ни в ту, ни в другую сторону.

6. Однажды папа пришел раньше обычного какой-то очень довольный и, как мама быстро выяснила, «тепленький», т.е. в подпитии. Такого на рыбалке с ним за много

лет не было, да и откуда могло взяться на берегу Миасса. Папа очень охотно поведал нам всю историю. Оказалось, на берегу появились двое мужичков совсем городского (не рыбацкого) вида, но с удочками. Они деловито воткнули удочки в берег и приступили к запланированному отдыху. Для этого была извлечена необходимая «поллитра» и килька в томатном соусе. Но возникла проблема – их всего двое, а как известно, на всей территории СССР «поллитра» без остатка, до последней капли, делится на троих. И тут они узрели папу, стоящего в сапогах в воде в своем живописном наряде. Состоялось приятное знакомство. Все проблемы с распитием «поллитры» спокойно были решены. И довольная тройца весьма качественно отдыхала, как и было задумано. Конечно, происходил обстоятельный разговор «за жизнь»: выяснили все друг про друга. Когда папа сказал, что каждый день рыбачит, один из новых друзей с восхищением произнес: «Это ж какие деньги надо иметь!».

Греческая богиня и муха

Я работала первый год в школе. Была у меня в 9 классе одна ученица – очень красивая. Я ее про себя называла греческой богиней. Высокая, статная, огромные серые глаза, правильные черты лица. Всегда невозмутимая – просто изваяние из мрамора.

Эта богиня сидела за первым столом и никогда никакого интереса к физике не проявляла. И вдруг на одном уроке во время моего объяснения нового материала я увидела на ее лице выражение крайнего интереса. Понимая, что этот интерес вызван отнюдь не физикой, я все-таки решила полюбопытствовать, что же могло возбудить такую мраморную холодность? Не прерывая объяснения, сошла вниз, обогнув преподавательский стол, чтобы увидеть её сбоку. Оказалась, она поймала муху и развлекается ею – то отпустит, то снова придавит.

Вихрем пронеслось у меня в голове – как быть? Если в своем обычном ехидно-остроумном стиле прокомментировать это событие, то урок будет сорван. Пришлось пожертвовать уже готовыми сорваться репликами ради учебного процесса. Богиня все поняла, закрылась рукой и давай беззвучно смеяться. Я отвернулась от класса, возвращаясь на место, и тоже с ней вместе пересмеялась. Так и шел урок. А весь класс недоумевал. Видно было, что Сусанна Маврикиевна еле сдерживает смех, но что ее так насмешило, никому видно не было.

Вот такая история про греческую богиню и муху. А я, пожалуй, впервые почувствовала себя учителем, очень пожилым и умудренным этим опытом!

Подхалим

Я первый год работала в 1-й школе. Как водится, начинающему учителю дают самые проблемные классы. В моем случае это были четыре шестых класса, в которых начиналась физика. Наполняемость классов – 48 учеников. А в кабинете физики всего 10 столов амфитеатром, рассчитанных на 40 учеников. Вот и приходилось ещё 8 шестиклашек сажать по 5 человек. Сидели они впритык и, естественно, весь урок толкали друг друга. От этого происходил шум и ни о какой дисциплине речи быть не могло. По советам опытных учителей школы я применяла строгие меры – записать в дневнике для родителей, поставить на ноги... Но дисциплина от этого не улучшалась, так как столов больше не становилось, их просто некуда было помещать.

И вот однажды подбегает ко мне один из самых «отпетых» учеников перед началом занятия: «Сусанна Маврикиевна! Спросите меня. Я сегодня выучил!». Тут меня осенило: «Не буду тебя спрашивать. Ты хулиганишь на уроке, мне и ребятам мешаешь. Вот будешь сидеть хорошо и учить, я тебя через некоторое время спрошу».

И начал этот ученик стараться, руку поднимает, ставя на локоток, не кричит «Я» и вроде бы учит. В награду был спрошен по домашнему заданию, заслужив многострадальную «пятерку».

С тех пор был установлен новый порядок: спрашиваю только тех, кто хорошо сидит и хорошо учит. Шестиклассники этот порядок приняли на «Ура!» и вовсю старались. Произошла переоценка ценностей.

Я со своей стороны тоже старалась делать уроки максимально интересными, на каждом уроке обязательно много опытов, причем приглашала учеников помогать проводить их.

Вот как-то раз была новая тема «Удельный вес». Я объявила, что сегодня помогать пойдут 4 человека. Класс возликовал. Все радостно завопили: «Я»! Я назвала первую фамилию (Петров, например). Тут раздался дружный разочарованный рев: «О-о-о!». И сквозь этот рев прорвался чей-то горестный вопль: «Сусанна Маврикиевна! Он подхалим! Он нарочно хорошо сидит!».

ЧП в 10-первом

Я работала в 1-й школе второй год и была классным руководителем в 10-первом классе (выпускном). По традиции десятые-первые классы были образцово-показательными. Наш класс по мере сил и способностей следовал этой традиции. Надо сказать, что я приняла класс от Виталии Вячеславовны, которая была у них классным руководителем с 5 по 9 класс. Но её сделали завучем по английскому языку и класс передали мне. Дети относились ко мне дружелюбно. Они, как мне казалось, с интересом и долей юмора наблюдали все мои выходки. Конечно, никакого педагогического опыта и педагогического мастерства у меня не было и быть не могло. Поэтому во всяких нештатных, как говорили космонавты, ситуациях не применяла набор приемов, которыми владели маститые педагоги школы. Дети с интересом ожидали, что я в очередной раз выдам. Это их здорово развлекало. Тем более, что и предвидеть мою реакцию было невозможно.

Вот как-то раз прихожу я в школу к 12 часам дня. Уроки физики в этот день были только во вторую смену. Захожу в учительскую, и тут ко мне бросаются оба завуча – Ираида Андреевна и Виталия Вячеславовна: «Сусанна Маврикиевна! У Вас в классе ЧП! Ужасное! Ваш Дегтярев! (кстати, красивый интеллигентный мальчик). Он целый день сегодня с самого утра ходит по школе в одних носках! Это такое хулиганство! Такое безобразие! Мы чего только с ним не делали – в учительскую вызывали» (надо полагать, тоже в одних носках – это я про себя думаю), родителям в дневнике написали, а он все ходит!». Я выдвинула свою версию – на спор, наверное!

«Нет, это просто возмутительно, такое творится в Вашем классе», - продолжают кипятиться они, словно случилось и впрямь что-то ужасное! «Примите меры!».

Пошла принимать какие-то меры. Тогда у каждого класса была своя классная комната, где проходили основные уроки. Как раз началась большая перемена. Захожу. Несколько учеников, включая героя ЧП, стоят в конце класса у окна. Ждут, что будет. Сажусь на первую парту в среднем ряду. Тут хулиган гордо продефилировал мимо меня в одних носках. А я спокойно поинтересовалась: «Не противно?». Он развернулся и пошел обуваться. Вот и все!

Моя шерлокиана (Дело о похищенных журналах)

Я работала на кафедре ассистентом после аспирантуры 2-й год. Было это в конце 60-х. Старшим лаборантом работала Мадана Фахриевна Буранбаева. Она училась на ОЗО по географии и была материально ответственная. В июле, когда все ушли в отпуск, М.Ф. получила диплом, назначение в школу в некую деревню и уволилась с кафедры. Имущество кафедры принимали у нее специально назначенные работники вуза.

Когда мы вышли из отпуска, нас «огорошили» сообщением, что у М.Ф. обнаружилась колоссальная недостача журналов. Они хранились на кафедре, и Мадана Фахриевна выдавала их нам, как положено, занося сведения в формуляры. Начали нас везде и всюду склонять – дескать преподаватели разворовали огромное количество журналов. А журналы были по физике – дорогие, иностранные и отечественные. Требовали, чтобы мы компенсировали деньгами эту недостачу бедняжке-лаборанту. Сумма была внушительная, порядка месячной зарплаты всех членов кафедры вместе взятых.

Но почему-то ни Свирский М.С. – заведующий кафедрой, ни Клещев Г.В. никак на эти обличения не реагировали.

В начале ноября у меня стало полегче с нагрузкой и я поинтересовалась в библиотеке, учитывали ли они журналы, которые преподаватели взяли себе домой с росписью в формулярах. Ответственная за приемку журналов у М.Ф. работник библиотеки В. (так назовем ее для краткости) объяснила мне, что они не вносили в недостачу эти журналы, так как преподаватели сами за них отвечают.

Я пришла на кафедру и решила это проверить. Взяла свой формуляр и листы недостачи. И обнаружила любопытное дело. Примерно через 3–4 записанных журнала в моем формуляре – где-нибудь 4–5-й журнал оказывался в листе недостачи. Не все подряд записывались, а через несколько... Таких «недостающих» журналов (т.е. записей о них) я обнаружила у себя 5 штук! Сообщила об этом М.С. Он спокойно сказал, что библиотека таким способом хочет получить от нас деньги, чтобы приобрести дополнительную литературу. Я попросила разрешения у М.С. проверить формуляры всех членов кафедры. Согласие было дано. Обнаружила аналогичную историю в формулярах всех без исключения. Таким образом, часть недостачи оказалась фальшивой.

После этого с разрешения М.С. я занялась тотальной проверкой всех журналов, хранящихся на кафедре. Это было кропотливое дело и очень длительное. Мошенникам

(а это стало ясно) было проще. Они выхватывали с полки журнал и заносили его со всеми данными, включая инвентарный номер в лист недостачи. Мне же приходилось скрупулезно просматривать всю годовую подписку данного журнала за много лет, чтобы выловить некий фальшивый «уворованный» журнал. Работу я проводила втайне, знал об этом только М.С.

К Новому году всё было закончено. Я не нашла следов только 3–4 журналов. Затем, по-видимому, М.С. предпринял определенные меры. После Нового года вдруг объявилась приехавшая М.Ф. Моисей Соломонович ей объявил: «Сусанна Маврикиевна провела большую работу и поможет Вам, Мадана Фахриевна, ликвидировать недостачу». Но М.Ф., оказывается, вовсе не желает этим заниматься. Тогда М.С. очень веско объяснил, что в противном случае ей придется выплачивать всю сумму из своей зарплаты. Пришлось М.Ф. смириться. В помощь ей дали юношей-студентов относить в библиотеку найденные журналы для списания. А журналы по списку вытаскивала с полок я.

Так прошел день. А на следующий день по просьбе М.С. все преподаватели принесли отмеченные мною в их формулярах журналы. И снова бедняжка-лаборант должна была со студентами предъявлять для списания эти якобы недостающие журналы. Так было закрыто дело о похищенных журналах.

Нашелся, правда, один тип на факультете, который заявил: «Они (преподаватели) испугались, что всё проверяют и все журналы быстро принесли!». Хотя этих журналов были сотни!

Пропавшие часы

Летом мы любили отдыхать в нашей «Чайке». Как-то подходит ко мне наша преподаватель Т.Н., которая отдыхала с двумя со своими детишками – 3 и 5 лет. Обращается ко мне с просьбой, не найду ли я ее пропавшие часы. С утра не может их найти, а без часов очень неудобно. Пошли мы с ней в домик, где у нее была комната. Я спросила, где чья кровать – где Тани, где Сережи, где Т.Н. Подошла к кровати Т.Н. Она показала, что вечером часы лежали на уголке тумбочки у кровати. Всё ясно. Я повернулась к ее аккуратно заправленной постели, засунула руку в прорезь пододеяльника (в сторону ног) и вытащила пропавшие часы!

Как найти племянника или иголку в стоге сена

Было это летом, в начале 1980-х. Племянник Вадик (школьник) с секцией спортивного ориентирования уехал в Москву на сборы. Перед отъездом мы договорились встретиться в Москве. Он объяснил, что спортшкола, в которой они будут размещаться, находится в районе метро Ново-Гиреево, там еще есть универмаг «Перовский». Школа – двухэтажное здание, находится во дворе обычной средней школы. Адреса он не знал.

Приехав в Москву, я целую неделю обзванивала по справочнику спортшколы. В ответ было молчание. Еще бы, июль – время отпусков! Решила в субботу ехать и искать Вадика по его скупой информации. Вышла из метро на станции «Ново-Гиреево». Куда же податься? Кругом Москва многомиллионная. Рядом со станцией метро был кинотеатр. В нем в это время шли фильмы Международного кинофестиваля. Естественно, дежурили милиционеры. Я – к ним со своей проблемой: «Не знаете ли вы, где-нибудь здесь привезли на сборы детей?». «Нет, не знаем», – отвечают. «А нет ли здесь где-нибудь спортшколы во дворе обычной школы?». Тогда один милиционер вспомнил, что вроде бы есть. И указал направление: прямо, вон по той улице за универмагом, потом налево, направо и т.д.

Пошла по указанной схеме. И в самом деле пришла. Стоит многоэтажная средняя школа, во дворе двухэтажное кирпичное здание. Но явно необитаемое, т.к. стекла разбиты и все закрыто. На крыльце средней школы сидит сторож, читая газету. Я – к нему со своей проблемой: «А нет ли где-нибудь еще такого же сочетания?». Он подумал: «Есть, – говорит, – только там спортшкола по шахматам». «Ну все равно пойду». Он объяснил направление. Шла-шла и пришла-таки.

Стоит средняя школа на краю сквера, а с другой стороны сквера – двухэтажное кирпичное здание. Через сквер оживленно двигаются мужчины в основном в тренировочных костюмах и с полными трехлитровыми банками пива. Понятное дело, суббота. Вряд ли им до каких-то детских сборов. Но в отдалении, у самой клумбы, заметила я очень привлекательного молодого человека. Он был в светлых брюках, голубой шелковой рубашке, весь такой аккуратный и собранный, и читал газету. Вот к нему я и подошла: «Я ищу своего племянника. Он где-то здесь на сборах!». А он в ответ: «Как фамилия?».

«Да Вы можете не знать, он из Челябинска», – отвечаю я. А он: «А я сам из Челябинска. Я их старший тренер!». Выяснилось, что Вадик пробежал дистанцию и сейчас появится из-за угла. Он нисколько не удивился, что я его нашла. Так я нашла иголку в стоге сена.

Дуоденальное зондирование, или Вульгарный натурализм в стиле Зощенко

Я работала уже четвертый год на кафедре после аспирантуры и попала в стационар студенческой больницы. Много было там со мной всяческих весьма специфичных для больницы событий.

Вот одно из них – дуоденальное зондирование. Как-то утром пришла медсестра и сказала, что мне сегодня назначено это самое дуоденальное зондирование. Что это такое, – я узнаю, пойдя с ней. Пришли в некий кабинет. Стоит сбоку около раковины кушетка, почему-то обитая клеенкой. Сажают меня на эту кушетку и предлагают глотать ужасную вещь – какую-то трубку с грузилом на конце. Опытная медсестра ловко толкает в меня грузило, невзирая на то, что я давлюсь, задыхаюсь и пытаюсь вытолкнуть это устройство. Затолкав поглубже, она ушла, сказав мне, чтобы я сама дальше заглатывала. Делать нечего, пришлось самой трубку заталкивать в себя. Очень старалась. Вдруг вбегает медсестра и в ужасе кричит: «Ты что делаешь? Ты проглотил всю трубку, а как я за нее отчитываться буду?». А откуда я знала, до какого уровня ее глотать? Медсестра вытащила кусок трубки обратно и для большей надежности завязала у меня во рту узлом. Надо понимать, чтобы в горло не пролезло. Затем положила меня на кушетку, голову свесив, и дала в руки шприц. На полу около моей головы пристроила штатив с кучей пробирок. Объяснила: «Тебе все равно делать нечего. Берешь шприц и через каждые 10 минут, развязав узел на трубке, вставляешь в нее шприц и отцеживаешь, что выйдет, в очередную пробирку». Получив такие указания, я занялась делом. Через некоторое время снова объявилась медсестра и протолкнула трубку еще глубже, оказывается в печень. Началось отцеживание желчи.

Тут медсестра взялась за меня как следует. Сначала нагрела под краном какую-то пол-литровую бутылку. Затем посадила меня на кушетку, пристроила к трубке воронку и начала вливать в меня содержимое бутылки. Еще не вся жидкость была в меня влита, как я потеряла сознание. Опытная медсестра тут же положила меня,

как я обнаружила, придя в сознание, головой к раковине. С помощью достаточного количества воды, щедро поливая мою голову и всё, что рядом, привела меня в чувство. Я поняла, зачем кушетка обита клеенкой. Видимо, не я первая.

Но дальше мой организм повел себя непредсказуемо. Только медсестра посадила меня, как тут же началось извержение из меня всяких жидкостей. Хлестало через трубку, помимо трубки и вместе с самой трубкой. Увидев это, медсестра стала кричать: «Ты её прикусывай, а то снова придётся всё глотать!». Устрашенная этой перспективой, я старалась прикусывать каверзную трубку, которую мой организм пытался вытолкнуть. Наконец, извержение прекратилось. Затолкала медсестра в меня трубку снова на нужную глубину. Потом нас с клеёнкой отмыли, вытерли. Оказалось, что в меня вливали магнезию. Я поинтересовалась, зачем. Оказалось, чтобы желчь лучше отходила. Ну что же, новая расцветка моего халата показала, что желчь отошла хорошо. Как оказалось, чересчур хорошо.

И тут начался, оказывается, второй этап дуоденального зондирования. На сей раз меня уложили на правый бок с грелкой в районе печени. Опять поставили тот же штатив с пробирками. Снова, свесив голову почти до пола, я должна была что-то отцеживать. Наступил первый сеанс связи, но ничего не отцедилось. Так же было и с последующими.

Тут появились знакомые сапоги – лечащий врач. Она спросила: «Ну как она?». Я по наивности решила, что это про меня. Но медсестра поняла правильно: «Не отходит!». Ага, значит, это про желчь. Лечащие сапоги дали указание: «Надо сделать укол атропина. Наверное, спазм. Пусть снимет». Атропин, кстати, применяют в виде капель окулисты, когда надо расширить зрачок.

Сделали укол атропина. Он свои офтальмологические обязанности хорошо знал и быстро домчавшись от весьма далекого от головы места, хорошо расширил мои зрачки. Никакая желчь при этом так и не отошла. Тогда лечащий врач заявила: «Надо ее отвести в рентгенкабинет. Посмотреть, как там трубка, может она загнулась?». На сей раз это было про меня!

Рентгенкабинет располагается в поликлинике на 1 этаже, где, конечно, полным-полно обычных пациентов, не из стационара. Я представила себе свое появление там! И сказала решительно: «Не пойду». Меня оставили лежать. Тут пришла ко мне в голову некая идея, а не предложить ли отжать в пробирку часть моего халата? Но благоразумие взяло верх. Всё-таки медики при исполнении, не то, что я, и юмор совсем неуместен. Пришлось похоронить это конструктивное предложение в тайниках души.

Но это было ещё не всё! Вдруг появились сапоги с очень суровым голосом и произнесли: «Ах вот Вы где, Горяинова! А мы Вас весь день ищем. Подошла Ваша очередь идти к стоматологу». Стало совсем интересно, – в каком комплекте меня требуют к стоматологу? Надо учесть, что стоматологический кабинет там же, где и рентгеновский! Всё это вихрем пронеслось у меня в голове, и я дала уже проверенный ответ: «Не пойду!».

Суровый голос изрек: «Вы потеряли свою очередь, а она не восстанавливается», – и исчез из кабинета.

Тогда лечащий врач поинтересовалась, сколько времени я уже лежу. Оказалось, больше 4-х часов. Посмотрев на заполненные пробирки, она сказала: «Нам желчи хватит, что получилось вначале. Можно закончить». Медсестра меня расторопно посадила и ловко извлекла трубку с грузилом. Видимо, побоялась, как бы я на радостях не заглотила подотчетный инвентарь полностью. Затем она поставила меня на пол, придерживав за плечи. Отпустила, убедившись, что я стою, быстро вытолкала за дверь в коридор.

Кое-как, полусонная, найдя свою палату, я добралась до своей кровати, и на ней с комфортом потеряла сознание. Соседки по палате, студентки, привели меня в чувство без медицинского персонала.

На следующий день зрение восстановилось. Я с помощью зеркала исследовала свою ободранную глотку и обнаружила удивительное дело. У меня был единственный к тому времени зуб мудрости, он уже в починку не годился. Так вот оказалось, что верхняя, наружная часть зуба исчезла. Не иначе как мистически – телепатическим эффектом очереди к стоматологу это объяснить было невозможно.

После выписки я дома сформулировала правило: «Лучше глотать по утрам натощак кашку, чем кишку!». Так в моей жизни появился геркулес.

А корень зуба мудрости мне удалили через несколько лет самым прозаическим способом в стоматологической поликлинике на Курчатова. Без всякой мистики и дуоденального зондирования.

Библиографический список

1. Бредов, М.М. Классическая электродинамика: учеб. пособие / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин; под ред. И.Н. Топтыгина. – Санкт-Петербург: Лань, 2003. – 398 с. – ISBN 5-8114-0511-1.
2. Власов, А.А. Макроскопическая электродинамика. Классический университетский учебник / А.А. Власов. — Москва: URSS, 2019. – 232 с. – ISBN 978-5-397-06463-7.
3. Горькавый, Н.Н. Электрический дракон / Н.Н. Горькавый. – Москва: АСТ, 2017. – 251 с. – ISBN 978-5-17-100539-9.
4. Измайлов, С.В. Курс электродинамики: учебник для физико-математических факультетов педагогических институтов / С.В. Измайлов. – Москва: Учпедгиз, 1962. – 439 с. – ISBN 978-5-4458-4466-2.
5. Карцев, В.П. Приключения великих уравнений / В.П. Карцев. – Москва: Провещение, 2007. – 176 с. – ISBN 978-5-09-017957-7.
6. Ландау, Л.Д. Краткий курс теоретической физики: в 2 т. Т. I. Механика. Электродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1969. – 272 с.
7. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. Т. II. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Физматлит, 2012. – 536 с. – ISBN 5-9221-0056-4.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. Т.VIII. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Физматлит, 2005. – 656 с. – ISBN 5-9221-0123-4.
9. Левич, В.Г. Курс теоретической физики: в 2 т. / В.Г. Левич. – Москва: Физматлит, 1962. – Т. I. – 696 с. – Т. II. – 820 с.
10. Матвеев, А.Н. Электродинамика и теория относительности: учебник для педагогических институтов / А.Н. Матвеев. – Москва: Высшая школа, 1964. – 424 с.
11. Мултановский, В.В. Классическая электродинамика: учебное пособие для вузов / В.В. Мултановский, А.С. Василевский. – Москва: Дрофа, 2006. – 352 с. – ISBN 5-7107-9409-0.
12. Пановский, В. Классическая электродинамика / В. Пановский, М. Филипс. – Москва: Физматгиз, 1963. – 432 с.

13. Пеннер, Д.И. Электродинамика и специальная теория относительности: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов / Д.И. Пеннер, В.А. Угаров. – Москва: Просвещение, 1980. – 271 с.
14. Планк, М. Генрих Рудольф Герц / М. Планк // Избранные труды. – Москва: Наука, 1975. – 788 с. – ISBN 978-5-458-33068-8.
15. Свирский, М.С. О скорости распространения света в нелинейной электродинамике / М.С. Свирский // Вестник Московского университета. – 1951. – № 5. – С. 43–51.
16. Свирский, М.С. Электронная теория вещества / М.С. Свирский. – Челябинск, 1972. – 292 с.
17. Свирский, М.С. Электронная теория вещества / М.С. Свирский. – Москва: Просвещение, 1980. – 288 с.
18. Свирская, Л.М. Методологические аспекты курса теоретической физики / Л.М. Свирская // Актуальные проблемы развития среднего и высшего образования. XIV Межвузовский сборник научных трудов. – Челябинск: КрайРа, 2018. – С. 245–251. – ISBN 978-5-6041037-1-5.
19. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: в 5 т. Т. III. Электричество / Д.В. Сивухин. – Москва: Физматлит, 2019. – 656 с. – ISBN 978-5-9221-1643-5.
20. Тамм, И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – Москва: Физматлит, 2003. – 616 с. – ISBN 5-9221-0313-X.
21. Терлецкий, Я.П. Электродинамика / Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. – Москва: Высшая школа, 1990. – 352 с. – ISBN 5-06-001543-2.
22. Тоннела, М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности / М.-А. Тоннела. – Москва: ИЛ, 1962. – 488 с.
23. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике: в 10 т. Т. 6. Электродинамика; пер. с англ. (изд. 9) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Москва: УРСС, 2016. – 352 с. – ISBN 978-5-397-05342-6.
24. Эйнштейн, А. Эволюция физики / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. – Москва: Амфора, 2013. – 304 с. – ISBN 978-5-367-02491-3.

Учебное издание

Горяинова Сусанна Маврикиевна
Свирская Людмила Моисеевна

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
КУРС ЛЕКЦИЙ
В двух частях
Часть II

ISBN 978-5-907210-33-2

ISBN 978-5-907409-25-5

Работа рекомендована РИС ЮУрГГПУ
Протокол № 21 от 2020 г.

Редактор Е.М. Сапегина
Оригинал-макет О.Э. Карпенко

Издательство ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69
Подписано в печать 10.01.2020. Формат 84 × 108 ¹/₁₆
Объем 7,07 уч.-изд.л. 22,37 усл. п.л.
Тираж 100 экз. Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69