МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Разработка методического обеспечения изучения темы «логарифмы» в средней школе

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата/магистратуры
«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Робочинская Анастасия Яковлевна

Проверка на объем заимствований:
86,34 % авторского текста

Работа рекомендов к защите
рекомендована/не рекомендована

« 4 » 04 2017 г.

зав. кафедрой матем. и МОМ
(название кафедры)

_________ ФИО

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Челябинск
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Разработка методического обеспечения изучения темы «Логарифмы» в средней школе

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата/магистратуры
«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Робочинская Анастасия Яковлевна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована
« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой ММОМ
Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск
2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Математические знания в современном мире стали необходимым компонентом общей культуры. Для того чтобы продуктивно работать в мире информации требуется достаточно прочная математическая подготовка. Поэтому место математики в науке и жизнедеятельности всего общества, ценность и значимость математической подготовки, понимание предмета обуславливают цели математического образования. Кроме того, все большую актуальность приобретает проблема оценки качества обучения математике.

Для оперативной и объективной оценки качества знаний учащихся больше других подходит тестовая форма контроля, использование которой позволяет оценить работу обучающегося и без непосредственного участия учителя. Тест является достойным средством проверки знаний не только при текущем контроле, но и при итоговой аттестации учащихся в средних учебных заведениях.

С 2009 года единый государственный экзамен является единственной формой выпускных экзаменов в школе и основной формой вступительных экзаменов в вузы, поэтому успешная сдача ЕГЭ – это необходимое условие для поступления в вуз. А для успешной сдачи ЕГЭ по математике учащимся необходимо владеть изученным материалом курса алгебры и геометрии средней школы, а также уметь применять полученные знания на практике, решая задания различной сложности. Поэтому задача учителя – осуществить качественную подготовку учащихся к экзамену в форме ЕГЭ.

Экзамен в форме ЕГЭ по математике содержит задания на различные темы школьного курса, и одна из таких тем – это «Логарифмы». Она изучается в курсе «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов. Но следует заметить, что тема «Логарифмы» вызывает у учащихся трудности при изучении. Кроме того, задания по данной теме содержатся как в базовом, так и в профильном уровнях экзамена, а в последнем в обеих частях. Это говорит о том, что задания высокого уровня сложности по теме «Логарифмы» требуют от учащихся глубоких знаний данной темы и владение практическими навыками их решения. Отсюда следует актуальность темы исследования.

Объект исследования – процесс обучения математике в 10-11 классах.

Предмет исследования – реализация методических особенностей при изучении логарифмов в 10-11 классах.

Цель данного исследования: изучить особенности изложения темы «Логарифмы» в старшей школе и разработать тестовые задания по типу ЕГЭ для учащихся 10-11 классов по данной теме.

Гипотеза: изучение темы «Логарифмы» будет более эффективным, если:

1) При формировании понятия логарифм числа не допускать его формального усвоения;
2) При изучении методов решения логарифмических уравнений и неравенств систематизировать и обобщать материал;
3) Формировать навыки решения заданий по данной теме разного уровня сложности;
4) Предоставлять учащимся больше разнообразных заданий для закрепления, углубления и обобщения знаний по теме «Логарифмы» и подготовки к ЕГЭ.

Исходя из цели и гипотезы исследования, можно выделить следующие **задачи:**

1) Рассмотреть теоретические основы темы исследования;
2) Проанализировать современные учебники 10-11 классов с целью изучения данного вопроса;
3) Проанализировать материалы ЕГЭ с целью выявления заданий по теме «Логарифмы»;

4) Разработать тестовые задания по типу ЕГЭ для учащихся 10-11 классов по данной теме;

5) Разработать факультативный курс для учащихся 10-11 классов по теме: «Логарифмы» для подготовки к ЕГЭ.

При выполнении работы были использованы следующие **методы исследования:**

- Изучение научной и методической литературы по данной теме;
- Изучение литературы по подготовке к ЕГЭ по теме «Логарифмы»;
- Анализ школьных учебников по данной теме;
- Самостоятельный отбор тестовых заданий и заданий для факультатива по теме исследования.

В процессе выполнения выпускной работы была определена её структура: введение, теоретическая и практическая часть, заключение, список литературы, приложения.

Во введении обоснована актуальность, поставлены цели и задачи выпускной квалификационной работы, перечислены методы для их решения.

В первой главе рассмотрена теория логарифмов и произведен анализ изучения данной темы в некоторых школьных учебниках.

Вторая глава посвящена практическому исследованию поставленной проблемы. Для этого проанализированы контрольно измерительные материалы ЕГЭ за последние 7 лет по теме «Логарифмы», разработаны тестовые задания с их полным решением и факультативный курс для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

В заключении подводятся итоги проделанной работы.

Апробация факультативных занятий проводилась в период педагогической практики в МОУ «Тюбукская СОШ № 3» в 11 классе.

ГЛАВА I. ТЕОРИЯ ЛОГАРИФМОВ

§ 1. Основы построения теории логарифмов

Рассмотрим теорию логарифмов, представленную в школьном курсе математики с доказательством всех свойств и теорем.

1.1. Логарифм числа и его свойства

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1,$ называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b [1, с. 91].

Из определения логарифма числа следует, что

$$a^{\log_a b} = b. \tag{1}$$

Это равенство справедливо при $b > 0, a > 0$ *и* $a \neq 1.$ Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*

Например,

$4^{\log_4 5} = 5;$

$\log_2 8 = 3,$ так как $2^3 = 8;$

$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3$, так как $3^{-3} = 27.$

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$ [1, с. 96].

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e – иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$ [1, с. 97].

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием.* Действие нахождения числа по его логарифму называют *потенцированием* [1, с. 91].

Основные свойства логарифмов. При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:

При любом $a > 0\ (a \neq 1)$ и любых положительных x и y выполняются равенства:

1. $\log_a 1 = 0.$ (2)

Доказательство:

Вытекает из определения. Действительно $a^0 = 1$.

Например,

$\log_8 1 = 0, \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0.$

2. $\log_a a = 1.$ (3)

Доказательство:

Вытекает из определения, $a^1 = a$.

Например,

$\log_2 2 = 1, \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1.$

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. (Логарифм произведения равен сумме логарифмов). (4)

Доказательство:

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$x = a^{\log_a x},\ y = a^{\log_a y}.$

Перемножая почленно эти равенства, получаем:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

Т.е. $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. Следовательно, по определению логарифма $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Например,

$\log_2 15 = \log_2(3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5.$

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. (Логарифм частного равен разности логарифмов). (5)

Доказательство:

Снова воспользуемся основным логарифмическим тождеством и получим:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{a^{\log_a x} - a^{\log_a y}},$$

следовательно, по определению

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Например,

$\log_{\frac{1}{2}} 2{,}5 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2} = \log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 5 + 1.$

5. $\log_a x^p = \mathrm{p} \log_a x$ для любого действительного p. (Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени). (6)

Доказательство:

Для доказательства воспользуемся тождеством $x = a^{\log_a x}$, откуда

$$x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x}.$$

Следовательно, по определению

$$\log_a x^p = \mathrm{p} \log_a x.$$

Например,

$\lg \frac{1}{5} = \lg 5^{-1} = -\lg 5.$

Пример 1. Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50$.

Применяя формулы (4)-(6), находим

$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3} \cdot 50}{\sqrt{12}} = \log_5 25 = 2.$

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы.

Логарифмируя обе части основного логарифмического тождества по основанию c $(c > 0, c \neq 1)$, получаем

$$\log_a b \log_c a = \log_c b$$

или

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \tag{7}$$

где $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$.

Эта формула называется формулой перехода от одного основания логарифма к другому. Докажем ее.

Доказательство:

По правилу логарифмирования и основному логарифмическому тождеству получаем:

$$\log_c b = \log_c\left(a^{\log_a b}\right),$$

$$\log_c b = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} \log_c a.$$

Разделив обе части полученного равенства на $\log_c a$, приходим к формуле (7).

Из формулы (7) при $c = b$ имеем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \tag{8}$$

где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$.

Из (8) следует, что

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b. \tag{9}$$

Например,

а) $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2$.

б) $\log_3 6 - \frac{1}{\log_2 3} = \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$.

Пример 2. Дано $\lg 3 = a$, $\lg 5 = b$. Найти $\log_2 15$.

Решение: Воспользовавшись формулой (7) перехода к новому основанию, а затем свойствами логарифма, получим:

$$\log_2 15 = \frac{\lg 15}{\lg 2} = \frac{\lg(3 \cdot 5)}{\lg \frac{10}{5}} = \frac{\lg 3 + \lg 5}{\lg 10 - \lg 5} = \frac{a+b}{1-b}.$$

Теперь рассмотрим логарифмические тождества, знание которых облегчает решение некоторых уравнений.

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, \qquad (10)$$

где $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$.

Доказательство:

Укажем несколько способов доказательства.

Во-первых, можно прологарифмировать по основанию c обе части доказываемого тождества:

$$\log_c\left(a^{\log_c b}\right) = \log_c\left(b^{\log_c a}\right),$$

откуда $\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b$ – верное равенство.

Во-вторых, можно обе части доказываемого тождества возвести в степень $\frac{1}{\log_c b}$:

$$\left(a^{\log_c b}\right)^{\frac{1}{\log_c b}} = \left(b^{\log_c a}\right)^{\frac{1}{\log_c b}}, a = b^{\frac{\log_c a}{\log_c b}} = b^{\log_b a},$$

а это очевидное равенство.

В-третьих, можно преобразовать левую часть доказываемого тождества в правую:

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}.$$

Докажем теперь тождество

$$a^{\log_a^2 b} = b^{\log_a b}. \qquad (11)$$

Доказательство:

Действительно, $a^{\log_a^2 b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a b} = b^{\log_a b}$.

Существуют и другие варианты доказательств. Например, прологарифмируем обе части данного тождества по основанию a или b:

$$\log_a\left(a^{\log_a^2 b}\right) = \log_a\left(b^{\log_a b}\right), \qquad \log_a^2 b = \log_a^2 b.$$

Формула (11) верна при всех допустимых значениях a и b:

Часто при решении уравнений встречается и такое тождество:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}. \qquad (12)$$

Оно верно при всех допустимых значениях a и b:

Доказательство:

Прологарифмируем обе части по основанию a или b:

$$\log_a a^{\sqrt{\log_a b}} = \log_a b^{\sqrt{\log_b a}},$$

$$\sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \cdot \log_a b = \sqrt{\log_a^2 b \cdot \log_b a} = \sqrt{\log_a b}.$$

1.2. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Пусть a – положительное, не равное 1 число. Каждому положительному числу x поставим в соответствие число y, равное логарифму числа x по основанию a. Иными словами, на множестве положительных чисел определим функцию

$$y = \log_a x. \qquad (13)$$

Функцию $y = \log_a x$ называют логарифмической функцией [8, с. 155].

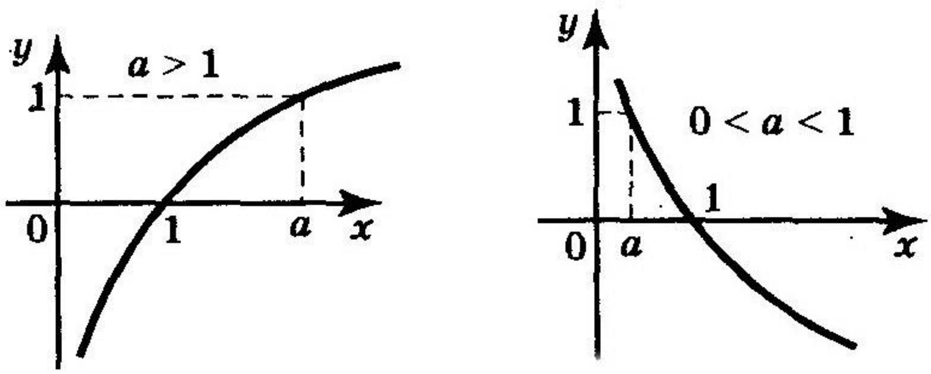
Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел.
2) Множество значений логарифмической функции – множество R всех действительных чисел.
3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $x > 0,$ *если* $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.
4) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$, если $0 < a < 1$,

то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$ [1, с. 100].

5) Функция $y = \log_a x$ не является ни четной, ни нечетной.
6) Логарифмическая функция непрерывна.
7) Функция $y = \log_a x$ не ограничена сверху, не ограничена снизу, а также не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
8) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ выпукла вверх, если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ то функция выпукла вниз [7, с. 107].

Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y = \log_a x$ следует, что ее график расположен правее оси *Oy* и имеет вид, указанный на рисунке 1, а, если $a > 1$, и на рисунке 1, б, если $0 < a < 1$.



а) б)

Рис. 1. Логарифмическая функция

Отметим, что ось *Oy* является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции и в случае, когда $a > 1$, и в случае, когда $0 < a < 1$.

Определение. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$, взаимно обратны [1, с. 101].

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке.

$y = \lg x, x \in [1, 1000]$.

Решение: Функция $y = \lg x$ - непрерывная и возрастающая, т.к. основание этой логарифмической функции больше 1. Следовательно, своих наибольшего и наименьшего значений функция достигает на концах отрезка $[1, 1000]$.

$$y_{\text{наим.}} = \lg 1 = 0;$$

$$y_{\text{наиб.}} = \lg 1000 = 3.$$

Пример 4. Решить уравнение и неравенство.

а) $\log_5 x = 0$,

б) $\log_5 x > 0$.

Решение: График функции $\mathrm{y} = \log_5 x$ схематически изображен на рис. 1. Заданные уравнение и неравенство нетрудно решить, используя эту геометрическую модель.

а) Уравнение $\log_5 x = 0$ имеет один корень $x = 1$, поскольку график функции пересекает ось x в единственной точке (1; 0).

б) График функции $\mathrm{y} = \log_5 x$ расположен выше оси x при $x > 1$. Значит, решение неравенства $\log_5 x > 0$ имеет вид $x > 1$ [7, с. 108].

Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0, a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (14)$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0. \qquad (15)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции получаем

$$(\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx+b}. \qquad (16)$$

Используя формулы (14), (15), находим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (17)$$

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{\ln x}{x}$.

Решение:

$$y' = (\frac{\ln x}{x})' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Эта производная существует при всех значениях $x > 0$, т. е. при всех значениях x из области определения функции. Значит, критических точек у функции нет. Приравняв производную к нулю, получим:

$$1 - \ln x = 0\,, \qquad \ln x = 1, \qquad x = e.$$

Это единственная стационарная точка. Если $x < e,$ то $y' > 0$; если $x > e,$ то $y' < 0$. Значит $x = e$ – точка максимума функции, причем

$$y_{max} = y(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}.$$

Ответ: $x = e$ – точка максимума; $y_{max} = \frac{1}{e}$ [7, с. 138].

1.3. Логарифмические уравнения и неравенства

Определение. Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad (18)$$

где a - положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду [7, с. 121].

Теорема 1. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0, a \neq 1, t > 0, s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Пример 6. Известно, что $\lg x = 2\lg y - \lg z + 0{,}5 \lg t$. Выразите x через y, z, t.

Решение: Имеем последовательно

$$2 \lg y = \lg y^2;$$

$$0{,}5\lg t = \lg t^{0{,}5} = \lg\sqrt{t}\,;$$

$$2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t = \lg y^2 - \lg z + \lg\sqrt{t} = \lg\frac{y^2\sqrt{t}}{z}.$$

Итак, $\lg \mathrm{x} = \lg\frac{y^2\sqrt{t}}{z}$, и, следовательно, $x = \frac{y^2\sqrt{t}}{z}$.

Опираясь на теорему 1, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $a > 0$ *и* $a \neq 1$, X – решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$ [7, с. 121].

На практике переходят от уравнения (18) к уравнению $f(x) = g(x)$, решают его, а затем проверяют корни по условиям $f(x) > 0, g(x) > 0$, определяющим область допустимых значений (ОДЗ) переменной *x*. те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями уравнения (18). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, являются посторонними корнями уравнения (18).

Пример 7. Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x).$$

Решение: 1) Потенцируя, получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств, т. е. является посторонним корнем. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ - корень заданного уравнения.

Ответ: -3.

Пример 8. Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg\frac{x}{10}}$.

Решение: Так как $\lg\frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то заданное уравнение можно переписать так $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$.

Есть смысл ввести новую переменную $y = \lg x$; тогда уравнение примет вид $y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$(y-1)(y^2+y+1) = 7;$$

$$y^3 - 1 = 7;$$

$$y^3 = 8;$$

$$y = 2.$$

Это значение удовлетворяет условию $y \neq 1$.

Итак, $y = 2$, но $y = \lg x$, значит $\lg x = 2$, откуда $x = 100$.

Ответ: 100.

Можно выделить три основных метода решения логарифмических уравнений.

1) Функционально-графический метод. Он основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций. Мы применяли этот метод при рассмотрении примеров в пункте 1.2.
2) Метод потенцирования. Он основан на теореме равносильности. Мы применили этот метод в примере 7.
3) Метод введения новой переменной. Мы применили этот метод в примере 8 [7, с. 125].

Пример 9. Решить уравнение $3^{\log_2 x} + x^{\log_4 3} = 6$.

Решение: Заметим, что $x > 0$. Используя формулу (10), имеем $3^{\log_2 x} = x^{\log_2 3}$, так как $x^{\log_4 3} = (x^{\log_2 3})^{\frac{1}{2}}$, то данное уравнение примет вид $x^{\log_2 3} + (x^{\log_2 3})^{\frac{1}{2}} = 6$. Далее, полагая $(x^{\log_2 3})^{\frac{1}{2}} = a$, где $a > 0$, получим $a^2 + a - 6 = 0$, откуда $a = 2$. следовательно, $x^{\log_2 3} = 4$, т. е. $x = 4^{\log_3 2}$.

Ответ: $4^{\log_3 2}$.

Пример 10. Решить уравнение $\log_3^2 x = \log_3\left(9 - 2x^{\log_3 x}\right)$.

Решение: Из данного уравнения следует, что $3^{\log_3^2 x} = 9 - 2x^{\log_3 x}$. Согласно тождеству (11), $3^{\log_3^2 x} = x^{\log_3 x}$, а потому $9 - 2x^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$, откуда $x^{\log_3 x} = 3$. логарифмируя обе части последнего уравнения, получим $\log_3^2 x = 1$, откуда $x = 3, x = \frac{1}{3}$. Оба найденных корня удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $x = 3, x = \frac{1}{3}$.

Определение. Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \tag{19}$$

где a – положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Теорема 3. Пусть $a > 1$ и X – решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству $f(x) > g(x)$.

Теорема 4. Пусть $0 < a < 1$ и X – решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно на множестве X неравенству $f(x) < g(x)$ [7, с. 127].

На практике переходят от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ к равносильной ему системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ – к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 11. Решить неравенство $\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$.

Решение: Область допустимых значений переменной для заданного неравенства определяется условиями $2x - 4 > 0$ и $14 - x > 0$. В итоге получаем систему неравенств, равносильную заданному неравенству:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0, \\ 2x - 4 > 14 - x. \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2, \\ x < 14, \\ x > 6. \end{cases}$$

Геометрическая модель (рис. 2) помогает найти решение системы $6 < x < 14$.

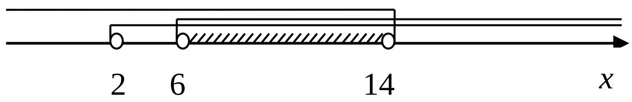


Рис. 2.

Пример 12. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x).$$

Решение: Если $x - 2 > 1$, то к неравенству применима теорема 3, если же $0 < x - 2 < 1$, то к нему применима теорема 4. Таким образом, решение неравенства сводится к решению двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-2>1, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0, \\ 2x-3>24-6x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x-2<1, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0, \\ 2x-3<24-6x. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $3\frac{3}{8} < x < 4$, а из второй $2 < x < 3$.

Ответ: $3\frac{3}{8} < x < 4$; $2 < x < 3$ [7, с 128].

§ 2. Анализ школьных учебников по изложению темы «Логарифмы»

Проведём логико-математический анализ темы «Логарифмы» в различных школьных учебниках.

В рассматриваемых учебниках исследуемой теме отводится разное место. Так, в учебнике С.М. Никольского [3] для 10 класса тема «Логарифмы» изучается в пятом параграфе. В учебнике Ш.А. Алимова [1] для 10-11 классов изучаются «Логарифмы» в 15-17 параграфах четвертой главы «Логарифмическая функция». А в учебнике А.Г. Мордковича (профильный уровень) [2] для 11 класса в 14-16 параграфах третьей главы «Показательная и логарифмическая функции».

Таблица 1.

Сравнительный анализ темы «Логарифмы» в школьных учебниках.

Крите-рий	С. М. Никольский «Алгебра и начала математического анализа», 10 класс	А. Ш. Алимов «Алгебра и начала анализа», 10-11 класс	А. Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа», 11 класс (профильный уровень)
Опре-деле-ние лога-рифма	Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называют число α, такое, что $b = a^{\alpha}$. Логарифм положительного числа b по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ обозначают так: $\alpha = \log_a b$.	Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.	Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Обозначение: $x = \log_a b$.
Основ-ное лога-рифми-ческое тож-дество	Из определения логарифма очевидно следует, что для $a > 0, a \neq 1, b > 0$ $a^{\log_a b} = b$.	Определение логарифма можно записать так: $a^{\log_a b} = b$. Это равенство справедливо при $b > 0, a > 0$ и $a \neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*	Определение на языке символов: $a^{\log_a b} = b$.
(2), (3)	Даются через примеры: $\log_2 1 = 0$, так как $1 = 2^0$;	Даются через пример: $\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$;	Даются формулы, которые учащиеся должны обосновать:

	$\log_{0,01} 0{,}01 = 1$, так как $0{,}01 = 0{,}01^1$.	$\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$.	$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
(4), (5), (6), (7), (8)	Свойства (4), (5), (6) представлены в виде теоремы с последующим доказательством и формулировками, после чего вводится и доказывается формула (7) и как частный случай формула (8).	Свойства (4), (5), (6) приводятся с доказательством. Формула (7) приводится и доказывается в параграфе «Десятичные и натуральные логарифмы», и как следствие формула (8).	Свойства (4), (5), (6) вводятся через три теоремы с доказательством. Формула (7) вводится как теорема, доказывается, после чего приводится (8) формула как следствие с доказательством.
(10), (11), (12)	-	-	-
Деся-тичный лога-рифм	Логарифм положительного числа b по основанию 10 называют десятичным логарифмом числа b и обозначают $\lg b$, т. е. вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.	Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.	Логарифм по основанию 10 обычно называют десятичным логарифмом. Вместо символа $\log_{10}$ принято использовать символ lg; так вместо $\log_{10} 5$ пишут $\lg 5$, а вместо $\log_{10} 3{,}4$ пишут $\lg 3{,}4$.
Нату-раль-ный лога-рифм	Логарифм положительного числа b по основанию e называют натуральным логарифмом числа b и обозначают $\ln b$, т. е. вместо $\log_e b$ пишут $\ln b$.	Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e – иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.	Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан натуральный логарифм. Подобно тому, как для десятичных логарифмов введено специальное обозначение lg, введено специальное обозначение для натуральный логарифмов ln (l – логарифм, n – натуральный).
Опре-деле-ние лога-рифми-ческого уравне-ния	Пусть a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число. Тогда уравнение $\log_a x = b$ называют простейшим логарифмическим уравнением. Его можно записать в виде $\log_a x = \log_a x_0$.	-	Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где a - положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Опре-деле-ние лога-рифми-ческого нера-венства	Пусть a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число. Тогда неравенства $\log_a x > b, \log_a x < b$ называют простейшими логарифмическими неравенствами. Их можно переписать в виде $\log_a x > \log_a x_0, \log_a x < \log_a x_0$.	-	Логарифмическими неравенствами называют неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где a - положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин «Алгебра и начала анализа» 10 класс.

Изучение логарифмов в данном учебнике начинается с параграфа 5 «Логарифмы».

Пропедевтика проводится при изучении показательной функции. Понятие логарифма вводится через показательную функцию $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. График данной функции дает возможность решить обратную задачу: для данных положительных чисел b и a $(a \neq 1)$ найти число α, такое, что $b = a^{\alpha}$ (α – единственное).

В пункте 5.1. «Понятие логарифма» вводится определение логарифма числа, а так же натурального и десятичного логарифма числа, рассматриваются примеры.

В пункте 5.2. «Свойства логарифмов» дается теорема, в которой отражены (4), (5) и (6) свойства. Приводится ее доказательство. Далее вводится формула перехода логарифмов от одного основания к другому, рассматриваются примеры.

В пункте 5.3. «Логарифмическая функция» дается определение логарифмической функции, строится ее график, и рассматриваются свойства для функции, когда $a > 1$ и когда $0 < a < 1$.

Пункт 5.4. «Десятичные логарифмы», который отмечен звездочкой, т. е. как дополнительный материал повышенной сложности. В этом пункте рассказывается, как вычислять десятичный логарифм положительного числа А, что называется характеристикой и мантиссой логарифма числа А.

В 6 параграфе «Простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства» имеются два пункта, относящиеся к логарифмам.

В пункте 6.2. «Логарифмические уравнения» говорится о том, что называется простейшим логарифмическим уравнением, и приводятся 7 примеров с решением данных уравнений.

В пункте 6.4. «Логарифмические неравенства» говорится о том, что называется простейшим логарифмическим неравенством, и приводятся 6 примеров с решением данных неравенств.

В конце каждого пункта имеются упражнения, которые разделены на задания для устной работы, задания обязательные (не обязательные) для общеобразовательных классов и задания повышенной трудности.

В пункте 5.4. все упражнения относятся к заданиям не обязательным для общеобразовательных классов.

Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс.

В данном учебнике изучение логарифмов начинается с IV главы «Логарифмическая функция».

Пропедевтика проводится при изучении показательной функции. При рассмотрении уравнений $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1, b > 0$ говорится, что данные уравнения имеют единственный корень.

В параграфе 15 «Логарифмы» вводится определение логарифма числа, говорится, что называется логарифмированием. Далее приводятся два примера на вычисление логарифма числа по определению, один пример на решение уравнения и один пример на решение неравенства.

В параграфе 16 «Свойства логарифмов» приводятся и доказываются три основных свойства логарифмов ((4), (5) и (6)) и пример на вычисление.

В 17 параграфе «десятичные и натуральные логарифмы» водятся понятия десятичного и натурального логарифмов, а так же формула перехода логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию с доказательством.

В 18 параграфе «Логарифмическая функция, ее свойства и график» доказываются свойства логарифмической функции, строятся некоторые графики этой функции. Затем доказывается теорема, которая используется при решении уравнений и говорится о том, что логарифмическая и показательная функции взаимно обратны.

В 19 параграфе «Логарифмические уравнения» дается шесть уравнений и одна система уравнений с решением.

В 20 параграфе «Логарифмические неравенства» даются 3 задачи с решением логарифмических неравенств.

После каждого параграфа приведен ряд упражнения, которые имеют разный уровень сложности: обязательные задачи, дополнительные более сложные задачи и трудные задачи.

Также в конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе IV».

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов «Алгебра и начала анализа» 11 класс (профильный уровень).

Логарифмы начинают изучаться с 3 главы «Показательная и логарифмическая функция».

Пропедевтика проводится при изучении показательных уравнений. Понятие логарифма вводится через показательные уравнения. Решение уравнения $2^x = 6$ потребовало вводить новый символ, с помощью которого корень уравнения записали так: $x = \log_2 6$.

В параграфе 14 «Понятие логарифма» дается определение логарифма числа, формулы (2), (3) и формула $\log_a a^c = c$. Далее приводятся примеры на вычисление логарифма числа, и определяется десятичный логарифм.

В параграфе 15 «Логарифмическая функция, ее свойства и график» говорится о том, что для показательной функции существует обратная, которой является логарифмическая функция. Изображаются схематично графики данной функции, и приводится разъяснение о том, как строить данные графики по точкам, перечисляются свойства функции, когда $a > 1$ и когда $0 < a < 1$. Далее рассматривается 7 примеров на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном промежутке, на решение уравнений неравенств, на построение графиков функций.

В 16 параграфе «Свойства логарифмов» доказываются свойства (4), (5), (6). Говорится что такое логарифмирование и потенцирование, что называется характеристикой и мантиссой десятичного логарифма числа. Доказывается формула перехода к новому основанию логарифма и как следствия данной теоремы формулы (8) и $\log_a b = \log_{a^r} b^r$. А также при рассмотрении данного параграфа приводится 9 примеров: выразить x через переменные y, z, t; вычислить логарифм числа, выразить логарифм через два других и др.

В параграфе 17 «Логарифмические уравнения» объясняется через теорему как решать логарифмические уравнения, затем рассматриваются 7 примеров решения логарифмических уравнений и один пример решения системы логарифмических уравнений.

В параграфе 18 «Логарифмические неравенства» объясняется, как решать логарифмические неравенства, затем рассматриваются 6 примеров решения логарифмических неравенств.

В 19 параграфе «Дифференцирование показательной и логарифмической функций» в пункте 2 «Натуральные логарифмы. Функция $y = ln\ x$, ее свойства, график, дифференцирование» определяется понятие натурального логарифма, приводятся свойства натуральной логарифмической функции, выводится формула производной натуральной логарифмической функции, а в конце параграфа для любой логарифмической функции. Также рассматриваются 3 примера, где нужно из начала координат провести касательную к графику натуральной логарифмической функции, исследовать функцию на экстремум.

В задачнике «Алгебра и начала математического анализа 11 класс» к данному учебнику к каждому параграфу приведены задания трех уровней: обязательные задачи, более сложные задачи и трудные задачи. Большое количество и разнообразие упражнений дает возможность закрепить изученный материал.

Анализ учебников показал, что для выполнения простейших заданий, содержащих логарифмы, привлечение дополнительных источников по теме не требуется. Во всех трех учебниках теоретический материал изложен доступно, имеются примеры с решением и доказательства свойств. Но при подготовке к экзамену в форме ЕГЭ необходимо уделить особое внимание заданиям повышенной сложности, которые в большей степени встречаются в ЕГЭ по математике, и которые мало встречаются или почти не встречаются в данных учебниках.

В учебнике С. М. Никольского тема «Логарифмы» изучается в 10 классе. Материал представлен в логической последовательности и достаточно в сжатой форме, но для закрепления данной темы у автора приведено недостаточно практических заданий.

У Ш. А. Алимова логарифмы также изучаются в 10 классе. Изложение материала выстроено логически верно. В отличие от других авторов Ш. А. Алимов уделил внимание вычислению числа e на микрокалькуляторе. Практические задания на закрепление темы разделены по трем уровням сложности: обязательные задачи, дополнительные более сложные задачи и трудные задачи. Для более успешного усвоения материала в конце главы включены упражнения для самопроверки.

В отличие от остальных учебников А. Г. Мордкович начинает изучение логарифмов в 11 классе. В данном учебнике представлено огромное разнообразие решенных примеров, многие из которых встречаются в экзамене в форме ЕГЭ. А также в задачнике к данному учебнику представлен широкий спектр упражнений, который разделен на 3 уровня сложности. Кроме обязательных упражнений имеются задания следующего типа: найдите значение логарифмической функции в указанных точках, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, найдите область значений функции, сколько целочисленных решений имеет неравенство. В связи с тем, что ученики знакомятся у данного автора с логарифмами только в 11 классе, отдельным пунктом выделено «Дифференцирование показательной и логарифмической функций». У Никольского и Алимова нет этого пункта, т. к. учащиеся еще не изучали производную.

Выводы по главе 1.

Для успешного освоения материала по изучению темы «Логарифмы» на основании главы 1 нужно обладать следующими знаниями и умениями:

- Теоретические основы логарифма числа, в которые входят: определение, основные свойства и формулы;
- Теоретические основы логарифмической функции, в которые входят: определение, свойства, график, понятие обратной функции;
- Теоретические основы решения логарифмических уравнений и неравенств: определения, способы решения;
- Применение теоретических основ при решении заданий по теме «Логарифмы».

ГЛАВА II. РАЗРАБОТКА ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ЛОГАРИФМЫ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

§ 1. Анализ контрольно измерительных материалов ЕГЭ по теме «Логарифмы»

Контроль знаний, умений и навыков учащихся является важной составной частью процесса обучения. Целью контроля является определение качества усвоения учащимися программного материала, диагностирование и корректирование их знаний и умений, воспитание ответственности к учебной работе.

Под оценкой знаний, умений и навыков дидактика понимает процесс сравнения достигнутого учащимися уровня владения ими с эталонными представлениями, описанными в учебной программе. Как процесс оценка знаний, умений и навыков реализуется в ходе контроля (проверки) последних [9, с. 238].

В современных школах большое внимание уделяется диагностике и мониторингу знаний, умений и навыков, контролю достижения результатов обучения. После окончания школы проверка этих знаний проводится не только в форме ЕГЭ за курс средней школы, но и в форме ОГЭ за курс основной школы. Поэтому в школах активно используются такие формы контроля, которые позволяют предусмотреть проверку:

- достижения каждым учеником уровня обязательной математической подготовки;
- глубину сформированности учебных умений;
- умение применять полученные знания в ситуациях, отличных от обязательных результатов обучения.

В связи с введением экзамена в форме ЕГЭ тестирование как одна из форм контроля приобретает особую значимость. Результат итогового контроля знаний должен быть предсказуемым и являться разумным продолжением текущей оценки знаний учащихся. Очевидно, что без надёжной текущей оценки знаний невозможно грамотное обоснованное управление процессом обучения на любом этапе. Метод тестирования является одной из форм контроля, который, позволяет сделать процесс контроля более эффективным, а также ориентировать его на использование современных информационных технологий.

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) – это форма проведения государственной итоговой аттестации выпускников по освоению ими основных общеобразовательных программ среднего общего образования (ГИА-11) с использованием комплексов заданий стандартизированной формы, называемых контрольными измерительными материалами (КИМ). Результаты ЕГЭ одновременно учитываются в школьном аттестате и при поступлении в вузы. При проведении этих экзаменов на всей территории России применяются однотипные задания и единая шкала оценки, позволяющая сравнивать всех учащихся по уровню подготовки.

ЕГЭ поможет обеспечить равные условия при поступлении в вуз и сдаче выпускных экзаменов в школе, поскольку при проведении этих экзаменов на всей территории России применяются однотипные задания и единая шкала оценки, позволяющая сравнивать всех учащихся по уровню подготовки.

С 2015 года ЕГЭ по математике коснулись изменения. Экзамен разделили на две части: базовую и профильную. Базовая часть предназначается абсолютно для всех учащихся, профильная – только для тех, кому необходимо сдать математику для поступления в вуз.

Экзаменационная работа базового уровня состоит из одной части, включающей 20 заданий с кратким ответом. Ответом к каждому из заданий 1–20 является целое число или конечная десятичная дробь, или последовательность цифр.

Выполнение заданий экзаменационной работы свидетельствует о наличии у выпускника общематематических умений, необходимых человеку в современном обществе. Задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

Экзаменационная работа профильного уровня состоит из двух частей. Определяющим признаком каждой части работы является форма заданий:

– часть 1 содержит 9 заданий (задания 1–9) с кратким ответом;

– часть 2 содержит пять заданий (задания 10–14) с кратким ответом и семь заданий (задания 15–21) с развёрнутым ответом.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–9 имеют базовый уровень, задания 10–19 – повышенный уровень, задания 20 и 21 относятся к высокому уровню сложности.

Выполнение заданий части 1 экзаменационной работы свидетельствует о наличии общематематических умений, необходимых человеку в современном обществе. Задания этой части проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В часть 1 работы включены задания по всем основным разделам предметных требований ФГОС: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

В целях более эффективного отбора выпускников для продолжения образования в высших учебных заведениях с различными требованиями к уровню математической подготовки выпускников задания части 2 работы предназначены для проверки знаний на том уровне требований, которые традиционно предъявляются вузами с профильным экзаменом по математике. Последние три задания части 2 предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов [13].

Анализ материалов ЕГЭ за период с 2011 по 2014 годы показал, что задания на тему «Логарифмы» встречаются как в первой части, так и во второй. А за период с 2015 по 2017 годы – встречаются и в базовом экзамене и в профильном (в обеих частях).

- В 2011 году в заданиях B3, B7, C1, C3;
- В 2012 году в заданиях B7, B14, C1, C3;
- В 2013 году в заданиях B5, B7, C3;
- В 2014 году в заданиях B11, C3;
- В 2015 году:
    - Базовый уровень в заданиях 5, 7;
    - Профильный уровень в заданиях 14, 17;
- В 2016 году:
    - Базовый уровень в заданиях 5, 7;
    - Профильный уровень в заданиях 5, 12, 15.
- В 2017 году:
    - Базовый уровень в заданиях 5, 7;
    - Профильный уровень в заданиях 5, 12, 15.

Из-за малого количества часов, отведенных на изучение темы «Логарифмы», эти задания нередко вызывают трудности у выпускников.

Приведем примеры заданий из материалов ЕГЭ за 2011-2015 гг.

- 2011 год.

B_3. Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=9$.

B_7. Найдите значение выражения $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$.

C_1. Решите уравнение $(\sqrt{3}\cos x - 2\cos^2 x)\cdot\log_5(-tgx)=0$.

C_3. Решите неравенство $7\log_{12}(x^2-13x+42)\le 8+\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}$.

- 2012 год.

B_7. Найдите корень уравнения $\log_3(x-3)=2$.

B_{14}. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+8)$.

C_1. а) Решите уравнение $\log_5(\cos x-\sin 2x+25)=2$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi,\frac{7\pi}{2}\right]$.

C_3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}4^x\le 9\cdot 2^x+22,\\ \log_3(x^2-x-2)\le 1+\log_3\dfrac{x+1}{x-2}.\end{cases}$$

- 2013 год.

B_5.Найдите корень уравнения $\log_5(-9x+7)=2$.

B_7. Найдите значение выражения $\log_4 96-\log_4 1{,}5$.

C_3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2}\ge 2,\\ \dfrac{x^2-x-14}{x-4}+\dfrac{x^2-8x+3}{x-8}\le 2x+3.\end{cases}$$

- 2014 год.

B_{11}. Найдите значение выражения $\log_5 2\cdot\log_2 125$.

C_3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}2^x+\dfrac{80}{2^x}\ge 21,\\ \log_{x-1}\left(\dfrac{x+1}{5}\right)\le 0.\end{cases}$$

- 2015 год:

  - Базовый уровень.

5. Найдите значение выражения $6^{5\log_6 3}$.

7. Найдите корень уравнения $\log_9(6+x)=\log_9 2$.

  - Профильный уровень.

14. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

17. Решите неравенство

$\log_{x-1}\sqrt{x+2} \cdot \log_3(x^2 - 2x + 1) \geq \log_9(10 - x)$.

- 2016 год:
  - Базовый уровень.

5. Найдите значение выражения $5^{\log_5 2 \cdot 1}$.

7. Найдите корень уравнения $\log_2(x - 3) = 6$.

  - Профильный уровень.

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

15. Решите неравенство

$\log_x(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2) \cdot \log_5(x^2 + 2x - 2) \geq \log_x 4$.

- 2017 год:
  - Базовый уровень.

5. Найдите значение выражения $5^{\log_5 6+1}$.

7. Найдите корень уравнения $\log_3(-2x - 7) = 3$.

  - Профильный уровень.

5. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

12. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

15. Решите неравенство $\log^2_{|x+1|}(x+4)^4 + \log_2(x+1)^2 \leq 22$.

В материалах ЕГЭ за 2011-2017 гг. встречаются различные типы заданий на логарифмы: найти значение выражения; найти корни уравнения, найти наибольшее (наименьшее) значение функции (на промежутке); найти точку максимума (минимума) функции; решить уравнение (неравенство); решить систему уравнений (неравенств). Задания 1 части ЕГЭ (и задания из базового уровня) по теме «Логарифмы» проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки учащихся, а задания 2 части – владение алгебраическим аппаратом и освоение базовых идей математического анализа. При их выполнении ученикам необходимо знать основные свойства логарифма и логарифмической функции, а так же иметь навыки решения логарифмических уравнений, неравенств и их систем.

Анализируя материалы ЕГЭ за 2011-2017 гг., можно заметить, что количество заданий уменьшилось, но это не означат, что учащиеся легче стали с ними справляться. Кроме того, встречаются комбинированные задания, особенно во второй части экзамена, требующие знаний нескольких тем курса математики. Данные задания в школьных учебниках не рассматриваются, и именно им стоит уделять больше внимания, так как задания второй части вызывают затруднения у большинства учащихся. Поэтому учителям нужно проводить дополнительные занятия в старших классах с целью углубления изучения темы «Логарифмы» при подготовке к ЕГЭ.

Данный анализ помог определить, каким типам заданий по теме «Логарифмы» при подготовке к ЕГЭ нужно уделить большее внимание.

§2. Разработка тестовых заданий и их полное решение

2.1. Тестовые задания

Нами были разработаны три теста по теме «Логарифмы», а так же представлено их полное решение.

Тест 1 содержит задания на вычисление и преобразование логарифмических выражений на основе определения логарифма числа, основных свойств и формул. Тест 2 и тест 3 включает логарифмические уравнения и неравенства.

В каждом тесте задания разбиты на три части по уровню сложности. Это позволяет обнаружить имеющиеся пробелы в знаниях у учащихся по данной теме, ликвидировать эти пробелы, а также помогает подготовиться к сдаче ЕГЭ, рассматривая различные задания. Данные тесты можно использовать на уроках или факультативах, как в обычных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Первая часть (часть А) содержит пятнадцать заданий базового уровня сложности по теме «Логарифмы». К каждому заданию даны пять вариантов ответов, из которых только один является верным.

Вторая часть (часть В) включает пять более сложных заданий по данной теме. К заданиям варианты ответов не приводятся, требуется записать краткий ответ.

В третьей части (части С) всего два задания, но отличаются они уровнем повышенной сложности. Для ответа требуется записать полное решение.

Тест 1

Часть А

А1. Упростите выражение $\log_3 48 - 4\log_3 2 + \log_3 16 \cdot \log_2 \frac{1}{9}$. Выберите верный ответ.

1) 0 2) 3 3) -2 4) -7 5) -5

А2. Чему равно $9^{\log_{\frac{1}{3}} 25}$?

1) 25 2) 625 3) $\frac{1}{25}$ 4) $\frac{1}{3}$ 5) $\frac{1}{625}$

А3. Выразите lg6 через a и b, если lg25 = a и $\lg\frac{1}{9} = b$. Выберите верный ответ.

1) $\frac{a+b+2}{2}$ 2) $\frac{2-a-b}{2}$ 3) $\frac{a+b}{2}$ 4) $1-a+\frac{b}{2}$ 5) $1-b+\frac{a}{2}$

А4. Упростите выражение $\frac{\log_3 28+\log_3 4-\log_3 7}{\log_3 25} + \log_{\frac{1}{5}} 2$. Выберите верный ответ.

1) 1 2) $\log_5 2$ 3) 0 4) $\log_3 5$ 5) $\log_3 2$

А5. Чему равно $\log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{9}} 27$?

1) -3 2) -6 3) -2 4) 2 5) 3

A6. Упростите выражение $\log_{25} 3 \cdot \log_{27} 8 \cdot \log_4 125$. Выберите верный ответ.

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) 2 4) $\frac{3}{4}$ 5) 1

A7. Упростите выражение $\frac{25^{\log_3 7}}{7^{\log_3 5}} - 5^{\log_3 7}$. Выберите верный ответ.

1) 0 2) 1 3) 3 4) 5 5) 7

A8. Чему равно $\frac{1-\log_2 5}{1-\log_5 2}$?

1) $\log_2 5$ 2) $\log_5 2$ 3) $-\log_5 2$ 4) $-\log_2 5$ 5) 1

A9. Напишите числа $I - \log_4 3,\ II - \log_3 2,\ III - \log_2 3,\ IV - \log_3 4$ в убывающем порядке. Укажите верный ответ.

1) $III - IV - II - I$ 2) $III - IV - I - II$ 3) $II - I - III - IV$ 4) $IV - III - II - I$ 5) $IV - III - I - II$

A10. Упростите выражение $3^{\frac{\log_7 3 - \log_3 7}{\log_7 21}}$. Укажите верный ответ.

1) $\frac{3}{7}$ 2) $\frac{1}{7}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$ 5) 1

A11. Упростите выражение $\frac{\frac{\log_3 15-1}{\log_3 18-2}+1}{2\log_2 5+2}$.

1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) 0 4) $-\frac{1}{2}$ 5) -1

A12. Выразите $\log_{30} 40$ через a и b, если $\log_2 3 = a$ и lg2 = b. Выберите верный ответ.

1) $\frac{2b+1}{ab-1}$ 2) $\frac{2b+1}{ab+1}$ 3) $\frac{3b+1}{ab+1}$ 4) $\frac{3b+a}{ab+1}$ 5) $\frac{4a+b}{ab-1}$

A13. Сколько чисел из перечисленные отрицательны

$\log_5 2$; $\log_3(0,1)$; $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$; ln1; $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{5}$? Укажите вариант правильного ответа.

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

A14. Чему равно $5^{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_3 5^2}+\frac{1}{\log_3 5^4}+\frac{1}{\log_3 5^8}}$?

1) $\sqrt[16]{5^{15}}$ 2) $\sqrt[8]{3^{15}}$ 3) $\sqrt[8]{5^7}$ 4) $\sqrt[8]{3^7}$ 5) $\sqrt[15]{5^{16}}$

A15. Упростите выражение $\frac{\log_3^3 6-1}{\frac{2+\log_3 2}{\log_6 3}+1}$. Укажите верный ответ.

1) $\log_3 2$ 2) $\log_2 3$ 3) 1 4) $\log_3 6$ 5) $\log_6 3$

Часть В

B1. Чему равно $6^{\log_5 49} - 7^{\log_{\sqrt{5}} 6}$?

B2. Упростите выражение $\frac{1+\frac{\lg 18-1}{1-\lg 2}}{\frac{\log_4 15}{\log_2\sqrt{5}}-1}$.

B3. Чему равно $\frac{\log_2 54\cdot\log_2 6+\log_2^2 3}{2\log_2 3+1}-2\log_2 3$?

B4. Чему равно $\log_3 b^6$, если $\log_a 3=\frac{2}{5}$ и $\log_b a=3$?

B5. Найдите максимальное значение функции

$f(x)=\log_2\sin x+\log_2\cos x$.

Часть C

C1. Чему равно $7^{\sqrt[3]{\log_7 3}}-3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}}-2$?

C2. Какое из чисел $\log_3 4$, $\log_4 3$ ближе к 1?

Тест 2

Часть A

A1. Укажите решение неравенства $\log_5(3-x)\le 2$.

1) $(3;22]$ 2) $(-\infty;22]\cup(3;\infty)$ 3) $(-\infty;3]\cup(22;\infty)$ 4) $[-22;3)$ 5) $[3;22)$

A2. Укажите решение неравенства $\log_{x-3}(9-x)<2$.

1) $(3;4)\cup(4;5)$ 2) $(3;4)\cup(5;9)$ 3) $(-\infty;0)\cup(5;\infty)$ 4) $(3;5)$ 5) $(0;5)$

A3. Чему равна сумма корней уравнения $\log_{x+2}(1-2x)=2$?

1) -4 2) -6 3) $-3-\sqrt{6}$ 4) 3 5) $-3+\sqrt{6}$

A4. Чему равно количество целых решений неравенства

$\lg^2 x-\lg x^2-3<0$?

1) 1000 2) 999 3) 998 4) 3 5) 2

A5. Какой из перечисленных интервалов содержит корень уравнения

$5^{\log_7 x}+x^{\log_7 5}=\frac{2}{5}$?

1) $(0;1]$ 2) $(2;3]$ 3) $(4;5]$ 4) $(6;7]$ 5) $(48;49]$

A6. Чему равно количество целых решений неравенства

$\frac{\log_4(x-1)-2}{9-x^2}>0$?

1) 9 2) 11 3) 13 4) 14 5) 16

А7. Чему равно произведение корней уравнения $\log_5(\log_3(x-1)^{10}) = 1$?

1) 2 2) 0 3) 1 4) -2 5) -1

А8. При каких значениях параметра a уравнение $(3x-a)\cdot(\log_5(2-x)-1) = 0$ имеет два корня?

1) $a > 6$ 2) $a < 6$ 3) $a < -9$ или $-9 < a < 6$ 4) $a < -9$ или $a > 6$ 5) $-9 < a < 6$ или $a > 6$

А9. Чему равно сумма корней уравнения $\log_{\sin x}\cos x = 1$ в промежутке $[-2\pi; 2\pi]$?

1) $-\frac{3\pi}{4}$ 2) $-\frac{3\pi}{2}$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) 0 5) $\frac{\pi}{4}$

А10. Чему равно количество целых решений неравенства $x^2 - (\log_2 5 + \log_5 128)x + 7 < 0$?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

А11. Чему равна сумма корней уравнения $\log_x 625 + \log_5 x = 5$?

1) 750 2) 650 3) 630 4) 130 5) 30

А12. Укажите решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\log_x(3x^2+4) < -2$.

1) $(1;2)$ 2) $(-2;1)\cup(2;\infty)$ 3) $(2;\infty)$ 4) $(1;2)\cup(2;\infty)$ 5) $(1;4)$

А13. Чему равно количество решений системы $\begin{cases}|x|+|y| = 1,\\ |y| = \lg|x|\end{cases}$?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

А14. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{\lg(x+2)}\,(2x+a) = 0$ имеет два корня?

1) $a > 4$ 2) $a \le 4$ 3) $a < 2$ 4) $a \ge 2$ 5) $2 < a < 4$

А15. Чему равно количество целых решений неравенства $\log_2|x| < 3$?

1) 14 2) 15 3) 8 4) 7 5) 9

Часть В

В1. Чему равна сумма корней уравнения $\sqrt{16-x^2}\log_{x+1}(3x-2) = 0$?

B2. Найдите максимальное значение параметра a при котором уравнение $\log_3|3\sin x + 4\cos x - 4| = a$ имеет решение.

B3. Чему равна сумма целых чисел в области определения функции

$y = \sqrt{\frac{\sqrt{\log_5 x - 1}}{16x - x^2 - 60}}$?

B4. Чему равно количество целых решений неравенства

$\log_2(x+3) - x + 2 > 0$?

B5. Чему равно количество целых решений неравенства

$\log_2(\log_2(\log_2(\log_2(2^7 - x)))) < 0$?

Часть С

C1. Решите неравенство

$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.

C2. Решите неравенство $\frac{\log_{2x+3} 4}{\log_{2x+3}(-4x)} \leq \frac{1}{\log_2(\log_{\frac{1}{2}} 2^x)}$.

Тест 3 (см. Приложение 1).

2.2. Решение тестовых заданий

Тест 1

Часть А

A1. Упростите выражение $\log_3 48 - 4\log_3 2 + \log_3 16 \cdot \log_2 \frac{1}{9}$. Выберите верный ответ.

1) 0 2) 3 3) -2 4) -7 5) -5

Решение:

$\log_3 48 - 4\log_3 2 + \log_3 16 \cdot \log_2 \frac{1}{9} =$

$= \log_3 16 + \log_3 3 - 4\log_3 2 - 2\log_3 16 \cdot \log_2 3 =$

$= 4\log_3 2 + 1 - 4\log_3 2 - 2\log_2 16 = 1 - 8 = -7$

Ответ:4) -7

A2. Чему равно $9^{\log_{\frac{1}{3}} 25}$?

1) 25 2) 625 3) $\frac{1}{25}$ 4) $\frac{1}{3}$ 5) $\frac{1}{625}$

Решение:

$$9^{\log_{\frac{1}{3}} 25} = 9^{-\log_3 25} = 3^{-2\log_3 25} = 3^{\log_3 \frac{1}{625}} = \frac{1}{625}$$

Ответ: 5) $\frac{1}{625}$

А3. Выразите lg6 через a и b, если lg25 = a и $\lg\frac{1}{9} = b$. Выберите верный ответ.

1) $\frac{a+b+2}{2}$ 2) $\frac{2-a-b}{2}$ 3) $\frac{a+b}{2}$ 4) $1-a+\frac{b}{2}$ 5) $1-b+\frac{a}{2}$

Решение:

lg6 = lg 2 · 3 = lg2 + lg3

lg10 = 1, с др. стороны:

lg10 = lg 2 · 5 = lg2 + lg5 = 1

lg2 = 1 − lg5

lg25 = 2lg5

lg5 = $\frac{a}{2}$

lg2 = $1 - \frac{a}{2}$

$\lg\frac{1}{9}$ = -2lg3

lg3 = $-\frac{b}{2}$

lg6 = $-\frac{b}{2} + 1 - \frac{a}{2} = \frac{2-a-b}{2}$

Ответ: 2) $\frac{2-a-b}{2}$

А4. Упростите выражение $\frac{\log_3 28+\log_3 4-\log_3 7}{\log_3 25} + \log_{\frac{1}{5}} 2$. Выберите верный ответ.

1) 1 2) $\log_5 2$ 3) 0 4) $\log_3 5$ 5) $\log_3 2$

Решение:

$$\frac{\log_3 28 + \log_3 4 - \log_3 7}{\log_3 25} + \log_{\frac{1}{5}} 2 = \frac{\log_3 4 + \log_3 7 + \log_3 4 - \log_3 7}{\log_3 25} +$$

$+\log_{\frac{1}{5}} 2 = \dfrac{\log_3 16}{\log_3 25} + \log_{\frac{1}{5}} 2 = \log_{25} 16 - \log_5 2 = \dfrac{1}{2}\log_5 16 - \log_5 2 =$

$= \log_5 4 - \log_5 2 = \log_5 2$

Ответ:2) $\log_5 2$

А5. Чему равно $\log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{9}} 27$?

1) -3 2) -6 3) -2 4) 2 5) 3

Решение:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{9}} 27 = 3\log_2 2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\log_3 3^3 = -\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = -6$$

Ответ: 2) -6

А6. Упростите выражение $\log_{25} 3 \cdot \log_{27} 8 \cdot \log_4 125$. Выберите верный ответ.

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{4}{3}$ 3) 2 4) $\frac{3}{4}$ 5) 1

Решение:

$$\log_{25} 3 \cdot \log_{27} 8 \cdot \log_4 125 = \frac{1}{2}\log_5 3 \cdot \frac{1}{3}\log_3 2^3 \cdot \frac{1}{2}\log_2 5^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\log_5 3 \cdot \log_3 2 \cdot \frac{3}{2}\log_2 5 = \frac{1}{2}\log_5 2 \cdot \frac{3}{2}\log_2 5 = \frac{3}{4}\log_2 2 = \frac{3}{4}$$

Ответ: 4) $\frac{3}{4}$

А7. Упростите выражение $\frac{25^{\log_3 7}}{7^{\log_3 5}} - 5^{\log_3 7}$. Выберите верный ответ.

1) 0 2) 1 3) 3 4) 5 5) 7

Решение:

$$\frac{25^{\log_3 7}}{7^{\log_3 5}} - 5^{\log_3 7} = \frac{7^{2\log_3 5}}{7^{\log_3 5}} - 5^{\log_3 7} = 7^{\log_3 5} - 7^{\log_3 5} = 0$$

Ответ: 1) 0

А8. Чему равно $\frac{1-\log_2 5}{1-\log_5 2}$?

1) $\log_2 5$ 2) $\log_5 2$ 3) $-\log_5 2$ 4) $-\log_2 5$ 5) 1

Решение:

$$\frac{1-\log_2 5}{1-\log_5 2}=\frac{1-\log_2 5}{1-\frac{1}{\log_2 5}}=\frac{\log_2 5\cdot(1-\log_2 5)}{\log_2 5-1}=-\frac{\log_2 5\cdot(1-\log_2 5)}{1-\log_2 5}=$$

$$=-\log_2 5$$

Ответ: 4) $-\log_2 5$

А9. Напишите числа $I-\log_4 3,\ II-\log_3 2,\ III-\log_2 3,\ IV-\log_3 4$ в убывающем порядке. Укажите верный ответ.

1) $III-IV-II-I$ 2) $III-IV-I-II$ 3) $II-I-III-IV$ 4) $IV-III-II-I$ 5) $IV-III-I-II$

Решение:

$\log_3 2<\log_3 4$, т.к. $2<4$ $(II<IV)$
$\log_4 3<\log_2 3$, т.к. $4>2$ $(I<III)$

$\log_4 3<\log_3 4$, т.к. $\log_3 4>1$ $(I<IV)$

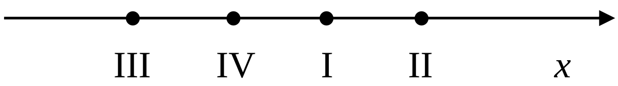
$\log_3 2<\log_2 3$, т.к. $\log_2 3>1$ $(II<III)$

$\log_4 3=\frac{1}{\log_3 4}=\frac{1}{2\log_3 2}>\log_3 2$ $(I>II)$

$\log_3 4=\frac{1}{\log_4 3}=\frac{2}{\log_2 3}<\log_2 3$ $(III>IV)$

Расположим числа на координатной прямой:

$II<IV, I<III, I<IV, II<III, I>II, III>IV.$



Ответ: 2) $III-IV-I-II$

А10. Упростите выражение $3^{\frac{\log_7 3-\log_3 7}{\log_7 21}}$. Укажите верный ответ.

1) $\frac{3}{7}$ 2) $\frac{1}{7}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$ 5) 1

Решение:

$$3^{\frac{\log_7 3-\log_3 7}{\log_7 21}}=3^{\frac{\log_7 3-\log_3 7}{\log_7 3+1}}=3^{\frac{\log_3 7(\log_7 3-\log_3 7)}{1+\log_3 7}}=3^{\frac{\log_3 7\cdot\log_7 3-\log_3^2 7}{1+\log_3 7}}=$$
$$3^{\frac{1-\log_3^2 7}{1+\log_3 7}}=3^{\frac{(1-\log_3 7)(1+\log_3 7)}{1+\log_3 7}}=3^{1-\log_3 7}=3^{\log_3 3-\log_3 7}=3^{\log_3\frac{3}{7}}=\frac{3}{7}$$

Ответ: 1) $\frac{3}{7}$

А11. Упростите выражение $\frac{\frac{\log_3 15-1}{\log_3 18-2}+1}{2\log_2 5+2}$. Выберете верный ответ.

1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) 0 4) $-\frac{1}{2}$ 5) -1

Решение:

$$\frac{\frac{\log_3 15-1}{\log_3 18-2}+1}{2\log_2 5+2}=\frac{\frac{\log_3(3\cdot5)-1}{\log_3(9\cdot2)-2}+1}{2\log_2 5+2}=\frac{\frac{\log_3 3+\log_3 5-1}{\log_3 9+\log_3 2-2}+1}{2\log_2 5+2}=$$

$$=\frac{\frac{1+\log_3 5-1}{2+\log_3 2-2}+1}{2\log_2 5+2}=\frac{\frac{\log_3 5}{\log_3 2}+1}{2\log_2 5+2}=\frac{\log_2 5+1}{2(\log_2 5+1)}=\frac{1}{2}$$

Ответ: 2) $\frac{1}{2}$

А12. Выразите $\log_{30} 40$ через a и b, если $\log_2 3=a$ и lg2 = b. Выберите верный ответ.

1) $\frac{2b+1}{ab-1}$ 2) $\frac{2b+1}{ab+1}$ 3) $\frac{3b+1}{ab+1}$ 4) $\frac{3b+a}{ab+1}$ 5) $\frac{4a+b}{ab-1}$

Решение:

lg10 = 1 = lg2 + lg5

lg2 = 1 – lg5 = $1-\frac{\log_2 5}{\log_2 10}=1-\frac{\log_2 5}{\log_2 5+1}=\frac{1}{\log_2 5+1}=b$

$$b\cdot(\log_2 5+1)=1$$

$$\log_2 5+1=\frac{1}{b}$$

$$\log_2 5=\frac{1-b}{b}$$

$$\log_{30} 40=\frac{\log_2 40}{\log_2 30}=\frac{\log_2 8+\log_2 5}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 5}=\frac{3+\log_2 5}{1+\log_2 3+\log_2 5}=$$

$$\frac{3+\frac{1-b}{b}}{1+a+\frac{1-b}{b}}=\frac{(3b+1-b)b}{b(b+ab+1-b)}=\frac{2b+1}{ab+1}$$

Ответ: 2) $\frac{2b+1}{ab+1}$

А13. Сколько чисел из перечисленные отрицательны

$\log_5 2$; $\log_3(0{,}1)$; $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$; ln1; $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{5}$? Укажите вариант правильного ответа.

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

Решение:

$\log_5 2 > 0$, т.к. $\log_5 2 > \log_5 1 = 0$

$$\log_3(0{,}1) = \log_3\frac{1}{10} = -\log_3 10 < 0$$

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = 2\log_2\frac{1}{2} = -2\log_2 2 = -2 < 0$$

ln1=0

$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{5} = -2\log_3\frac{1}{5} = 2\log_3 5 > 0$, т.к. $2\log_3 5 > \log_3 3 = 1$

Ответ: 4) 2

A14. Чему равно $5^{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_3 5^2}+\frac{1}{\log_3 5^4}+\frac{1}{\log_3 5^8}}$?

1) $\sqrt[16]{5^{15}}$ 2) $\sqrt[8]{3^{15}}$ 3) $\sqrt[8]{5^7}$ 4) $\sqrt[8]{3^7}$ 5) $\sqrt[15]{5^{16}}$

Решение:

$$5^{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_3 5^2}+\frac{1}{\log_3 5^4}+\frac{1}{\log_3 5^8}} = 5^{\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 3+\frac{1}{4}\log_5 3+\frac{1}{8}\log_5 3} =$$

$$= 5^{\frac{15}{8}\log_5 3} = 3^{\frac{15}{8}} = \sqrt[8]{3^{15}}$$

Ответ: 2) $\sqrt[8]{3^{15}}$

A15. Упростите выражение $\frac{\log_3^3 6-1}{\frac{2+\log_3 2}{\log_6 3}+1}$. Укажите верный ответ.

1) $\log_3 2$ 2) $\log_2 3$ 3) 1 4) $\log_3 6$ 5) $\log_6 3$

Решение:

$$\frac{\log_3^3 6-1}{\frac{2+\log_3 2}{\log_6 3}+1} = \frac{(\log_3 6-1)(\log_3^2 6+\log_3 6+1)}{2\log_3 6+\log_3 2\cdot\log_3 6+1} =$$

$$= \frac{(\log_3 2\cdot 3-1)(\log_3^2 2\cdot 3+\log_3 2\cdot 3+1)}{2\log_3 3\cdot 2+\log_3 2\cdot\log_3 3\cdot 2+1} =$$

$$= \frac{\log_3 2\cdot(\log_3^2 2+2\log_3 2+1+\log_3 2+2)}{2+2\log_3 2+\log_3 2+\log_3^2 2+1} =$$

$$= \frac{\log_3 2 \cdot (\log_3^2 2 + 3\log_3 2 + 3)}{\log_3^2 2 + 3\log_3 2 + 3} = \log_3 2$$

Ответ: 1) $\log_3 2$

Часть B

B1. Чему равно $6^{\log_5 49} - 7^{\log_{\sqrt{5}} 6}$?

Решение:

$$6^{\log_5 49} - 7^{\log_{\sqrt{5}} 6} = 49^{\log_5 6} - 7^{2\log_5 6} = 7^{2\log_5 6} - 7^{2\log_5 6} = 0$$

Ответ: 0

B2. Упростите выражение $\frac{1+\frac{\lg 18-1}{1-\lg 2}}{\frac{\log_4 15}{\log_2 \sqrt{5}}-1}$.

Решение:

$$\frac{1+\frac{\lg 18-1}{1-\lg 2}}{\frac{\log_4 15}{\log_2 \sqrt{5}}-1} = \frac{\frac{1-\lg 2+\lg 18-1}{1-\lg 2}}{\frac{\frac{1}{2}\log_2 15-\frac{1}{2}\log_2 5}{\frac{1}{2}\log_2 5}} = \frac{\lg 9}{\lg 5} \cdot \frac{\frac{1}{2}\log_2 5}{\frac{1}{2}\log_2 3} = \log_5 9 \cdot \log_3 5 =$$

$$= \frac{\log_5 9}{\log_5 3} = \log_3 9 = 2$$

Ответ: 2

B3. Чему равно $\frac{\log_2 54 \cdot \log_2 6 + \log_2^2 3}{2\log_2 3 + 1} - 2\log_2 3$?

Решение:

$$\frac{\log_2 54 \cdot \log_2 6 + \log_2^2 3}{2\log_2 3 + 1} - 2\log_2 3 =$$

$$= \frac{\log_2 2 \cdot 3^3 \cdot \log_2 3 \cdot 2 + \log_2^2 3 - 4\log_2^2 3 - 2\log_2 3}{2\log_2 3 + 1} =$$

$$= \frac{(3\log_2 3 + 1) \cdot (\log_2 3 + 1) - 3\log_2^2 3 - 2\log_2 3}{2\log_2 3 + 1} =$$

$$= \frac{3\log_2^2 3 + 3\log_2 3 + \log_2 3 + 1 - 3\log_2^2 3 - 2\log_2 3}{2\log_2 3 + 1} =$$

$$= \frac{2\log_2 3 + 1}{2\log_2 3 + 1} = 1$$

Ответ: 1

В4. Чему равно $\log_3 b^6$, если $\log_a 3 = \frac{2}{5}$ и $\log_b a = 3$?

Решение:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{3}$$
$$\log_3 b = \frac{\log_a b}{\log_a 3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\log_3 b^6 = 6\log_3 b = 6 \cdot \frac{5}{6} = 5$$

Ответ: 5

В5. Найдите максимальное значение функции

$f(x) = \log_2 \sin x + \log_2 \cos x$.

Решение:

$$f(x) = \log_2 \sin x + \log_2 \cos x$$
$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x \cdot \ln 2} + \frac{\sin x}{\cos x \cdot \ln 2}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x \cdot \ln 2} - \frac{\cos x}{\sin x \cdot \ln 2} = 0$$

$$\frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0 \qquad \frac{1}{\ln 2} \neq 0$$

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$k = 0: x = \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$k = 1: x = \frac{5\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

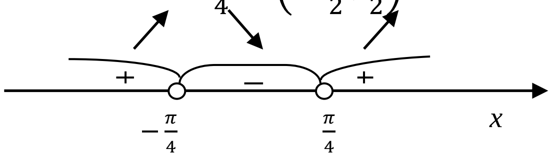
$k = -1: x = -\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$

$k = 0: x = \frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$k = 1: x = \frac{7\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$k = -1: x = -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



$-\frac{\pi}{4}$ – максимальное значение

$\log_2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \log_2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

Ответ: -1

Часть С

С1. Чему равно $7^{\sqrt[3]{\log_7 3}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2$?

Решение:

$7^{\sqrt[3]{\log_7 3}} - 3^{\sqrt[3]{\log_3^2 7}} - 2 = 7^{(\log_7 3)^{\frac{1}{3}}} - 3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 2 = 7^{(\log_7 3)^{\frac{1}{3}} \cdot (\log_7 3)^{\frac{2}{3}} \cdot (\log_7 3)^{-\frac{2}{3}}} -$
$-3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 2 = 7^{\log_7 3 \cdot (\log_7 3)^{-\frac{2}{3}}} - 3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 2 = 3^{(\log_7 3)^{-\frac{2}{3}}} - 3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 2 =$

$= 3^{\left(\frac{1}{\log_3 7}\right)^{-\frac{2}{3}}} - 3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 2 = 3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 3^{(\log_3 7)^{\frac{2}{3}}} - 2 = -2$

Ответ: -2

С2. Какое из чисел $\log_3 4$, $\log_4 3$ ближе к 1?

Решение:

Найдем расстояние от каждого из данных чисел до 1: $|\log_3 4 - 1|$ и $|\log_4 3 - 1|$.

1) $|\log_3 4 - 1| = |\log_3 4 - \log_3 3| = \left|\log_3 \frac{4}{3}\right| = \log_3 \frac{4}{3}$
2) $|\log_4 3 - 1| = |\log_4 3 - \log_4 4| = \left|\log_4 \frac{3}{4}\right| = \left|\log_4 \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right| = \left|-\log_4 \frac{4}{3}\right| =$
$= \log_4 \frac{4}{3}$

Выражения под знаками логарифма одинаковые, значит, чем больше основание, тем меньше логарифм, то есть меньше расстояние.

То есть $\log_4 3$ ближе к 1.

Ответ: $\log_4 3$ ближе к 1.

Тест 2

Часть А

А1. Укажите решение неравенства $\log_5(3 - x) \leq 2$.

1) $(3; 22]$ 2) $(-\infty; 22] \cup (3; \infty)$ 3) $(-\infty; 3] \cup (22; \infty)$ 4) $[-22; 3)$ 5) $[3; 22)$

Решение:

$\log_5(3 - x) \leq 2$
ОДЗ: $3 - x > 0$

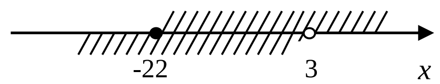
$x < 3$

$\log_5(3 - x) \leq \log_5 5^2$

$3 - x \leq 25$

$-x \leq 22$

$x \geq -22$



$x \in [-22; 3)$

Ответ: 4) $[-22; 3)$

А2. Укажите решение неравенства $\log_{x-3}(9-x) < 2$.

1) $(3;4) \cup (4;5)$ 2) $(3;4) \cup (5;9)$ 3) $(-\infty;0) \cup (5;\infty)$ 4) $(3;5)$ 5) $(0;5)$

Решение:

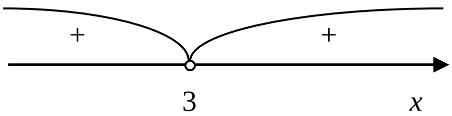
$$\log_{x-3}(9-x) < 2$$
$$\log_{x-3}(9-x) < \log_{x-3}(x-3)^2$$

Решение разбивается на 2 пункта:

$$1. \begin{cases} x-3>1, \\ 9-x>0, \\ (x-3)^2>0, \\ 9-x<x^2-6x+9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4, \\ x<9, \\ (x-3)^2>0, \\ x^2-5x>0. \end{cases}$$

$$(x-3)^2>0$$

$$(x-3)^2=0$$



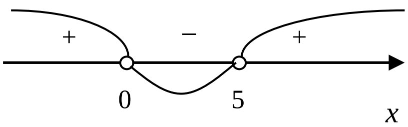
$$x \neq 3$$

$$x^2-5x>0$$

$$x(x-5)>0$$

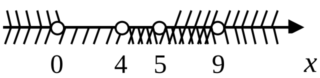
$$x(x-5)=0$$

$$x=0, \quad x=5$$



$$x<0, \quad x>5$$

$$\begin{cases} x>4, \\ x<9, \\ x\neq 3, \\ \begin{cases} x<0, \\ x>5. \end{cases} \end{cases}$$



$x \in (5; 9)$

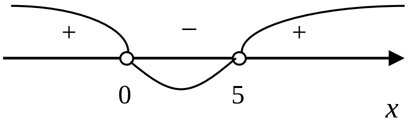
2. $\begin{cases} x - 3 > 1, \\ 9 - x > 0, \\ (x-3)^2 > 0, \\ 9 - x > x^2 - 6x + 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < 9, \\ (x-3)^2 > 0, \\ x^2 - 5x < 0. \end{cases}$

$x^2 - 5x < 0$

$x^2 - 5x = 0$

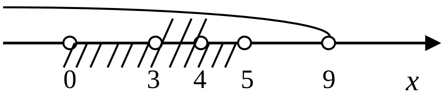
$x(x - 5) = 0$

$x = 0, \qquad x = 5$



$0 < x < 5$

$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x < 9, \\ x \neq 3, \\ 0 < x < 5. \end{cases}$



$x \in (3; 4)$

Ответ: 2) $(3; 4) \cup (5; 9)$

А3. Чему равна сумма корней уравнения $\log_{x+2}(1 - 2x) = 2$?

1) -4 2) -6 3) $-3 - \sqrt{6}$ 4) 3 5) $-3 + \sqrt{6}$

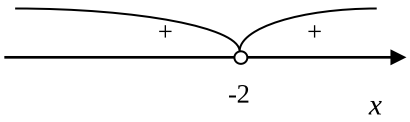
Решение:

$\log_{x+2}(1 - 2x) = 2$

ОДЗ: $\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1, \\ 1 - 2x > 0, \\ (x+2)^2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1, \\ x < \frac{1}{2}, \\ x \neq -2. \end{cases}$

$(x + 2)^2 > 0$

$(x+2)^2=0$



$\log_{x+2}(1-2x)=\log_{x+2}(x+2)^2$

$1-2x=x^2+4x+4$

$x^2+6x+3=0$

D = 24

$x_1=\frac{-6+\sqrt{24}}{2}=-3+\sqrt{6}\in$ ОДЗ

$x_2=\frac{-6-\sqrt{24}}{2}=-3-\sqrt{6}\notin$ ОДЗ

Ответ: 5) $-3+\sqrt{6}$

А4. Чему равно количество целых решений неравенства $\lg^2 x-\lg x^2-3<0$?

1) 1000 2) 999 3) 998 4) 3 5) 2

Решение:

$\lg^2 x-\lg x^2-3<0$
ОДЗ: $x>0$

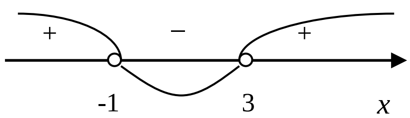
$\lg^2 x-2\lg x-3=0$

$\lg x=t$

$t^2-2t-3=0$

D=16

$t_1=3,\ \ t_2=-1$



$t\in(-1,3)$

$\left[\begin{array}{l}\lg x>-1,\\ \lg x<3.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\lg x>\lg\frac{1}{10},\\ \lg x<\lg 10^3.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{10},\\ x<1000.\end{array}\right.$

$x \in (\frac{1}{10}; 1000)$

Целых решений 999.

Ответ: 2) 999

A5. Какой из перечисленных интервалов содержит корень уравнения

$5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} = \frac{2}{5}$?

1) $(0; 1]$ 2) $(2; 3]$ 3) $(4; 5]$ 4) $(6; 7]$ 5) $(48; 49]$

Решение:

$$5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} = \frac{2}{5}$$

ОДЗ: $x > 0$

$$5^{\log_7 x} + 5^{\log_7 x} = \frac{2}{5}$$

$$2 \cdot 5^{\log_7 x} = \frac{2}{5}$$

$$5^{\log_7 x} = \frac{1}{5}$$

$$5^{\log_7 x} = 5^{-1}$$

$$\log_7 x = -1$$

$$\log_7 x = \log_7 7^{-1}$$

$$x = \frac{1}{7} \in (0; 1]$$

Ответ: 1) $(0; 1]$

A6. Чему равно количество целых решений неравенства

$\frac{\log_4(x-1) - 2}{9 - x^2} > 0$?

1) 9 2) 11 3) 13 4) 14 5) 16

Решение:

$$\frac{\log_4(x-1) - 2}{9 - x^2} > 0$$

1. $\begin{cases} \log_4(x-1) - 2 > 0 \\ 9 - x^2 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \log_4(x-1) > \log_4 4^2 \\ 9 - x^2 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

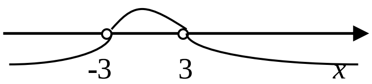
$\log_4(x-1) > \log_4 4^2$

$x - 1 > 16$

$x > 17$

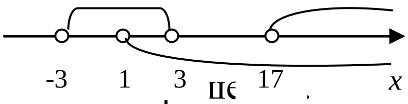
$9 - x^2 > 0$

$(3 - x)(3 + x) > 0$



$-3 < x < 3$

Представим решение на числовой прямой:



2. $\begin{cases} \log_4(x-1) - 2 < 0 \\ 9 - x^2 < 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \log_4(x-1) < \log_4 4^2 \\ 9 - x^2 < 0 \\ x > 1 \end{cases}$

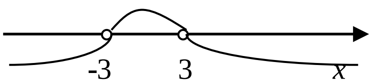
$\log_4(x-1) < \log_4 4^2$

$x - 1 < 16$

$x < 17$

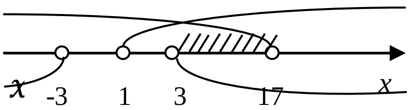
$9 - x^2 < 0$

$(3 - x)(3 + x) < 0$



$x > 3,\ \ x > -3$

Представим решение на числовой прямой:



Целых решений на данном промежутке 13.

Ответ: 3) 13

А7. Чему равно произведение корней уравнения

$$\log_5(\log_3(x-1)^{10}) = 1?$$

1) 2 2) 0 3) 1 4) -2 5) -1

Решение:

$\log_5(\log_3(x-1)^{10}) = 1$
ОДЗ: $\log_3(x-1)^{10} > 0$

$\log_5(\log_3(x-1)^{10}) = \log_5 5$

$\log_3(x-1)^{10} = 5$

$10 \cdot \log_3(x-1) = 5$

$2 \cdot \log_3(x-1) = 1$

$\log_3(x-1)^2 = \log_3 3$

$x^2 - 2x + 1 = 3$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

D = 12

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3} \ \in \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3} \ \in \text{ОДЗ}$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right) = 1-3 = -2$$

Ответ: 4) -2

А8. При каких значениях параметра a уравнение

$(3x-a)\cdot(\log_5(2-x)-1) = 0$ имеет два корня?

1) $a > 6$ 2) $a < 6$ 3) $a < -9$ или $-9 < a < 6$

4) $a < -9$ или $a > 6$ 5) $-9 < a < 6$ или $a > 6$

Решение:

$(3x-a)\cdot(\log_5(2-x)-1) = 0$
ОДЗ:

$2 - x > 0$

$x < 2$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

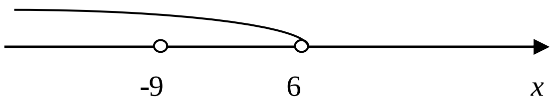
$3x - a = 0$ или $\log_5(2 - x) - 1 = 0$

$x = \frac{a}{3}$ $\qquad\qquad$ $2 - x = 5$

$\qquad\qquad\qquad x = -3 \in$ ОДЗ

Найдем значения a, при которых корни уравнения не совпадают и при которых корни принадлежат области определения:

$\begin{cases} \frac{a}{3} < 2, \\ \frac{a}{3} \neq -3. \end{cases} \begin{cases} a < 6, \\ a \neq -9. \end{cases}$



Получаем, что уравнение имеет два корня при $a < -9$ или $-9 < a < 6$.

Ответ: 3) $a < -9$ или $-9 < a < 6$.

А9. Чему равна сумма корней уравнения $\log_{\sin x} \cos x = 1$ в промежутке $[-2\pi; 2\pi]$?

1) $-\frac{3\pi}{4}$ $\qquad$ 2) $-\frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ 4) 0 $\qquad$ 5) $\frac{\pi}{4}$

Решение:

$\log_{\sin x} \cos x = 1$

ОДЗ:

$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 1. \end{cases} => \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases} => \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$

Переберем k для выяснений области определения на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$:

$k = 0$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

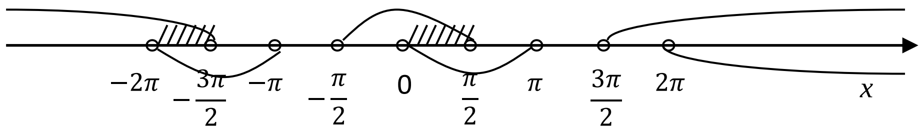
$k = 1$:

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}, \\ 2\pi < x < 3\pi. \end{cases}$$

$k = -1$:

$$\begin{cases} -\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}, \\ -2\pi < x < -\pi. \end{cases}$$

При дальнейшем увеличении или уменьшении k область определения не попадает в отрезок $[-2\pi; 2\pi]$.



ОДЗ: $x \in \left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup (0; \frac{\pi}{2})$

$\log_{\sin x} \cos x = \log_{\sin x} \sin x$

$\cos x = \sin x$

$$\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\tan x = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$k = 0: x = \frac{\pi}{4} \in \text{ОДЗ}$$

$$k = 1: x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \notin \text{ОДЗ}$$

$$k = -1: x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \notin \text{ОДЗ}$$

$$k = -2: x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} \in \text{ОДЗ}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

Ответ: 2) $-\frac{3\pi}{2}$

А10. Чему равно количество целых решений неравенства

$x^2-(\log_2 5+\log_5 128)x+7<0$?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

Решение:

$$x^2-(\log_2 5+\log_5 128)x+7<0$$

$$D=(\log_2 5+\log_5 128)^2-28=\log_2^2 5+2\log_2 5\cdot\log_5 2^7+\log_5^2 2^7-28=$$

$$=\log_2^2 5+14+\log_5^2 2^7-28=\frac{1}{\log_5^2 2}+49\log_5^2 2-14=$$

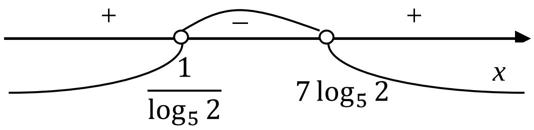
$$=\frac{1+49\log_5^4 2-14\log_5^2 2}{\log_5^2 2}=\frac{(7\log_5^2 2-1)^2}{\log_5^2 2}$$

$$x_1=\frac{\log_2 5+\log_5 2^7+\dfrac{7\log_5^2 2-1}{\log_5 2}}{2}=\frac{\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2}+7\log_5 2+\dfrac{7\log_5^2 2-1}{\log_5 2}}{2}=$$

$$=\frac{\dfrac{7\log_5^2 2}{\log_5 2}+7\log_5 2}{2}=\frac{14\log_5 2}{2}=7\log_5 2\approx 3{,}02$$

$$x_2=\frac{\log_2 5+\log_5 2^7-\dfrac{7\log_5^2 2-1}{\log_5 2}}{2}=\frac{\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2}+7\log_5 2-\dfrac{7\log_5^2 2-1}{\log_5 2}}{2}=$$

$$=\frac{1+7\log_5^2 2-7\log_5^2 2+1}{2\log_5 2}=\frac{2}{2\log_5 2}=\frac{1}{\log_5 2}\approx 2{,}32$$



$$x\in\left(\frac{1}{\log_5 2};7\log_5 2\right)$$

Целый корень $x=3$

Ответ: 5) 1

А11. Чему равна сумма корней уравнения $\log_x 625+\log_5 x=5$?

1) 750 2) 650 3) 630 4) 130 5) 30

Решение:

$\log_x 625 + \log_5 x = 5$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\dfrac{4}{\log_5 x} + \log_5 x = 5$

$\dfrac{4 + \log_5^2 x - 5\log_5 x}{\log_5 x} = 0$

$\begin{cases} \log_5^2 x - 5\log_5 x + 4 = 0, \\ \log_5 x \neq 0. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \log_5^2 x - 5\log_5 x + 4 = 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$\log_5^2 x - 5\log_5 x + 4 = 0$

$\log_5 x = t$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$t_1 = 4, \;\; t_2 = 1$

$\log_5 x = 4, \qquad x_1 = 625 \in$ ОДЗ

$\log_5 x = 1, \qquad x_2 = 5 \in$ ОДЗ

625+5=630

Ответ: 3) 630

А12. Укажите решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} \log_x(3x^2 + 4) < -2$.

1) $(1; 2)$ 2) $(-2; 1) \cup (2; \infty)$ 3) $(2; \infty)$ 4) $(1; 2) \cup (2; \infty)$ 5) $(1; 4)$

Решение:

$\log_{\frac{1}{2}} \log_x(3x^2 + 4) < -2$

ОДЗ: $\log_x(3x^2 + 4) > 0$

$\log_{\frac{1}{2}} \log_x(3x^2 + 4) < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\log_x(3x^2 + 4) > 4$

1. ОДЗ-1: $\begin{cases} 3x^2 + 4 > 0, \\ x > 1. \end{cases}$ => $\begin{cases} x^2 > -\frac{4}{3}, \\ x > 1. \end{cases}$ => $x > 1$

$\log_x(3x^2 + 4) > \log_x x^4$

$3x^2 + 4 > x^4$

$x^4 - 3x^2 - 4 < 0$

$x^2 = t$

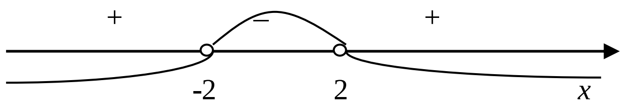
$t^2 - 3t - 4 = 0$

$D = 25$

$t_1 = 4, \qquad t_2 = -1$

$x^2 = 4; \quad x_{1,2} = \pm 2$

$x^2 = -1$ – корней нет



$x \in (-2; 2)$

С учетом ОДЗ-1: $x \in (1; 2)$

2. ОДЗ-2: $\begin{cases} 3x^2 + 4 > 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$ => $\begin{cases} x^2 > -\frac{4}{3}, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$ => $0 < x < 1$

$\log_x(3x^2 + 4) > \log_x x^4$

$3x^2 + 4 < x^4$

$x^4 - 3x^2 - 4 > 0$

$x^2 = t$

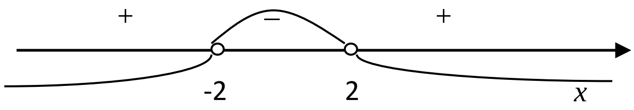
$t^2 - 3t - 4 = 0$

$D = 25$

$t_1 = 4, \qquad t_2 = -1$

$x^2 = 4; \quad x_{1,2} = \pm 2$

$x^2 = -1$ – корней нет



$x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

С учетом ОДЗ-2: решений нет.

Ответ: 1) (1;2)

А13. Чему равно количество решений системы $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ |y| = \lg |x| \end{cases}$?

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2 5) 1

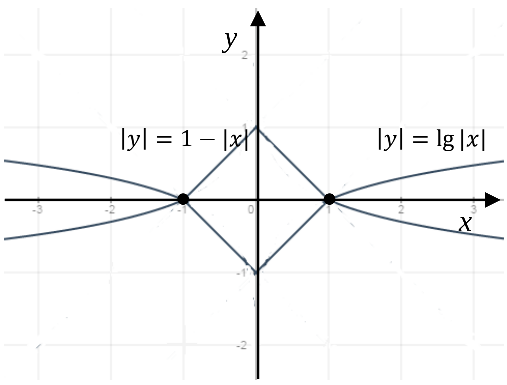
Решение:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ |y| = \lg|x|. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq 0$

Построим графики функций $|y| = 1 - |x|$ и $|y| = \lg |x|$ в одной системе координат и найдем точки их пересечения – решения системы уравнений.

$\lvert y\rvert = 1 - \lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert = \lg\lvert x\rvert$
1) $y = 1 - \lvert x\rvert$	1) $y = \lg x$
2) $\lvert y\rvert = 1 - \lvert x\rvert$	2) $y = \lg\lvert x\rvert$
	3) $\lvert y\rvert = \lg \lvert x\rvert$



Система имеет два решения.

Ответ: 4) 2

А14. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{\lg(x+2)}\,(2x + a) = 0$ имеет два корня?

1) $a > 4$ 2) $a \leq 4$ 3) $a < 2$ 4) $a \geq 2$ 5) $2 < a < 4$

Решение:

$\sqrt{\lg(x+2)}\,(2x+a) = 0$

ОДЗ:

$\lg(x+2) \geq 0$

$x + 2 \geq 1$

$x \geq -1$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

$\sqrt{\lg(x+2)} = 0$ или $2x + a = 0$

$\log(x+2) = 0$ $\quad x = -\frac{a}{2}$

$x + 2 = 1$

$x = -1$

Найдем значения a, при которых корни уравнения не совпадают и при которых корни принадлежат области определения:

$\begin{cases} -\frac{a}{2} \neq -1, \\ -\frac{a}{2} \geq -1. \end{cases} => -\frac{a}{2} > -1, a < 2.$

Значит при $a < 2$ уравнение имеет два корня.

Ответ: 3) $a < 2$

А15. Чему равно количество целых решений неравенства

$\log_2|x| < 3$?

1) 14 2) 15 3) 8 4) 7 5) 9

Решение:

$\log_2|x| < 3$

ОДЗ:

$|x| > 0$

$$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \quad x \neq 0$$

$$\log_2|x| < \log_2 2^3$$

$$|x| < 8$$

$$-8 < x < 8$$

Количество целых решений 14.

Ответ: 1) 14

Часть В

В1. Чему равна сумма корней уравнения $\sqrt{16-x^2}\log_{x+1}(3x-2) = 0$?

Решение:

$$\sqrt{16-x^2}\log_{x+1}(3x-2) = 0$$

ОДЗ:

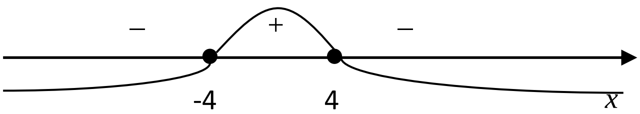
$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ 3x - 2 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1. \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ x > \frac{2}{3}, \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$16 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 16 \leq 0$$

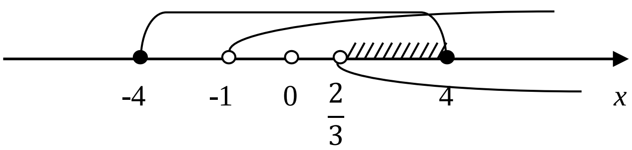
$$x^2 - 16 = 0$$

$$x = \pm 4$$



$$x \in [-4; 4]$$

Сводим ОДЗ:



ОДЗ: $\frac{2}{3} < x \leq 4$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

$\sqrt{16-x^2} = 0$ или $\log_{x+1}(3x-2) = 0$

$x^2 - 16 = 0$ $\qquad$ $3x - 2 = 1$

$x_1 = 4 \in$ ОДЗ $\qquad$ $x = 1 \in$ ОДЗ

$x_2 = -4 \notin$ ОДЗ

1+4=5

Ответ: 5

В2. Найдите максимальное значение параметра a при котором уравнение $\log_3|3\sin x + 4\cos x - 4| = a$ имеет решение.

Решение:

$\log_3|3\sin x + 4\cos x - 4| = a$

Рассмотрим подлогарифмическое выражение:

$$3\sin x + 4\cos x - 4 = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

Произведем замену: $\frac{3}{5} = \cos\alpha$; $\frac{4}{5} = \sin\alpha$.

$$5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) = 5(\sin x \cdot \cos\alpha + \cos x \cdot \sin\alpha) = 5\sin(x+\alpha)$$

$-1 \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$

$-5 \leq 5\sin(x+\alpha) \leq 5$

$-9 \leq 5\sin(x+\alpha) - 4 \leq 1$

$1 \leq |5\sin(x+\alpha) - 4| \leq 9$

Наибольшее значение, которое может принимать выражение, стоящее под знаком логарифма, равно 9. Следовательно,

$a_{max} = \log_3 9 = 2.$

Ответ: $a_{max} = 2$.

В3. Чему равна сумма целых чисел в области определения функции

$y = \sqrt{\frac{\sqrt{\log_5 x - 1}}{16x - x^2 - 60}}$?

Решение:

$y = \sqrt{\frac{\sqrt{\log_5 x - 1}}{16x - x^2 - 60}}$

ОДЗ: $\frac{\sqrt{\log_5 x - 1}}{16x - x^2 - 60} \geq 0$

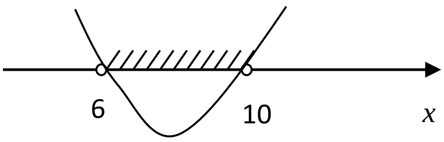
$\begin{cases} \log_5 x - 1 \geq 1, \\ 16x - x^2 - 60 > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 5, \\ x^2 - 16x + 60 < 0. \end{cases}$

$x^2 - 16x + 60 < 0$

$x^2 - 16x + 60 = 0$

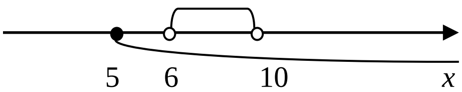
$D = 16$

$x_1 = 10, x_2 = 6.$



$\begin{cases} x \geq 5, \\ 6 < x < 10. \end{cases}$

Сводим ОДЗ:



ОДЗ: $(6; 10)$

Сумма целых чисел в области определения функции равна

$7 + 8 + 9 = 24$

Ответ: 24

В4. Чему равно количество целых решений неравенства

$\log_2(x + 3) - x + 2 > 0$?

Решение:

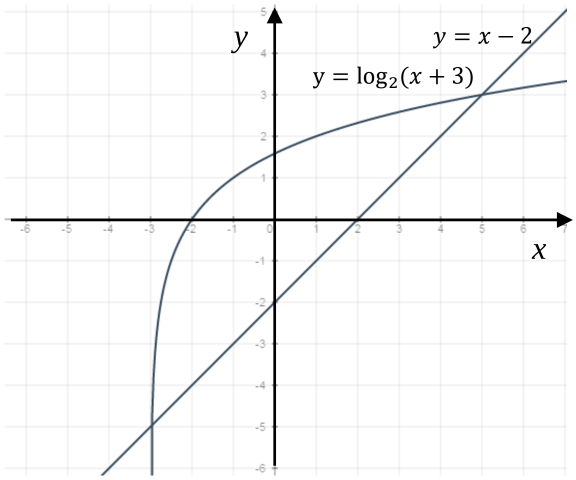
$\log_2(x+3) - x + 2 > 0$

ОДЗ: $x + 3 > 0$

$x > -3$

$\log_2(x+3) > x - 2$

Решим неравенство графически, т.е. построим в одной системе координат графики функций: $y = \log_2(x+3)$ и $y = x - 2$.



$x \in (-3; 5) \in$ ОДЗ

Количество целых решений неравенства равно 7.

Ответ: 7

В5. Чему равно количество целых решений неравенства $\log_2(\log_2(\log_2(\log_2(2^7 - x)))) < 0$?

Решение:

$\log_2(\log_2(\log_2(\log_2(2^7 - x)))) < 0$

ОДЗ: $\log_2(\log_2(\log_2(2^7 - x))) > 0$

$\log_2(\log_2(2^7 - x)) > 1$

$\log_2(2^7 - x) > 2$

$2^7 - x > 4$

ОДЗ: $x < 124$

$\log_2(\log_2(\log_2(2^7 - x))) < 1$

$\log_2(\log_2(2^7 - x)) < 2$

$\log_2(2^7 - x) < 4$

$2^7 - x < 16$

$x > 112$

С учетом ОДЗ количество целых решений неравенства равно 11.

Ответ: 11.

Часть С

С1. Решите неравенство

$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.

Решение:

$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$

$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5(x^2 - 2x + 2))$

$\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < 1 + \log_5(x^2 - 2x + 2)$

$t = \log_5(x^2 - 2x + 2)$

$t = \log_5((x-1)^2 + 1)$

$t \geq 0$

$\sqrt{1 - t} < 1 + t$

ОДЗ: $1 - t \geq 0$

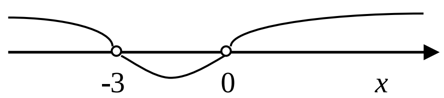
$t \leq 1$, но $t \geq 0 => 0 \leq t \leq 1$

Обе части неравенства неотрицательны. На области определения его можно возвести в квадрат.

$1 - t < 1 - 2t + t^2$

$t^2 + 3t > 0$

$t(t+3) > 0$



$t < -3, t > 0$

С учетом ОДЗ: $0 < t \leq 1$

$0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1$

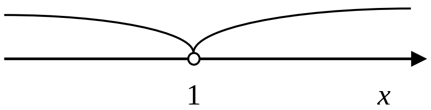
$\begin{cases} \log_5(x^2 - 2x + 2) > 0, \\ \log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1. \end{cases}$

1. $\log_5(\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 2) > 0$

$\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 2 > 1$

$\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 1 > 0$

$(x-1)^2 > 0$



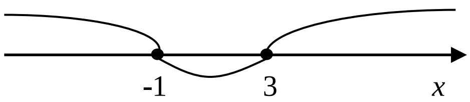
$x \neq 1$

2. $\log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1$

$x^2 - 2x + 2 \leq 5$

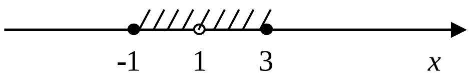
$x^2 - 2x - 3 \leq 0$

$x_1 = 3, x_2 = -1$



$-1 \leq x \leq 3$

Представим решение на числовой прямой:



Ответ: $[-1; 0) \cup (1; 3]$

С2. Решите неравенство $\frac{\log_{2x+3} 4}{\log_{2x+3}(-4x)} \leq \frac{1}{\log_2(\log_{\frac{1}{2}} 2^x)}$.

Решение:

$$\frac{\log_{2^{x+3}} 4}{\log_{2^{x+3}}(-4x)} \leq \frac{1}{\log_2(\log_{\frac{1}{2}} 2^x)}$$

В левой части неравенства избавимся от показателя в основании логарифма, при этом должно выполняться:

$2^{x+3} \neq 1$

$x + 3 \neq 0$

$x \neq -3$

$$\frac{\frac{1}{x+3}\log_2 4}{\frac{1}{x+3}\log_2(-4x)} \leq \frac{1}{\log_2(\log_{2^{-1}} 2^x)}$$

$$\frac{\log_2 4}{\log_2(-4x)} \leq \frac{1}{\log_2(-x)}$$

$$\frac{2}{2+\log_2(-x)} \leq \frac{1}{\log_2(-x)}$$

$\log_2(-x) = t$

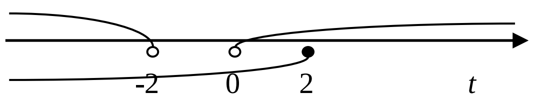
$$\frac{2}{2+t} \leq \frac{1}{t}$$

$$\frac{t-2}{t(2+t)} \leq 0$$

1. $\begin{cases} t-2 \geq 0, \\ t(2+t) < 0. \end{cases} => \begin{cases} t \geq 2, \\ -2 < t < 0. \end{cases}$

Решений нет.

2. $\begin{cases} t-2 \leq 0, \\ t(2+t) > 0. \end{cases}$



$\left[\begin{array}{l} t < -2, \\ 0 < t \leq 2. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \log_2(-x) < -2, \\ 0 < \log_2(-x) \leq 2. \end{array}\right.$

1. $\log_2(-x) < -2$

$0 < -x < 2^{-2}$

$0 < -x < \frac{1}{4}$

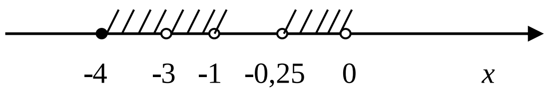
$-\frac{1}{4} < x < 0$

2. $0 < \log_2(-x) \le 2$

$1 < -x \le 4$

$-4 \le x < -1$

Представим решение на числовой прямой:



Ответ: $[-4;\ -3) \cup (-3;\ -1) \cup (-0{,}25; 0)$

Решение теста 3 представлено в Приложении 2.

§ 3. Факультативный курс по теме «Логарифмы» для подготовки к ЕГЭ

Факультативные занятия – форма учебной работы, состоящая в развитии способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой; зарождение интереса к математике на первичном уровне.

С помощью факультативных занятий школа призвана решать следующие задачи:

- удовлетворять запросы в более глубоком изучении отдельных предметов, которые интересуют учащихся;
- развивать учебно-познавательные интересы, творческие способности и дарования учащихся. В этом и состоит их важное педагогическое значение [11, с. 192].

Факультативные занятия проводятся параллельно с изучением обязательных учебных предметов с целью углубления и обогащения знаний учащихся и развития их творческих способностей и дарований. Это оказывает влияние на их содержание. Оно может включать в себя более глубокое изучение отдельных тем или разделов учебной программы по какому-либо предмету, а также содержать новые темы и проблемы, выходящие за пределы программы. Для этого в помощь учителю составляются специальные программы и создаются учебные пособия по факультативным предметам.

Что же касается организации факультативных занятий, то они могут проводиться в форме обычных уроков, экскурсий, семинаров, дискуссий и т.д [11, с. 197].

При разработке факультативного курса учитывалось, что вопросы данной темы вызывают затруднения на ЕГЭ. Курс призван расширить математические знания каждого ученика, учитывая его математические способности.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Тема «Логарифмы» является традиционной в курсе алгебры и начала анализа средней школы, но очень трудно дается учащимся из-за быстрого и поверхностного изучения. В настоящее время в школьных учебниках изучение данной темы планируется в 10, а по некоторым учебникам в 11 классах. Анализ школьных учебников по изложению темы «Логарифмы» и тестов ЕГЭ показал, что в учебниках содержится недостаточное количество заданий для подготовки учащихся к сдаче экзамена по данной теме. Поэтому для успешной сдачи экзамена в форме ЕГЭ по математике необходимо увеличить количество часов за счет проведения факультативного курса по теме «Логарифмы».

Данная программа факультативного курса по теме «Логарифмы» предназначена для учащихся 10-11 классов. Курс рассчитан на 8 часов. Он ведется в рамках предмета «Алгебра и начала анализа» 10-11 классов общеобразовательной школы. Программа направлена на расширение учебного материала, представленного в обязательном минимуме содержания учебной программы курса математики, а также обеспечение учащимся подготовки к выполнению заданий данной темы в ЕГЭ.

Цель курса: систематизация, расширение и углубление знаний учащихся по теме «Логарифмы», подготовка к ЕГЭ по данной теме.

Задачи курса:

1) Рассмотреть и обобщить теоретический материал по теме «Логарифмы»;
2) Сформировать умения применять свойства логарифма числа и логарифмической функции при решении практических заданий;
3) Сформировать навыки решения логарифмических уравнений, неравенств и их систем.

В ходе обучения значительное место отводится практическим и самостоятельным работам учащихся.

Текущий контроль осуществляется в разных формах: устная, письменная, фронтальная.

Итоговый контроль – контрольная работа.

В результате изучения факультативного курса учащийся должен:

Знать:

- основные свойства логарифма числа и логарифмической функции;
- приемы и методы решения уравнений, неравенств и их систем.

Уметь:

- применять определение, свойства логарифма числа, свойства логарифмической функции к решению практических заданий.

Таблица 2

Тематический план программы факультативного курса

№ п/п	Наименование темы занятия	Количество часов
1	Логарифм числа и его свойства	1
2	Логарифмическая функция, ее свойства и график	1
3	Логарифмические уравнения и их системы	2
4	Логарифмические неравенства и их системы	2
5	Контрольная работа	2
Всего:		8

Содержание программы факультативного курса

1. Логарифм числа и его свойства (1 час)

Определение логарифма числа, основные свойства и формулы логарифма.

Практическая работа.

2. Логарифмическая функция, ее свойства и график (1 час)

Понятие логарифмической функции, свойства и график функции при $a > 1$, свойства и график функции при $0 < a < 1$, функция, обратная логарифмической.

Практическая работа.

3. Логарифмические уравнения и их системы (2 часа)

Определение логарифмического уравнения, методы решения логарифмического уравнения.

Практическая работа.

4. Логарифмические неравенства и их системы (2 часа)

Определение логарифмического неравенства, методы решения логарифмического неравенства.

Практическая работа.

5. Контрольная работа (2 часа)

План-конспект 3 занятия по теме «Логарифмические уравнения и их системы» представлен в Приложении 3.

§ 4. Апробация факультативных занятий

Апробация результатов исследования проводилась в период практики в МОУ «Тюбукская СОШ № 3» Каслинского района Челябинской области в 11 классе. Было разработано и проведено одно занятие (1 час) на тему: «Логарифмические уравнения и их системы» (см. Приложение 3).

Анализ результатов

Количество учащихся в классе: 15.

Количество присутствующих на занятии: 15.

Самостоятельную работу написали на:

- «отлично» – 3 человека.
- «хорошо» – 5 человек.
- «удовлетворительно» – 7 человек.
- «неудовлетворительно» – 0 человек.

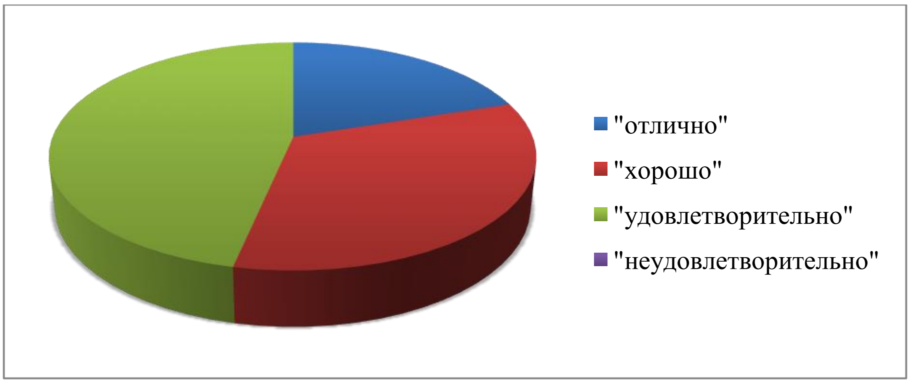


Рис 3. Результат выполнения самостоятельной работы

Таким образом, можно сделать вывод об успеваемости учащихся на данном занятии:

Абсолютная успеваемость: 100%.

Качественная успеваемость: 53, 3%.

Типичные ошибки при выполнении самостоятельной работы:

1) Неправильное нахождение ОДЗ (7 человек).
2) Неверное применение определения и свойств логарифмов (5 человек).
3) Вычислительные ошибки (3 человека).
4) Сложность в написании ответа (3 человека).

Вывод:

Во время занятия было выявлено, что большинство учащихся плохо усвоили тему на уроках и не помнили определения и свойств логарифмов, а также методов решения логарифмических уравнений. Это осложнило мою работу, которая заключалась в систематизации и обобщении методов решения логарифмических уравнений.

Также учащиеся не владеют математическим языком и неверно объясняют решение уравнений, хотя выполняют решение на доске правильно.

Самостоятельная работа показала, что занятие прошло эффективно: все учащиеся решили хотя бы одно уравнение из трех, т.е. не было неудовлетворительных оценок.

Выводы по главе 2.

Проведя анализ контрольно измерительных материалов ЕГЭ за 2011-2017 гг., мы выяснили, что на экзамене встречаются различные задания по теме «Логарифмы». И, в связи с их большим разнообразием и с недостатком времени на освоение данной темы в школьном курсе, учащимся не всегда легко справляются с заданиями в ЕГЭ.

Поэтому, для качественной подготовки учащихся к экзамену в форме ЕГЭ по математике, нами были разработаны тестовые задания, которые позволяют обнаружить имеющиеся пробелы в знаниях у учащихся по теме «Логарифмы», ликвидировать эти пробелы, а также помогает подготовиться к сдаче ЕГЭ, рассматривая различные задания. Данные тесты можно использовать на уроках или факультативах, как в обычных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Нами также был разработан факультативный курс по теме «Логарифмы» для 10-11 классов, который направлен на расширение учебного материала, представленного в обязательном минимуме содержания учебной программы курса математики, а также обеспечение учащимся подготовки к выполнению заданий данной темы в ЕГЭ. Одно занятие было проведено в МОУ «Тюбукская СОШ № 3» Каслинского района Челябинской области в 11 классе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении нашей работы еще раз отметим, что ЕГЭ по математике содержит задания на различные темы школьного курса, одной из таких тем является тема «Логарифмы». Как правило, данная тема вызывает у учащихся трудности при изучении.

Проведенный нами анализ материалов ЕГЭ по математике за период с 2011 по 2014 годы показал, что задания на тему «Логарифмы» встречаются как в первой части, так и во второй. А за период с 2015 по 2017 годы – встречаются и в базовом и в профильном уровнях, в последнем в обеих частях. Здесь представлены следующие задания: найти значение выражения; найти корни уравнения, найти наибольшее (наименьшее) значение функции (на промежутке); найти точку максимума (минимума) функции; решить уравнение (неравенство); решить систему уравнений (неравенств).

Но проанализировав современные учебники 10-11 классов по изучению темы «Логарифмы», мы пришли к выводу, что не во всех учебниках достаточное количество заданий для закрепления темы, а так же мало заданий повышенной сложности, которые встречаются во второй части экзамена (профильный уровень). И в связи с большим разнообразием и сложностью заданий, встречающихся в ЕГЭ по математике, а также с недостатком времени на освоение данной темы в школьном курсе, учащимся не всегда легко справляться с этими заданиями.

Поэтому, для качественной подготовки учащихся к экзамену в форме ЕГЭ по математике, нами были разработаны тестовые задания, содержащие три теста: тест 1 включает задания на вычисление и преобразование логарифмических выражений на основе определения логарифма числа, основных свойств и формул; тест 2 и тест 3 – логарифмические уравнения и неравенства. В каждом тесте задания разбиты на три части по уровню сложности. Это позволяет обнаружить имеющиеся пробелы в знаниях у учащихся по данной теме, ликвидировать эти пробелы, а также помогает подготовиться к сдаче ЕГЭ, рассматривая различные задания. Данные тесты можно использовать на уроках или факультативах, как в обычных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Нами также был разработан факультативный курс по теме «Логарифмы» для 10-11 классов, который направлен на расширение учебного материала, представленного в обязательном минимуме содержания учебной программы курса математики, а также обеспечение учащимся подготовки к выполнению заданий данной темы в ЕГЭ. Апробация факультативных занятий проводилась нами в МОУ «Тюбукская СОШ № 3» Каслинского района Челябинской области в 11 классе.

Таким образом, задачи решены в полном объеме, цель достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – М. : Просвещение, 2015. – 384 с.

2) Байдак, В.А. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография/ В. А. Байдак. — 3-е изд,, стереотип. — М. : ФЛИНТА, 2016. – 264 с.

3) ЕГЭ 2017. Математика. Базовый уровень. 10 вариантов типовых тестовых заданий/ А.В. Андропов, А.В. Забелин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 56 с.

4) ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. Типовые тестовые задания/ И.В. Ященко, М. А. Волчкевич и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 55 с.

5) Математика. Сборник задач по углублённому курсу. Учебно-методическое пособие / под ред. М. В. Федотова. – 3-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 329 с.

6) Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2013. – 287 с.

7) Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) /под ред. А. Г. Мордковича. 3-е изд., стер.– М. : Мнемозина, 2013. – 264 с.

8) Никольский, С. М. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н.Н. Решетников, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2009. – 383 с.

9) Педагогика: Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / под ред. П.И. Пидкасистого. – М: Педагогическое общество России, 1998. – 640 с.

10) Сборник задач по алгебре. Часть 2. Иррациональные, тригонометрические, логарифмические уравнения и неравенства. Прогрессии. В помощь учащимся 10–11-х классов/ О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, С.А. Гришин, Н.В. Мирошин, Р.Р. Резванов. – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 160 с.

11) Харламов, И. Ф. Педагогика: Учебник/ И. Ф. Харламов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.

12) Демонстрационные варианты КИМ ЕГЭ 2012 [Электронный ресурс] / Официальный информационный портал единого государственного экзамена. – Режим доступа: http://ege.edu.ru/main/demovers.

13) Единый государственный экзамен [Электронный ресурс] / Российское образование. Федеральный портал. – Режим доступа: http://www.edu.ru/

14) Единый государственный экзамен по математике, 2011 год [Электронный ресурс] / Компания «Ваш репетитор». – Режим доступа: http://repetitors.info/library.php?ege_math_2011

15) КИМы к ЕГЭ [Электронный ресурс]/ Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ. – Режим доступа: http://егэша.рф/news/kim_ege13/2014-05-14-181

16) Материалы ЕГЭ [Электронный ресурс] / Математика. Репетитор. Ларин А.А. – Режим доступа: http://alexlarin.net/

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тест 3

Часть А

А1. Чему равно произведение корней уравнения $\log_3(\log_2(x^2 - 2)) = 1$?

1) 8 2) -8 3) -10 4) 10 5) 5

А2. Найдите корень уравнения $x + \log_3 5 = \log_3 5^x$.

1) $\log_5 \frac{5}{3}$ 2) $\log_3 \frac{5}{3}$ 3) $\log_{\frac{3}{5}} 3$ 4) $\log_{\frac{5}{3}} 5$ 5) $\log_{\frac{3}{5}} 5$

А3. Найдите решение неравенства $\lg x < \log_x 10$.

1) $(\frac{1}{10}; 10)$ 2) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (1; 10)$ 3) $\left(\frac{1}{10}; 1\right) \cup (1; 10)$ 4) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (10; \infty)$ 5) $\left(\frac{1}{10}; 1\right) \cup (10; \infty)$

А4. Чему равна сумма корней уравнения

$\log_3(5 - x + \log_2(4^x + 28)) = 2$?

1) $2 + \log_2 7$ 2) $1 + \log_2 7$ 3) $\log_2 7$ 4) $3 + \log_2 7$ 5) $1 + 2\log_2 7$

А5. Чему равна сумма целых решений неравенства

$\log_{2x-1} x \cdot \log_{\sqrt{x}} 5 \cdot \log_{25}(4x^2 - 4x + 1) - \log_x 9 \leq 0$?

1) 3 2) 5 3) 6 4) 0 5) 2

А6. Чему равна сумма корней уравнения $3^{\frac{\log_7(7x)-1}{\log_7 3}} + 5^{\log_{25}(x-1)} = 13$?

1) 27 2) 31 3) 17 4) 11 5) 10

А7. Чему равно среднее арифметическое уравнения

$(x^2 - 9x + 14) \cdot (\log_6(x^2 - 5x) - 1) \cdot (\log_5 x + 1) = 0$?

1) $\frac{71}{25}$ 2) $3{,}5$ 3) $6{,}5$ 4) $\frac{73}{25}$ 5) $4{,}5$

А8. При каких значениях параметра a уравнение

$(2x - a) \cdot (\log_7(3 - x)) \cdot \sqrt{x - a + 1} = 0$ имеет три корня?

1) $a < 2$ 2) $a < 4$ 3) $a < 6$ 4) $2 < a < 4$ 5) $4 < a < 6$

А9. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a x + x = 5$ имеет два корня?

1) $0 < a < 1$ 2) $a > 1$ 3) $1 < a < 2$ 4) $1 < a < 5$ 5) $a > 5$

A10. Найдите решение неравенства $\log_x \sqrt{5} + \log_{25} x > 1$.

1) $(-\infty; 5) \cup (5; \infty)$ 2) $(0; 5) \cup (5; \infty)$ 3) $(0; \infty)$ 4) $(5; \infty)$ 5) $(1; 5) \cup (5; \infty)$

A11. Чему равна сумма корней уравнения $x^{\log_5 4} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$?

1) 6 2) 26 3) 30 4) 126 5) 130

A12. Найдите решение неравенства

$\log_3 x^3 \cdot \log_3 x - 28 \cdot \log_3 x + 5^{\log_{\sqrt{5}} 3} \geq 0$.

1) $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ 2) $(0; 1) \cup [2; \infty)$ 3) $\left(0; \sqrt[3]{3}\right] \cup [3^9; \infty)$ 4) $(0; 3] \cup [27; \infty)$ 5) $\left(0; \sqrt[3]{3}\right] \cup [27; \infty)$

A13. При каких значениях параметра a уравнение

$\log_a(x^2 - x - 3a) = 2$ имеет два корня?

1) $a \in \left(-\infty; \frac{-3-2\sqrt{2}}{4}\right) \cup \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{4}; \infty\right)$ 2) $a \in \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{4}; \infty\right)$ 3) $a \in \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{4}; 1\right) \cup (1; \infty)$ 4) $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ 5) $a \in \left(\frac{-3-2\sqrt{2}}{4}; \frac{-3+2\sqrt{2}}{4}\right)$

A14. Найдите решение неравенства $(\log_x(2x + 3) - 2) \log_5 x > 0$.

1) $(0; 1) \cup (3; \infty)$ 2) $(0; 1) \cup (1; 3)$ 3) $(0; 1) \cup (9; \infty)$ 4) $(0; 1) \cup (1; 9)$ 5) $(0; 1) \cup (3; 9)$

A15. D_1, D_2, D_3 – области определения функций $f(x) = \log_{11} \frac{x^2+8x+7}{5-x}$,

$g(x) = \log_{11}(x^2 + 8x + 7) - \log_{11}(5 - x)$ и

$h(x) = \log_{11}(x + 7) + +\log_{11}(x + 1) - \log_{11}(5 - x)$ соответственно. Что из перечисленных верно для D_1, D_2, D_3?

1) $D_1 = D_2 = D_3$ 2) $D_1 = D_2 \subset D_3$ 3) $D_3 \subset D_1 = D_2$ 4) $D_3 \subset D_2 \subset D_1$ 5) $D_1 \subset D_2 = D_3$

Часть В.

В1. Чему равна сумма целых решений неравенства

$\log_{x-1}(10x - 10) > 3$?

B2. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2}(2-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x)=0$?

B3. Чему равна сумма целых решений неравенства $\frac{\log_2 x - x + 5}{\log_3 x - 1} \geq 0$?

B4. Сколько целых решений имеет неравенство

$(\log_2 x - 3)\cdot(\log_2(100-x)-5) > 0$?

B5. Наибольшее целое решение неравенства $\log_2(x-a) < a$, где a целое, равно 69. Сколько целых решений имеет неравенство?

Часть С.

С1. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{\log_3(15-x^2)}}{\log_3\sqrt{15-x^2}}}$.

С2. Решите неравенство

$|\log_{x-3} 4 - 2| + \sqrt{1-\lg 2x} + 1 \leq \cos^2(x^2-5x)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Тест 3

Часть А

А1. Чему равно произведение корней уравнения $\log_3(\log_2(x^2-2)) = 1$?

1) 8 2) -8 3) -10 4) 10 5) 5

Решение:

$\log_3(\log_2(x^2-2)) = 1$

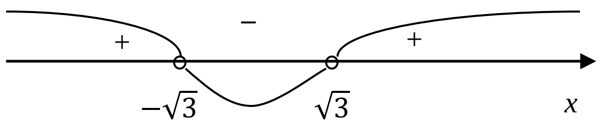
ОДЗ:

$\log_2(x^2-2) > 0$

$x^2-2 > 1$

$x^2-2 = 1$

$x = \pm\sqrt{3}$



$x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

$\log_3(\log_2(x^2-2)) = \log_3 3$

$\log_2(x^2-2) = 3$

$x^2-2 = 8$

$x = \pm\sqrt{10} \in \text{ОДЗ}$

$\sqrt{10}\cdot\left(-\sqrt{10}\right) = -10$

Ответ: 3) -10

А2. Найдите корень уравнения $x + \log_3 5 = \log_3 5^x$.

1) $\log_5 \frac{5}{3}$ 2) $\log_3 \frac{5}{3}$ 3) $\log_{\frac{3}{5}} 3$ 4) $\log_{\frac{5}{3}} 5$ 5) $\log_{\frac{3}{5}} 5$

Решение:

$x + \log_3 5 = \log_3 5^x$

$x \cdot 1 + \log_3 5 = \log_3 5^x$

$\log_3 3^x + \log_3 5 = \log_3 5^x$

$\log_3 5 = \log_3 5^x - \log_3 3^x$

$\log_3 5 = \log_3 \frac{5^x}{3^x}$

$\log_3 5 = x \cdot \log_3 \frac{5}{3}$

$x = \frac{\log_3 5}{\log_3 \frac{5}{3}}$

$x = \log_{\frac{5}{3}} 5$

Ответ: 4) $\log_{\frac{5}{3}} 5$

А3. Найдите решение неравенства $\lg x < \log_x 10$.

1) $\left(\frac{1}{10}; 10\right)$ 2) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (1; 10)$ 3) $\left(\frac{1}{10}; 1\right) \cup (1; 10)$
4) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (10; \infty)$ 5) $\left(\frac{1}{10}; 1\right) \cup (10; \infty)$

Решение:

$\lg x < \log_x 10$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$\lg x - \frac{1}{\lg x} < 0$

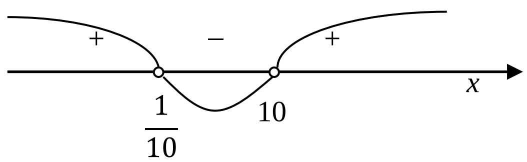
$\frac{\lg^2 x - 1}{\lg x} < 0$

1. $\begin{cases} \lg^2 x - 1 < 0, \\ \lg x > 0\,. \end{cases}$ $\begin{cases} (\lg x - 1)(\lg x + 1) < 0, \\ x > 1 \end{cases}$

$(\lg x - 1)(\lg x + 1) = 0$

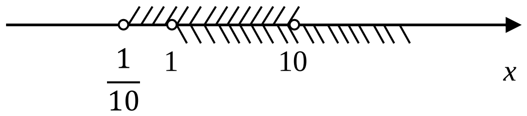
$\lg x = 1\,,$ $\lg x = -1$

$x = 10,$ $x = \frac{1}{10}$



$x \in \left(\frac{1}{10}; 10\right)$

Представим решение на числовой прямой:



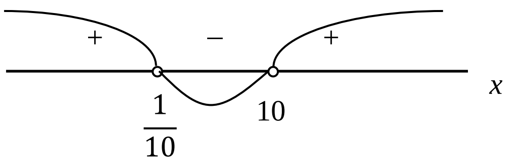
$x \in (1; 10) \in$ ОДЗ

2. $\begin{cases} \lg^2 x - 1 > 0, \\ \lg x < 0. \end{cases}$ $\begin{cases} (\lg x - 1)(\lg x + 1) > 0, \\ x < 1 \end{cases}$

$(\lg x - 1)(\lg x + 1) = 0$

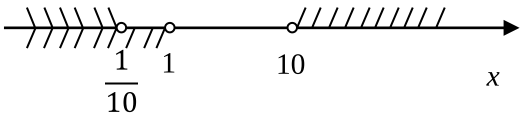
$\lg x = 1, \qquad \lg x = -1$

$x = 10, \qquad x = \frac{1}{10}$



$x \in \left(-\infty; \frac{1}{10}\right) \cup (10; +\infty)$

Представим решение на числовой прямой:



$x \in \left(-\infty; \frac{1}{10}\right)$

С учетом ОДЗ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{10}\right)$

Ответ: 2) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (1; 10)$

А4. Чему равна сумма корней уравнения

$\log_3(5 - x + \log_2(4^x + 28)) = 2$?

1) $2 + \log_2 7$ 2) $1 + \log_2 7$ 3) $\log_2 7$ 4) $3 + \log_2 7$ 5) $1 + 2\log_2 7$

Решение:

$\log_3(5 - x + \log_2(4^x + 28)) = 2$

ОДЗ:

$5 - x + \log_2(4^x + 28) > 0$

$\log_3(5 - x + \log_2(4^x + 28)) = \log_3 3^2$

$5 - x + \log_2(4^x + 28) = 9$

$\log_2(4^x + 28) = 4 + x$

$\log_2(4^x + 28) = \log_2 2^{4+x}$

$4^x + 28 = 2^{4+x}$

$2^{2x} - 2^4 \cdot 2^x + 28 = 0$

$2^{2x} - 16 \cdot 2^x + 28 = 0$

$2^x = t$

$t^2 - 16t + 28 = 0$

$t_1 = 14, \qquad t_2 = 2$

$2^x = 14$

$\log_2 2^x = \log_2 14$

$x = \log_2 2 + \log_2 7$

$x_1 = 1 + \log_2 7 \in$ ОДЗ

$2^x = 2$

$x_2 = 1 \in$ ОДЗ

$x_1 + x_2 = 1 + \log_2 7 + 1 = 2 + \log_2 7$

Ответ: 1) $2 + \log_2 7$

А5. Чему равна сумма целых решений неравенства

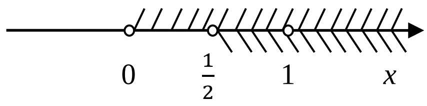
$\log_{2x-1} x \cdot \log_{\sqrt{x}} 5 \cdot \log_{25}(4x^2 - 4x + 1) - \log_x 9 \leq 0$?

1) 3 2) 5 3) 6 4) 0 5) 2

Решение:

$\log_{2x-1} x \cdot \log_{\sqrt{x}} 5 \cdot \log_{25}(4x^2 - 4x + 1) - \log_x 9 \leq 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ x \neq 1, \\ (2x-1)^2 > 0. \end{cases}$ => $\begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1. \end{cases}$



ОДЗ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1;\ +\infty)$

$\log_{2x-1} x \cdot 2\log_x 5 \cdot \frac{1}{2}\log_5(2x-1)^2 - \log_x 9 \leq 0$

$\log_{2x-1} 5 \cdot \log_5(2x-1)^2 - \log_x 9 \leq 0$

$\log_{2x-1}(2x-1)^2 - \log_x 9 \leq 0$

$2 - \log_x 9 \leq 0$

$\log_x 9 \geq 2$

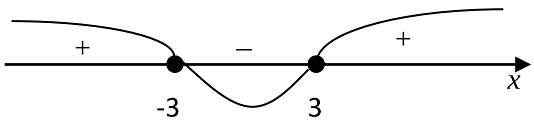
$\log_x 9 \geq \log_x x^2$

1. $x > 1$

$9 \geq x^2$

$x^2 - 9 \leq 0$

$x = \pm 3$



$x \in [-3; 3]$

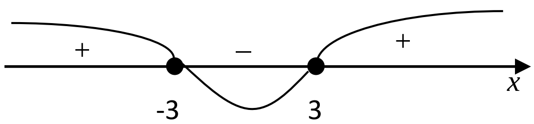
С учетом ОДЗ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 3]$

2. $0 < x < 1$

$9 \leq x^2$

$x^2 - 9 \geq 0$

$x = \pm 3$



$x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

С учетом ОДЗ корней нет.

2+3=5

Ответ: 2) 5

А6. Чему равна сумма корней уравнения $3^{\frac{\log_7(7x)-1}{\log_7 3}} + 5^{\log_{25}(x-1)} = 13$?

1) 27 2) 31 3) 17 4) 11 5) 10

Решение:

$$3^{\frac{\log_7(7x)-1}{\log_7 3}} + 5^{\log_{25}(x-1)} = 13$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1. \end{cases} \Rightarrow x > 1$

$$3^{\frac{1+\log_7 x-1}{\log_7 3}} + 5^{\frac{1}{2}\log_5(x-1)} = 13$$

$$3^{\log_3 x} + 5^{\frac{1}{2}\log_5(x-1)} = 13$$

$$x + \sqrt{x-1} - 13 = 0$$

$$\sqrt{x-1} = 13 - x$$

$$x - 1 = 169 - 26x + x^2$$

$$x^2 - 27x + 170 = 0$$

$$D = 49$$

$$x_1 = 17, \qquad x_2 = 10$$

Проверка:

$$17 + \sqrt{17-1} - 13 \neq 0$$

$x_1 = 17$ не является корнем уравнения.

$$10 + \sqrt{10-1} - 13 = 0$$

$x_2 = 10$ является корнем уравнения.

Сумма корней равна 10.

Ответ: 5) 10

А7. Чему равно среднее арифметическое уравнения

$(x^2 - 9x + 14) \cdot (\log_6(x^2 - 5x) - 1) \cdot (\log_5 x + 1) = 0$?

1) $\frac{71}{25}$ 2) 3,5 3) 6,5 4) $\frac{73}{25}$ 5) 4,5

Решение:

$(x^2-9x+14)\cdot(\log_6(x^2-5x)-1)\cdot(\log_5 x+1)=0$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-5x>0, \\ x>0. \end{cases} => x>5$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

1. $x^2-9x+14=0$

$x_1=7\ \in$ ОДЗ

$x_2=2\notin$ ОДЗ

2. $\log_6(x^2-5x)-1=0$

$\log_6(x^2-5x)=\log_6 6$

$x^2-5x=6$

$x^2-5x-6=0$

$x_1=6\in$ ОДЗ

$x_2=-1\notin$ ОДЗ

3. $\log_5 x+1=0$

$\log_5 x=\log_5 5^{-1}$

$x=\frac{1}{5}\notin$ ОДЗ

$\frac{7+6}{2}=6{,}5$

Ответ: 3) 6,5

А8. При каких значениях параметра a уравнение

$(2x-a)\cdot(\log_7(3-x))\cdot\sqrt{x-a+1}=0$ имеет три корня?

1) $a<2$ 2) $a<4$ 3) $a<6$ 4) $2<a<4$ 5) $4<a<6$

Решение:

$(2x-a)\cdot(\log_7(3-x))\cdot\sqrt{x-a+1}=0$

ОДЗ: $\begin{cases} 3-x>0, \\ x-a+1\geq 0. \end{cases} => \begin{cases} x<3, \\ x\geq a-1. \end{cases}$

$2x - a = 0$ или $\log_7(3 - x) = 0$ или $\sqrt{x - a + 1} = 0$

$x_1 = \frac{a}{2}$ $\quad 3 - x = 1$ $\quad x_3 = a - 1$

$x_2 = 2$

Найдем такие a, чтобы $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, т.е.

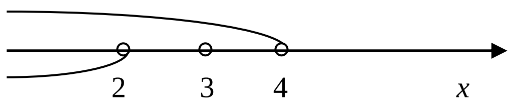
$\frac{a}{2} \neq 2$ $\quad a - 1 \neq 2$ $\quad \frac{a}{2} \neq a - 1$

$a \neq 4$ $\quad a \neq 3$ $\quad a \neq 2$

$\begin{cases} \frac{a}{2} < 3, \\ \frac{a}{2} \geq a - 1. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a - 1 < 3, \\ a - 1 \geq a - 1. \end{cases}$

$\begin{cases} a < 6, \\ a \leq 2. \end{cases}$ $\quad a < 4$

$a \leq 2$



Следовательно, уравнение имеет три корня при $a < 2$

Ответ: 1) $a < 2$

А9. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a x + x = 5$ имеет два корня?

1) $0 < a < 1$ 2) $a > 1$ 3) $1 < a < 2$ 4) $1 < a < 5$ 5) $a > 5$

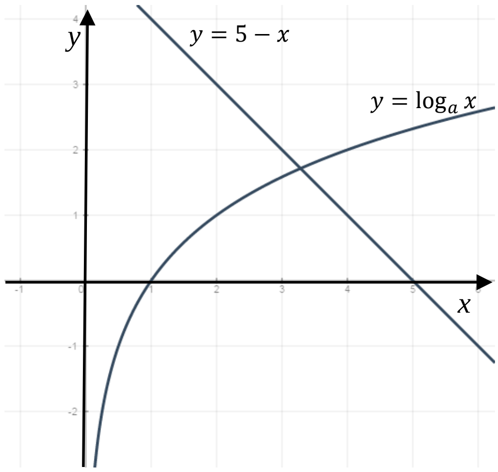
Решение:

$\log_a x + x = 5$
ОДЗ: $x > 0$

$\log_a x = 5 - x$

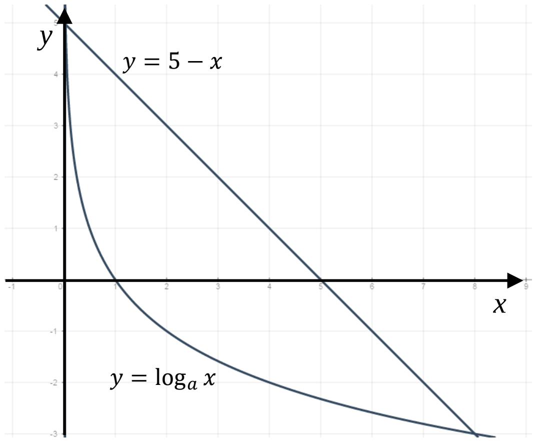
Решим уравнение графически.

1. $a > 1$



В данном случае уравнение имеет 1 корень.

2. $0 < a < 1$



В данном случае уравнение имеет 2 корня.

Ответ: 1) $0 < a < 1$

А10. Найдите решение неравенства $\log_x \sqrt{5} + \log_{25} x > 1$.

1) $(-\infty; 5) \cup (5; \infty)$ 2) $(0; 5) \cup (5; \infty)$ 3) $(0; \infty)$ 4) $(5; \infty)$ 5) $(1; 5) \cup (5; \infty)$

Решение:

$\log_x \sqrt{5} + \log_{25} x > 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \,. \end{cases}$

$$\frac{1}{2}\log_x 5 + \frac{1}{2}\log_5 x > 1$$

$$\log_x 5 + \log_5 x > 2$$

$$\log_x 5 + \frac{1}{\log_x 5} > 2$$

$$\frac{\log_x^2 5 + 1 - 2\log_x 5}{\log_x 5} > 0$$

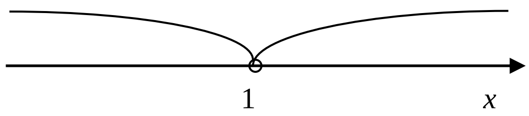
1. $x > 1$

$\log_x^2 5 - 2\log_x 5 + 1 > 0$

$\log_5 x = t$

$t^2 - 2t + 1 > 0$

$(t-1)^2 > 0$



$t \neq 1$

$\log_5 x \neq 1$

$x \neq 5$

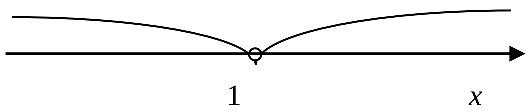
2. $0 < x < 1$

$\log_x^2 5 - 2\log_x 5 + 1 < 0$

$\log_5 x = t$

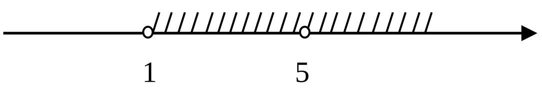
$t^2 - 2t + 1 < 0$

$(t-1)^2 < 0$



Решений нет.

Полученное решение из п.1 сводим с ОДЗ:



Ответ: 5) $(1; 5) \cup (5; \infty)$

A11. Чему равна сумма корней уравнения $x^{\log_5 4} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$?

1) 6 2) 26 3) 30 4) 126 5) 130

Решение:

$x^{\log_5 4} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$

$4^{\log_5 x} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$

$2^{2\log_5 x} - 9 \cdot 2^{\log_5 x} + 8 = 0$

$2^{\log_5 x} = t$

$t^2 - 9t + 8 = 0$

$t_1 = 8, \qquad t_2 = 1$

1. $2^{\log_5 x} = 8$

$2^{\log_5 x} = 2^3$

$\log_5 x = 3$

$\log_5 x = \log_5 5^3$

$x_1 = 125$

2. $2^{\log_5 x} = 1$

$\log_5 x = 0$

$\log_5 x = \log_5 1$

$x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = 125 + 1 = 126$

Ответ: 4) 126

А12. Найдите решение неравенства

$\log_3 x^3 \cdot \log_3 x - 28 \cdot \log_3 x + 5^{\log_{\sqrt{5}} 3} \geq 0.$

1) $(-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ 2) $(0; 1) \cup [2; \infty)$ 3) $\left(0; \sqrt[3]{3}\right] \cup [3^9; \infty)$ 4) $(0; 3] \cup [27; \infty)$ 5) $\left(0; \sqrt[3]{3}\right] \cup [27; \infty)$

Решение:

$\log_3 x^3 \cdot \log_3 x - 28 \cdot \log_3 x + 5^{\log_{\sqrt{5}} 3} \geq 0$

ОДЗ: $x > 0$

$3 \log_3^2 x - 28 \log_3 x + 5^{2\log_5 3} \geq 0$

$3 \log_3^2 x - 28 \log_3 x + 9 \geq 0$

$\log_3 x = t$

$3t^2 - 28t + 9 = 0$

$\mathrm{D} = 676$

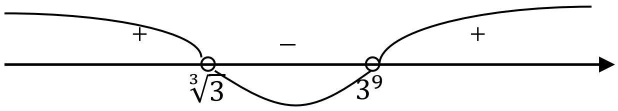
$t_1 = 9, \qquad t_2 = \frac{1}{3}$

1. $\log_3 x = 9$

$x = 3^9$

2. $\log_3 x = \frac{1}{3}$

$x = \sqrt[3]{3}$



$x \in \left(-\infty; \sqrt[3]{3}\right] \cup [3^9; \infty)$

С учетом ОДЗ: $x \in \left(0; \sqrt[3]{3}\right] \cup [3^9; \infty)$

Ответ: 3) $\left(0; \sqrt[3]{3}\right] \cup [3^9; \infty)$

А13. При каких значениях параметра a уравнение $\log_a(x^2 - x - 3a) = 2$ имеет два корня?

1) $a \in \left(-\infty; \frac{-3-2\sqrt{2}}{4}\right) \cup (\frac{-3+2\sqrt{2}}{4}; \infty)$

2) $a \in \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{4}; \infty\right)$

3) $a \in \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{4}; 1\right) \cup (1; \infty)$

4) $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

5) $a \in (\frac{-3-2\sqrt{2}}{4}; \frac{-3+2\sqrt{2}}{4})$

Решение:

$\log_a(x^2 - x - 3a) = 2$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x - 3a > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$

$x^2 - x - 3a = a^2$

$x^2 - x - (a^2 + 3a) = 0$

Уравнение имеет два корня, если $D > 0$.

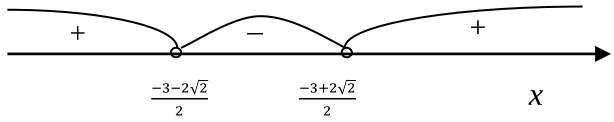
$D = 1 + 4(a^2 + 3a) = 4a^2 + 12a + 1 > 0$

$4a^2 + 12a + 1 > 0$

$4a^2 + 12a + 1 = 0$

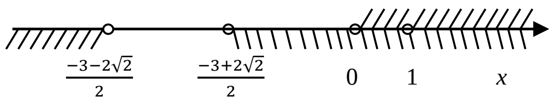
$D = 128$

$$a_{1,2} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{2}}{8} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$



$\left(-\infty; \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$

Выясним, какие из решений неравенства удовлетворяют области определения:



$a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$

Ответ: 4) $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$

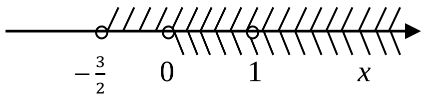
А14. Найдите решение неравенства $(\log_x(2x+3) - 2)\log_5 x > 0$.

1) $(0; 1) \cup (3; \infty)$ 2) $(0; 1) \cup (1; 3)$ 3) $(0; 1) \cup (9; \infty)$ 4) $(0; 1) \cup (1; 9)$ 5) $(0; 1) \cup (3; 9)$

Решение:

$(\log_x(2x+3) - 2)\log_5 x > 0$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{3}{2}, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$



ОДЗ: $(0; 1) \cup (1; +\infty)$

1. $\begin{cases} \log_x(2x+3) - 2 > 0, \\ \log_5 x > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x(2x+3) > \log_x x^2, \\ \log_5 x > \log_5 1. \end{cases} \Rightarrow$

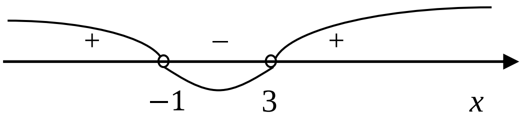
$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3 > x^2, \\ x > 1. \end{cases}$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = 16$

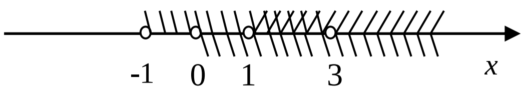
$x_1 = -1,\ x_2 = 3$



$x \in (-1; 3)$

$\begin{cases} -1 < x < 3, \\ x > 1. \end{cases}$

Сводим с ОДЗ:



$x \in (1; 3)$

2. $\begin{cases} \log_x(2x+3) - 2 < 0, \\ \log_5 x < 0. \end{cases}$ => $\begin{cases} \log_x(2x+3) < \log_x x^2, \\ \log_5 x < \log_5 1. \end{cases}$ =>

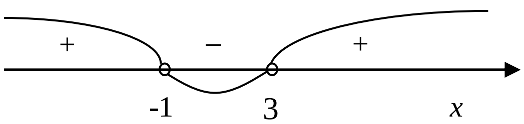
=> $\begin{cases} 2x+3 < x^2, \\ x < 1. \end{cases}$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = 16$

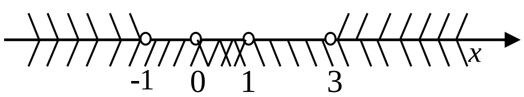
$x_1 = -1,\ x_2 = 3$



$x \in (-\infty;\ -1) \cup (3;\ +\infty)$

$\begin{cases} x < -1, x > 3, \\ x > 1. \end{cases}$

Сводим с ОДЗ:



$x \in (0; 1)$

Ответ: 2) $(0; 1) \cup (1; 3)$

А15. D_1, D_2, D_3 – области определения функций $f(x) = \log_{11} \frac{x^2+8x+7}{5-x}$,

$g(x) = \log_{11}(x^2 + 8x + 7) - \log_{11}(5 - x)$ и $h(x) = \log_{11}(x + 7) +$ $+\log_{11}(x + 1) - \log_{11}(5 - x)$ соответственно. Что из перечисленных верно для D_1, D_2, D_3?

1) $D_1 = D_2 = D_3$ 2) $D_1 = D_2 \subset D_3$ 3) $D_3 \subset D_1 = D_2$ 4) $D_3 \subset D_2 \subset D_1$ 5) $D_1 \subset D_2 = D_3$

Решение:

$f(x) = \log_{11} \frac{x^2 + 8x + 7}{5 - x}$,

D_1: $\frac{x^2 + 8x + 7}{5 - x} > 0$

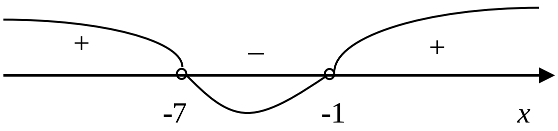
1. $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 > 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases}$

$x^2 + 8x + 7 > 0$

$x^2 + 8x + 7 = 0$

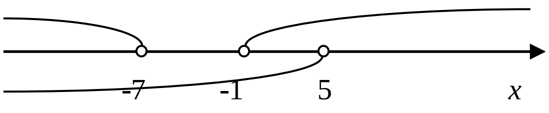
$(x + 1)(x + 7) = 0$

$x_1 = -1, \quad x_2 = -7$



$x < -7, x > -1$

Представим решение системы на числовой прямой:



$x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 5)$

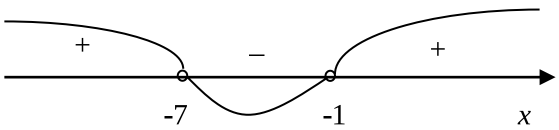
2. $\begin{cases} x^2 + 8x + 7 < 0, \\ 5 - x < 0. \end{cases}$

$x^2 + 8x + 7 > 0$

$x^2 + 8x + 7 = 0$

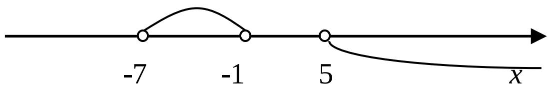
$(x + 1)(x + 7) = 0$

$x_1 = -1, \quad x_2 = -7$



$-7 < x < -1$

Представим решение системы на числовой прямой:



Решений нет.

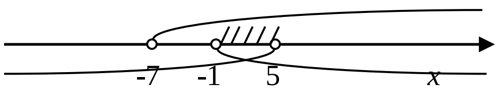
$D_1: (-\infty;\ -7) \cup (-1; 5)$
$g(x) = \log_{11}(x^2 + 8x + 7) - \log_{11}(5 - x)$

$D_2: \begin{cases} x^2 + 8x + 7 > 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases}$

Решение данной системы было найдено выше:

$D_2: (-\infty;\ -7) \cup (-1; 5)$
$h(x) = \log_{11}(x + 7) + \log_{11}(x + 1) - \log_{11}(5 - x)$

$D_3: \begin{cases} x + 7 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ 5 - x > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -7, \\ x > -1, \\ x < 5. \end{cases}$



$D_3: (-1; 5)$

Таким образом, имеем:

$D_1: (-\infty;\ -7) \cup (-1; 5)$

$D_2: (-\infty;\ -7) \cup (-1; 5)$

$D_3: (-1; 5)$

Т. е., $D_3 \subset D_1 = D_2$

Ответ: 3) $\mathrm{D}_3 \subset \mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2$

Часть В.

В1. Чему равна сумма целых решений неравенства $\log_{x-1}(10x - 10) > 3$?

Решение:

$\log_{x-1}(10x-10) > 3$

1. $\begin{cases} 10x-10>0, \\ x-1>1, \\ 10x-10>(x-1)^3. \end{cases}$ $\begin{cases} 10x>10, \\ x>2, \\ 10x-10>x^3-3x^2+3x-1. \end{cases}$

$\begin{cases} x>1, \\ x>2, \\ -x^3+3x^2+7x-9>0. \end{cases}$

$-x^3+3x^2+7x-9=0$

$x_1 = 1$ – корень уравнения (среди делителей свободного члена).

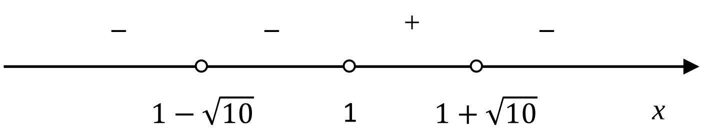
$(x-1)(-x^2+2x+9)=0$

$x^2-2x-9=0$

$D=40$

$x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{10}}{2} = 1+\sqrt{10}$

$x_3 = 1-\sqrt{10}$



$x \in (1; 1+\sqrt{10})$

С учетом ОДЗ: $x \in (2; 1+\sqrt{10})$

2. $\begin{cases} 10x-10>0, \\ 0<x-1<1, \\ 10x-10<(x-1)^3. \end{cases}$ $\begin{cases} 10x>10, \\ 0<x<2 \\ 10x-10<x^3-3x^2+3x-1. \end{cases}$

$\begin{cases} x>1, \\ 0<x<2, \\ -x^3+3x^2+7x-9<0. \end{cases}$

$-x^3+3x^2+7x-9=0$

$x_1 = 1$ – корень уравнения (среди делителей свободного члена).

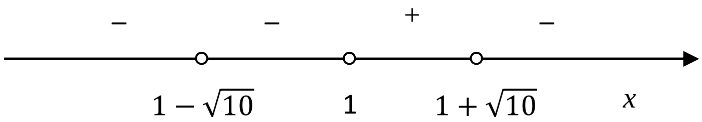
$(x-1)(-x^2+2x+9)=0$

$x^2-2x-9=0$

$D=40$

$x_2=\frac{2+2\sqrt{10}}{2}=1+\sqrt{10}$

$x_3=1-\sqrt{10}$



$x\in\left(-\infty;1-\sqrt{10}\right)\cup(1-\sqrt{10};1)\cup(1+\sqrt{10};\infty)$

С учетом ОДЗ: корней нет.

Целые решения: 3 и 4

3+4=7

Ответ: 7

B2. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2}(2-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x)=0$?

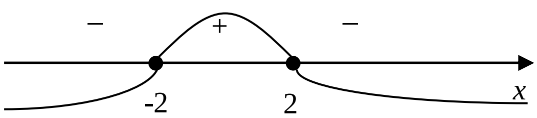
Решение:

$\sqrt{4-x^2}(2-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x)=0$

ОДЗ: $\begin{cases}4-x^2\geq 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$ $\begin{cases}-2\leq x\leq 2,\\ 2\pi k<x<\pi+2\pi k, k\in Z.\end{cases}$

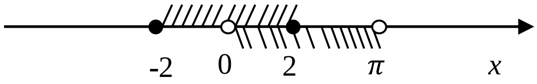
$4-x^2=0$

$x=\pm 2$



$x\in[-2;2]$

Сводим ОДЗ:



ОДЗ: $(0;2]$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

1. $\sqrt{4-x^2}=0$

$4-x^2=0$

$x_1=2\in$ ОДЗ

$x_2=-2\notin$ ОДЗ

2. $2-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x=0$

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x=2$

$-2\log_2\sin x=2$

$\log_2\sin x=-1$

$\log_2\sin x=\log_2 2^{-1}$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$

$x=(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k$

$k=0,\qquad x=\dfrac{\pi}{6}\in$ ОДЗ

$k=1,\qquad x=\dfrac{5\pi}{6}\notin$ ОДЗ

$k=-1,\qquad x=-\dfrac{7\pi}{6}\notin$ ОДЗ

Уравнение имеет 2 корня.

Ответ: 2

В3. Чему равна сумма целых решений неравенства $\frac{\log_2 x-x+5}{\log_3 x-1}\geq 0$?

Решение:

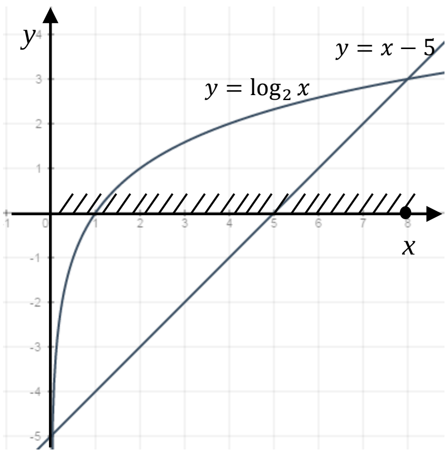
$\frac{\log_2 x-x+5}{\log_3 x-1}\geq 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x - 1 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$

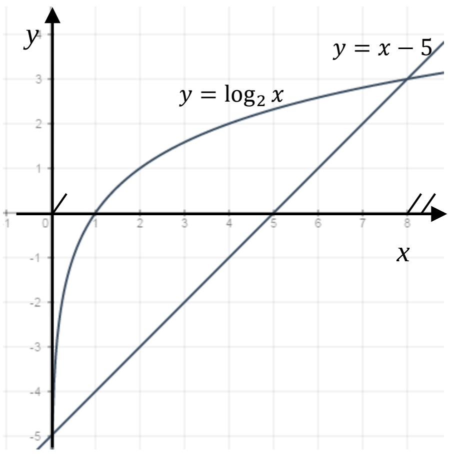
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x - x + 5 \geq 0, \\ \log_3 x - 1 > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x - x + 5 < 0, \\ \log_3 x - 1 < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x \geq x - 5, \\ \log_3 x > 1. \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x < x - 5, \\ \log_3 x < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первое неравенство каждой системы – графически:

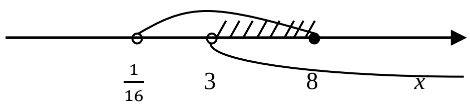
$\log_2 x \geq x - 5$

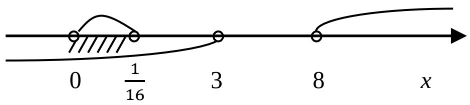


$\log_2 x < x - 5$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{16} < x \leq 8, \\ x > 3. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{16}, \\ x > 8, \\ x < 3. \end{cases} \end{array}\right.$$





$x \in (0; \frac{1}{16}) \cup (3; 8]$

Целые решения: 4, 5, 6, 7, 8.

$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$

Ответ: 30

В4. Сколько целых решений имеет неравенство

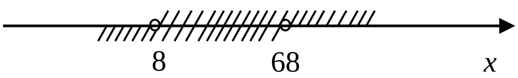
$(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2(100 - x) - 5) > 0$?

Решение:

$(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2(100 - x) - 5) > 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 100 - x > 0. \end{cases}$ => $\begin{cases} x > 0, \\ x < 100. \end{cases}$

1. $\begin{cases} \log_2 x - 3 > 0, \\ \log_2(100 - x) - 5 > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x > \log_2 2^3, \\ \log_2(100 - x) > \log_2 2^5. \end{cases}$ $\begin{cases} x > 8, \\ x < 68. \end{cases}$



Неравенство имеет 59 целых решений.

2. $\begin{cases} \log_2 x - 3 < 0, \\ \log_2(100 - x) - 5 < 0. \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x < \log_2 2^3, \\ \log_2(100 - x) < \log_2 2^5. \end{cases}$ $\begin{cases} x < 8, \\ x > 68. \end{cases}$

Нет решений.

Ответ: 59.

В5. Наибольшее целое решение неравенства $\log_2(x - a) < a$, где a целое, равно 69. Сколько целых решений имеет неравенство?

Решение:

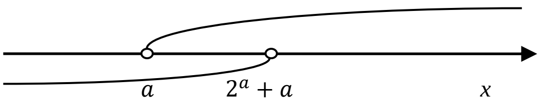
$\log_2(x - a) < a$

ОДЗ: $x > a$

$x - a < 2^a$

$x < a + 2^a$

С учетом ОДЗ:



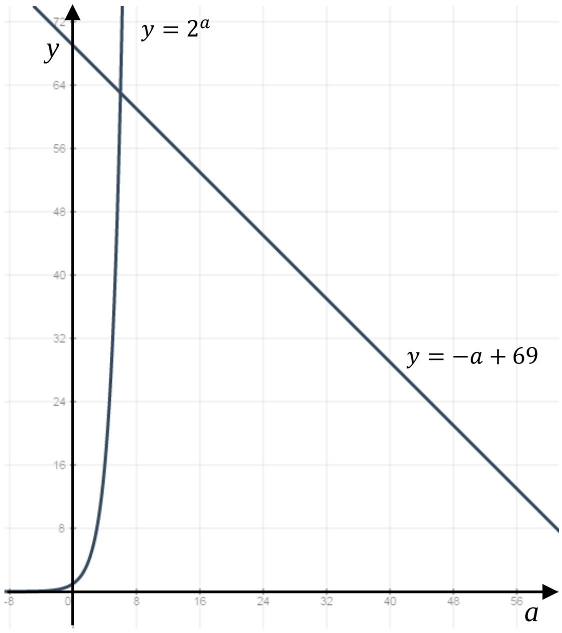
$x \in (a; 2^a + a)$

Наибольшее целое решение неравенства равно 69, следовательно,

$2^a + a \geq 69$

$2^a = -a + 69$

$y_1 = 2^a, y_2 = -a + 69$



Уравнение имеет 1 решение.

Находим корень методом подбора: $a = 6$

$2^6 \geq -6 + 69$

$64 \geq 63$ – выполняется

$x \in (6; 69]$

Ответ: Неравенство имеет 63 целых решения.

Часть С.

С1. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\log_3(15-x^2)}}{\log_3\sqrt{15-x^2}}}$.

Решение:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\log_3(15-x^2)}}{\log_3\sqrt{15-x^2}}}$$

$$D(f): \frac{\sqrt{\log_3(15-x^2)}}{\log_3\sqrt{15-x^2}} \geq 0$$

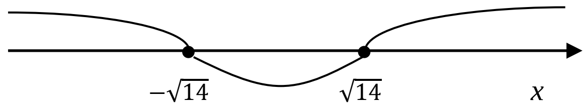
$$\begin{cases} \log_3(15-x^2) \geq 0, \\ \log_3\sqrt{15-x^2} > 0, \\ 15-x^2 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15-x^2 \geq 1, \\ \sqrt{15-x^2} > 1, \\ x^2 - 15 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 14 \leq 0, \\ x^2 - 14 < 0, \\ x^2 - 15 < 0. \end{cases}$$

$x^2 - 14 \leq 0$

$x^2 - 14 = 0$

$(x - \sqrt{14})(x + \sqrt{14}) = 0$

$x_1 = \sqrt{14},\ x_2 = -\sqrt{14}$



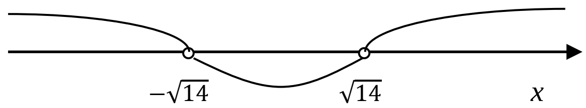
$x \in [-\sqrt{14};\ \sqrt{14}]$

$x^2 - 14 < 0$

$x^2 - 14 = 0$

$(x - \sqrt{14})(x + \sqrt{14}) = 0$

$x_1 = \sqrt{14},\ x_2 = -\sqrt{14}$



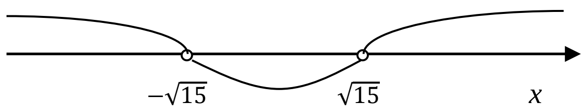
$x \in (-\sqrt{14};\ \sqrt{14})$

$x^2 - 15 < 0$

$x^2 - 15 = 0$

$(x - \sqrt{15})(x + \sqrt{15}) = 0$

$x_1 = \sqrt{15}, \qquad x_2 = -\sqrt{15}$



$x \in (-\sqrt{14};\ \sqrt{14})$

$$\begin{cases} -\sqrt{14} \le x \le \sqrt{14}, \\ -\sqrt{14} < x < \sqrt{14}, \\ -\sqrt{15} < x < \sqrt{15}. \end{cases}$$

$D(f)\colon x \in (-\sqrt{14}; \sqrt{14})$

Ответ: $(-\sqrt{14}; \sqrt{14})$

C2. Решите неравенство

$|\log_{x-3} 4 - 2| + \sqrt{1 - \lg 2x} + 1 \le \cos^2(x^2 - 5x).$

Решение:

$|\log_{x-3} 4 - 2| + \sqrt{1 - \lg 2x} + 1 \leq \cos^2(x^2 - 5x)$

Оценим обе части неравенства.

Значение модуля и квадратного корня неотрицательны:

$|\log_{x-3} 4 - 2| \geq 0$

$\sqrt{1 - \lg 2x} \geq 0$

Значит левая часть неравенства:

$|\log_{x-3} 4 - 2| + \sqrt{1 - \lg 2x} + 1 \geq 1$

В правой части:

$0 \leq \cos^2(x^2 - 5x) \leq 1$

Т.о., неравенство обращается в равенство:

$|\log_{x-3} 4 - 2| + \sqrt{1 - \lg 2x} + 1 = \cos^2(x^2 - 5x)$

И обе части равенства равны 1, следовательно, модуль и квадратный корень в левой части равны 0:

$$\begin{cases} |\log_{x-3} 4 - 2| = 0, \\ \sqrt{1 - \lg 2x} = 0, \\ \cos^2(x^2 - 5x) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{x-3} 4 - 2 = 0, \\ 1 - \lg 2x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos(x^2 - 5x) = 1, \\ \cos(x^2 - 5x) = -1. \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = (x-3)^2, \\ 2x = 10, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 2\pi k, \\ x^2 - 5x = \pi + 2\pi k. \end{array} \right. k \in Z \end{cases}$$

$(x-3)^2 = 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 5$

$2x = 10$

$x = 5$

Т.е., если $x = 5$ удовлетворяет хотя бы одному уравнению совокупности, то $x = 5$ – решение системы, следовательно, решение неравенства.

В противном случае система (и неравенство) решения не имеют.

$x^2 - 5x = 2\pi k$

$5^2 - 5 \cdot 5 = 2\pi k$

$0 = 2\pi k => k = 0$

Значит, $\mathrm{x} = 5$ является решением системы уравнений, а следовательно, и решением изначального неравенства.

Ответ: $x = 5$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

План-конспект 3 занятия.

Тема: «Логарифмические уравнения и их системы».

Цель: Обобщить и систематизировать знания учащихся по данной теме.

Задачи:

1) *Образовательная:* систематизировать знания по теме «Логарифмические уравнения и их системы»; закрепить основные приемы и методы решения логарифмических уравнений; ознакомить учащихся с видами заданий повышенной сложности по данной теме в ЕГЭ.
2) *Развивающая:* развитие логического мышления для сознательного восприятия учебного материала, внимание, зрительную память, активность учащихся. Предоставить каждому из учащихся проверить свой уровень подготовки по данной теме.
3) *Воспитательная:* воспитание познавательной активности, формирование личностных качеств: точность и ясность словесного выражения мысли; сосредоточенность и внимание.

Продолжительность: 45 минут.

Структура факультативного занятия:

1) Организационный момент (1 минута)
2) Повторение теоретического материала (9 минут)
3) Решение практических заданий (22 минуты)
4) Самостоятельная работа обучающего характера (10 минут)
5) Информация о домашнем задании (1 минута)
6) Подведение итогов занятия (2 минуты)

Ход занятия

I. Организационный момент.

Приветствие. Проверка готовности учащихся к занятию.

II. Повторение теоретического материала.

Вспомним основные виды и методы решения логарифмических уравнений.

Рассмотрим ***простейшее логарифмическое уравнение:***

$\log_a x = b$ (где $a > 0, a \neq 1$). Так как логарифмическая функция возрастает (или убывает) на множестве положительных чисел и принимает все действительные значения, то по теореме о корне следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение, причем положительное.

Вспомните определение логарифма. (*Логарифм числа x по основанию a – это показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число* x). Из определения логарифма сразу следует, что a^b является таким решением.

Методы решения логарифмических уравнений:

1) **По определению логарифма**.

Так решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

$$\log_a x = b \;<=>\; x = a^b$$

2) **Потенцирование**.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их т.е.

$\log_a f(x) = \log_a g(x) => f(x) = g(x)$, если

$f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1$.

В общем виде **переходим к равносильной системе**:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) <=> \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

3) **Введение новой переменной**.

Например, уравнения квадратного вида $\log_a^2 x + \log_a x + c = 0$ решается путем введения новой переменной и переходом к обычному квадратному уравнению ($\log_a x = t => t^2 + t + c = 0$).

4) **Логарифмирование обеих частей уравнения.**

Уравнения вида $a^x = b$. Решаются логарифмированием обеих частей по основанию a: $\log_a a^x = \log_a b => x = \log_a b$.

5) **Приведение к одному основанию.**

Например, уравнения вида $\log_a x = \log_b x$

6) **Функционально-графический метод.**

Например, уравнения вида $\log_a x = c - x$ решаются путем построения двух графиков функций $y = \log_a x$ и $y = c - x$ в одной системе координат и нахождением абсциссы точек пересечения графиков.

Есть способ, позволяющий не строить графики. Он заключается в следующем: если одна из функций $y = f(x)$ возрастает, а другая $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X.

Если корень имеется, то его можно угадать.

7) **Уравнения, решаемые с помощью применения свойств логарифма.**

III. Решение практических заданий.

Учащимся раздаются карточки с заданиями:

1. Решите уравнение $\log_{x+2}(1-2x) = 2$.
2. Чему равно произведение корней уравнения $\log_5(\log_3(x-1)^{10}) = 1$?
3. Найдите корень уравнения $x + \log_3 5 = \log_3 5^x$.
4. Чему равна сумма корней уравнения $x^{\log_5 4} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$?
5. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2}(2 - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin x) = 0$?

Разбирается каждое уравнение на доске. Ученики по очереди вызываются к доске.

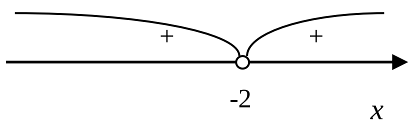
Решение уравнений:

1. $\log_{x+2}(1-2x)=2$

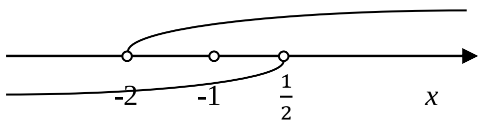
ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\neq 1, \\ 1-2x>0, \\ (x+2)^2>0. \end{cases}$ => $\begin{cases} x>-2, \\ x\neq -1, \\ x<\frac{1}{2}, \\ x\neq -2. \end{cases}$

$(x+2)^2>0$

$(x+2)^2=0$



Сводим ОДЗ:



ОДЗ: $(-2;-1)\cup\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$

$\log_{x+2}(1-2x)=\log_{x+2}(x+2)^2$

$1-2x=x^2+4x+4$

$x^2+6x+3=0$

D = 24

$x_1=\frac{-6+\sqrt{24}}{2}=-3+\sqrt{6}\in$ ОДЗ

$x_2=\frac{-6-\sqrt{24}}{2}=-3-\sqrt{6}\notin$ ОДЗ

Ответ: $-3+\sqrt{6}$

2. $\log_5(\log_3(x-1)^{10})=1$

ОДЗ: $\log_3(x-1)^{10}>0$

$\log_5(\log_3(x-1)^{10})=\log_5 5$

$\log_3(x-1)^{10}=5$

$10\cdot\log_3(x-1)=5$

$2 \cdot \log_3(x-1) = 1$

$\log_3(x-1)^2 = \log_3 3$

$x^2 - 2x + 1 = 3$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

D = 12

$x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \; \in \text{ОДЗ}$

$x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} \; \in \text{ОДЗ}$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$

Ответ: -2

3. $x + \log_3 5 = \log_3 5^x$

$x \cdot 1 + \log_3 5 = \log_3 5^x$

$\log_3 3^x + \log_3 5 = \log_3 5^x$

$\log_3 5 = \log_3 5^x - \log_3 3^x$

$\log_3 5 = \log_3 \frac{5^x}{3^x}$

$\log_3 5 = x \cdot \log_3 \frac{5}{3}$

$x = \frac{\log_3 5}{\log_3 \frac{5}{3}}$

$x = \log_{\frac{5}{3}} 5$

Ответ: $\log_{\frac{5}{3}} 5$

4. $x^{\log_5 4} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$

$4^{\log_5 x} + 8 = 9 \cdot 2^{\log_5 x}$

$2^{2\log_5 x} - 9 \cdot 2^{\log_5 x} + 8 = 0$

$2^{\log_5 x} = t$

$t^2 - 9t + 8 = 0$

$t_1 = 8, \qquad t_2 = 1$

1) $2^{\log_5 x} = 8$

$2^{\log_5 x} = 2^3$

$\log_5 x = 3$

$\log_5 x = \log_5 5^3$

$x_1 = 125$

2) $2^{\log_5 x} = 1$

$\log_5 x = 0$

$\log_5 x = \log_5 1$

$x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = 125 + 1 = 126$

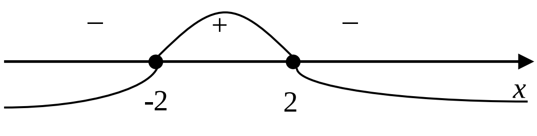
Ответ: 126

5. $\sqrt{4 - x^2}(2 - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin x) = 0$

ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$

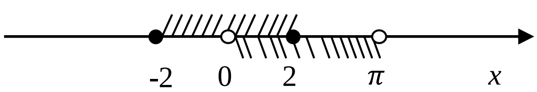
$4 - x^2 = 0$

$x = \pm 2$



$x \in [-2; 2]$

Сводим ОДЗ:



ОДЗ: $(0; 2]$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

3. $\sqrt{4-x^2}=0$

$4-x^2=0$

$x_1=2\in$ ОДЗ

$x_2=-2\notin$ ОДЗ

4. $2-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x=0$

$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin x=2$

$-2\log_2\sin x=2$

$\log_2\sin x=-1$

$\log_2\sin x=\log_2 2^{-1}$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$

$k=0,\quad x=\frac{\pi}{6}\in$ ОДЗ

$k=1,\quad x=\frac{5\pi}{6}\notin$ ОДЗ

$k=-1,\quad x=-\frac{7\pi}{6}\notin$ ОДЗ

Уравнение имеет 2 корня.

Ответ: 2

IV. Самостоятельная работа обучающего характера.

Учащимся предлагается самостоятельно выполнить следующие задания на карточках:

1. Решите уравнение $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.
2. Чему равна сумма корней уравнения $\log_x 625 + \log_5 x = 5$?
3. Чему равна сумма корней уравнения $\sqrt{16-x^2}\log_{x+1}(3x-2) = 0$?

На работу дается 10 минут. После чего решение выводится на слайд и устно объясняется учителем. Т. о., каждый учащийся видит свои ошибки и метод решения каждого уравнения.

V. Информация о домашнем задании.

В качестве домашнего задания учащимся предлагаются карточки с логарифмическими уравнениями:

1. Чему равно произведение корней уравнения $\log_3(\log_2(x^2-2)) = 1$?
2. Чему равна сумма корней уравнения $\log_3(5 - x + \log_2(4^x + 28)) = 2$?
3. Чему равна сумма корней уравнения $3^{\frac{\log_7(7x)-1}{\log_7 3}} + 5^{\log_{25}(x-1)} = 13$?
4. Чему равно среднее арифметическое уравнения $(x^2 - 9x + 14)\cdot(\log_6(x^2-5x)-1)\cdot(\log_5 x + 1) = 0$?

VI. Подведение итогов занятия.

На слайд выводятся фразы:

1. Мне все понятно. Легко могу решать логарифмические уравнения!
2. Я могу решить не все логарифмические уравнения. Нужно еще потренироваться.
3. Мне с трудом удается решать логарифмические уравнения. Я плохо знаю материал.

Учитель зачитывает фразу и просит учащихся поднять руку, кто согласен с данной фразой относительно себя.