МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Использование вычислительных экспериментов со случайными числами для изучения теоретико-вероятностных закономерностей в профильных классах старшей школы

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
90,03% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
______________ Шумакова Е.О.

Выполнил:
Студент группы ОФ-513-204-5-1
Юрзин Роман Сергеевич

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Нигматулин Равиль Михайлович

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Тенденция развития современной образования заключается в том, чтобы вместе со знаниями школьного предмета были сформированы навыки практического применения полученных знаний и умений. Такое требование выдвигает системе образование современное общество. Таким образом, первостепенной образовательной задачей современной школы и школы будущего становится формирование универсальных учебных действий, умений и навыков, а также навыков самостоятельной деятельности обучающихся. Совокупность всех требований, которые обязательны при реализации среднего общего образования, прописана в федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования и в примерной образовательной программе среднего общего образования [16;19].

Для того, чтобы обеспечить приближенный к идеалу портрет ученика, прописанному в стандарте и образовательной программе, возникла необходимость значительного обновления содержания курса, просвещенного изучению теории вероятностей и математической статистики, с целью повышения качества и эффективности обучения учащихся старшей школы.

Стоит выделить информационную составляющую современной математики. Вместе с развитием электронно-вычислительных машин стартовало новая эра математических открытий. Таким образом, применение информационных технологий при обучении математики является обязательным требованием освоения математического курса в школе.

Для освоения математической дисциплины на профильном уровне, необходимо овладеть знаниями и умениями в области теорий вероятности и математической статистики. При изучении теории вероятностей, ученики учатся владеть умением анализировать рассматриваемый вопрос, обобщая и ища пути, необходимые для решения поставленной задачи. Посредством этого формируется мышление школьников, что помогает при развитии их речи, особенно таких качеств выражения мысли, как ясность, порядок, обоснованность.

Анализ учебников Ш.А. Алимова [11], А.Г. Мерзляка [6], С.М. Никольского [12] и А.Г. Мордковича [7] из федерального перечня учебников [17] и работа Гулиева Э. Н. «Стохастическая компонента в школьном образовании как необходимый элемент математической культуры учащихся» позволяют сделать вывод, что предлагаемые в учебниках задачи из курса теорий вероятности и математической статистке не позволяют сформировать на качественном уровне понимание принципов формирования теоретико-вероятностных закономерностей, что ослабляет уровень освоения математической дисциплины [2]. А Нахман А.Д. в своей статье «Элементы теории случайных величин в содержании математического образования», рассматривая «Случайные величины» в качестве возможного элемента обновления содержания математического образования в старшей школе (на углубленном уроне изучения математики), формирует понятие стохастической линии обучения математики в профильных классах старшей школы, но не использует при этом наглядной демонстрации решения поставленных задач [8].

Одним из способов, который позволит учителю наглядно продемонстрировать учащимся формирование теоретико-вероятностных закономерностей и разить стохастическую линию на более углубленном уровне, может служить использование на уроках математики в профильных классах в старшей школе задач, требующих использование вычислительных экспериментов со случайными числами для поиска теоретико-вероятностных закономерностей. А современные программные продукты (например, Geogebra, Wolfram Alpha и др.) или знание языков программирования (например, Object Pascal, Python и др.) позволят наглядно продемонстрировать решение поставленной задачи, достигая при этом не только предметного уровня освоения материала, но и межпредметных связей и совершенствуя компьютерную грамотность. Такой подход к обучению элементам теории вероятностей и математической статистики предлагает Далингер В.А. в своей работе «Информационные технологии в обучении учащихся теории вероятностей и математической статистике» [3].

Таким образом, цель работы – разработать методические рекомендации и подобрать задач для изучения теоретико-вероятностных закономерностей с использованием вычислительных экспериментов со случайными числами в профильных классах старшей школы

Задачи работы:

– изучить методические особенности преподавания теории вероятностей математической статистики в профильных классах старшей школы;

– провести анализ учебных пособий по алгебре и началу математического анализа углубленного уровня для 10-11 классов;

– решить задачи, использующие для своего решения вычислительные эксперименты со случайными числами для изучения теоретико-вероятностных закономерностей, и сформулировать методические рекомендации к ним;

– разработать методическое сопровождение деятельности учителя по использованию вычислительных экспериментов со случайными числами для изучения теоретико-вероятностных закономерностей.

ГЛАВА 1. ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

1.1 Методические особенности преподавания теории вероятностей и математической статистики

Теория вероятностей и математическая статистика – одни из ценных и важных разделов, которые не только формируют предметные навыки и умения в изучении математической дисциплины, но и носить практически значимый характер. Каждый день человек сталкивается с такими понятиями, как вероятность (например, в прогнозе погоды) и статистика (например, колебание валюты за месяц). Таким образом, очень важно сформировать у учащихся на качественном уровне понимание темы «Теория вероятности и математическая статистика».

Однако, при введении стохастической линии в курс, посвященный теории вероятностей и математической статистики, и формирование у учащихся понимания того, как формируются теоретико-вероятностные закономерности, возникают некоторые методические проблемы, которые связанны с пониманием учащимися вероятностно-статистических задач и их решения. Учитель должен сформировать у учащихся понимание о взаимодействии изучаемой дисциплины с реальным миром. Поэтому, при обучении школьников в темах «Теория вероятностей и математическая статистика», не должны использовать только готовые статистические модели вероятностей [1]. В свою очередь, Нахман А. Д. в своей работе «Вопросы содержания и технологические приёмы обучения стохастике в школьном курсе математики» утверждает, что для освоения стохастической линии в школьном курсе математики необходимо использовать конкретные модели при решении задач, более того, учащиеся должны самостоятельно обнаружить определенные математические закономерности [9].

А Овшинова О.Г. в своей работе «Изучение элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики» утверждает, что методической проблемой изучения темы «Теория вероятностей и математическая статистика» заключается в том, что большинство учебников, используемых при обучении учащихся, либо записаны по учебным пособиям для преподавания в высших учебных заведениях, либо анализировались авторами путем сравнения с ними [10]. Таким образом, изучение данных тем, является сложным как для самих учащихся, так и для учителя.

Одно из методических особенностей преподавания теории вероятностей и статистики в школе, позволяющая облегчить изучение учащимися этой темы, является применение электронно-образовательных ресурсов. Например, Бунимович Е.А. в своем учебном пособии «Основы статистики и вероятности» предлагает использовать компьютер при решении некоторых задач [1].

Выделим несколько электронно-образовательных ресурсов, которыми можно воспользоваться при изучении различных тем по теории вероятностей и математической статистики.

1. Российская электронная школа [15].

Российская электронная школа – это электронно-образовательный среда, включающий в себя интерактивные уроки, которые охватывают весь школьный курс и разрабатываются с учетом федерального государственного образовательного стандарта. Для каждого урока предусмотрена публикация дидактических и методических материалов. Российская электронная школа создана при поддержке правительства Российской Федерации.

На образовательном портале «Российская электронная школа» разработаны 5 уроков по темам «Вероятность события. Сложение вероятностей», «Условная вероятность. Независимость событий», «Вероятность произведения независимых событий», «Формула Бернулли», «Геометрическая вероятность» из раздела «Теория вероятностей» для 11 класса и только 1 урок из раздела «Математическая статистика» для 10 классов на тему «Начала статистики».

Каждый урок имеет следующую структуру:

1) дополнительные материалы, которые включает в себя тезаурус и список используемой литературы;

2) конспект урока;

3) урок, который включает себя пункт «Начнем урок» (тема урока, предисловие по теме, запись о том, чему ученики научаться, что узнают и смогут, цель и задачи урока, а также небольшая задача по теме урока), пункт «Основная часть» (небольшой видеоролик по теме урока, задача по изученной теме и важный теоретический материал) и пункты «Тренировочное задание», «Контрольные задания В1», «Контрольные задания В2».

Отметим, что большинство используемых на интерактивных уроках задачи имеют прикладной характер. Они сформулированы таким образом, чтобы у учащихся появилась взаимосвязь между изучаемой на уроках математики темы и реальной жизнью. Однако в уроках не предусмотрено развитие стохастической линии изучения математики, отсутствует формирование понимания понятия «случайная величина».

2. Электронно-образовательный ресурс для решения задачи Бюффона [14].

Задача Бюффона имеет следующую формулировку. Пусть дана плоскость, которая размечена параллельными линиями, расстояние между которыми равно 1. Случайным образом, на эту плоскость бросают иглу длиной 1. Определите вероятность того, что данная игла пересечет любую размеченную прямую. Отметим, что благодаря решению поставленной задачи, можно приближенно вычислить число π.

Для наглядного решения задачи Бюффона и демонстрации приближения числа к числу π, можно воспользоваться электроннообразовательным ресурсом (рисунок 1). Данный ресурс использованием анимационных эффекты бросания иголки на разлинованную плоскость, сопровождаясь указателем в виде стрелки. Если иголка пересекает линию, то она и указатель подсвечивается зеленным цветом, в противном случае красным. Параллельно анимации, строится гистограмма приближения получаемого по формуле числа к числу π. На панели инструментов электронного-образовательного ресурса предусмотрены выбор скорости подсчета (анимации), пошаговое выполнение моделирование выбрасывания иглы, кнопка паузы и рестарта. Отметим, что данный ресурс может строить модель решения задачи Бюффона в общем виде при условии, что длина иглы превышает расстояние между размеченными линиями или меньше его.

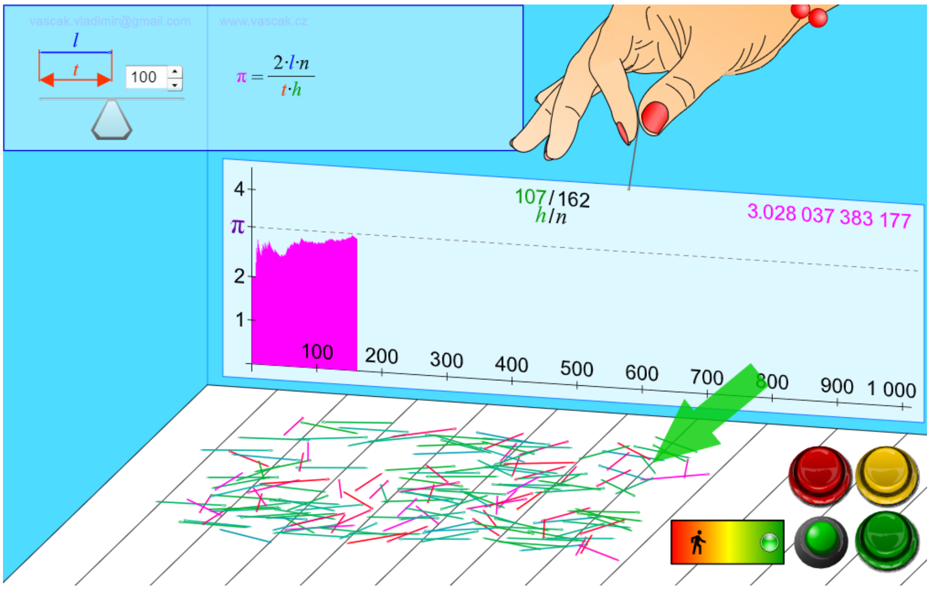


Рисунок 1 – Электронно-образовательный ресурс для решения задачи Бюффона

Количество подобных электронных образовательных ресурсов, позволяющих изучать различные темы по теории вероятностей и математической статистики размещенных на сайте федерального центра информационно-образовательных ресурсов и на федеральном хранилище единой коллекции цифровых образовательных ресурсов, достаточно велико [13;18]. Благодаря этому, можно сделать вывод о широком использовании электронных образовательных ресурсов в образовательной деятельности учителя математики, в частности, при изучении различных тем по теории вероятностей и математической статистике.

Особый интерес вызывают предметные результаты освоения курса математики, прописанные в федеральном государственном образовательном стандарте и примерной основной образовательной программе среднего общего образования [16;19].

1. Выделим результаты освоения раздела «теория вероятностей и математическая статистика», представленные в федеральном государственном образовательном стандарте [19].

«Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (базовый уровень) – требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать:

– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

– владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

«Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» (углубленный уровень) – требования к предметным результатам освоения углубленного курса математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

– владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

2. Выделим некоторые результаты освоения раздела «теория вероятностей и математическая статистика», представленные в примерной основной образовательной программе среднего общего образования [16].

Предметные результаты, достигаемые на базовом уровне изучения раздела «теория вероятностей и математическая статистика»:

1) выпускник научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: частота и вероятность события, случайный выбор.

2) выпускник получит возможность научиться:

– иметь представление о дискретных и непрерывных случайных величинах и распределениях, о независимости случайных величин;

– иметь представление о нормальном распределении и примерах нормально распределенных случайных величин;

– понимать суть закона больших чисел.

Предметные результаты, достигаемы на углубленном уровне изучения раздела «теория вероятностей и математическая статистика»:

1) выпускник научиться:

– оперировать понятиями: частота и вероятность события, сумма и произведение вероятностей, вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

– иметь представление о дискретных и непрерывных случайных величинах и распределениях, о независимости случайных величин;

– понимать суть закона больших чисел;

– иметь представление о нормальном распределении и примерах нормально распределенных случайных величин.

Достижение представленных результатов и сами приметные результаты можно назвать методической особенностью преподавания теорий вероятности и математической статистики, позволяющие учителю формировать представление об использовании тех или иных методов работы с учащимися, подобрать наиболее подходящие для освоения курса, задачи.

Стоит рассмотреть опыт у зарубежных педагогов. Так в своей работе «Study on the Teaching Reform in Probability Theory and Mathematical Statistics» Chunguang Zhao, Haijun Chen, Yulong Zhu среди прочих особенностей преподавания теории вероятностей и математической статистики, выделяю использования «random experiment» (изучение вероятностных характеристик с использованием компьютерной модели) в качестве практической работы [20]. Токай метод работы позволяет обучить учащихся современным компьютерным технологиям, развить у них практические навыки в изучении некоторых тем из курса теории вероятностей и математической статистики.

1.2 Анализ учебников углубленного уровня за 10-11 классы по алгебре и началу математического анализа

Использую выявленные методические особенности преподавания темы «Теория вероятностей и математическая статистика», проанализируем учебники, из федерального перечня учебников, рекомендованные к использованию при реализации программы среднего общего образования авторов: Ш.А. Алимова, А.Г. Мерзляка, С.М. Никольского и А.Г. Мордковича [6;7;11;12].

Одно из методических особенностей преподавания темы «Теория вероятностей и математическая статистика» заключается в том, чтобы предлагаемые ученикам задачи не использовали только готовые статистические модели вероятностей. Рассмотрим системы задач, предлагаемые авторами Ш.А. Алимова, А.Г. Мерзляка, С.М. Никольского и А.Г. Мордковича учебных пособий по алгебре и началу математического анализа для 10-11 классов с углубленным изучением математики.

Ш.А. Алимов в своем учебнике «Алгебра и начала математического анализа» в теме, посвященной математической статистики, зачастую использует системы задач с уже готовой статистической моделью (например, по уже готовой таблице найти среднее квадратичное отклонение). Стоит отметить, что большая часть задач носит содержательный характер и проектируется на реальный мир. Аналогично состоят дела и с системой задач, посещенной теме «Теория вероятности», с одни исключением: большая часть задач из данной системы не используют готовые математические модели и требуют дополнительных вычислений.

А.Г. Мерзляк в своем учебнике «Алгебра и начала математического анализа», как и Ш.А. Алимов использует в своей системе задач, задания с уже готовой статистической моделью вероятностей. Но стоит отметить, что количество таких задач, по сравнению с предыдущем учебным пособием, значительно меньше. Автор учебника значительно делает акцент на содержательную составляющую задач.

А в учебнике С.М. Никольского «Алгебра и начала математического анализа» практически не использует задачи с готовой статистической моделью вероятностей. Но стоит заметить, что количество задач, по сравнению с другими учебниками сильно ограниченно, они требуют более высокого уровня освоения теоретического материала изучаемой темы. Несмотря на это, большая часть задач имеет содержательный характер.

А.Г. Мордкович в своем учебнике «Алгебра и начала математического анализа» использует систему задач как с готовыми статистическими моделями вероятностей, так и без них. Отличительной особенностью данного пособия является выделение геометрической вероятности, где большей мере рассматриваются математические задачи без сюжетной основы. Но стоит отметить, что не все задачи имеют математический подтекст. Часть заданий все же связаны с действием в реальном мире.

Анализ задач из учебников позволяет сделать вывод, что в большинстве случаев, при изучении статистики, решением задачи будет подстановка уже известных величин в готовую формулу. Такой подход в изучении материала не позволит в полной мере сформировать у учащихся понимания о случайной величине. Более того, такие задачи исключают возможность применения еще одной методической особенности, а именно предоставить учащимся возможность самостоятельного выявления некоторых математических закономерностей. Таким образом, происходит снижение развития стохастической линии при изучении теории вероятностей и математической статистики.

Однако заметим, что система задач в представленных учебниках частично удовлетворяет методической особенности, заключающийся в применении задач, не использующих готовые статистические модели вероятностей, что позволит использовать некоторые типы задач при изучении теоретико-вероятностных характеристик с использованием экспериментов со случайными числами.

Стоит отметить, что введение в теорию вероятностей и математическую статистику начинается с похожих задач. Часто можно увидеть использование задачи с подбрасыванием монеты или выбрасыванием игрального кубика (игральной кости) как наглядный пример из теории вероятностей и математической статистики. Поэтому, стоит использовать одну из данных задач в качестве первоначальной при введении в курс, посвященный теории вероятности и математической статистики.

Выделим еще несколько наиболее интересных, по-нашему мнению, задач из предлагаемых учебников, для использования их при изучении теоретико-вероятностных характеристик, руководствуясь тем, что решение таких задач может быть построена с использованием вычислительных экспериментов со случайными числами.

Наибольший интерес при изучении теоретико-вероятностных закономерностей с использованием вычислительного эксперимента со случайными числами вызывает решение задач на геометрическую вероятность. Подобный тип задач можно решить с использованием равномерного распределения случайных точек внутри плоской фигуры, заданной системой ограничений.

Ш.А. Алимов в своем учебники в параграфе, посвященному закону больших чисел, рассматривает задачу Бюффона [11]. Смысл данной задачи таков, что на данном листе начерчены линии, расстояние между которыми раны длине некоторой иглы, которую бросают на лист несколько раз. Необходимо определить вероятность того, что данная игла пересечет какую-либо линию. Отметим, что данная задача интересна тем, что с помощью нее, можно найти приближенное значение числа π с достаточно высокой точностью (точность зависит от числа испытаний).

В свою очередь, А.Г. Мордкович в своем учебнике выделяет параграф, посвящённый геометрической вероятности. Среди множества задач, рассматриваемых автором учебника, можно выделить задачу, позволяющую определить вероятность того, что треугольник, нарисованный случайным образом, является остроугольным. Особый интерес к данной задачи вызывает вероятность того, что случайно нарисованный треугольник, будет прямоугольным.

Другой методической особенностью преподавания тем теории вероятностей и математической статистики является использование на уроках электронных образовательных ресурсов. В свою очередь, учебники под авторством Ш.А. Алимова, А.Г. Мерзляка, С.М. Никольского и А.Г. Мордковича использование данной методической особенности не предусматривают.

Но стоит отметить, что некоторые учебники рекомендуют использования компьютера для изучения курса математики, в частности, для изучения тем из теории вероятностей и математической статистики. Однако, решение с помощью компьютера задач, не используется на самих уроках, а предлагается учащимся для самостоятельного освоения. Такой подход к образовательной деятельности учащихся, позволяет частично удовлетворить одну из методических особенностей преподавания теории вероятностей и математической статистики, а именно использования «random experiment». Однако, контроль за данном видом деятельности не осуществляется, что не позволяет определить правильность выполненной работы. Например, подобный подход в обучении использует А.Г. Мерзляк в своем учебнике.

ГЛАВА 2. ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

2.1 Обучение учащихся по изучению теоретико-вероятностных характеристик на основе решения задач со случайными числами по теории вероятностей и математической статистике

Руководствуясь анализом учебных материалов и методическими особенностями преподавания теории вероятностей и математической статистики в старшей школе выделим некоторые задачи, которые можно использовать при изучении теоретико-вероятностных закономерностей. Отметим, что формулировка представленных задач изменена в целях упрощения задачи и формирования к ним интерес.

Построим аналитическое и практическое (с использованием компьютерного моделирования со случайными числами) решение выделенных задач. А также, сформулируем методические рекомендации по применению их в образовательной деятельности учителя на уроках математики в профильных классах старшей школы.

Методические рекомендации описываются в пункте «рекомендации по использованию задачи на уроке» и рассматриваются отдельно для каждой задачи. Отметим общее положение из предлагаемых рекомендаций. Так для построения компьютерной модели задачи и нахождения ответа по ней, предлагается три возможных варианта работы учителя с учащимися, которые зависят от общего уровня математического и информационного развития класса.

Для класса с высоким уровнем, рекомендуется самостоятельное решения поставленной задачи с небольшой корректировкой предлагаемого решения. Учитель в этом случае выступает в качестве помощника и только подталкивает учащихся к правильности выполнения. Все действия с компьютером учащиеся выполняют самостоятельно.

Для класса с средним уровнем подготовки, рекомендуется построение математической модели, необходимой для вычислительного эксперимента, совместно с учителем. Построение такой модели осуществляется путем коллективной работы всего класса. В этом случае, учитель выступает в роле помощника, вступает в дискуссию с классом и направляет учащихся к правильному решению поставленной задачи. Все действия с компьютером учащиеся выполняют самостоятельно.

Для класса с более низким уровнем подготовки, рекомендуется использовать сопровождения учителя на всех этапах решения задачи. При работе с компьютером, следует воспользоваться подробным описанием лабораторной работы. В качестве такого описания можно взять решение задачи, описанное в пункте «решение задачи при помощи моделирования с использование случайных чисел» с возможными правками на усмотрения учителя.

Стоит отметить, что аналитическое решение задачи происходит со всем классом одновременно, не зависимо от уровня математической подготовки. Учитель в данном случае выступает в роле помощника, сопровождает учащихся при всех этапах решения задачи, выводит из затруднительных ситуаций.

При равномерном распределении случайных точек внутри треугольника или прямоугольника следует воспользоваться алгоритмами равномерного распределения случайных точек случайных точек внутри произвольного многоугольника [4;5].

Рассмотрим задач, позволяющих изучить теоретико-вероятностные характеристики при помощи вычислительного эксперимента со случайными числами. Такой эксперимент для решения задач проведем при помощи электронной таблицы MS Excel. Примерное выполнение данной работы можно рассмотреть в приложении 1.

Рассмотрим первую задачу.

Формулировка задачи.

Одновременно бросают 1, 2 и 3 игральных кубика. Найти вероятность выпадения всевозможных сумм и построить гистограмму плотности вероятностей для каждого случая.

Рекомендации по применению задачи на уроке.

Условно, использование задачи можно разделить на три части.

К первой части относится аналитическое решение задачи. В этом случае, задача решается совместно с учениками и используется в качестве примера, который позволит познакомить учащихся с понятием случайной величины.

Второй частью является построение вычислительного эксперимента с выбрасыванием одного игрального кубика и сопоставления полученного результата с аналитическим решением. Учителю рекомендуется предложить учащимся построить гистограмму с аналитическим решением задачи рядом с гистограммой, полученным в ходе вычислительного эксперимента, чтобы наглядно продемонстрировать совпадения результатов с малой погрешностью. Такой подход позволит учащимся сделать вывод о возможности использования вычислительного эксперимента в качестве решения и позволит сформировать понимания действий математической статистики и теории вероятностей в жизни.

А третья часть относится к решению оставшийся задачи. В этом случае, учителю стоит рекомендовать учащимся также построить аналитическое решение, но в этом случае в виде графика. Такой график не только позволит сделать похожие со второй частью выводы, но и подготовит учащихся к новой теме урока.

В ходе решения этой задачи, учащиеся смогут сформировать представление о вычислительном эксперименте и начальное понимание понятия «случайная величина». Во время каждого этапа решения задачи, учитель должен являться помощником и направлять на правильное решение, а не самостоятельно решать задачу, не зависимо от выбора рекомендованной стратегии работы с классом при решении задачи.

Аналитическое решение.

1. Пусть на удачу бросается один игральный кубик.

Плотность вероятностей в нашем случае — это шанс выпадения тех или иных значений на кубике.

Очевидно, что вероятность кубика упасть на ту или иную грань, в случае, когда у нас идеально сбалансированный и не крапленый кубик, обратно-пропорциональна количеству его граней. Для кубика она, соответственно, составляет $\frac{1}{6}$ (необходимо воспользоваться формулой (1) классической вероятности).

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m – выпавшее на грани кубика число, а n – количество всех возможных выпавших на гране чисел).

Таким образом вероятность выпадения каждой суммы составляет $\frac{1}{6}$.

2. Теперь, пусть на удачу одновременно брошено два игральных кубика. Для аналитического решения поставленной задачи необходимо составить таблицу возможных сумм (рисунок 2).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Рисунок 2 – Таблица возможных значений сумму при бросании двух игральных кубиков

Данная таблица (рисунок 2) позволяет определит всевозможные суммы, полученные при бросании двух игральных кубиков. Внешние ячейки таблицы (первая строка и первый столбец) заполняются цифрами от 1 до 6. Каждая такая ячейка характеризует количество возможных очков, выпавших при бросании кубика. Первая строка отвечает за выпадение возможных очков у первого игрального кубика, а первый столбец за выпадение возможных очков у второго игрального кубика. Внутренние ячейки таблицы (ячейки без внешних ячеек) заполняются по правилу: сумма очков, выпавших на первом и втором кубике.

Используя построенную таблицу значений, вычислим вероятность выпадения числа, образованного суммой очков, выпавших на первом и втором кубике одновременно. Для этого воспользуемся формулой (1) классической вероятности, где m – одна из возможных сумм, а n – общее количество возможных сумм (рассчитывается по правилу произведения или подсчетом количества получившихся внутренних ячеек). Таким образом мы находим вероятность выпадения всех сумм и заносим их в таблицу с ответами (Таблица 1).

Таблица 1 – Ответы к решению задачи

$\sum$	$\sum=2$	$\sum=3$	$\sum=4$	$\sum=5$	$\sum=6$	$\sum=7$	$\sum=8$	$\sum=9$	$\sum=10$	$\sum=11$	$\sum=12$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
P(A)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. Пусть на удачу бросают три игральных кубика. Для аналитического решения задачи требуется составить таблицу, аналогично таблицы значений, представленной при решении задачи с бросанием двух игральных кубиков (рисунок 2). Однако, из-за того, что в условии задачи задействовано три игральных кубика, такая таблица будет трехмерной. Представить такую трехмерную таблицу, которая бы наглядно демонстрировала все полученные значения сумм и была понятна для учащихся, невозможно. Поэтому, разобьем такую таблицу на шесть таблиц, представленных при решении задачи с бросанием двух игральных кубиков с дополнительной записью в ячейку первого столбца первой строки числа, характеризующего количество возможных очков, выпавших на третьем кубике (рисунок 3). Нахождение значений внутренних ячеек осуществляется по следующему

правилу: к уже известному значению суммы (рисунок 3) прибавляем значение ячейки первого столбца первой строки.

1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	3	4	5	6	7	8
2	4	5	6	7	8	9
3	5	6	7	8	9	10
4	6	7	8	9	10	11
5	7	8	9	10	11	12
6	8	9	10	11	12	13

2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4	5	6	7	8	9
2	5	6	7	8	9	10
3	6	7	8	9	10	11
4	7	8	9	10	11	12
5	8	9	10	11	12	13
6	9	10	11	12	13	14

3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	5	6	7	8	9	10
2	6	7	8	9	10	11
3	7	8	9	10	11	12
4	8	9	10	11	12	13
5	9	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	6	7	8	9	10	11
2	7	8	9	10	11	12
3	8	9	10	11	12	13
4	9	10	11	12	13	14
5	10	11	12	13	14	15
6	11	12	13	14	15	16

5	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	7	8	9	10	11	12
2	8	9	10	11	12	13
3	9	10	11	12	13	14
4	10	11	12	13	14	15
5	11	12	13	14	15	16
6	12	13	14	15	16	17

6	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	8	9	10	11	12	13
2	9	10	11	12	13	14
3	10	11	12	13	14	15
4	11	12	13	14	15	16
5	12	13	14	15	16	17
6	13	14	15	16	17	18

Рисунок 3 – Таблица возможных значений сумму при бросании трех игральных кубиков

Используя построенную таблицу значений, вычислим вероятность выпадения числа, образованного суммой очков, выпавших на первом, втором и третьем кубике одновременно. Для этого воспользуемся формулой (1) классической вероятности, где m – одна из возможных сумм, а n – общее количество возможных сумм (рассчитывается по правилу произведения или подсчетом количества получившихся внутренних ячеек). Таким образом мы находим вероятность выпадения всех сумм и заносим их в таблицу с ответами (Таблица 2).

Таблица 2 – Ответы к решению задачи

$\sum$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*
p	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

Решение задачи при помощи моделирования с использование случайных чисел.

Разделим задачу на три части и оформим решение каждой части на отдельном листе MS Excel.

1. Решение задачи для одного кубика.

1.1. Выберем лист 1 в MS Excel.

1.2. Смоделируем бросание кубика путем выбора случайного числа с помощью функции «=СЛУЧМЕЖДУ(1;6)». Такой эксперимент повторяем 10000 раз (протянуть функцию на 10000 ячеек).

1.3. Считаем, сколько раз выпадают цифры от 1 до 6 из полученного набора цифр с помощью функции «=СЧЁТЕСЛИ()», тем самым определяем сколько раз выпадала та или иная грань. Определяем вероятность выпадения каждой грани с помощью формулы (2) статистической вероятности

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{2}$$

где m – количество выпадений грани, n – общее количество набора цифр. Для сравнения полученного результата с результатом аналитического решения внесем в таблицу аналитические значения вероятностей. Получим таблицу следующего вида (рисунок 4).

Вероятность выпадения числа						
i	1	2	3	4	5	6
m_i	1652	1657	1652	1728	1617	1694
p_i (Эксп.)	0,16574	0,16724	0,1651	0,16722	0,16655	0,16805
p_i (Реал.)	0,16667	0,16667	0,16667	0,16667	0,16667	0,16667

Рисунок 4 – Таблица сравнения вероятности выпадения очков при выбрасывании одного игрального кубика

1.4. По данной таблице построим гистограмму плотности вероятностей. Получим диаграмму следующего вида (рисунок 5). Сравним полученный в ходе эксперимента результат с результатом аналитического вычисления и сделаем вывод.

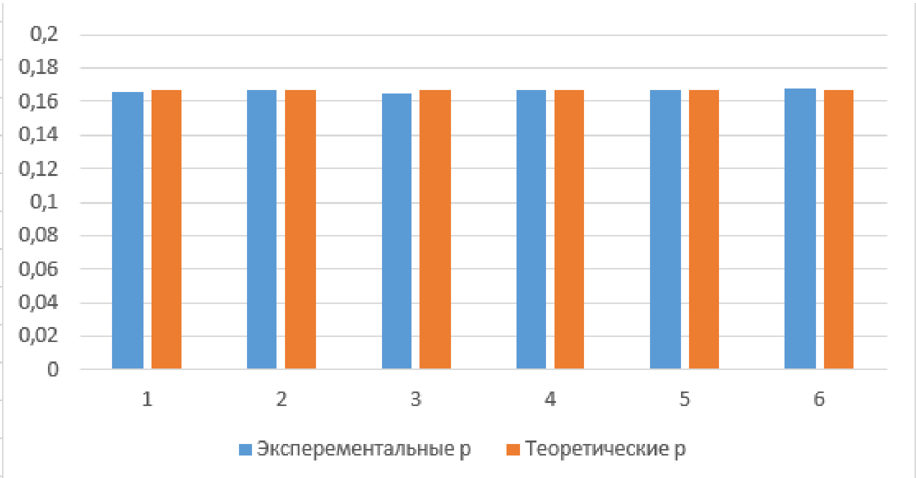


Рисунок 5 – Гистограмма плотности вероятностей при выбрасывании одного игрального кубика

2. Решение задачи для двух кубиков.

2.1. Выберем лист 2 в MS Excel.

2.2. Смоделируем бросание двух кубиков путем выбора двух случайных чисел s и t с помощью функции «=СЛУЧМЕЖДУ(1;6)». Такой эксперимент повторяем 10000 раз (протянуть функцию на 10000 ячеек).

2.3. В дополнительном столбце находим сумму выпавших чисел по строчкам (сумма чисел s_i и t_i, где i – номер соответствующей строки). Получаем таблицу следующего вида (рисунок 6).

	A	B	C
1	Выпавшие значения кубика		Сумма
2	2	4	6
3	5	6	11
4	1	4	5
5	1	6	7
6	4	2	6
7	3	6	9
8	4	4	8
9	5	2	7
10	3	5	8

Рисунок 6 – Таблица выпадения очков модели выбрасывания двух кубиков

2.4. Аналогично пункту 3 решения задачи о выбрасывании 1 игрального кубика строим таблицу вероятностей.

2.5. По данной таблице построим гистограмму плотности вероятностей. Получим диаграмму следующего вида (рисунок 7). Сравним полученный в ходе эксперимента результат с результатом аналитического вычисления и сделаем вывод.

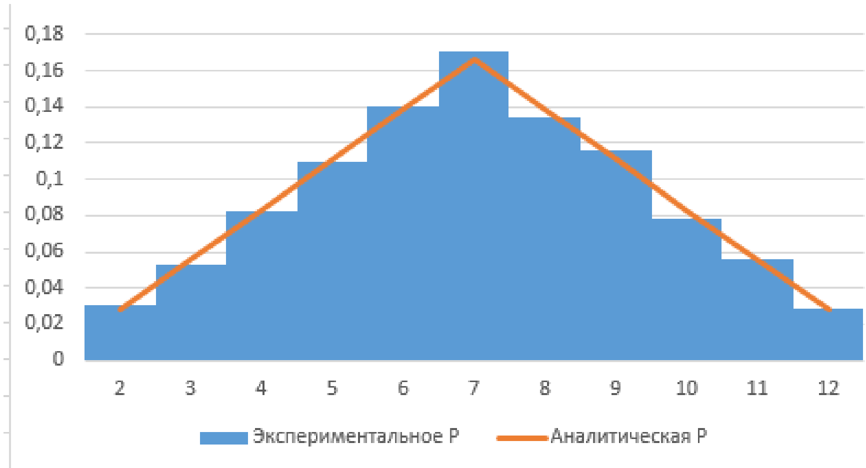


Рисунок 7 – Гистограмма плотности вероятностей при выбрасывании двух игральных кубиков

3. Решение задачи для трех кубиков.

3.1. Выберем лист 3 в MS Excel.

3.2. Смоделируем бросание трех кубиков путем выбора трех случайных чисел s, v и t с помощью функции «=СЛУЧМЕЖДУ(1;6)». Такой эксперимент повторяем 10000 раз (протянуть функцию на 10000 ячеек).

3.3. Аналогично пункту 3 решения задачи о выбрасывании двух игральных кубиков и пункту 3 решения задачи о выбрасывании двух игральных кубиков строим таблицу выпадения очков (сумма чисел s_i, v_i и t_i, где i – номер строки) и таблицу вероятности выпадения очков при выбрасывании трех игральных кубиков.

3.4. По данной таблице построим гистограмму плотности вероятностей. Получим диаграмму следующего вида (рисунок 8). Сравним полученный в ходе эксперимента результат с результатом аналитического вычисления и сделаем вывод.

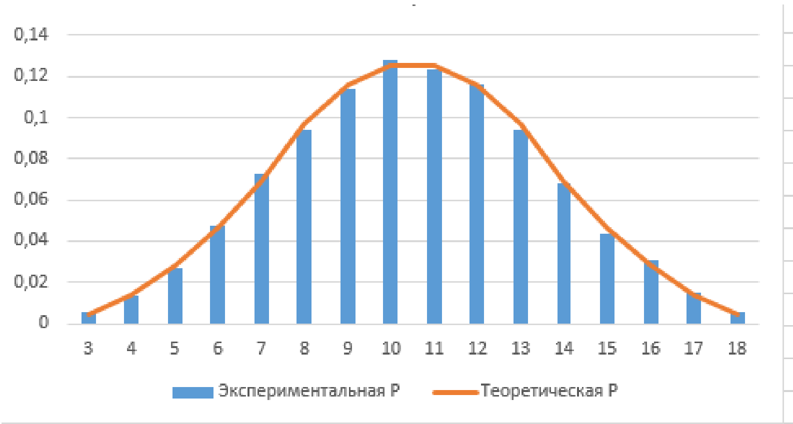


Рисунок 8 – Гистограмма плотности вероятностей при выбрасывании трех игральных кубиков

Рассмотрим вторую задачу.

Формулировка задачи.

Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным, прямоугольным и тупоугольным.

Рекомендации по применению задачи на уроке.

Решение задачи происходит в два этапа: аналитическое решение задачи, лабораторная работа.

На перовом этапе происходи аналитическое решение урезанной части задач. В результате чего, учащимся необходимо аналитически найти вероятность того, что треугольник будет остроугольным или тупоугольным. Не стоит акцентировать внимание на нахождения вероятности того, что наудачу нарисованный треугольник является прямоугольным.

На следующем этапе, при проведении лабораторной работы, особый интерес будет представлять нахождение вероятности того, что случайно нарисованный треугольник будет прямоугольным. В этом случае, учащиеся сталкиваются с достаточно парадоксальным случаем. С одной стороны, вероятность того, что такой треугольник можно нарисовать, безусловно есть, с другой стороны такая вероятность при выполнении вычислительного эксперимента будет равняться 0. При достижении такого результата, учащимся рекомендуется сравнить результаты аналитического решения с результатами вычислительного эксперимента. Учителю рекомендуется обратить внимание учащихся на совпадение результатов вычислительного эксперимента с результатами аналитического решения с небольшой погрешностью, которой при решении прикладных задач можно пренебречь. А после чего, учителю стоит обратить внимание учащихся на вероятность того, что полученный треугольник будет прямоугольным. Далее, рекомендуется организовать беседу с учащимися, результатом которой будет аналитическое решение задачи для прямоугольного треугольника.

При решении данной задачи, роль учителя так же остается в виде помощника. Однако, в данном случае, учителю следует более активно работать с классом и давать более прямые подсказки.

Аналитическое решение.

1. Построение математической модели.

При решении задачи стоит учесть, что стороны треугольника не важны, поэтому стоит построить математическую модель по углам треугольника. Известно, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда условие задачи может быть сформулировано следующим образом: «Необходимо представить число 180 в виде суммы, состоящей из трех положительных слагаемых. Определите вероятности того, что:

1) все слагаемые суммы меньше прямого угла;

2) одно из слагаемых суммы больше прямого угла;

3) одно из слагаемых суммы равен прямому углу».

Рассмотрим треугольник, в котором все углы разные. Обозначим угла треугольника за x, y, z и введем условия $0 < x < y < z$. Тогда по формуле (3) суммы углов треугольника.

$$x + y + z = 180, \tag{3}$$

где x, y, z – углы треугольника, следует формула (4).

$$z = 180 - x - y, \tag{4}$$

где x, y, z – углы треугольника. Таким образом, получаем систему (5) из трех неравенств.

$$\begin{cases} 0 < x, \\ x < y, \\ y < 180 - x - y, \end{cases} \tag{5}$$

где x, y – углы треугольника.

Преобразуем систему уравнений к виду системы (6).

$$\begin{cases} 0 < x, \\ x < y, \\ 2y + x < 180, \end{cases} \tag{6}$$

где x, y – углы треугольника, и изобразим решение системы на координатной плоскости (рисунок 9).

Получаем треугольник, с вершинами $O(0,0), A(0,90), B(60,60)$. Каждая точка с координатами (x, y) данного решения однозначно сопоставимы с углами треугольника. Таким образом, рассматривая все множество точек треугольника АОВ, найдем такое множество, которое удовлетворяет поставленному условию. Отметим, что добавление прямых, которые соединяют точки О и А, О и В, А и В, не изменяют площади треугольника. Таким образом, можно утверждать, что условия $x = y$, $y = z$ и $x = z$ так же учтены в построенной модели.

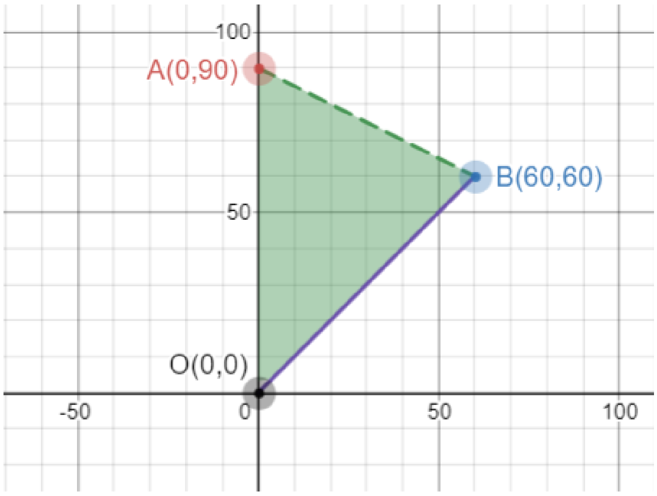


Рисунок 9 – Решение системы уравнений

2. Решение задачи, с использование построенной ранее модели.

2.1. Найдем вероятность того, что треугольник будет остроугольный. Для этого, решим систему (7) неравенств

$$\begin{cases} x < y < 90, \\ x + 2y < 180, \\ x + y > 90, \end{cases} \tag{7}$$

где x, y – углы треугольника, и отметим множество точек, которые соответствуют остроугольному треугольнику.

Изобразим полученное решение на координатной плоскости (рисунок 10). Таким образом, решением системы является треугольник с вершинами $A(0{,}90)$, $B(60{,}60)$ и $C(45{,}45)$.

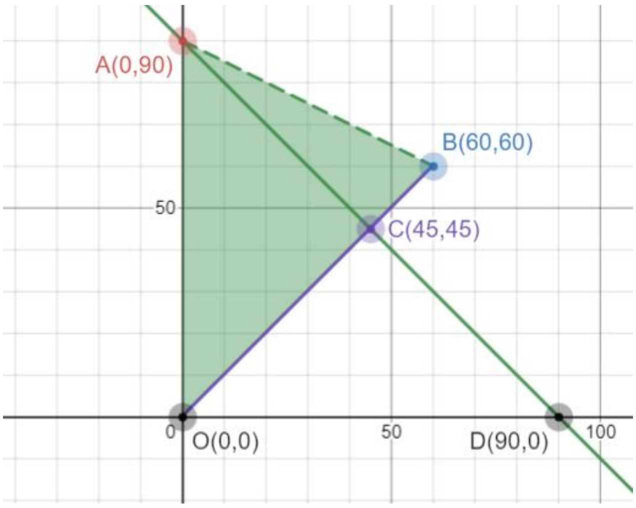


Рисунок 10 – Решение системы уравнений

Построим прямую, проходящую через точки А и С. Данная прямая пересекает ось Ох в точке $D(90{,}0)$. Таким образом, получившийся треугольник AOD является равнобедренным ($AO = OD$).

Рассмотрим прямую ОС. Прямая задается уравнением $y = x$, таким образом ОС – биссектриса угла AOD, значит ОС является высотой, проведенной в треугольнике из вершины О, что позволяет сделать вывод: OC⊥AC. Найдем отношение площадей треугольников ABC и AOB по формуле (8).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot OB} = \frac{BC}{OB}. \quad (8)$$

Спроектирует точки B и C на ось Ox и воспользуемся теоремой Фалеса. Таким образом, получаем значения отношения BC к OB по формуле (9).

$$\frac{BC}{OB} = \frac{60-45}{60} = \frac{15}{60} = 0{,}25. \quad (9)$$

Ответ: вероятность того, что случайно нарисованный на плоскости треугольник будет остроугольным равна 0,25.

2.2. Найдем вероятность того, что треугольник будет тупоугольным. Для этого, решим систему (10) неравенств

$$\begin{cases} x < y < 90, \\ x + 2y < 180, \\ x + y < 90, \end{cases} \quad (10)$$

где x, y – углы треугольника, и отметим множество точек, которые соответствуют остроугольному треугольнику.

Изобразим полученное решение на координатной плоскости (рисунок 11). Таким образом, решением системы является треугольник с вершинами A(0,90), B(60,60) и C(45,45).

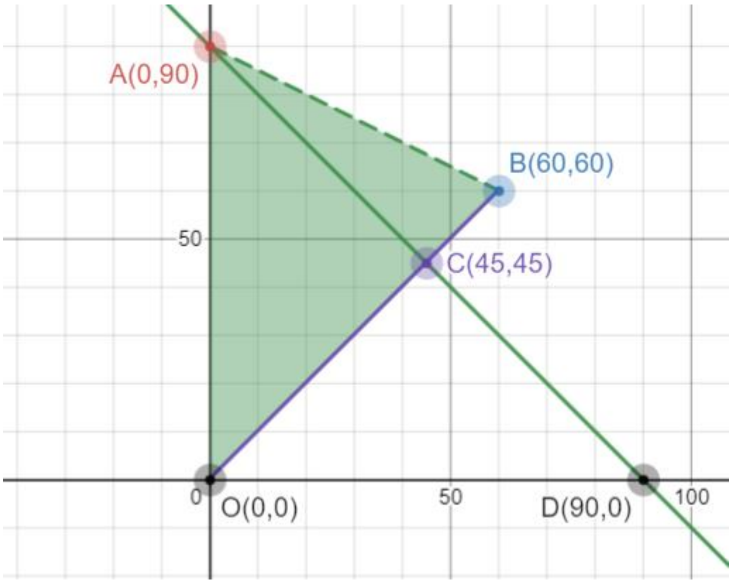


Рисунок 11 – Решение системы уравнений

Построим прямую, проходящую через точки A и C. Данная прямая пересекает ось Ox в точке $D(90{,}0)$. Таким образом, получившийся треугольник AOD является равнобедренным ($AO = OD$).

Рассмотрим прямую OC. Прямая задается уравнением $y = x$, таким образом OC – биссектриса угла AOD, значит OC является высотой, проведенной в треугольнике из вершины O, что позволяет сделать вывод: OC⊥AC. Найдем отношение площадей треугольников AOC и AOB по формуле (11).

$$\frac{S_{AOC}}{S_{AOB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot OC}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot OB} = \frac{OC}{OB}. \qquad (11)$$

Спроектирует точки B и C на ось Ox и воспользуемся теоремой Фалеса. Таким образом, найдет найдем значение отношения OC к OB по формуле (12).

$$\frac{OC}{OB} = \frac{45}{60} = 0{,}75. \qquad (12)$$

Ответ: вероятность того, что случайно нарисованный на плоскости треугольник будет тупоугольным равна 0,75.

2.3. Вероятность того, что треугольник получится прямоугольным очень мала и стремиться к нулю.

Решение задачи при помощи моделирования с использование случайных чисел.

При составлении аналитического решения, получаем систему неравенств (6), решением которой служит треугольник AOB с координатами вершин $A(0,90), B(60,60)$ и $O(0,0)$. Множество точек внутри треугольника, включая его границы, своими координатами однозначно задают углы треугольника.

В полученной геометрической модели равномерно распределим 10000 точек. Решением задачи служат множество точек, удовлетворяющих условию задачи.

Выполнение работы.

1. Построим модель треугольника в Excel. Для этого, зададим координаты треугольника в виде таблицы (рисунок 12).

Треугольник		
O	0	0
A	0	90
B	60	60

Рисунок 12. Координаты вершин треугольника

2. Равномерно распределим множество точек (10000 точек) внутри заданного треугольника. Для этого воспользуемся формулой (13) равномерного распределения случайных точек внутри треугольника.

$$\begin{cases} x_i = x_A + \min(s_i;t_i)\cdot(x_B - x_A) + (1-\max(s_i;t_i))\cdot(x_O - x_A), \\ y_i = y_A + min(s_i;t_i)\cdot(y_B - y_A) + (1-max(s_i;t_i))\cdot(y_O - y_A), \end{cases} \quad (13)$$

где x_A, y_A координаты вершины A; x_B, y_B координаты вершины B; x_O, y_O координаты вершины O; s и t – случайные числа из интервала (0,1). Угол z_i находим по формуле (14).

$$z_i = 180 - x_i - y_i, \quad (14)$$

где z_i, x_i, y_i – углы треугольника.

Таким образом, каждая строк таблицы, получающаяся при нахождении значений x_i, y_i и z_i характеризует углы треугольника (рисунок 13).

s	t	xi	yi	zi
0,9	0,8	8,09	84,2	87,7
0,7	0,1	20,5	27,2	132
0,1	0,6	22,4	27,6	130
0,5	0,1	31,3	42,7	106
0,5	0,6	21,6	62,2	96,2

Рисунок 13 – Пример таблицы углов треугольников

3. Произведем анализ полученных треугольников и выделим их вид. Построим таблицу из трех столбцов, где каждый столбец характеризует вид треугольника. Пусть столбец К отвечает за остроугольный треугольник, L отвечает за прямоугольный треугольник, М отвечает за тупоугольный треугольник.

Ячейки K2:K10001 (поиск остроугольного треугольника) заполняются по следующему правилу: Ki равняется 1, если угол прямой, и 0 в противном случае.

Ячейки L2:L10001 (поиск прямоугольных треугольников) заполняются по следующему правилу: Li равняется 1, если угол прямой, и 0 в противном случае.

Ячейки M2:M10001 (поиск тупоугольных треугольников) заполняются по следующему правилу: Mi равняется 1, если угол тупой, и 0 в противном случае.

4. Подсчитаем количество остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников и найдем вероятность того, что случайно нарисованный треугольник будет остроугольный, тупоугольный и прямоугольный. Для этого оформим таблицу следующего вида (рисунок 14).

	Количесто	Вероятность
Остроугольный	2409	0,2409
Прямоугольный	0	0
Тупоугольный	7591	0,7591

Рисунок 14 – Таблица вероятностей

Ячейки, отвечающие за количество треугольников соответствующего вида, заполняются с помощью команды «=СУММ()» по столбцам, характеризующих вид треугольника (например, количество остроугольных треугольников находится по формуле «=СУММ(K2:K10001)»).

Для определения вероятностей, необходимо воспользоваться формулой (1) классической вероятности, где P(A) вероятность наступления события A, m – количество благоприятных исходов (количество треугольников соответствующего вида), n – число всех исходов.

5. Украсим свою таблицу. Выделим цветом те ячейки, которые отвечают на вопрос задачи. Сравним ответ, полученный с помощью аналитического решения, с ответом, полученным с помощью построения компьютерного эксперимента.

Рассмотрим третью задачу.

Формулировка задачи.

На сторонах равностороннего треугольника со стороной 1 равномерно распределены случайно случайные точки. Данные точки образуют треугольники. Необходимо построить примерный график функции распределения вероятностей площадей треугольника.

Рекомендации по применению задачи на уроке.

При решении задачи, стоит обратить внимание учащихся на то, что у данной задачи отсутствует аналитическое решение, и уточнить, что зачастую в реальных условиях, найти аналитическое решение либо крайне сложно, либо невозможно. В этом случае принято прибегать к численному решению задачи. Так, для данной задачи, вычислительный эксперимент и будет являться таковым методом. Предварительно, перед тем, как перейти к этой задаче, рекомендуется решить задачу, в которой есть аналитическое решение. И благодаря сравнению аналитического решения и решения с использованием вычислительного эксперимента, подвести учащихся к выводу, что, пренебрегая некоторой погрешностью, можно утверждать, что статистическая вероятность равна вероятности события.

После чего, учителю рекомендуется организовать лабораторную работу. Наибольший интерес в решении задачи вызывает график функции распределения. Поэтому, при завершении выполнения лабораторной работы, учителю стоит обратить внимание учащихся на график получившийся функции.

Аналитическое решение.

Аналитическое решения данной задачи требует глубокого математического анализа. Уровень математической подготовки учащихся не позволит найти решение этой задачи. Поэтому, стоит ограничится только решением задачи с помощью вычислительного эксперимента с случайными числами.

Решение задачи при помощи моделирования с использование случайных чисел.

1. Пусть на плоскости задан правильный треугольник ABC со стороной 1. Введем на этой плоскости систему координат так, чтобы одна из вершин треугольника находилось в начале координат, а одна из сторон лежала на оси Ox. Найдем координаты вершин данного треугольника.

Пусть AB лежит на оси абсцисс, тогда вершина A имеет координаты A(0, 0), а вершина B имеет координаты B(1, 0).

Найдем координаты вершины C. По свойству равностороннего треугольника, высота, опущенная из угла треугольника, является медианой. Проведем высоту CH, тогда координаты H($\frac{\mathrm{AB}}{2}$, 0). Так как точка C лежит на данной высоте, то C имеет координаты C($\frac{\mathrm{AB}}{2}$, CH). Используя теорему Пифагора, в треугольнике AHC, где угол AHC=90°, найдем CH по формуле (15).

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}. \qquad (15)$$

Известно, что треугольник ABC правильный, значит AB=AC=BC=1. Таким образом, значение CH равняется $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, вершина C имеет координаты C ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

2. Введем полученные координаты вершин треугольника в ячейки MS Excel. Получим таблицу следующего вида (рисунок 15).

Вершины треугольника		
x1	**x2**	**x3**
0	1	0,50
y1	**y2**	**y3**
0	0	0,86603
A	**B**	**C**

Рисунок 15 – Таблица вершин треугольника

3. Равномерно распределим 10000 точек на каждой стороне треугольника ABC. Для этого выведем уравнения прямой AC и прямой BC по двум точкам.

Общий вид уравнения прямой по двум точкам находится по формуле (16).

$$\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{16}$$

где x_1, y_1 – координаты первой точки, x_2, y_2 – координаты другой точки.

Применим эту формулу (16) для прямых AC и BC. Таким образом, получаем $y_1(\mathrm{x})$ – уравнение прямой AC, $y_2(\mathrm{x})$ – уравнение прямой BC.

Равномерно распределим 10000 случайных точек на стороне AB треугольника ABC. Для этого воспользуемся формулой (17).

$$\begin{cases} x_i = x_A + \min(s_i; t_i) \cdot (x_B - x_A) + (1 - \max(s_i; t_i)) \cdot (x_\mathrm{C} - x_A) \\ y_i = 0, \end{cases}, \tag{17}$$

где x_A координата абсцисс вершины A; x_B координата абсцисс вершины B; x_C координата абсцисс вершины C; s и t – случайные числа из интервала (0,1).

Равномерно распределим 10000 случайных точек на стороне AC треугольника AHC. Для этого воспользуемся формулой (18).

$$\begin{cases} x_i = x_A + \min(s_i; t_i) \cdot (x_\mathrm{C} - x_A) + (1 - \max(s_i; t_i)) \cdot (x_\mathrm{H} - x_A), \\ y_i = y_1(x_i), \end{cases} \tag{18}$$

где x_A координата абсцисс вершины A; x_H координата абсцисс вершины H; x_C координата абсцисс вершины C; s и t – случайные числа из интервала (0,1).

Равномерно распределим 10000 случайных точек на стороне ВС треугольника ВНС. Для этого воспользуемся формулой (19).

$$\begin{cases} x_i = x_{\mathrm{B}} + \min(s_i; t_i) \cdot (x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{B}}) + (1 - \max(s_i; t_i)) \cdot (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}), \\ y_i = y_2(x_i), \end{cases} \quad (19)$$

где x_{H} координата абсцисс вершины Н; x_B координата абсцисс вершины В; x_{C} координата абсцисс вершины С; s и t – случайные числа из интервала (0,1).

Таким образом, получаем таблицу следующего вида (рисунок 16).

Случайные точки на АВ				Случайные точки на АС				Случайные точки на ВС			
s	t	x	y	s	t	x	y	s	t	x	y
0,3471	0,661	0,516574	0	0,655494	0,715861	0,469816	0,813746	0,895154	0,141299	0,570649	0,743657
0,7042	0,0159	0,163751	0	0,485691	0,482671	0,49849	0,86341	0,571706	0,234672	0,617336	0,662794
0,5365	0,9872	0,54295	0	0,791514	0,814957	0,488278	0,845723	0,412657	0,684913	0,706329	0,508654
0,0792	0,7847	0,18687	0	0,410401	0,859123	0,275639	0,477421	0,069751	0,421649	0,534876	0,805619
0,5072	0,3551	0,601495	0	0,62368	0,853014	0,385333	0,667416	0,853007	0,614721	0,80736	0,333661
0,2639	0,3793	0,574253	0	0,53232	0,036716	0,252198	0,43682	0,386927	0,085763	0,542881	0,791753
0,2222	0,5852	0,429573	0	0,450874	0,267302	0,408214	0,707047	0,671172	0,915642	0,835586	0,284773
0,3201	0,9178	0,361233	0	0,50152	0,941752	0,279884	0,484773	0,114214	0,600322	0,557107	0,767113

Рисунок 16 – Таблица равномерного распределения случайных точек на сторонах треугольника

4. Каждая строчка таблицы, полученной в пункте 3, образует три точки. Построим треугольник по этим точкам, определим длины сторон и найдем его площадь.

Чтобы определить длины стороны треугольника воспользуемся формулой (20) нахождения расстояния между двумя точками.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (20)$$

где x_1, y_1 – координаты первой точки, x_2, y_2 – координаты второй точки.

Чтобы определить площадь треугольника воспользуемся формулой (21) Герона.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (21)$$

где p – полупериметр треугольника, a, b, c – длины сторон треугольника.

Для облегчения расчетов, можно выделить столбец, в котором вычисляется полупериметр каждого треугольника. Таким образом, получаем таблицу следующего вида (рисунок 17).

a	b	c	p	S
0,815088	0,1228	0,74562	0,841754	0,039388
0,926027	0,233176	0,80314	0,981172	0,084883
0,847488	0,40145	0,534248	0,891593	0,082991
0,485603	0,418231	0,87757	0,890703	0,047316
0,701549	0,538052	0,392059	0,81583	0,104761
0,542707	0,458774	0,792374	0,896928	0,120642
0,70737	0,600802	0,495926	0,902049	0,146576
0,491551	0,395687	0,791725	0,839482	0,078679
0,414847	0,685396	0,863907	0,982075	0,139748
0,742079	0,24104	0,639543	0,811331	0,074192

Рисунок 17 – Таблица вычисления сторон, полупериметра и площади треугольников

5. Построим таблицу распределения площадей треугольника на интервалах. Пусть каждая S_i площадь треугольника соответствует некоторой точке на отрезке $[0, a]$, где a равняется S_{max}. Треугольник будет достигать своей максимальной площади, если вершины треугольника, полученного с помощью случайных точек, совпадет с вершинами исходного треугольника. Площадь исходного треугольника можно найти по формуле (22).

$$S = \frac{1}{2} b^2 \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \qquad (22)$$

где b – сторона треугольника.

В итоге, получаем отрезок $[0, \frac{\sqrt{3}}{4}]$. Разобьем его на 50 равных частей с шагом h и подсчитаем количество точек входящих в следующие сегменты $[0, a_1]$, $[0, a_2]$,…, $[0, a_{50}]$, где $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{50}$, с помощью формулы «=СЧЁТЕСЛИ($T$3:$T$10002;"<="&X3)». Найдем вероятность попадания точки в заданный сегмент по формуле (2), где m – число точек, попавших в сегмент, n – общее число точек. В результате получаем таблицу следующего вида (рисунок 18).

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S	0	0,009	0,0173	0,026	0,035	0,043	0,052	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,10392	0,11	0,12	0,13	0,14
N	0	35	162	379	639	1040	1494	1998	2643	3366	4170	5074	6057	7030	7651	8149	8507
Pi	0	9E-05	0,0004	1E-03	0,002	0,003	0,004	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01583	0,02	0,02	0,02	0,02

Рисунок 18 – Пример таблицы распределения площадей и вероятностей

6. Используя данные из таблицы, полученные в пункте 5) построим примерный график функции распределения вероятностей площадей треугольника с помощью точечной диаграммы. Таким образом, получаем следующего вида график (рисунок 19).

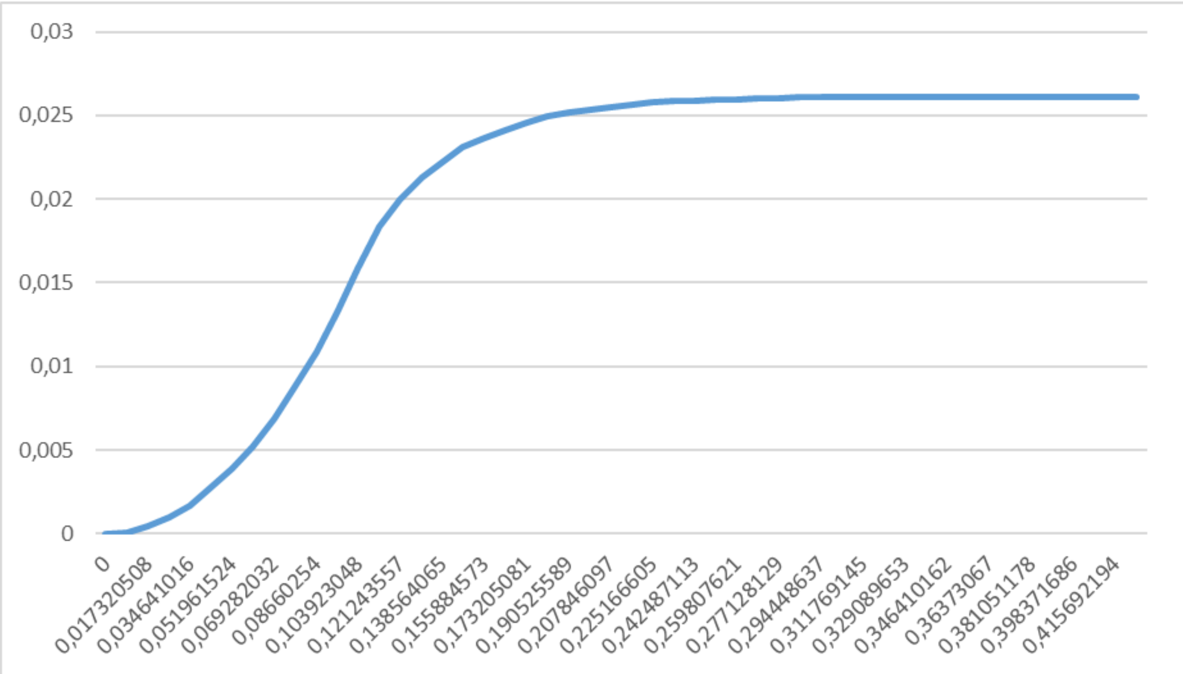


Рисунок 19 – Примерный график функции распределения вероятностей

Рассмотрим четвертую задачу.

Формулировка задачи.

Пусть дана плоскость, которая размечена параллельными линиями, расстояние между которыми равно 1. Случайным образом, на эту плоскость бросают иглу длиной 1. Определите вероятность того, что данная игла пересечет любую размеченную линию. Используя полученное решение найдите приближенное значение числа π.

Рекомендации по применению задачи на уроке.

Решение задачи разбивается на два этапа: аналитическое решение задачи, вычислительный эксперимент.

На первом этапе стоит избавится от последнего вопроса задачи. Учащимся следует найти только вероятность пересечение линии иглой. А уже в процессе решения, после того как будет дан ответ к задаче, учителю стоит обратить внимание на число π и подвести учащихся к тому, что если найти приближенное значение вероятности того, что случайно брошенная игла пересечет линию разметки, то можно найти и приближенное значение числа π. Таким образом, учитель может подвести учащихся к лабораторной работе и заинтересовать их.

На втором этапе, учителю следует организовать лабораторную работу, на которой учитель выступает роле помощника. После завершения лабораторной работы, учитель предлагает учащимся сравнить значение числа π, полученного при решении задачи на лабораторной работе со значение этого числа, предлагаемым MS Excel. Далее, используя это сравнение, учащиеся могут сделать ввод о точности значения, полученного при выполнении вычислительного эксперимента.

Аналитическое решение.

Представим иглу в виде отрезка АВ. Пусть данный отрезок размещается на заданной плоскости случайным образом. Выберем линию, которая находится ближе к середине заданного отрезка. Обозначим это расстояние за d.

Известно, что расстояние между параллельными линиями равно 1. Значит, расстояние d от середины отрезка до выбранной линии не превышает половины расстояния между блажащими размеченными линиями.

Рассмотрим два возможных случая расположения отрезка на плоскости (отрезок пересекает и не пересекает выбранную нами линию разметки).

1. Пусть отрезок пересечет линию разметки. Обозначим середину отрезка точкой С, конец отрезка, который пересек линию разметки, точкой В. Проведем, через точку В прямую а, параллельную линии разметки. Из точки С проведем прямую, перпендикулярную прямой а, которая пересечет прямую а в точке А и линию разметки в точке Н. Таким образом, получаем прямоугольный треугольник АВС (рисунок 20). Отметим, что угол АВС= α, в крайних своих положениях, может равняться 0, если отрезок лежит на линии разметки, или равняться $\frac{\pi}{2}$, если отрезок перпендикулярен линии разметки. Значит, угол α может принимать свои значения 0 до $\frac{\pi}{2}$.

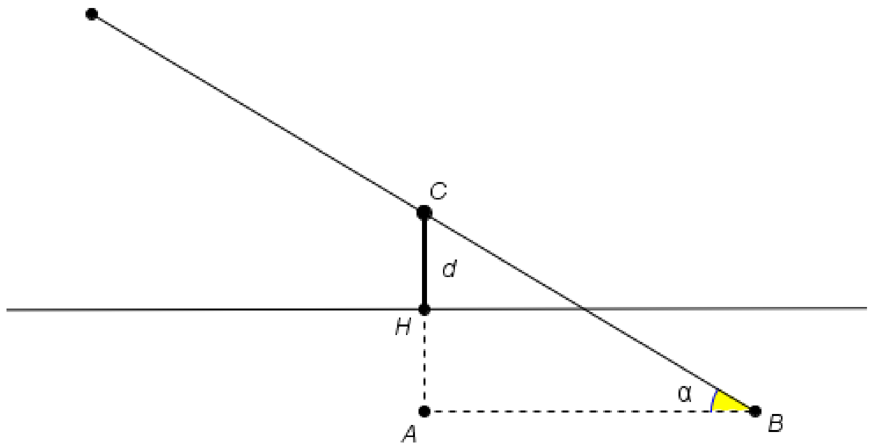


Рисунок 20 – Модель пересечения линии разметки отрезком

Заметим, что длина катета АС прямоугольного треугольника АВС, при пересечении отрезком линии разметки, больше, чем расстояния от середины заданного отрезка до линии разметки (d<AC). Используя определение синуса, найдем катет АС по формуле (23).

$$AC = BC \sin \alpha. \tag{23}$$

Так как длина отрезка равна 1, а точка С делит отрезок пополам, то ВС=$\frac{1}{2}$. Таким образом, получаем следующую формулу (24) неравенства.

$$d < \frac{\sin \alpha}{2}. \tag{24}$$

2. Пусть отрезок не пересечет линию разметки. Обозначим середину отрезка точкой C, конец отрезка, который пересек линию разметки, точкой B. Проведем, через точку B прямую a, параллельную линии разметки. Из точки C проведем прямую, перпендикулярную прямой a, которая пересечет прямую a в точке A и линию разметки в точке H. Таким образом, получаем прямоугольный треугольник ABC (рисунок 21). Отметим, что угол ABC= α, в крайних своих положениях, может равняться 0, если отрезок параллелен линии разметки, или равняться $\frac{\pi}{2}$, если отрезок перпендикулярен линии разметки. Значит, угол α может принимать свои значения 0 до $\frac{\pi}{2}$.

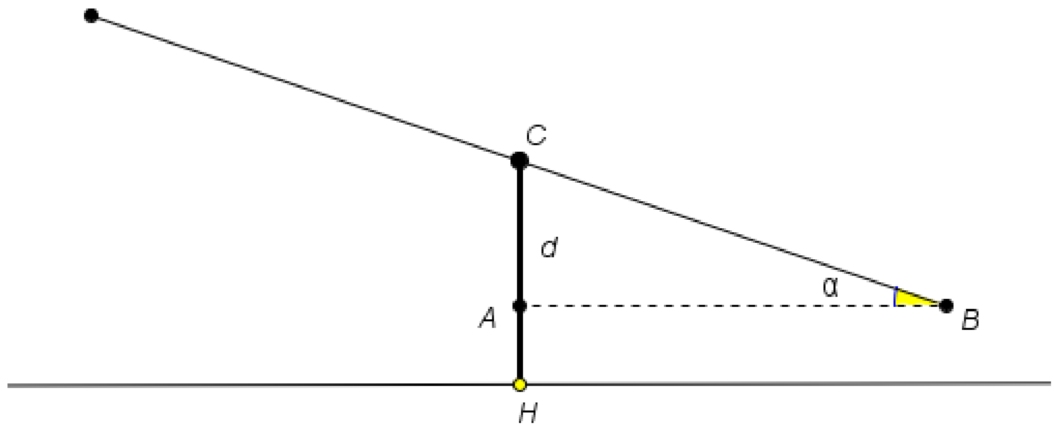


Рисунок 21 – Модель при не пересечении линии разметки отрезком

Заметим, что длина катета AC прямоугольного треугольника ABC, при пересечении отрезком линии разметки, больше, чем расстояния от середины заданного отрезка до линии разметки (d>AC). Используя определение синуса, найдем катет AC по формуле (23). Так как длина отрезка равна 1, а точка C делит отрезок пополам, то BC=$\frac{1}{2}$. Таким образом, получаем следующую формулу (25) неравенства.

$$d > \frac{\sin\alpha}{2}. \qquad (25)$$

Из всего выше изложенного можно сделать вывод, что решение задачи сводится к решению системы неравенств (26).

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ d < \frac{\sin\alpha}{2}, \\ 0 \leq d \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{26}$$

Изобразим решение системы на координатной плоскости (рисунок 22). Выделенные ограничения (первое и последнее неравенство из системы (26)) образуют прямоугольник, каждая точка которого однозначно определяет угол и расстояние от середины отрезка до линии разметки. Таким образом, рассматривая все множество точек заданного прямоугольника, найдем такое множество, которое удовлетворяет условию формулы (24). Обозначим это множество точек за S_1 – площадь криволинейной трапеции, заданной уравнением (27) на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$d = \frac{\sin\alpha}{2}. \tag{27}$$

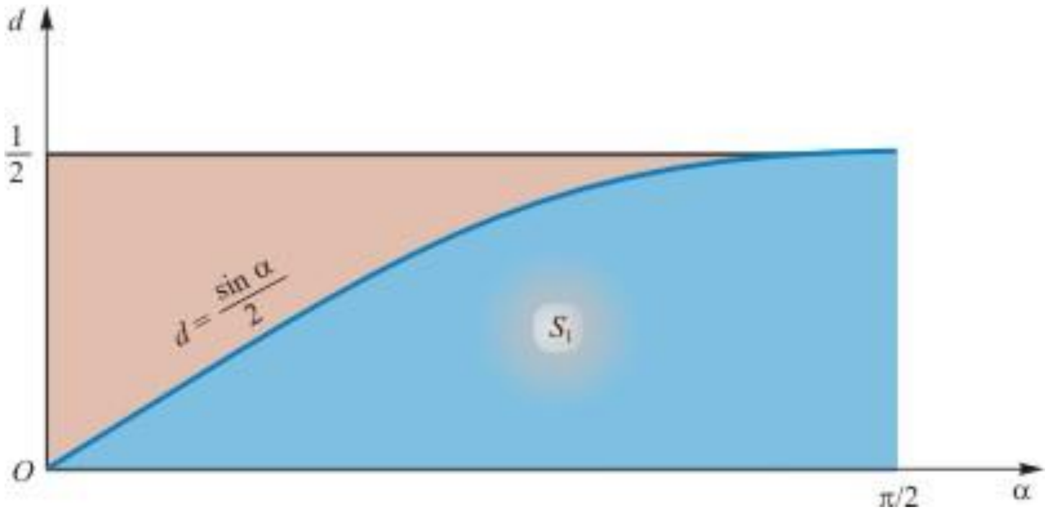


Рисунок 22 – Модель вероятности попадания иглы

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению отношения площади криволинейной трапеции S_1 к площади прямоугольника S по формуле (28).

$$p = \frac{S_1}{S} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha}{2} d\alpha}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}. \tag{28}$$

Из формулы (28) следует, формула (29).

$$\pi \approx \frac{2}{p}, \tag{29}$$

где p – вероятность того, что игла пересечет линию разметки.

Ответ: вероятность того, что случайно брошенная на плоскость игла пересечет любую размеченную линию равна $\frac{2}{\pi}$.

Решение задачи при помощи моделирования с использование случайных чисел.

Построим решение задачи с использованием математической модели, полученной при аналитическом решении. Такой моделью является прямоугольник ABCD, полученный с помощью ограничений из формулы (26), где d – откладывается по оси ординат, а α – по оси абсцисс.

Таким образом задача сводится равномерному распределению случайных точек внутри прямоугольника со сторонами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}$. Для решения задачи необходимо найти отношение количество точек, удовлетворяющее неравенству формулы (24) к общему количеству точек.

Выполнение работы.

1. В заданном прямоугольнике ABCD введем систему координат так, чтобы A(0, 0), B($\frac{\pi}{2}$, 0), C($\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}$) и D(0, $\frac{1}{2}$). Занесем данные координаты в таблицу Excel (рисунок 23).

Вершины прямоугольника		
A	0	0
B	1,570796327	0
C	1,570796327	0,5
D	0	0,5

Рисунок 23 – Таблица с координатами вершин прямоугольника

2. Чтобы равномерно распределить случайные точки внутри прямоугольника, раздели его на два равных треугольника (треугольник ABD и треугольник BCD). Выбор треугольника, в котором будет размещаться случайная точка, осуществим с использованием генератора случайных чисел. Генерация случайных чисел происходит с использование функции «=СЛУЧМЕЖДУ(0;1)». Таким образом, если выпадает число 0, то случайная точка попадет в треугольник ABD, а если выпадет число 1, то

точка попадет в треугольник BCD. Для равномерного распределения случайных точек внутри треугольника воспользуемся формулой (30).

$$\begin{cases} x_i = x_0 + \min(s_i; t_i) \cdot (x_1 - x_0) + (1 - \max(s_i; t_i)) \cdot (x_2 - x_0), \\ y_i = y_0 + min(s_i; t_i) \cdot (y_1 - y_0) + (1 - max(s_i; t_i)) \cdot (y_2 - y_0), \end{cases} \quad (30)$$

где x_0, y_0 – координаты первой вершины, x_1, y_1 – координаты второй вершины и x_2, y_2 – координаты третей вершины. Равномерно распределим 10000 случайных точек.

3. Далее выбираем те точки, которые удовлетворяют следующему условию формулы (24) (если точка удовлетворяет условию, то в соответствующем столбце отмечаем 1, в противно случае ставим 0). Таким образом, получаем таблицу следующего вида (рисунок 24).

1	x	y	F	Выбор треугольника	s	t
2	0,022478	0,120406	0	0	0,014310141	0,759187936
3	0,191969	0,014896	1	0	0,122210993	0,970208839
4	0,11217	0,060452	0	0	0,071409567	0,879096974
5	1,14098	0,403317	1	1	0,533004272	0,806634161
6	1,485441	0,139109	1	1	0,278217986	0,223878781
7	1,548739	0,294935	1	1	0,589870247	0,575828282
8	1,451649	0,151431	1	1	0,227009595	0,302861287
9	1,331633	0,286139	1	1	0,572277944	0,420021904
10	1,369879	0,247698	1	1	0,495396365	0,367488181
11	0,703938	0,295359	1	1	0,590718349	0,038859322

Рисунок 24 – Таблица равномерного распределения случайных точек и выбор точек с заданным условием

4. Подсчитаем количество точек, которые удовлетворяют заданному условию с помощью функции «=СУММ()» (складываем ячейки столбца с наименованием F). Вероятность того, что наудачу брошенная на плоскость игла пересечет линию разметки будет найдена по формуле (2), где m – количество точек, удовлетворяющее условию, n – общее количество точек.

5. Чтобы найти приближенное значение числа π, воспользуемся полученной при аналитическом решении формулой (29), где p – вероятность того, что случайно брошенная на размеченную плоскость игла пересечет линию разметки.

6. Сравним полученный результат вычисления с числом π. Для этого введем в ячейку функцию «=ПИ()» и найдем разность между этим числом и найденным нами значением числа π по формуле (31).

$$\Delta = |\pi - \pi_0|, \tag{31}$$

где π_0 – приближенное значение числа π, найденное нами. Таким образом, получаем следующую таблицу (рисунок 25).

N	6360	
p	0,636	
Pi практическая	Pi аналитическая	Δ
3,144654088	3,141592654	0,003061

Рисунок 25 – Таблица с ответом к решенной задачи

Перейдем к рассмотрению последней задачи.

Постановка задачи.

Задан правильный треугольник. В данном треугольнике равномерно распределены n точек. Найти среднее расстояние от центра треугольника до случайно точки и построить примерную гистограмму распределения расстояний от случайной точки до центра треугольника.

Рекомендации по применению задачи на уроке.

При решении данной задачи, учителю рекомендуется обратить внимание учащихся на сложность аналитического решения. Для этого достаточно продемонстрировать ответ задачи, полученный путем глубокого математического рассуждения [21]. Поэтому, данную задачу невозможно решить средствами элементарной математики. Таким образом, учащийся должен понимать, что для решения поставленной задачи, требуется численный способ решение. Учитель предлагает, в качестве такого способа взять вычислительный эксперимент. После этого, учителю стоит организовать лабораторную работу. При выполнении лабораторной работы, учитель выбирает роль помощника. При завершении лабораторной работы, перед тем как учащиеся прейдут к построению гистограмму распределения расстояний, учителю рекомендуется предложить учащимся сравнить результат, полученный при аналитическом решении, с результатом, полученным при вычислительном эксперименте, и сделать вывод.

Аналитическое решение.

Аналитическое решение требует глубокого анализа и не может быть решена средствами элементарной математики. При решении поставленной задачи можно воспользоваться построение модели с использованием случайных чисел на интервале.

Решение задачи при помощи моделирования с использование случайных чисел.

1. Задаем правильный треугольник со стороной 1, с помощью координат вершин. Для этого, в ячейки B2 и C2 поместите координаты точки A(0,0), в ячейки B3 и C3 координаты вершины B(1,0). Координаты вершины C определяются с помощью системы (32).

$$\begin{cases} x = \frac{AB}{2}, \\ y = \sqrt{AC^2 - AH^2}, \end{cases} \tag{32}$$

где AH – высота, проведенная из вершины A, таким образом, в ячейки B4 и C4 поместим координаты вершины C($\frac{1}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}$).

2. Найдем координаты центра треугольника. Центром правильного треугольника можно назвать точку пересечения медиан, биссектрис и высот треугольника (т.к. треугольник правильный). По свойству пересечения медиан треугольника найдем OH по формуле (33).

$$OH = \frac{\sqrt{AC^2 - AH^2}}{3}, \tag{33}$$

где O – точка пересечения медиан треугольника (середина треугольника). Помещаем координаты точки O($\frac{1}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{6}$) в ячейки B6 и C6

3. Получаем таблицу следующего вида (рисунок 26):

Вершины треугольника		
A	0	0
B	1	0
C	0,5	0,866025
Середина треугольника		
O	0,5	0,288675

Рисунок 26 – Координаты вершин треугольника и его центра

4. Для равномерного распределения случайных точек внутри треугольника зададим случайные числа s и t из интервала (0,1). Для этого, в ячейку D2 и E2 записываем формулу «=СЛЧИС()». Данные формулы необходимо протянуть до ячейки D10001 и E10001 включительно.

5. Для равномерного распределения случайных точек внутри треугольника воспользуемся формулами нахождения координат точки (33).

$$\begin{cases} x_i = x_A + \min(s_i; t_i) \cdot (x_B - x_A) + (1 - \max(s_i; t_i)) \cdot (x_C - x_A), \\ y_i = y_A + min(s_i; t_i) \cdot (y_B - y_A) + (1 - max(s_i; t_i)) \cdot (y_C - y_A), \end{cases} \quad (33)$$

где $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ – координаты вершин треугольника.

Разместим 10000 точек в внутри треугольника. Для этого, в ячейку F2 положим координату x_i, а в ячейку G2 положим координату y_i. Протянем полученные формулы до ячеек F10001 и G10001 включительно.

6. Расстояние от центра треугольника до случайно точки рассчитывается по формуле (34).

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_O)^2 + (y_i - y_O)^2}, \quad (34)$$

где x_i, y_i – координаты случайной точки, а x_O, y_O – координаты центра треугольника. Найдем расстояние от центра треугольника до каждой случайной точки (положим d_i в ячейку H2 и протянем формулу до ячейки H10001 включительно).

7. Чтобы построить функцию распределения, разобьем отрезок возможных значений расстояний [0, d], где d – максимально возможное расстояние от середины треугольника до произвольной точки. Очевидно, что d принимает наибольшее значение, когда случайная точка совпадает с вершиной равностороннего треугольника. Таким образом, наибольшее расстояние можно найти по формуле (35).

$$d = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2}. \quad (35)$$

Для определения шага разбиения воспользуемся формулой (36).

$$\delta = \frac{d}{20}. \quad (36)$$

С помощью этой формулы разобьем отрезок на 20 частей и подсчитаем частоту распределений расстояний (число попаданий d_i в заданный промежуток разбиения). Найдем среднее расстояние от случайной точки до центра треугольника, воспользовавшись функцией «=СРЗНАЧ(H2:H10001)». Получаем таблицу (рисунок 27).

											Распределение растояний			
d	0	0,029	0,058	0,087	0,115	0,144	0,173	0,202	0,231	0,259808	0,288675	0,317543	0,34641	0,375278
N	0	61	171	300	476	548	642	777	979	1075	1139	915	692	537
p	0	0,006	0,017	0,03	0,048	0,055	0,064	0,078	0,098	0,1075	0,1139	0,0915	0,0692	0,0537
Среднее растояние														
0,263454581														

Рисунок 27 – Пример таблицы распределения расстояний

8. Используя полученные данные таблицы построим гистограмму распределения расстояний от случайной точки внутри треугольника до его центра (рисунок 28).

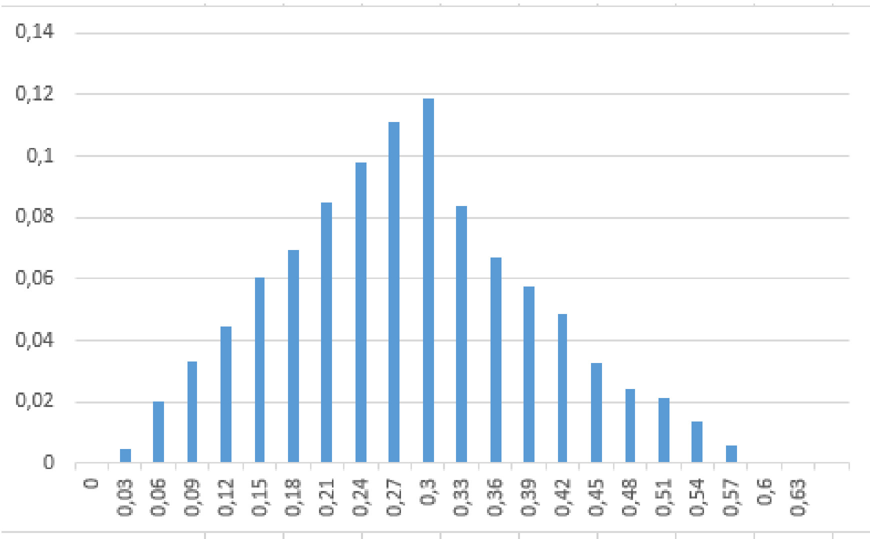


Рисунок 28 – Примерная гистограмма распределения расстояний

Отметим, что решение представленных задач организовано путем вычислительного эксперимента со случайными числами. Более того, стоит заметить, что большинство из них развивают стохастическую линию в изучении школьной математики. Таким образом, учащиеся, решая данные задачи самостоятельно, смогут сформировать устойчивое представление о случайных величинах, поймут принцип случайности и осознают, как действует теория вероятности в реальном мире.

2.2 Методическое сопровождение элективного курса по теории вероятностей и математической статистики с использованием вычислительных экспериментов

Чтобы сформировать методическое сопровождения учителя, разработаем примерную программу элективного курса по изучению теории вероятностей и математической статистке. Рассмотрим часть предлагаемого элективного курса, затрагивающие тему «случайные величины». Внедрим в данный курс задачи, рассмотренные ранее и позволяющие изучить некоторые теоретико-вероятностные характеристики с использованием вычислительного эксперимента со случайными числами, и сформулируем методические комментарии, которые позволят учителю организовать учебный процесс в рамках изучаемой темы.

Выделим тот факт, что данный элективный курс рассматривается в качестве обобщения или закрепления изученного ранее материала, а также он позволит сформировать понимание рассматриваемых тем. Таким образом, учащиеся уже познакомились с многими определениями, понятиями и формулами на уроках математики. Однако, анализ учебников по «алгебре и началу математического анализа» показал, что такого знакомство не достаточного для полного освоения некоторых тем из теории вероятностей и математической статистики. Поэтому, можно сделать вывод, что материал, предлагаемый данным элективным курсом, должен быть практико-ориентированным. Учитель должен сопоставлять теоретический материал с решаемыми задачами и делать над этим важный акцент.

Разработаем поурочное планирование элективного курса (Таблица 3), посвященного теории вероятностей и математической статистике, и рассмотрим из него интересующие нас темы. Для освоения, предлагаемого курса, выделим 17 часов. Курс включает в себя теоретические и практические вопросы, а также лабораторные работы за компьютером.

Таблица 3 – Поурочное планирование элективного курса по теории вероятностей и математической статистике

№	Тема	Часы	Вид занятия
1	*2*	*3*	*4*
1	Комбинаторика	1	Теория и практика.
2	Введение в теорию вероятности. Классическое определение вероятности	1	Теория и практика.
3	Введение в статистику. Статистическое наблюдение. Относительная частота.	1	Теория и практика.
4	Случайная величина. Статистическая вероятность.	2	Теория, практика и лабораторная работа.
5	Распределения вероятности. Гистограмма распределения вероятности.	2	Теория и лабораторная работа.
6	Нормальное распределение. Равномерное распределение.	1	Теория.
7	Статистика и геометрическая вероятность.	3	Теория, практика и лабораторная работа
8	Статистические характеристики рядов данных. Математическое ожидание случайно вылечены.	2	Теория и практика.
9	Отклонение от среднего значения, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.	2	Теория и практика.
10	Функция распределения вероятности. График функции распределения вероятности.	2	Теория и лабораторная работа.

Общие методические рекомендации.

При проведении лабораторных работ, рекомендуется разделить учащихся на группы по 2-3 человека, в зависимости от количества компьютеров, расположенных в классе. Действия, совершаемы учителем при проведении лабораторных работ, условно можно разделить на три уровня. Данные уровни зависят от среднего общего математического и информационного развития всего класса. С более способным классом, следует предоставить учащимся возможность полностью самостоятельного решения задачи (решение задачи в своей группе). С классом, имеющим среднее развитие, учителю необходимо так сформировать свои действия, чтобы часть задачи было решено с помощью всего класса совместно (построение математической модели для решения задачи), а другая часть решалось самостоятельно (реализация построенной модели). А в классе с более низким уровнем развития, следует осуществлять полный контроль при всех этапах решения задачи, при этом учащиеся решают задачу при помощи лабораторной работы. Аналитическое решение и решение задачи при помощи вычислительного эксперимента рассматривается во 2 пункте 1 главы.

В тех задачах, где требуется равномерно распределить случайные точки внутри треугольника или прямоугольника, стоит воспользоваться алгоритмом равномерного распределения случайных точек внутри произвольного треугольник [4;5].

При необходимости, учитель может менять формулировку задачи с целью сопоставления задачи с реальным миром, а также, менять местами аналитическое решение и вычислительный эксперимент. Такое решение позволит ответить на вопрос о необходимости изучения данных тем и позволит учащимся самостоятельно определить некоторые закономерности.

Стоит отметить, что решенные ранее задачи могут быть использованы в качестве связующего звена, при изучении новых тем, как электронные образовательные ресурсы.

Методические рекомендации по теме «Случайные величины. Статистическая вероятность».

Перед тем, как дать определения случайно величины, следует на примерах продемонстрировать, что статистика часто занимается сбором, представлением и анализом некоторых случайных величин. Тем самым показать, что изучение данной темы является важной частью при изучении статистики. Далее, рекомендуется дать простое и интуитивно понятное определение понятию «случайная величина» (предлагается рассматривать дискретные случайные величины). Не стоит зацикливаться на данном определении. Лучше всего сформировать понимание о случайно величине на примере с игральным кубиком. Далее, для закрепления изученного материала, предлагается построить аналитическое решение задачи, при выбрасывании одного, двух и трех игральных кубиков. При решении задачи, следует акцентировать внимание учащихся на том, что с увеличением числа кубиков аналитическое решение усложняется.

Таким образом, перед учащимися ставится проблема поиска решении при выбрасывании большого количество игральных кубиков. Таким образом, учителю следует сделать плавный переход к введению понятия «статистическая вероятность». После чего, следует рассмотреть пример, демонстрирующий оба эти понятия.

Далее, учителю следует организовать проведение лабораторной работы, по рекомендации, написанной в общих рекомендациях к уроку. На лабораторной работе следует рассмотреть аналитически решенную ранее задачу с выбрасыванием игрального кубика.

Формулировка задачи.

Одновременно бросают 1, 2 и 3 игральных кубика. Найти вероятность выпадения всевозможных сумм и построить плотность вероятности для каждого случая.

При работе с задачей, на этапе решения задачи с выбрасыванием одного игрального кубика, учителю рекомендуется предложить учащимся вместе с диаграммой, построенной в ходе вычислительного эксперимента, построить диаграмму по аналитическому решению задачи и сравнить полученные результаты. Таким образом, учащиеся приходят к выводу, что статистическая вероятность приближенно равняется вероятности события, при больших количествах испытания. Таким образом, учащиеся решают проблему с усложнением решения задачи при выбрасывании большого количества кубиков.

Аналогично, следует поступить и с решением задачи при выбрасывании двух и трех игральных кубиков, с небольшим отличием. Аналитическое решение задачи строится не гистограммой, а графиком. В дальнейшем, данный график позволит подвести учащихся к теме одного из следующих уроков.

По завершению лабораторной работы, следует подвести итоги урока и сформулировать вывод, который получили учащиеся при решении задачи. Если у учащихся осталось свободное время, рекомендуется предложить им провести самостоятельно похожий эксперимент с решением задачи о подбрасывании монеты.

Методические рекомендации по теме «Распределения вероятности. Гистограмма распределения вероятности».

Урок по данной теме следует рассматривать обзорно и не подвергать его подробному анализу с учащимися. Заметим, что учащиеся уже успели познакомиться с гистограммой распределения плотностей вероятностей. Однако они не имеют представление о распределении вероятностей в общем. Поэтому, учителю рекомендуется вернуться уже к решенной ранее задаче о выбрасывании игрального кубика. Данная задача позволит учителю подвести учащихся к теме урока и на ее основе начать обсуждения новой темы. После чего, стоит вести определение распределения вероятностей и обзорно, на примерах рассмотреть каждое из распределений, исключая нормальное и равномерное распределение. На них рекомендуется выделить отдельный урок.

Одной из основных задач урока является наглядное визуализация распределения вероятностей, а не ее закон. Таким образом, функцию распределения рассматривать не стоит. Для нее следует выделить отдельный урок.

Далее, следует прейти к решению задачи.

Формулировка задачи.

Задан правильный треугольник. В данном треугольнике равномерно распределены n точек. Найти среднее расстояние от центра треугольника до случайно точки и построить гистограмму распределения расстояний от случайной точки до центра треугольника.

При работе с предложенной задачей, учителю следует обратить внимание учащихся на то, что данная задача имеет сложное аналитическое решение, требующее глубокого математического анализа, которое невозможно поострить с использованием элементарной математики. Поэтому следует перейти непосредственно к выполнению лабораторной работы, руководствуясь требованиями, написанными в общих рекомендациях к уроку. После завершения вычислительного эксперимента, до того, как учащиеся перейдут к построению гистограммы, следует сравнить полученные в ходе эксперимента данными с аналитическим решением задачи [21]. Таким образом учащиеся смогут сделать вывод о правильности решения поставленной задачи и о возможности использования вычислительного эксперимента в качестве численного решения с допустимой погрешностью, которое позволит решить задачу без сложных математических рассуждений.

При завершении лабораторной работы, стоит подвести итоги урока и предложить учащимся сделать выводы.

Методические рекомендации по теме «Статистика и геометрическая вероятность».

Перед тем, как перейти к решению задач, учителю рекомендуется ввести понятие геометрической вероятности и рассмотреть пример, классический для геометрической вероятности, задачи о встрече, решение которой оформляет сам учитель. Предлагается решить следующую задачу.

Формулировка задачи.

Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 12.00 до 13.00 часов и ждете друг друга в течении 5 минут.

После решения данной задачи, стоит перейти к аналитическому решению задачи о треугольнике.

Формулировка задачи.

Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным, прямоугольным и тупоугольным.

Для аналитического решения, сформулированную задачу предлагается обрезать. Таким образом, в данной задаче необходимо найти вероятность того, что наудачу нарисованный треугольник является либо остроугольным, либо тупоугольным. Аналитическое решение данной задачи оформляют ученики совместно со всем классом при сопровождении и помощи учителя.

После этого, учителю необходимо организовать лабораторную работу, согласно правилам, записанным в общих рекомендациях к уроку. При выполнении лабораторной работы, задача решается полностью. После завершения лабораторной работы, учителю стоит обратить внимание на вероятность того, что случайно нарисованный треугольник будет прямоугольным. В свою очередь, учащимся предлагается сравнить полученный с помощью вычислительного эксперимента ответ, с ответом аналитического решения и сделать все выводы по задаче.

Далее, предлагается по аналогичной схеме решить задачу Бюффона, имеющую следующую формулировку.

Пусть дана плоскость, которая размечена параллельными линиями, расстояние между которыми равно 1. Случайным образом, на эту плоскость бросают иглу длиной 1. Определите вероятность того, что данная игла пересечет любую размеченную линию. Используя полученное решение найдите приближенное значение числа π.

Так же, как и в предыдущей задачи, аналитическое решение строится из укороченной версии предлагаемой задачи, а именно, необходимо убрать нахождение приближенного значения числа π. В свою очередь, после выполнения учащимися лабораторной работы, учителю стоит обратить внимание на полученное в ходе эксперимента число π и определить его точность, путем сравнения данного значения с приближенным значением, предлагаемым MS Excel. Далее, учителю стоит предложить учащимся подвести итоги и сделать необходимые выводы.

Методические рекомендации по теме «Функция распределения вероятности. График функции распределения вероятности».

Формирование понятия функции распределения вероятности у учащихся 10-11 классов вызывают сильные затруднения, потому что освоение данной темы требуют более глубокое познания в математике. Таким образом, учителю не стоит проводить глубокий анализ данный темы, а предлагается поверхностное изучить ее с учащимися. Предлагается, при изучении данной темы сразу вводить определение функции распределения (интегральная функция распределения). Дальнейшее изучение темы стоит проводить на примере уже готовой статистической модели вероятностей в виде таблицы (рисунок 29), по которой предлагается построить функцию распределений. При построении данной функции, учителю стоит обратить внимание, что при увеличении числа дискретизации и увеличении числа возможных значений график функции начинает принимать гладкий вид. В ознакомительном порядке предлагается рассмотреть свойства функции распределения и дать определение функции плотности (дифференциальная функция распределения). Также стоит перечислить свойства функции плотности. В заключении, стоит отметить взаимосвязь между интегральной и дифференциальной функциями распределения.

X	1	3	4	5	7	8
P	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Рисунок 29. Пример задач на график функции распределения

Для закрепления изученного материала, рекомендуется решить задачу на площадь треугольника.

Формулировка задачи.

На сторонах равностороннего треугольника со стороной 1 равномерно распределены случайно случайные точки. Данные точки образуют треугольники. Необходимо построить график функции распределения вероятностей площадей треугольника.

При работе с данной задачей, необходимо напомнить учащимся о статистической вероятности и указать на невозможность решения данной задачи средствами элементарной математики. Таким образом, ученики смогу понять, что решение некоторых задач возможно с использованием вычислительных экспериментов. А решенные ранее задачи позволят увидеть, что такой способ имеет небольшую погрешность в своих вычислениях, которой можно пренебречь. Поэтому, учитель не прибегает к аналитическому решению задачи, а сразу организует лабораторную работу, согласно правилам, записанным в общих рекомендациях к уроку.

После завершения лабораторной работы, учащимся стоит подвести итоги урока и сделать вывод по изученной теме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика является одной из важных разделов при освоении курса математики в школе. Учащиеся каждый день своей жизни сталкиваются с различными статистическими или вероятностными данными. Таким образом, учащийся, сам того не осознавая, погружен в данную область математики. Однако, реальность такого, что изучение теории вероятности и математической статистики является сложным процессом не только для учащихся, но и для самого учителя.

Педагогу необходимо так организовать учебный процесс, чтобы ученики не только смогли сформировать понимание изучаемой темы, но и заинтересовались ей. К том же, необходимо достичь требования освоения представленной дисциплины, прописанные в федеральном государственном образовательном стандарте и в примерной образовательной программе среднего общего образования. В этом случае, на помощь учителю, приходит использование компьютерной техники на уроках математики. Организация лабораторных работ с использованием вычислительных экспериментов, позволит в полной мере сформировать у учащихся принципы формирования теоретико-вероятностных закономерностей в реальном мире. А использование случайных чисел при решении задач с помощью такой методике, формирует у учащихся понимание темы «случайные величины» и развивает стохастическую линию, которая сильно ослаблена в современной школе.

Однако, использование компьютерной техники, не ограничивается исключительно лабораторной работой. Так, одна из методических особенностей преподавания теории вероятностей и математической статистики, выявленная нами в ходе теоретического исследования, является использования на уроках электронных образовательных ресурсов.

Стоит отметить и другие методические особенности преподавания теории вероятностей и математической статистики. Например, предлагаемые ученикам задачи не должны содержать только готовые статистические модели. Не стоит забывать и о методической особенности, предлагаемой иностранными педагогами. А именно использование в образовательной деятельности «random experiment», позволяющий сформировать у учащихся компьютерную грамотность.

Чтобы выявить, предусмотрено ли использование этих методических особенностей на уроках в старшей школе при углубленном изучении математики, были проанализированы учебники по алгебре и началу математического анализа под авторством Ш.А. Алимова, А.Г. Мерзляка, С.М. Никольского и А.Г. Мордковича.

В ходе анализа представленных учебников, было выявлено, что часть рассмотренных методических особенности преподавания теории вероятностей и математической статистики, не предусмотрено. Так из четырех учебников только один под авторством А.Г. Мерзляка предполагает использование компьютера в образовательной деятельности. Однако, оно не предусмотрено в качестве самостоятельной работы учащихся без участия и контроля в этом процессе учителя.

Куда лучше состоят дела с системой задач, представленной авторами учебников. Такая система задач представляет из себя задачи использующие как уже готовую статистическую модель вероятностей, так и без нее.

Опираясь на теоретическое исследование представленной темы, были подобраны несколько задач, позволяющие с помощью вычислительного эксперимента со случайными числами изучить некоторые теоретико-вероятностные закономерности (например, при выбрасывании игрального кубика плотность вероятностей стремится к нормальному распределению), представлено их решение и сформулированы методические рекомендации по их использованию на уроке математики.

Внедрение рассматриваемых задач в образовательную деятельность учащихся, представлено в виде примерной разработки плана элективного курса. Из этого плана были выделены и рассмотрены некоторые темы, в изучении которых можно применить задачи, позволяющие с помощью вычислительного эксперимента со случайными числами изучить некоторые теоретико-вероятностные характеристики, и сформулированы методические рекомендации по их изучению с использованием этих задач.

Таким образом, предлагаемые в работе задачи способствуют формированию у учащихся математической и компьютерной грамотности. Они позволяют сформировать понимания темы «случайные величины», изучить принципы действия теории вероятностей и математической статистики, развивают стохастическую линию изучения математики и позволяют заинтересовать учащихся при освоении некоторых тем из теории вероятностей и математической статистики, а также формируют межпредметные связи.

Предложенные задачи имеют большую перспективу не только при изучении теории вероятности и математической статистик, но и при изучении математического или компьютерного моделирования. Самостоятельное решение этих задач помогут сформировать некоторые профессиональные навыки и способствует профориентации учащихся.

Отметим возможность использования представленных задач в качестве проектной деятельности учащихся по математики или информатики в виде темы исследования по теории вероятностей и математической статистики, математическому или компьютерному моделированию.

Развитие же темы работы, может быть представлена в виде увеличения количества задач, позволяющих изучить теоретико-вероятностные закономерности с использованием случайных чисел. А использования какого-либо языка программирования при решении таких задач создаст благоприятную обстановку для выбора бедующей профессии учащихся и поможет сформировать профессиональные навыки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Бунимович, Е. А.** Основы статистики и вероятность. 5-11 кл.: учебное пособие / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. Москва: Дрофа, 2008. – 286 с.

2. **Гулиева, Э.Н.** Стохастическая компонента в школьном образовании как необходимый элемент математической культуры учащихся / Э.Н. Гулиева, Н.П. Дмитриев // Культура, наука, образование: проблемы и перспективы: Материалы V Международной научно-практической конференции, Нижневартовск, 09–10 февраля 2016 года / отв. ред. А.В. Коричко. – Нижневартовск: Нижневартовский государственный университет, 2016. – С. 157–160. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26072814 (дата обращения: 01.03.21).

3. **Далингер, В.А.** Информационные технологии в обучении учащихся теории вероятностей и математической статистике / В.А. Далингер // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 4. – URL: http://www.science-education.ru/104-6574 (дата обращения: 05.03.21).

4. **Мартынова, Е.В.** Геометрические приемы в реализации алгоритма генерации случайных точек внутри произвольных многоугольников и многогранников / Е.В. Мартынова, Р.М. Нигматулин // Современные наукоемкие технологии. 2018. – № 1. – С. 27–31. – URL: http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=36887 (дата обращения: 05.03.2021).

5. **Мартынова, Е.В.** Геометрический подход к построению алгоритма генерации случайных точек внутри произвольного многоугольника / Е.В. Мартынова, Р.М. Нигматулин // Информационно-коммуникационные технологии в науке, производстве и образовании ICIT-2017: материалы Международной научной конференции. – Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2017. – С. 168–172.

6. **Мерзляк, А.Г.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник. Углублённый уровень / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков, Д.А. Номировский. – Москва: изд. центр «Вентана-Граф», 2019

7. **Мордкович, А.Г.** Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся образовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – Москва: Мнемозина, 2018. – 311 с.

8. **Нахман, А. Д.** Элементы теории случайных величин в содержании математического образования / А. Д. Нахман // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2018. – № 3. – С. 34–47. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=35087602 (дата обращения: 02.02.21).

9. **Нахман, А.Д.** Вопросы содержания и технологические приёмы обучения стохастике в школьном курсе математики / А. Д. Нахман // Международный журнал экспериментального образования. – 2018. – № 1. – С. 25–30. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32424447 (дата обращения: 04.03.21).

10. **Овшинова, О. Г.** Изучение элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики / О. Г. Овшинова // Шуйская сессия студентов, аспирантов, педагогов, молодых ученых: итоги 10-летия международной деятельности ШГПУ - Шуйского филиала ИвГУ: материалы XII Международной научной конференции, Москва-Шуя, 05 июля 2019 года. – Москва-Шуя: Ивановский государственный университет, Шуйский филиал, 2019. – С. 72–74. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41329917 (дата обращения: 16.01.21).

11. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева [и др.]. – 3-е изд. – Москва: Просвещение, 2016. – 463 с.

12. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин – 8-е изд. – Москва: Просвещение, 2018. – 430 с.

13. Едина коллекция цифровых образовательных ресурсов. – URL: http://school-collection.edu.ru/ (дата обращения: 02.03.21).

14. Задача Бюффона о бросании иглы // RNDr. Vladimír Vaščák osobní stránky učitele z Moravy. – URL: https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mat_buffon&l=ru (дата обращения: 01.03.21).

15. Интерактивный урок. Государственная образовательная платформа «Российская электронная школа». – URL: https://resh.edu.ru/ (дата обращения: 02.03.21).

16. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. Одобрена решением от 12 мая 2016 года. Протокол №2/16**.** – URL: https://fgosreestr.ru/ (дата обращения: 20.12.20).

17. Федеральный перечень учебников. – URL: https://fpu.edu.ru/ (дата обращения: 03.02.21).

18. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов. – URL: http://fcior.edu.ru/ (дата обращения: 04.03.21).

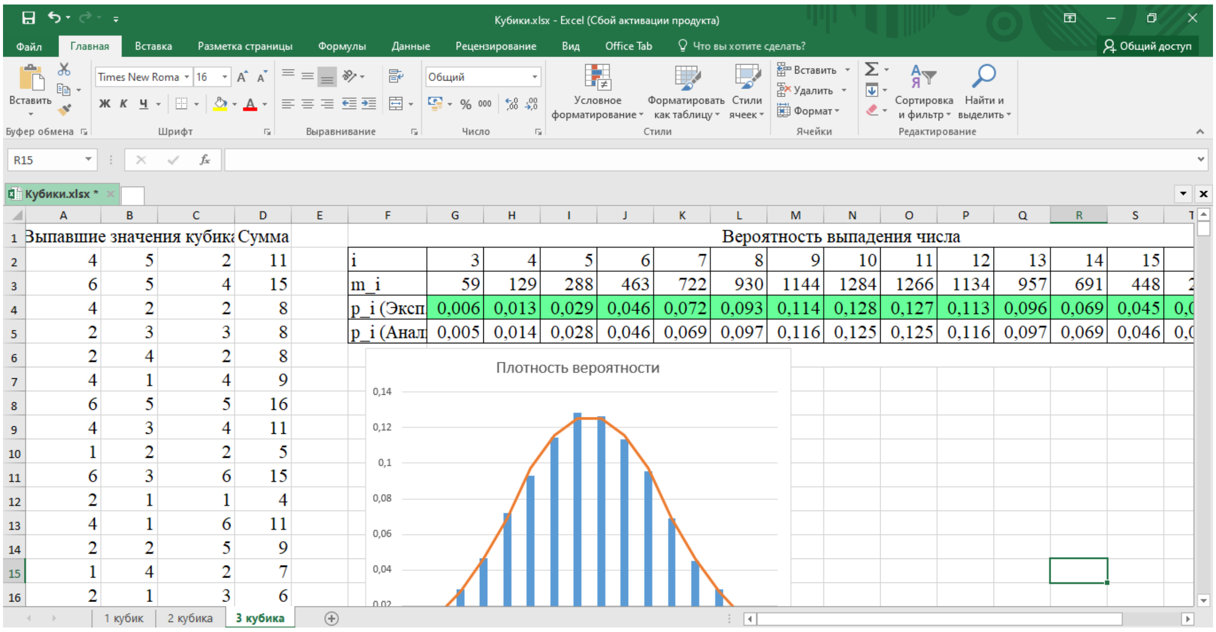
19. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413. – URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 13.12.20).

20. **Chunguang Zhao** Study on the Teaching Reform in Probability Theory and Mathematical Statistics / Chunguang Zhao, Haijun Chen, Yulong Zhu // Proceedings of the 2014 International Conference on Global Economy, Commerce and Service Science. Available Online January 2014. – URL: https://www.atlantis-press.com/proceedings/gecss-14/10952 (дата обращения: 08.04.21).

21. Random Point Picking – From MathWorld // A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/topics/RandomPointPicking.html (дата обращения: 01.03.21).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Примерные решения задач с использованием электронной таблицы MS Excel

Примерное решение первой задачи с использованием MS Excel

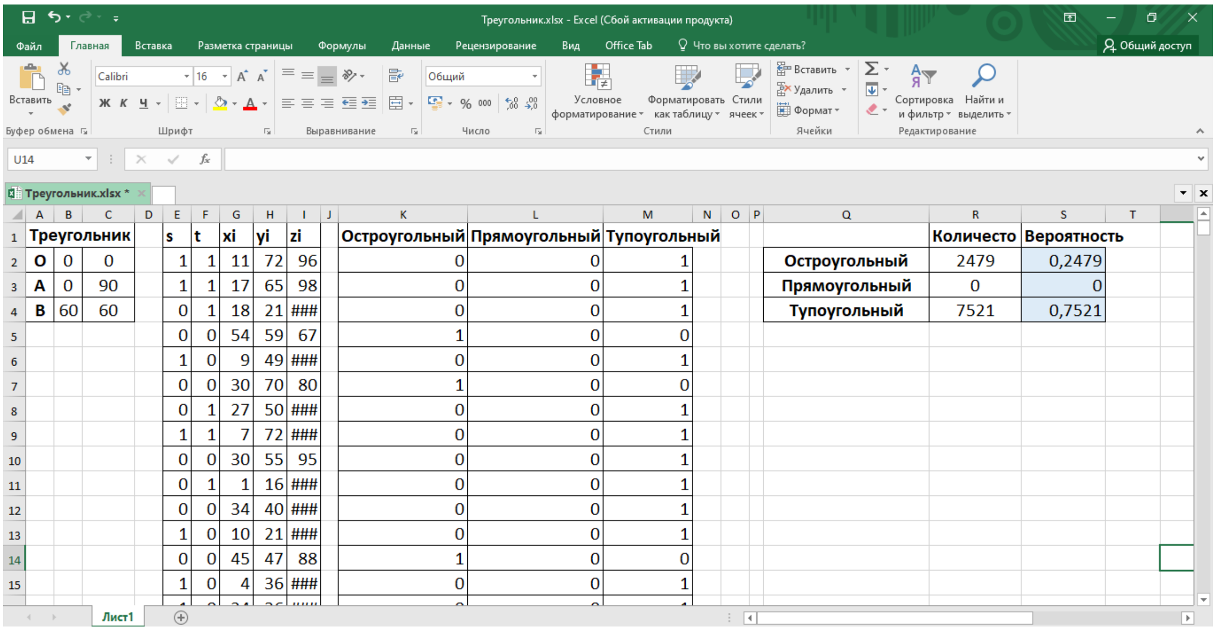


Выпавшие значения кубика			Сумма
4	5	2	11
6	5	4	15
4	2	2	8
2	3	3	8
2	4	2	8
4	1	4	9
6	5	5	16
4	3	4	11
1	2	2	5
6	3	6	15
2	1	1	4
4	1	6	11
2	2	5	9
1	4	2	7
2	1	3	6

Вероятность выпадения числа

i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m_i	59	129	288	463	722	930	1144	1284	1266	1134	957	691	448
p_i (Эксп	0,006	0,013	0,029	0,046	0,072	0,093	0,114	0,128	0,127	0,113	0,096	0,069	0,045
p_i (Анал	0,005	0,014	0,028	0,046	0,069	0,097	0,116	0,125	0,125	0,116	0,097	0,069	0,046

Примерное решение второй задачи с использованием MS Excel



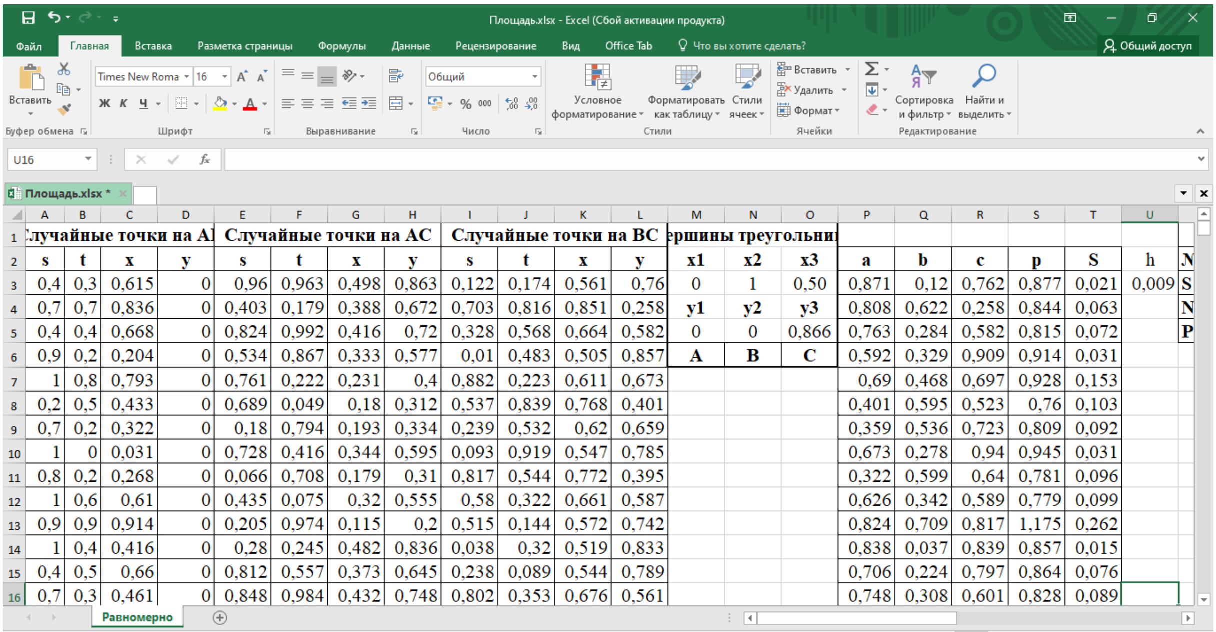
Треугольник		
O	0	0
A	0	90
B	60	60

s	t	xi	yi	zi	Остроугольный	Прямоугольный	Тупоугольный
1	1	11	72	96	0	0	1
1	1	17	65	98	0	0	1
0	1	18	21	###	0	0	1
0	0	54	59	67	1	0	0
1	0	9	49	###	0	0	1
0	0	30	70	80	1	0	0
0	1	27	50	###	0	0	1
1	1	7	72	###	0	0	1
0	0	30	55	95	0	0	1
0	1	1	16	###	0	0	1
0	0	34	40	###	0	0	1
1	0	10	21	###	0	0	1
0	0	45	47	88	1	0	0
1	0	4	36	###	0	0	1

	Количесто	Вероятность
Остроугольный	2479	0,2479
Прямоугольный	0	0
Тупоугольный	7521	0,7521

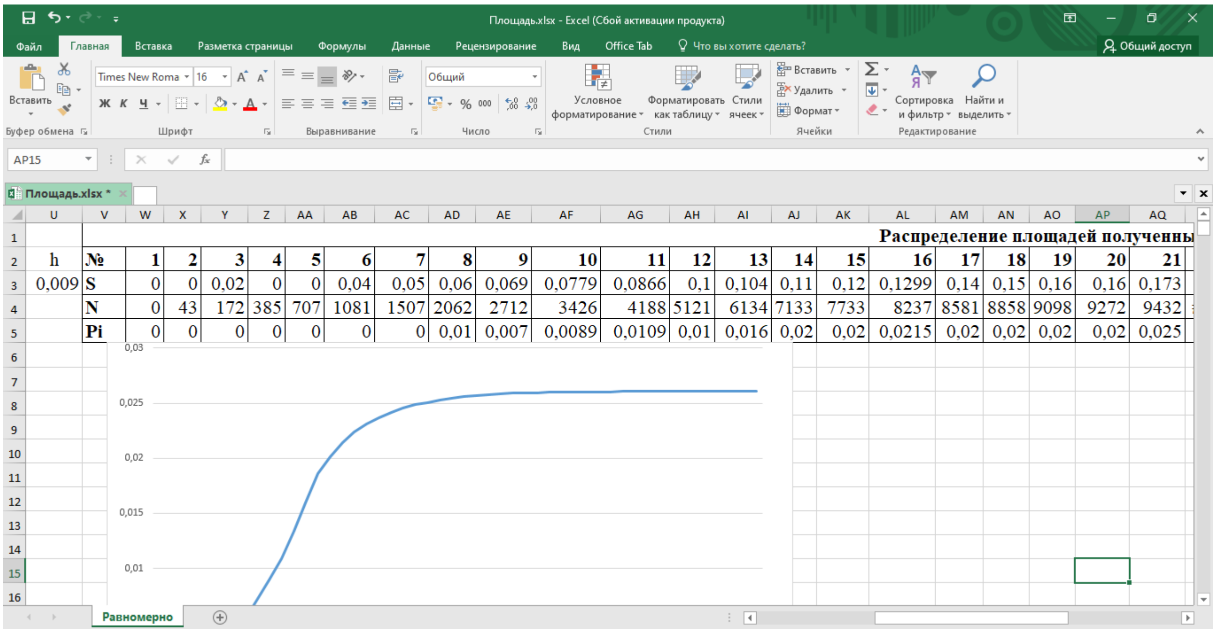
Примерное решение третий задачи с использованием MS Excel

1. Первая часть решения задачи.



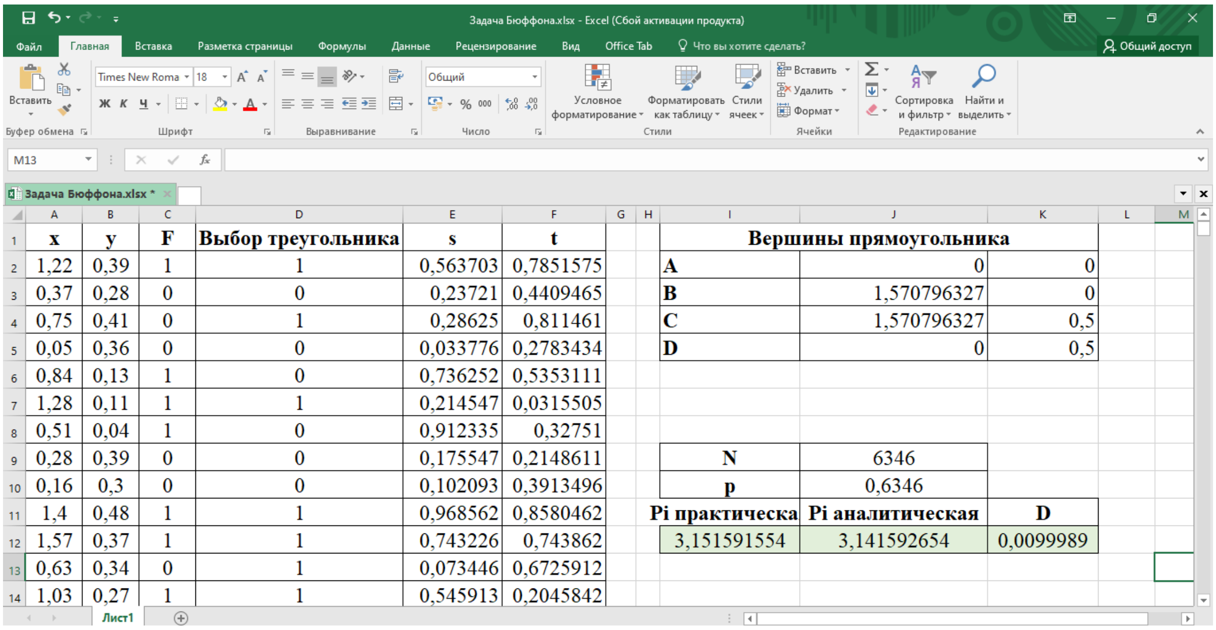
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	лучайные точки на А				Случайные точки на АС				Случайные точки на ВС				ершины треугольни									
2	s	t	x	y	s	t	x	y	s	t	x	y	x1	x2	x3	a	b	c	p	S	h	N
3	0,4	0,3	0,615	0	0,96	0,963	0,498	0,863	0,122	0,174	0,561	0,76	0	1	0,50	0,871	0,12	0,762	0,877	0,021	0,009	S
4	0,7	0,7	0,836	0	0,403	0,179	0,388	0,672	0,703	0,816	0,851	0,258	y1	y2	y3	0,808	0,622	0,258	0,844	0,063		N
5	0,4	0,4	0,668	0	0,824	0,992	0,416	0,72	0,328	0,568	0,664	0,582	0	0	0,866	0,763	0,284	0,582	0,815	0,072		P
6	0,9	0,2	0,204	0	0,534	0,867	0,333	0,577	0,01	0,483	0,505	0,857	A	B	C	0,592	0,329	0,909	0,914	0,031		
7	1	0,8	0,793	0	0,761	0,222	0,231	0,4	0,882	0,223	0,611	0,673				0,69	0,468	0,697	0,928	0,153		
8	0,2	0,5	0,433	0	0,689	0,049	0,18	0,312	0,537	0,839	0,768	0,401				0,401	0,595	0,523	0,76	0,103		
9	0,7	0,2	0,322	0	0,18	0,794	0,193	0,334	0,239	0,532	0,62	0,659				0,359	0,536	0,723	0,809	0,092		
10	1	0	0,031	0	0,728	0,416	0,344	0,595	0,093	0,919	0,547	0,785				0,673	0,278	0,94	0,945	0,031		
11	0,8	0,2	0,268	0	0,066	0,708	0,179	0,31	0,817	0,544	0,772	0,395				0,322	0,599	0,64	0,781	0,096		
12	1	0,6	0,61	0	0,435	0,075	0,32	0,555	0,58	0,322	0,661	0,587				0,626	0,342	0,589	0,779	0,099		
13	0,9	0,9	0,914	0	0,205	0,974	0,115	0,2	0,515	0,144	0,572	0,742				0,824	0,709	0,817	1,175	0,262		
14	1	0,4	0,416	0	0,28	0,245	0,482	0,836	0,038	0,32	0,519	0,833				0,838	0,037	0,839	0,857	0,015		
15	0,4	0,5	0,66	0	0,812	0,557	0,373	0,645	0,238	0,089	0,544	0,789				0,706	0,224	0,797	0,864	0,076		
16	0,7	0,3	0,461	0	0,848	0,984	0,432	0,748	0,802	0,353	0,676	0,561				0,748	0,308	0,601	0,828	0,089		

2. Вторая часть решения задачи.



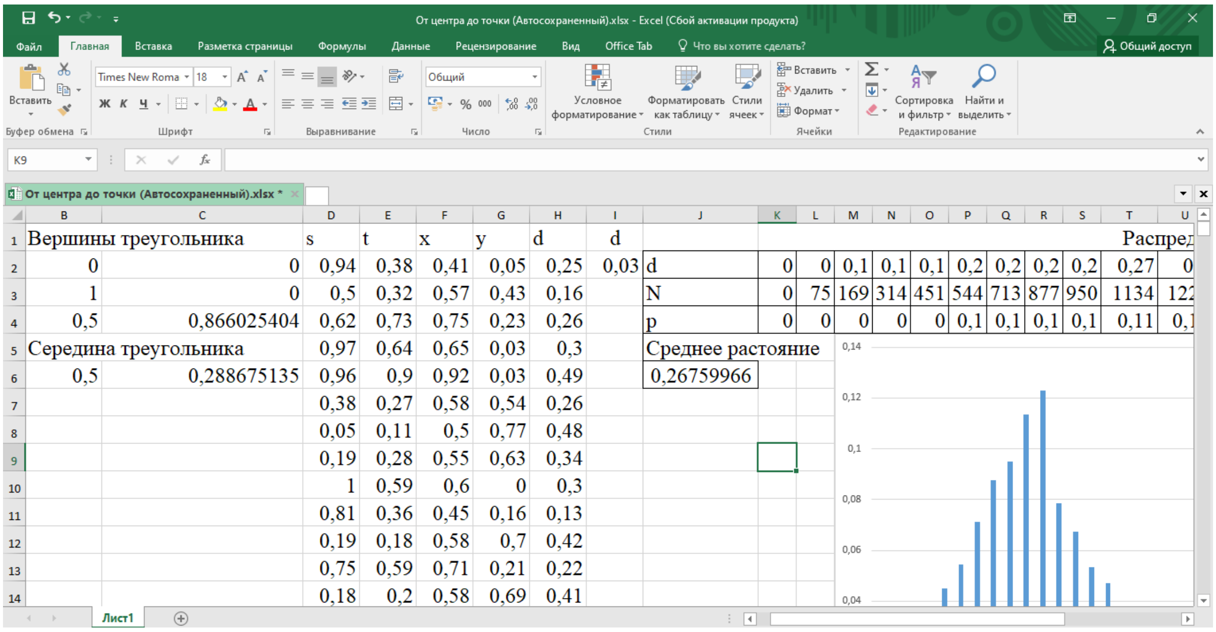
	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ
1																		Распределение площадей полученны					
2	h	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	0,009	S	0	0	0,02	0	0	0,04	0,05	0,06	0,069	0,0779	0,0866	0,1	0,104	0,11	0,12	0,1299	0,14	0,15	0,16	0,16	0,173
4		N	0	43	172	385	707	1081	1507	2062	2712	3426	4188	5121	6134	7133	7733	8237	8581	8858	9098	9272	9432
5		Pi	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0,007	0,0089	0,0109	0,01	0,016	0,02	0,02	0,0215	0,02	0,02	0,02	0,02	0,025

Примерное решение четвертой задачи с использованием MS Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	y	F	Выбор треугольника	s	t			Вершины прямоугольника		
2	1,22	0,39	1	1	0,563703	0,7851575			A	0	0
3	0,37	0,28	0	0	0,23721	0,4409465			B	1,570796327	0
4	0,75	0,41	0	1	0,28625	0,811461			C	1,570796327	0,5
5	0,05	0,36	0	0	0,033776	0,2783434			D	0	0,5
6	0,84	0,13	1	0	0,736252	0,5353111					
7	1,28	0,11	1	1	0,214547	0,0315505					
8	0,51	0,04	1	0	0,912335	0,32751					
9	0,28	0,39	0	0	0,175547	0,2148611			N	6346	
10	0,16	0,3	0	0	0,102093	0,3913496			p	0,6346	
11	1,4	0,48	1	1	0,968562	0,8580462			Pi практическа	Pi аналитическая	D
12	1,57	0,37	1	1	0,743226	0,743862			3,151591554	3,141592654	0,0099989
13	0,63	0,34	0	1	0,073446	0,6725912					
14	1,03	0,27	1	1	0,545913	0,2045842					

Примерное решение пятой задачи с использованием MS Excel



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Вершины треугольника		s	t	x	y	d	d											Распре	
2	0	0	0,94	0,38	0,41	0,05	0,25	0,03	d	0	0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,27	0
3	1	0	0,5	0,32	0,57	0,43	0,16		N	0	75	169	314	451	544	713	877	950	1134	122
4	0,5	0,866025404	0,62	0,73	0,75	0,23	0,26		p	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,11	0,1
5	Середина треугольника		0,97	0,64	0,65	0,03	0,3		Среднее растояние											
6	0,5	0,288675135	0,96	0,9	0,92	0,03	0,49		0,26759966											
7			0,38	0,27	0,58	0,54	0,26													
8			0,05	0,11	0,5	0,77	0,48													
9			0,19	0,28	0,55	0,63	0,34													
10			1	0,59	0,6	0	0,3													
11			0,81	0,36	0,45	0,16	0,13													
12			0,19	0,18	0,58	0,7	0,42													
13			0,75	0,59	0,71	0,21	0,22													
14			0,18	0,2	0,58	0,69	0,41													