МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика проведения курса по выбору «Применение производной для решения задач повышенной трудности» для учащихся естественнонаучного профиля обучения

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.03.05

Педагогическое образование (два профиля подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения очная (дневная)

Проверка на объем заимствований:
76% авторского текста
Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована
« 25 » мая 2020 г.
и. о. зав. кафедрой ММОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513-204-5-1
Потапова Ксения Альбертовна

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук, доцент
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс «Применение производной для решения задач повышенной трудности» носит в работе естественнонаучный характер и способствует не только получению нового знания о человеке, природе и обществе, но и находит возможность для своего развития и в других науках.

Все мы знаем, что понятие производная функции используется при решении задач в математической дисциплине. Однако, применение этого понятия достаточно широко. Производная находит свое предназначение в физических задачах, химических, биологических и других. Большинство процессов, протекающих в таких науках как химия и биология достаточно трудно объяснить школьникам без помощи производной функции и методов ее решения.

Цель данной работы: теоретически обосновать и содержательно представить курс по выбору «Применение производной для решения задач повышенной трудности» для обучающихся 11 классов естественнонаучного профиля обучения.

Объектом исследования является процесс обучения математике в средней школе.

Предметом исследования выступает методика преподавания начал математического анализа обучающихся 11 классов естественнонаучного профиля.

Гипотеза данной работы: проведение курса по выбору «Применение производной для решения задач повышенной трудности» будет способствовать эффективности обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в продолжении образования.

Для достижения цели и проверки гипотезы, в работе ставились следующие задачи:

- проанализировать школьные учебники с точки зрения исследуемой проблемы,
- разработать структуру, содержание и методические рекомендации курса по выбору «Применение производной для решения задач повышенной трудности» для естественнонаучного профиля обучения,
- экспериментально проверить результаты исследования в практической деятельности.

Дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во введении обоснована актуальность выбора данной темы. В первой главе рассматривается содержание курсов по выбору и их психолого-педагогические особенности построения. Во второй главе проведен анализ учебно-методической литературы по теме «Применение производной для решения задач повышенной трудности» и разработано содержание курса по выбору для учащихся старшей школы.

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗРАБОТКИ КУРСОВ ПО ВЫБОРУ В УСЛОВИЯХ ПРОФИЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ

1.1 История возникновения и развития курсов по выбору в школе

Предметные курсы по выбору – это одна из форм дифференцированного
обучения. В истории курсов выделяются несколько следующих временных этапов:

- 1966-1980 годы,
- 1980-1988 годы,
- 1988-2002 годы,
- 2002-2012 годы,
- 2012 год – по настоящее время.

На первых трёх временных этапах курсы назывались факультативными и созданы были для углубленного получения знаний по гуманитарным и естественно-математическим наукам. Здесь учитывались индивидуальные способности обучающихся, их склонности и задатки. Таким образом, происходило формирование разносторонних интересов обучающихся [7].

В 1966 году 10 ноября опубликовали правительственное постановление "О мерах дополнительного улучшения работы средней общеобразовательной школы". В этом постановлении было отмечено, что при таком решении уровень образовательной работы в школе не удовлетворяется новыми, более строгими требованиями к качеству образования учащихся, и возникает социальная проблема, требующая срочно высококвалифицированного персонала. Одной из мер по ликвидации отставания была предложена такая важная для школы форма обучения, как факультативные курсы. Под факультативными курсами понимаются учебные курсы, в которых студенты учатся таким образом, чтобы они хотели углубить и расширить свои научные и теоретические знания. Факультативные занятия вводились с целью углубления знаний по физико-математическим, естественным и гуманитарным наукам, для развития многогранных интересов и способностей учащихся.

Таким образом, факультативные занятия явились формой дифференциации обучения, учитывающие индивидуальные склонности и способности учащихся [19].

Введение в школьную практику факультативных занятий способствовало решению многих насущных проблем, которые стояли перед школой, а именно:

- факультативные занятия приобрели такой же статус важности, как и занятия по обязательной программе;
- факультативные занятия заняли конкретное место и время в расписании каждой школы;
- факультативные занятия помогли многим школьникам определиться со своим жизненным и трудовым путем, расставить приоритеты и сделать выбор в сторону нужной профессии;
- факультативные занятия помогли учителям поднять уровень преподавания на более высокий теоретический уровень;
- работа учителя по проведению факультативных занятий встала на один уровень с проведением уроков, стала оплачиваться наравне (этот положительный моральный и материальный эффект способствовал повышению авторитета факультативных занятий).

В практику работы школы факультативные занятия вошли, начиная с 1967-1968 учебного года. В методике этот временной период считают началом первого из трех этапов введения факультативов по математике в школе. Первые факультативные курсы назывались «Дополнительные главы и вопросы математики» и «Специальные курсы». Их программы были опубликованы в журнале «Математика в школе».

Некоторые темы, например, «Метод координат», «Геометрические преобразования», «Производная», «Интеграл» и другие после успешной апробации на факультативных занятиях были включены в основной курс математики.

В течение следующего десятилетия (1966-1975 годы) факультативный курс по математике стал трактоваться как «Факультативный курс по единой общереспубликанской программе» («Единый Факультативный курс»). В 1975 году было издано «Положение о Факультативных занятиях в общеобразовательных школах РСФСР». В виду этого положения методу обучения факультативного курса предписывался ряд функций, которые в значительной степени приближаются к методу обучения обязательных курсов.

С течением времени появились существенные недостатки «Единого Факультативного курса»:

- учитель не готов проводить факультативы из-за отсутствия необходимых учебников, метода выполнения факультативных уроков и отсутствия подготовки к большинству программных проблем;
- строгие количественные нормы для единства слушателей (не менее 15 человек);
- запрет на чтение курса для непараллельных классов;
- наличие основных программ во всех школьных факультативных курсах;
- вытеснение факультативным курсом кружков.

Таким образом, при строгой системе запретов и даже в самом обычном виде «Единый Факультативный курс» не привел к развитию и популярности факультативов.

К 1980 году переход на новую программу по математике в средней школе был завершен, факультативные предметы заменены новыми. Он предоставил учителям более широкие возможности в самостоятельном выборе программы для факультативных курсов. В школе начинается второй этап факультативных занятий.

Новый факультативный курс включил в себя три раздела [8]:

- избранные вопросы математики (8-11классы),
- математика в приложениях (10-11классы),
- алгоритмы и программирование (9-11классы).

Основная цель программы состояла в том, чтобы довести материал, извлеченный на уроке, до логического результата, деконструировать связь между наукой и ее применением.

Изучение раздела «Математика в приложениях» позволит углубить знания и навыки, полученные в ходе изучения основного курса математики, применить навыки при решении практических задач, изучить прикладную математику.

В задачи курса «Алгоритмы и программирование» входило изучение учащимися элементов программирования на ЭВМ (электронно-вычислительная машина).

Началом третьего этапа введения факультативных занятий по математике в школе можно считать съезд работников народного образования, который проходил в Москве в декабре 1988 года. На этом этапе была принята концепция общего среднего образования, и было объявлено, что основное внимание уделяется широкой дифференциации образования. Реформа приводит к дальнейшему развитию всех форм дифференциации, в том числе факультативных, основной целью которых является обеспечение возможности углубленного изучения отдельных предметов, в том числе математики.

В 1990 году была опубликована новая программа факультативных занятий, которые предусматривались в школах с 7 класса.

Основная цель программы – углубить знания основных курсов, полученных в классе, и научиться решать более сложные задачи. В старших классах углубление основного курса носит систематический характер и подготавливает учащихся к продолжению образования и к сдаче вступительных экзаменов в ВУЗы [11].

Факультативный курс содержит следующие разделы [8]:

- за страницами учебников математики (7-9 классы),
- математическая мозаика (7-9 классы),
- подготовительный факультатив (10-11 классы).

Особенности нынешнего этапа развития факультативных форм обучения заключается том, что учитель создает собственную программу внеклассных мероприятий, а именно, имеет возможность проявить творчество, составив свою программу проведения факультативных занятий. Поскольку преподаватель несет большую ответственность при подготовке факультативных курсов, такой подход позволяет определить содержание выбранных характеристик, интересы и желания студентов и профиль старшеклассников [10].

В 2002 году была принята новая концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования (приказ № 2783 от 18 июля 2002 года), в которой, наряду с базовыми и профильными курсами, были выделены курсы по выбору (9-й класс) и элективные курсы (10-11-й классы). Они могут считаться с полным правом преемниками факультативных курсов. Фактически, оба они в первую очередь направлены на удовлетворение индивидуальных способностей, тенденций, потребностей студентов и развитие их способностей.

1.2 Классификация курсов по выбору

Условно можно выделить следующие виды элективных курсов [29].

Предметные курсы, миссия которых заключается в углублении и расширении знаний о предметах, составляющих основную учебную программу школы.

В свою очередь предметные курсы по выбору можно разделить еще на несколько групп:

1. Элективные курсы повышенного уровня, направленные на углубление учебного предмета, имеющие тематическое и временное согласование с этим учебным предметом.

2. Элективные курсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, входящие в обязательную программу данного предмета («Применение производной к исследованию функций»).

3. Элективные курсы, в которых углубленно изучаются отдельные разделы основного курса, не входящие в обязательную программу данного предмета («Теория вероятности», «Математическая логика»).

4. Прикладные элективные курсы, цель которых — знакомство учащихся с путями и методами применения знаний на практике, развитие интереса учащихся к современной технике и производству.

5. Элективные курсы, посвященные изучению методов познания природы.

6. Элективные курсы, посвященные истории предмета, как входящего в учебный план школы («История математики», «Великие математики»), так и не входящего в него («История религии»).

7. Элективные курсы, посвященные изучению методов решения задач (математических, физических, химических, биологических и т.д.), составлению и решению задач на основе физического, химического, биологического эксперимента.

Межпредметные элективные курсы, цель которых – интеграция знаний учащихся о природе и обществе («Математические методы в экономике»).

Из межпредметных курсов можно выделить:

- внутрипрофильную специализацию (курс для физико-математического профиля, интегрирующий физику и математику),
- интеграцию учебных предметов (например, математика и иностранный язык, математика и экономика и т. п.),
- интеграцию учебного предмета и внеучебной отрасли знания (например, математика и техника, математика и медицина, и т. п.).

Элективные курсы по предметам, не входящим в базисный учебный план.

Эта классификация может быть улучшена в будущем: можно не только увеличить количество классификационных оснований, но и назначить дополнительные типы факультативных курсов для каждой из основ.

Эта классификация позволяет предоставлять широкий спектр курсов по выбору. Эта классификация охватывает все факультативные курсы, которые исследователи рекомендовали ранее.

Преимущество этой классификации заключается в том, что она служит инструментом для поиска выбранного нового типа курса и позволяет учителю выбирать курс, который наилучшим образом соответствует способностям, образованию, безопасности и оборудованию ученика. Чем разнообразнее список курсов, предлагаемых обучающимся, тем полнее и эффективнее будут решаться задачи профильного образования [7].

1.3 Психолого-педагогические особенности старшеклассников

В ранней юности главным видом деятельности старшеклассников является учение. По мере расширения круга знаний в средней школе учащиеся этого знания начинают использовать его для объяснения многих реалий действительности и более осознанно начинают применять его в учении. В данном возрасте можно выделить два типа учащихся [27]:

- учащиеся с наличием равномерно распределённых интересов,
- учащиеся с ярко выраженным интересом к одной науке.

Это разница в отношении к учению определяется характером мотивов.

На первом месте выступают мотивы, связанные с жизненными планами учащихся, их намерениями в будущем, мировоззрением и самоопределением. Мотивы старшеклассников в их структуре характеризуются основным активом, который ценен для личных побуждений. Есть такие причины, как необходимость закончить школу, выбрать жизненный путь, продолжить образование и работать в выбранной профессии, продемонстрировать свои способности в связи с развитием интеллектуальных сил.

Старшие школьники начинают сознательно ориентироваться на поставленные цели, имеют желание углубить свои знания в той или иной области, что показывает их стремление к самообразованию. Обучающиеся принимают участие в дополнительных курсах, направленных на углубление своих знаний в интересующей их области и все чаще приступают к изучению дополнительной литературы [25].

Старший школьный возраст — это период полного полового созревания, а также первая стадия физической зрелости. Для старшеклассников характерна подготовка как к физическим, так и к умственным нагрузкам. Физическое развитие способствует формированию навыков и способностей в бизнесе и спорте. Наряду с этим оно отрывает широкие возможности для выбора будущей профессии [30].

В этом возрасте образуется прочная связь между профессиональными и учебными интересами. У молодежи педагогический интерес определяет выбор профессии, но у старших учеников выбор профессии способствует формированию педагогического интереса, изменению отношения к педагогической деятельности.

Курсы по выбору способствуют самоопределению обучающегося и правильному пониманию его способностей. Другими словами, профессиональное образование — это развитие знаний, способностей и ранее приобретенных навыков путем строительства системы профессионального образования в средней школе. Эта подготовка ориентирована на индивидуализацию обучения и профессиональную ориентацию обучающихся [12].

В процессе обучения старшеклассники уверенно используют различные мыслительные процессы, говорят логически и целенаправленно запоминают их. В то же время старшеклассники имеют свои особенности в познавательной деятельности. Они пытаются понять различные точки зрения, сформировать идеи и определить истину. При отсутствии задач для ума старшеклассникам становится скучно.

Они интересуются исследованиями и экспериментами, любят творчески подходить к новым вещам. Их также интересуют не только теоретические вопросы, но и сам процесс анализа, методы доказательства. Старшеклассники любят, когда учитель предоставляет возможность выбрать решение между разными точками зрения, требует обоснования этих утверждений; они готовы вступать в спор и упорно отстаивать свою позицию [16].

В старшем школьном возрасте подростки начинаю иначе смотреть на чувство любви, дружбы и товарищества. Главной особенностью дружбы, помимо общности интересов, становится единство взглядов и убеждений. Хорошие друзья становится незаменимыми друг для друга, доверяют друг другу самые сокровенные мысли. В этом возрасте обучающиеся предъявляют друг к другу высокие требования, а именно: друзья должны быть верными и дружелюбными, искренним и всегда приходить на помощь [30].

У старшеклассников резко проявляются черты личности юношей и девушек. Эстетические чувства помогают им освободиться от непривлекательных манер, некрасивых привычек, способствуют развитию отзывчивости, мягкости, сдержанности.

Школьник начинает активно принимать участие в общественной жизни школы. Это побуждает его приносить пользу другим людям, обществу. Многие старшеклассники пытаются помочь или быть полезными, оказывая помощь школе, городу, деревне, району.

Большое влияние на развитие старшеклассника оказывает коллектив, в котором он находится. В этом возрасте они, как правило, общаются со взрослыми. Стремление иметь взрослого друга обуславливается тем, что решать самому появляющиеся проблемы самосознания и самоопределения очень трудно. Эти вопросы активно обсуждаются в кругах сверстников, но преимущества таких аргументов относительны из-за небольшого жизненного опыта. Вот почему они ищут помощь взрослых [4].

Самокритичность — отчётливо проявляющаяся особенность старшеклассников, в отличие от подростков. Она помогает строго и объективно контролировать им свои действия. Молодые юноши и девушки глубоко понимают свой характер, чувства, поведение, манеру поведения, стараются точно оценить свои особенности и развить наиболее важные личностные качества.

В раннем подростковом возрасте усиливается воля, развиваются такие особенности волевой активности, как целеустремленность, инициатива, настойчивость. Кроме того, в это время укрепляется выдержка и самоконтроль. Старшеклассники внешне начинают быть более подтянутыми, чем подростки, лучше контролируют свои движения и жесты.

Старший школьный возраст — это возраст, который устанавливает стандарты эстетического отношения к миру и формирует мировоззрение, основанное на выборе приоритетных ценностей.

Восприятие характеризуется наличием этического барьера, который отбрасывает все воздействия, не согласующиеся с этическими нормами [20].

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ КУРСА «ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ»

2.1 Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы

Проведем сравнительный анализ самых популярных учебников старшей общеобразовательной школы — это учебники авторов Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа. 10 класс» (учебник) [3], Никольского С.М. и др. «Алгебра и начала анализа. 11 класс» [18], Муравин Г.К. и др. «Алгебра и начала анализа. 11 класс» [17] и Мерзляка А.Г. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» [15].

Результаты анализа представлены в Таблице 1.

Таблица 1 — Сравнительный анализ учебников по теме «Производная»

Категории для сравнения	Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Учебник. – 2018	Никольский С.М. и др. Алгебра и начала анализа. 11 класс. – 2015	Муравин Г.К. и др. Алгебра и начала анализа. 11 класс. – 2019	Мерзляк А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. – 2017
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Структура учебника	Глава 5. Производная. §24. Предел последовательности. §25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.	§4. Производная. 4.1. Понятие производной. 4.2. Производная суммы. Производная разности. 4.4.Производная произведения.	Глава 2. Производная функции. 4. Касательная к графику функции. 5. Производная и дифференциал функции.	Глава 5. Производная и её применение. §36. Определение предела функции в точке и функции, непрерывной в точке.

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	§26. Предел функции. §27. Определение производной. §28. Вычисление производных. §29. Уравнение касательной к графику функции. §30. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы. §31. Построение графиков функций. §32. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин.	Производная частного. 4.5. Производные элементарных функций. 4.6. Производная сложной функции. § 5. Применение производной. 5.1. Максимум и минимум функции. 5.2. Уравнение касательной. 5.3. Приближенные вычисления. 5.5. Возрастание и убывание функции. 5.6. Производные высших порядков. 5.8. Экстремум функции с единственной критической точкой. 5.9. Задачи на максимум и минимум. 5.10. Асимптоты. Дробно-линейная функция. 5.11. Построение графиков функций с применением производных.	6. Точки возрастания, убывания и экстремума функции. Глава 3. Техника дифференцирования. 7. Производная суммы, произведения и частного функции. 8. Производная сложной функции. 9. Формулы производных основных функций. 10. Наибольшее и наименьшее значения функций. 11. Вторая производная.	Некоторые свойства непрерывных функций. §37. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции. §38. Понятие производной. §39. Правила вычисления производных. §40. Уравнение касательной. §41. Признаки возрастания и убывания функции. §42. Точки экстремума функции. §43. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. §44. Вторая производная. Понятие выпуклости функции. §45. Построение графиков функций.

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Понятия, которые необходимы для введения понятия производной	Для изучения темы «Производная» вводятся понятия предела последовательности, геометрическая прогрессия и предел функции. Эти понятия в учебнике достаточно детально разобраны и подкреплены множеством примеров для того, чтобы лучше отработать навыки решения задач.	Перед введением понятия производной авторы знакомят с понятием приращения функции и формулировкой правила его вычисления. Затем переходят к рассмотрению дифференцируемых функций. И понятие дифференцируемой функции в точке показывают при помощи предела. Далее на примерах доказываются дифференцируемости функций.	Глава, посвященная теме — Производная начинается с введения определения приращения функции. Показывается, как найти угловой коэффициент секущей через приращение. Объясняется, что такое касательная к графику функции.	Автор начинает свою главу с определения предела функции в точке и функции, непрерывной в точке. После чего делает отступление на изучение «некоторых свойств непрерывной функции». И затем вновь возвращается к изучению темы «производных». Разбирается задача о мгновенной скорости и изучается касательная к графику функции.
Методические особенности введения понятия производной	Формулируются две задачи на физический и геометрический смысл. В ходе решения которых мы приходим к появлению новой математической модели.	Первоначально рассматриваются задачи с полным решением на приращение функции. Затем, используя эти задачи, вводят определение производной.	Подход этого автора отличается тем, что сначала он приходит к формулировке понятия производной через решение физической задачи, а затем переходит к отработке навыков вычисления.	Опираясь на решенные две задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной в предыдущем пункте, автор получает математическую модель, которой присваивает название – «Производная».

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Методические особенности изучения производной при исследовании функции	Используется алгоритм абсолютно такой же, как и в учебнике базового уровня данного автора. Найти производную функции. Найти стационарные и критические точки. Определить знаки производной на получившихся промежутках. Опираясь на теоремы сделать соответствующие выводы о монотонности функции и экстремумах. Отыскание точек экстремума вынесено в отдельный пункт и рассматривается подробно.	Представлено множество теорем, но автор не дает явного алгоритма для исследования функции.	Представлено множество теорем, но автор не дает явного алгоритма для исследования функции.	Исследование свойств функции проводится по плану: Найти область определения функции Исследовать функцию на четность Найти нули функции Найти промежутки возрастания и убывания функции Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т.п.) Автор обращает внимание, что приведенный план носит рекомендательный характер и не является постоянным и исчерпывающим.

Все эти учебники почти схожи с точки зрения принципов изучения этого предмета, но по-прежнему значительно различаются в применении производных. Учебник, составленный Муравиным, отличается большим объемом материала и большой детализацией по теме «Производная». Учебники Никольского больше ориентированы на практику, он также содержит отдельные пункты, состоящие из примеров решения задач, но учебник имеют и слабую сторону, это доказательства. Материал в учебнике Мерзляка представлен очень кратко, но последовательно; доказательства основные и понятные. Учебник, организованный Мордковичем, содержит много теоретических знаний и примеров для самостоятельной работы, поэтому подходит для дифференцированного образования.

Изложения темы «Производная» в рассмотренных учебниках А. Г. Мордковича, Г. К. Муравина, С. М. Никольского, А. Г. Мерзляка имеют много общего. А именно: изложение темы ведется на наглядно-интуитивном уровне; определение производной дается после поверхностного знакомства с пределом; приводится вывод уравнения касательной; дифференцирование функций: сложных, показательных, логарифмических, тригонометрических; применение производной для нахождения максимального и минимального, наименьшего и наибольшего значений; для исследования функций и построения их графиков.

После анализа материала, содержащегося в основных учебниках для общеобразовательных учреждений по теме «Производная», легко заметить, что только в двух из рассмотренных УМК, авторами которых являются Мордкович А. Г. и Муравин Г. К., присутствуют задачи, с которыми мы сталкиваемся в реальной жизни, они не только совершенствуют вычислительные навыки обучающихся, но и формируют образное мышление. Они могли бы сделать изучение данной темы более интересным, познавательным и глубокими. В следующем абзаце мы постараемся сформулировать методические рекомендации учителям по включению задач повышенной трудности в курс по данной теме, покажем содержание курса.

2.2 Разработка курса «Применение производной для решения задач повышенной трудности»

2.2.1 Пояснительная записка

Производная функции используется для изучения многообразных явлений и процессов реального мира, так как с помощью этого понятия получают единое определение такие понятия, как «мгновенная скорость прямолинейного движения», «скорость химической реакции», «сила тока в цепи» и др.

Большинство школьников проходят тему «Производная» в 10 классе. И поскольку курс повышенной сложности, то его уже будут посещать ученики, готовые связать свою дальнейшую профессиональную деятельность с данным разделом математики. Поэтому программа предназначена для проведения курса по выбору по математике с обучающимися 11 классов естественнонаучного профиля обучения общеобразовательных школ. Данный профиль представлен в некоторых образовательных учреждениях г. Челябинска, например: МАОУ «Гимназия №23 г. Челябинска», МАОУ «СОШ №104 г. Челябинска», МБОУ «ФМЛ № 31 г. Челябинска».

Перед началом изучения курса математического анализа, преподаватель должен определить для себя цели:

- расширение возможностей социализации учащихся,
- обеспечение преемственности между общим и профессиональным образованием,
- формирование навыков вычисления производной функции, необходимых для более эффективной подготовки выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования.

А также задачи:

- повысить теоретический уровень знаний обучающихся, дав глубокие и прочные знания по дисциплине естественнонаучного профиля;
- научить решать разнообразные задачи повышенного уровня сложности, соответствующие требованиям вузов естественнонаучного профиля;
- сделать учащихся конкурентоспособными в плане поступления в выбранные ими вузы.

Поставив перед собой эти цели и задачи, преподаватель учит рассуждать, утверждать, применять, последовательно излагать свои мысли, задавать вопросы, отвечать на них, анализировать конкретную ситуацию. Таким образом, у обучающихся вырабатываются навыки в решении задач, которые предопределяют развитие мышления.

На учебных занятиях преподавателем используются различные педагогические технологии. Проведение, например, занятий с использованием элементов историзма — это один из способов улучшения обучения. Насыщение занятий сведениями из истории становления и развития математики пробуждает у учеников интерес к науке, углубляет знания, формирует диалектико-философское мировоззрение, воспитывает патриотические чувства [6].

Для оптимизации образовательного процесса при объяснении материала используются компьютерные презентации, которые выступают источниками учебной информации и служат наглядными пособиями. Визуальное представление условий к задачам и их решение, обеспечивает эффективное усвоение обучающимися новых знаний и умений.

Программа определяет содержание курса, дает распределение учебных часов по темам курса и определяет последовательность изучения тем. Занятия проводятся 1 раз в неделю, курс рассчитан на 13 часов. Итоги курса подводятся на заключительном занятии в форме беседы и выведения рейтинга.

2.2.2 Тематическое планирование

Таблица 2 — Тематическое планирование

№ п/п	Тема занятия	Количество часов	Форма проведения занятия	Форма контроля
1	Вводный контроль.	1	Беседа. Самостоятельная работа.	Самоконтроль.
2	Производная в алгебраических и геометрических задачах.	2	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
3	Обобщение пройденного материала.	2	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
4	Задачи из реальной жизни.	2	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
5	Применение производной при решении экологических проблем.	1	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
6	Физический смысл производной.	1	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
7	Применение производной при решении задач на строительство.	2	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
8	Задачи с кораблями.	1	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
9	Использование производной при решении задач на объёмы.	1	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
10	Применение производной при решении экономических задач.	1	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
11	Решение задач из ЕГЭ.	2	Рассказ. Практикум по решению задач.	Комбинированная.
12	Подведение итогов курса.	1	Беседа.	Фронтальная.
	Итого	17		

2.2.3 Содержание курса

Тема 1: Вводный контроль

На данном занятии обучающиеся выполняют вступительную контрольную работу, которая поделена на два варианта одинакового уровня сложности [22].

Вариант 1

1. Вычислите

$$f'(-2), \text{если } f(x) = (5x+8)^3 - 2tg^7\frac{\pi}{5}.$$

2. Найдите длину промежутка убывания функции

$$y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 15x + 2\sqrt{3}.$$

3. Укажите точку минимума функции

$$f(x) = \frac{x-3}{5} + \frac{5}{x+8}.$$

4. Решите уравнение $f'(x) = g'(x)$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 5 \text{ и } g(x) = x^2 - x + 1.$$

5. Найдите производную функции $y = \sin^3(2x-7)$ в точке $x_0 = 3$.

Вариант 2

1. Вычислите

$$f'(-2), \text{если } f(x) = (4x+6)^3 - 7ctg^6\frac{\pi}{8}.$$

2. Найдите длину промежутка убывания функции

$$y = -\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 20x - 3\sqrt{2}.$$

3. Укажите точку минимума функции

$$f(x) = \frac{x+4}{5} + \frac{5}{x-3}.$$

4. Решите уравнение $f'(x) = g'(x)$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2 \text{ и } g(x) = 3x^2 - 9x + 7.$$

5. Найдите производную функции $y = \sin^3(4x + 5)$ в точке $x_0 = -1$.

Задания для домашней работы:

1. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Иоганна Бернулли.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 2: Производная в алгебраических и геометрических задачах

Задача №1 [14, с. 298]

Криволинейная трапеция ограничена кривой $f(x) = x^3 + 1$, где $x \in [1; 2]$ и отрезками прямых $x = 1, x = 2, y = 0$. В какой точке данной кривой надо провести касательную, чтобы она отсекла от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади (рисунок 1)?

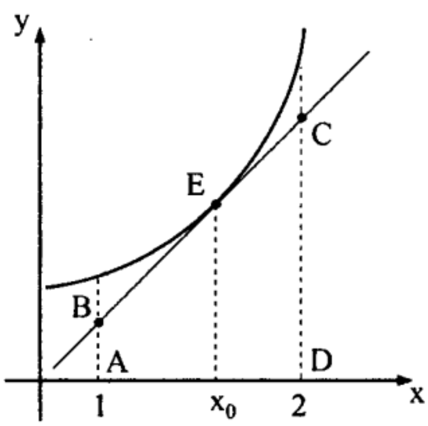

Рисунок 1

Решение

Пусть наша касательная к графику функции $f(x)$ будет проведена в точке x_0. Тогда уравнение этой касательной будет задаваться как $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + 1$ или, раскрыв скобки, $y = 2x_0x + 1 - x_0^2$.

Найдём площадь криволинейной трапеции $ABCD$.

Основание $AB = y(1) = 2x_0 + 1 - x_0^2$, основание $CD = y(2) = 4x_0 + +1 - x_0^2$, высота $AD = 1$.

Находим площадь трапеции $S = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD = -x_0^2 + 3x_0 + 1$.

После чего отыщем производную этой функции $S'(x_0) = -2x_0 + 3$.

Находим нули производной, критическая точка $x_0 = \frac{3}{2}$ будет принадлежать отрезку $[1; 2]$. В этой точке функция достигает максимума $S\left(\frac{3}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$.

Необходимо найти значения функции $S(x_0)$ на концах отрезка $S(1) = 3$ и $S(2) = 3$.

Теперь очевидно, что максимум $S(x_0)$ на отрезке $[1; 2]$ достигается только в точке $x_0 = 3\frac{1}{4}$. Следовательно, можем записать координаты точки касания $E\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

Задача №2 [23]

Число 20 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

Решение

Предположим, что одно из положительных чисел будет x, следовательно вторе число будет $20 - x$. По условию задачи получим следующую функцию

$$f(x) = x^3 + (20 - x)^2.$$

Производная $f'(x) = 3x^2 + 2x - 40$. Найдём критические точки функции $x_1 = -4$ и $x_2 = \frac{10}{3}$.

Расставим точки на координатной прямой и составим таблицу знаков производной. Функция достигает минимума при $x = \frac{10}{3}$. Следовательно, второе число будет $20 - x = \frac{50}{3}$. Эти числа положительные, что удовлетворяет условию задачи.

Если поменяем слагаемые местами, то получим функцию

$$f(x) = (20 - x)^3 + x^2,$$

$$f'(x) = -(3x^2 - 122x + 1200).$$

Функция эта убывает при всех значениях x и, значит, наименьшего значения не имеет.

Ответ: $\frac{10}{3}$ и $\frac{50}{3}$.

Задания для домашней работы:

1. Какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от начала координат до точек пересечения координатных осей с прямой, имеющей положительный угловой коэффициент и проходящей через точку $(-1; 2)$?

Ответ: $3 + 2\sqrt{2}$.

2. В какой точке графика функции $f'(x) = x^2 + 2x - 3$ надо провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей.

Ответ: $x_0 = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Исаака Ньютона.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,

- научные результаты,
- цитаты.

Тема 2: Производная в алгебраических и геометрических задачах

Задача №1 [3]

В шар вписана правильная треугольная призма, в основании которой лежит правильный равносторонний треугольник. Какой наибольший объём может иметь призма (рисунок 2)?

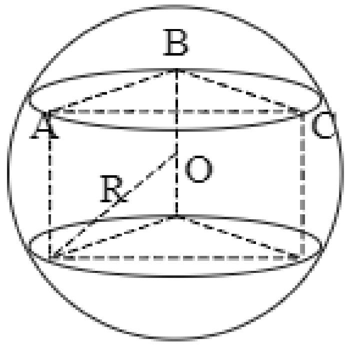

Рисунок 2

Решение

Радиус шара обозначим за R, длину стороны равностороннего треугольника — a, расстояние от центра шара до плоскости, содержащей основание призмы — h. Так как в основании призмы лежит правильный треугольник ABC, то его площадь равна: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Треугольник вписан в круг, тогда круг имеет радиус, равный $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Если M — центр круга, то из треугольника OAM выразим a. Имеем:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = R^2.$$

Следовательно, $a = \sqrt{3 \cdot (R^2 - h^2)}$.

Находим объём призмы как функцию от переменной h: $V_{\text{приз}}(h) = S_{ABC} \cdot 2h = 3(R^2 - h^2)2h = 6R^2h - 6h^3,$ где $0 < h < R$.

Ищем критическую точку найденной функции: $V'_{\text{приз}}(h) = 6R^2 - 18h^2$. Следовательно, $V'_{\text{приз}}(h) = 0$ при $h_0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$. $V''(h) = -36h, V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$.

Очевидно, что при $h = h_0$ функция имеет наибольшее значение. Получаем, что наибольший возможный объём рассматриваемых треугольников призм равен $\frac{4R^3}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $V_{\text{наиб}} = \frac{4R^3}{\sqrt{3}}$.

Задача №2 [31, с. 20]

Из круга радиуса r вырезают симметричную звезду (рисунок 3), и четыре вершины A, B, C, D соединяют в вершину, образуя правильную пирамиду, в основании которой — квадрат (рисунок 4). Какой наибольший объём возможен?

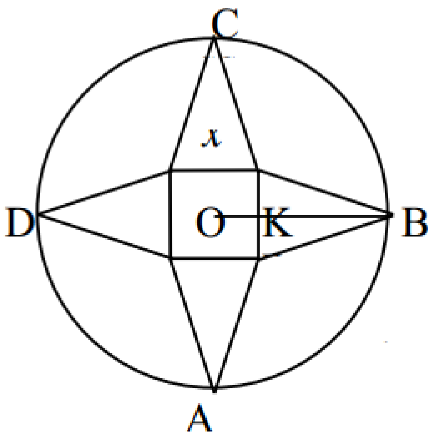

Рисунок 3

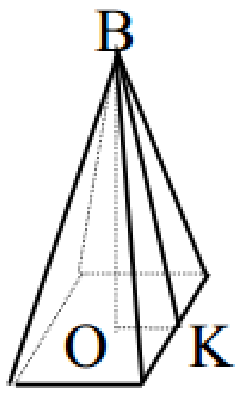

Рисунок 4

Решение

Пусть сторона квадрата x, тогда объём пирамиды будет равен (рисунок 4)

$$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot OB.$$

Рассмотрим треугольник OBK (рисунок 4): $OK = \frac{x}{2}, BK = r - \frac{x}{2}$. Следовательно,

$$OB = \sqrt{BK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(r - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{r^2 - rx}.$$

Имеем

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{r^2 - rx},$$

где $0 \le x \le r$.

Фигуру на рисунке 4 можно выстроить только при условии $0 \le x \le r$. Исследуем эту функцию:

$$V'(x) = \frac{2x}{3}\sqrt{r^2 - rx} - x^2\frac{r}{6\sqrt{r^2 - rx}} = \frac{4xr^2 - 5x^2r}{6\sqrt{r^2 - rx}}\ ,$$

где $0 \le x \le r$. Следовательно, $V'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \frac{4r}{5}$. При этом $V(0) =$ $= 0, V\left(\frac{4}{5}r\right) = \frac{16\cdot r^3}{75\sqrt{5}}, V(r) = 0$.

Таким образом, объем пирамиды будет наибольшим при $x = \frac{4}{5}r$.

Ответ: $V\left(\frac{4}{5}r\right) = \frac{16\cdot r^3}{75\sqrt{5}}$.

Задания для домашней работы:

1. Параболическим сегментом называется фигура, ограниченная параболой и прямой, перпендикулярной ее оси. Расстояние от вершины параболы до этой прямой называется высотой сегмента, а длина отрезка прямой, высекаемого параболой — основанием сегмента. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в параболический сегмент с основанием a и высотой H? (Одна из сторон прямоугольника параллельна оси параболы)

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ aH$.

2. Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

Ответ: радиус основания и высота бака $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Жозефа Луи Лагранжа.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 3: Обобщение пройденного материала

Задача №1 [23]

В какой точке графика функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ надо провести касательную, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей.

Решение

Начертим график функции и покажем треугольник (рисунок 5).

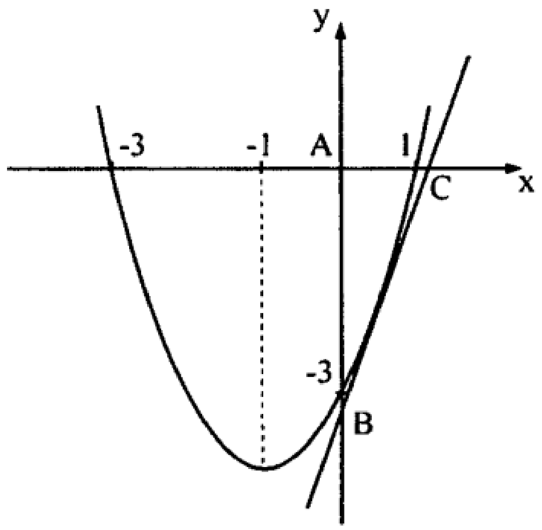

Рисунок 5

Пусть касательная будет проведена в точке с абсциссой x_0. Тогда запишем уравнение этой касательной. Для начала найдём производную данной функции $f'(x) = 2x + 2$. Затем составим уравнение касательной.

$$y = (2x_0 + 2)(x - x_0) + x_0^2 + 2x_0 - 3$$

$$y = (2x_0 + 2)x - x_0^2 - 3.$$

Теперь найдём точки пересечения данной касательной с осями координат. А именно отыщем катеты AB и AC в прямоугольном треугольнике ABC.

При $x = 0$, то $y = -x_0^2 - 3$. Длина катета $AB = -y = x_0^2 + 3$.

При $y = 0$, то $0 = 2(x_0 + 1)x - x_0^2 - 3$, откуда выражаем $x = \frac{x_0^2+3}{2(x_0+1)}$. Рассмотрим несколько случаев.

1) $x_0 > -1$, тогда длина катета $AC = x = \frac{x_0^2+3}{2(x_0+1)}$. Значит площадь данного треугольника ABC

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{(x_0^2 + 3)^2}{4(x_0 + 1)}.$$

Теперь необходимо найти значение x_0, при котором эта площадь будет наименьшая. Найдём производную.

$$S' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2(x_0^2 + 3) \cdot 2x_0(x_0 + 1) - (x_0^2 + 3)^2 \cdot 1}{(x_0 + 1)^2} =$$

$$= \frac{(x_0^2 + 3)(4x_0^2 + 4x_0 - x_0^2 - 3)}{4 \cdot (x_0 + 1)^2} = \frac{(x_0^2 + 3)(3x_0^2 + 4x_0 - 3)}{4 \cdot (x_0 + 1)^2}.$$

Находим критические точки из уравнения $3x_0^2 + 4x_0 - 3 = 0$. Корнями будут являться $x_0 = \frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$. Так как у нас ограничение $x_0 > -1$, то подходит лишь только один корень $x_0 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \approx 0,5$.

Определяем по знакам производной, что функция $S(x_0)$ имеет минимум ($\approx 1,5$).

2) $x_0 < -1$, этот случай рассматривается аналогично. Тогда касательная проводится к параболе по левой ветви.

Так как площадь данного треугольника $S = -\frac{(x_0^2+3)^2}{4(x_0+1)}$, то критическая точка $x_0 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \approx -1,8$ в ней тоже достигается минимум (≈ 9).

После сравнения значений двух случаев можем сделать вывод, что касательную нужно проводить в точке $x_0 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $x_0 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$.

Задача №2 [28]

Площадь поверхности сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объёма, вписанного в эту сферу?

Решение

Пусть цилиндр образован вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг диаметра MN (рисунок 6).

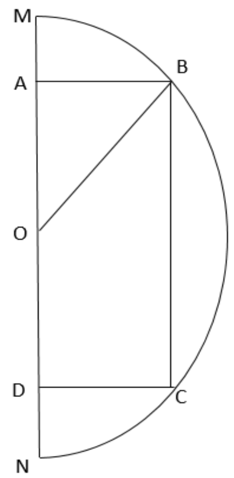

Рисунок 6

И пусть $AD = x$, тогда выразим объём V цилиндра как функцию от x. Имеем $S_{\text{сферы}} = 4\pi OB^2$, т.е. $4OB^2 = 27\pi$, откуда $OB^2 = \frac{27}{4}$. Из треугольника AOB получим $AB^2 = OB^2 - OA^2$, т.е.

$$AB^2 = \frac{27}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{(27 - x^2)}{4}.$$

Используя формулу объёма цилиндра, находим

$$V(x) = \pi AB^2 \cdot AD = \pi \frac{(27 - x^2)}{4} x = \frac{\pi}{4}(27x - x^3).$$

По смыслу задачи, $0 < x < 2OB$, т.е. $0 < x < 3\sqrt{3}$. Найдём

$$V'(x) = \frac{\pi}{4}(27 - 3x^2) = \frac{3}{4}\pi(9 - x^2);$$

$V'(x) = 0$, если $9 - x^2 = 0$. Отсюда находим $x = 3$ (так как $x > 0$).

Если $0 < x < 3$, то $V'(x) > 0$, а если $3 < x < 3\sqrt{3}$, то $V'(x) < 0$. Следовательно, $x = 3$ —точка максимума. Поскольку функция $V(x)$ определена для любого x и на всей числовой прямой имеет одну критическую точку, делаем вывод, что при $x = 3$ функция $V(x)$ достигает наибольшего значения.

Задания для домашней работы:

1. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине медианы, проведенной к его боковой стороне.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

2. Потенциальная энергия U поля частицы, в котором находится другая, точно такая же частица имеет вид: $U = \frac{a}{r_2} - \frac{b}{r}$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние между частицами. Найти:

- значение r_0 соответствующее равновесному положению частицы;
- выяснить устойчиво ли это положение;
- найти $F_{\max}$ значение силы притяжения.

Ответ: $F_{\max}(\mathrm{r})$ при $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1 = \frac{3\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Владимира Андреевича Стеклова.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 4: Задачи из реальной жизни

Задача №1[11, с. 31]

Лампа висит над центром круглого стола радиуса R (рисунок 7). При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещенность прямо пропорциональна косинуса угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

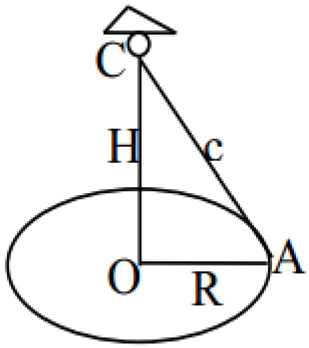

Рисунок 7

Решение

Предположим, что предмет, лежащий на краю стола, будет находиться в точке A. По условию задачи имеем:

$$E = k\frac{\cos\alpha}{c^2},$$

где $c = \sqrt{H^2 + R^2}$,

$$\cos\alpha = \frac{H}{c}.$$

Подставим известные значения в формулу и получим:

$$E(H) = k\frac{H}{\left(\sqrt{H^2 + R^2}\right)^3},$$

где $H > 0$.

Исследуем полученную функцию на экстремум:

$$E'(H) = k\frac{R^2 - 2H^2}{\left(\sqrt{H^2 + R^2}\right)^5}.$$

Значит, $E'(H) = 0,\ R^2 - 2H^2 = 0$ при $H = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Далее необходимо определить знак второй производной в найденной точке:

$$E''\left(H = \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) = \frac{6H^3 - 9HR^2}{\left(\sqrt{H^2 + R^2}\,\right)^7} = \frac{3R^3\left(2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{7}R^2\right)^7}} < 0.$$

$E''(H) < 0,$ поскольку числитель меньше нуля. Наилучшая освещенность предмета, лежащего на краю стола, достигается в тот момент, когда лампа окажется над столом на высоте $H = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Задача №2 [31, с. 59]

Окно имеет форму прямоугольника, дополненного полукругом (рисунок 8). Периметр окна равен P. При каком отношении сторон прямоугольника окно будет пропускать больше света?

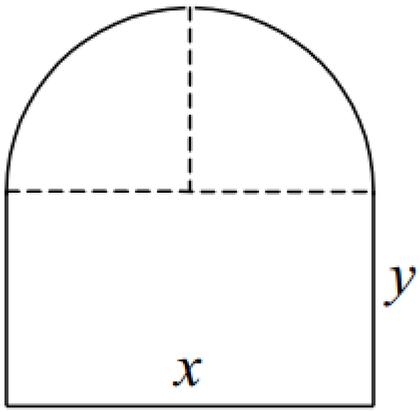

Рисунок 8

Решение

Пусть длины сторон прямоугольника будут x и y, тогда площадь окна выражается формулой $S = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Но так как длины сторон x и y связаны соотношением $x + 2y + \pi\frac{x}{2} = P$. Выразим y и подставим в формулу площади

$$S(x) = x\left(\frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi\frac{x^2}{8}$$

$$S(x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 + \frac{P}{2}x,$$

где $x > 0$.

Для того, чтобы окно пропускало достаточно много света, нужна наибольшая его площадь. Для этого исследуем функцию на экстремум:

$$S'(x) = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{P}{2}.$$

Значит, $S'(x) = 0$ при $x = \frac{P/2}{1+\frac{\pi}{4}} = \frac{2P}{4+\pi}$.

Определим знак второй производной в найденной точке:

$$S''(x) = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Значит функция $S(x)$ достигает наибольшего значения в точках $x = \frac{2P}{4+\pi}$ и $y = \frac{P}{4+\pi}$. Отсюда следует, что высота прямоугольной части окна должна быть в 2 раза меньше ширины окна.

Задания для домашней работы:

1. Антонов Саша решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Спицину Антону сделать ему коробку для подарка. К другу в мастерскую он принес кусок листа картона размером $80 \text{ X } 50$ см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Ответ: квадрат со стороной 12,5 см.

2. Цепь с внешним сопротивлением $R = 0{,}9$ Ом питается от батареи и $k = 36$ одинаковых источников, каждый из которых имеет ЭДС $E = 2$ В и внутреннее сопротивление $r_0 = 0{,}4$ Ом. Батарея включает n групп, соединенных параллельно, а в каждой из них содержится m последовательно соединенных аккумуляторов. При каких значениях m, n будет получена максимальная J во внешнем R.

Ответ: $n = 4, m = 9$.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Якоба Бернулли.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 5: Применение производной при решении экологических проблем

Задача №1 [31, с. 87]

В Челябинской области ежегодно выбрасывается в водоёмы миллион кубометров неочищенных вод. При постройке канала водоочистительных сооружений необходимо использовать канал с наибольшей площадью сечения, которое по форме представляет равностороннюю трапецию (боковые стороны и одно из оснований равны) (рисунок 9). При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

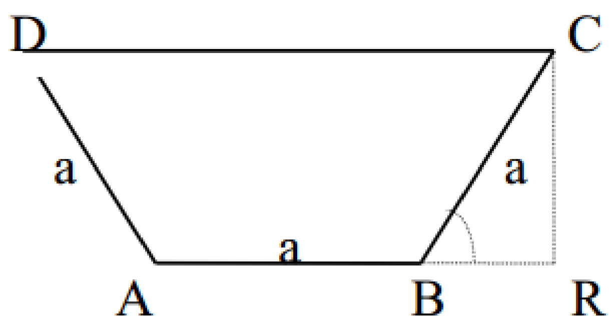

Рисунок 9

Решение

Пусть меньшее из двух оснований трапеции будет обозначено за a, а угол наклона боковых сторон трапеции $\angle CBR = \alpha$. Площадь сечения обозначим за S. Из условия можем записать $AD = AB = BC = a$. Найдем в треугольнике BCR сторону $BR = acos\alpha$. Отсюда сторона $CD = a + 2acos\alpha$, а высота данной трапеции $CR = asin\alpha$. Найдём площадь трапеции:

$$S = a^2(1 + cos\alpha)sin\alpha.$$

Для нахождения $S = S(\alpha)$ наибольшего значения площади необходимо найти критические точки, которые принадлежат интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Находим производную $S'(\alpha) = a^2(2\cos^2\alpha + cos\alpha - 1)$.

$S'(\alpha) = a^2(2\cos^2\alpha + cos\alpha - 1) = 0$, при $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = \pi$. Но нашему интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ принадлежит только одна критическая точка $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$. Найдём значение площади в точках:

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(1 + cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2,$$

$$S(0) = 0$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2.$$

Таким образом, площадь сечения канала будет принимать наибольшее значении, когда угол наклона боковых сторон будет равен 60^0.

Задача №2 [31, с. 88]

Для ликвидации утечки нефти в порту ночью нужно осветить место аварии. Для этого на высоту h нужно поднять фонарь над центром площадки (рисунок 10), представляющей собой квадрат со стороной a метров. Чтобы в средних точках каждой из сторон этого квадрата освещенность достигла наибольшей величины. Освещенность выражается формулой

$$T = \frac{kcos\alpha}{|FK|^2},$$

где k — число, определяющее мощность фонаря,

FK — расстояние от фонаря до средней точки стороны квадрата.

Найдите высоту h, при которой освещенность будет максимальной.

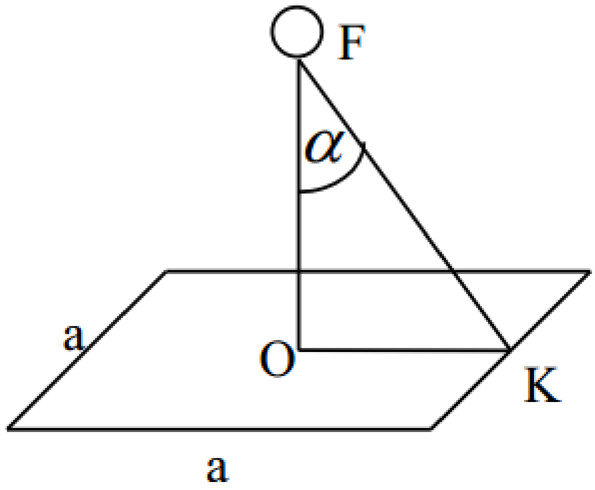

Рисунок 10

Решение

Известно, что $OF = h, OK = \frac{a}{2}$. Тогда длина наклонной, $|FK|^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$.

$$cos\alpha = \frac{OF}{FK} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2}} .$$

Отсюда получаем функцию

$$T(h) = \frac{k \cdot 2h \cdot 4}{\sqrt{4h^2 + a^2}\,(4h^2 + a^2)} = \frac{8kh}{\sqrt{(4h^2 + a^2)^3}} ,$$

где $h > 0$.

Исследуем функцию на экстремум:

$$T'(h) = \frac{8k(a^2 - 8h^2)}{\sqrt{(4h^2 + a^2)^5}}$$

$$T'(h) = \frac{8k(a^2 - 8h^2)}{\sqrt{(4h^2 + a^2)^5}} = 0,$$

при $h = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Так как

$$T''(h) = \frac{8k}{\sqrt{(4h^2 + a^2)^7}}(96h^3 - 36ha^2)$$

$$T''\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{8k}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + a^2\right)^7}}\left(\frac{96a^3}{16\sqrt{2}} - \frac{36a^3}{2\sqrt{2}}\right) < 0$$

то освещенность станет наибольшей при $h = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Задания для домашней работы:

1. От канала шириной 4 м отходит под прямым углом другой канал шириной 2 м. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен)?

Ответ: $l \approx 8{,}3$ м (определяется как минимум функции $l = 2\sec\varphi +$ $+4\,cosec\,\varphi$, где φ — угол между бревном и одной из стенок канала).

2. К красивому дереву сакуры полетела муха со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой сакуре полетела оса со скоростью v_2 м/мин. При этом мухе нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а осе — расстояние в $2b$ м. Пусть траектории их полёта — взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам путь мухи и путь осы. Найдите формулу, которая выражает зависимость расстояния (y) между мухой и осой от времени (x) их полёта. Установите момент, когда в полёте мухи и осы расстояние между ними достигает наименьшего значения.

Ответ: $x = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}$.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Готфрида Вильгельма фон Лейбница.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 6: Физический смысл производной

Задача №1 [24, с. 35]

Платформа массой М начинает двигаться вправо под действием постоянной силы F. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Пренебрегая трением, найти зависимость от времени ускорения a платформы в процессе погрузки. Определить ускорение a_1 платформы в случае, если песок не насыпается на платформу, а из наполненной высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью μ кг/с.

Решение

Рассмотрим сначала случай, когда песок насыпается на платформу (рисунок 11).

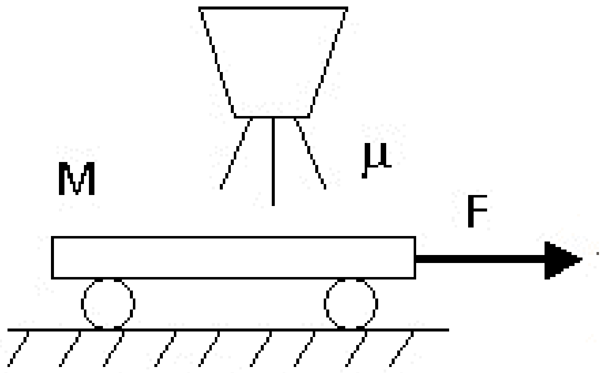

Рисунок 11

Движение системы платформа-песок можно описать с помощью второго закона Ньютона $F = ma$. Обозначим через переменную p импульс нашей платформы и запишем:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

За бесконечно малый промежуток времени Δt вычислим, как изменяется импульс платформы:

$$\Delta p = \big(M + \mu(t + \Delta t)\big)(u + \Delta u) - (M + \mu t)u = F\Delta t,$$

где u — скорость платформы.

После того, как раскроем скобки и сократим, получим:

$$\Delta p = \mu u\Delta t + M\Delta u + \mu\Delta u t + \mu\Delta u\Delta t = F\Delta t.$$

Разделим все выражение на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \to 0$

$$\frac{Mdu}{dt} + \frac{\mu t du}{dt} + \mu u = F$$

или

$$d\frac{[(M + \mu t)u]}{dt} = F$$

Проинтегрируем второе уравнение при условии, что начальная скорость платформы будет равна нулю: $(M + \mu t)u = Ft$. Теперь выразим скорость платформы:

$$u = \frac{Ft}{M + \mu t}.$$

Тогда, ускорение платформы:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{F(M + \mu t) - Ft\mu}{(M + \mu t)^2} = \frac{FM}{(M + \mu t)^2}.$$

Рассмотрим случай, когда песок высыпается из наполненной платформы.

Запишем выражение, как изменяется импульс за малый промежуток времени:

$$\Delta p = \big(M - \mu(t + \Delta t)\big)(u + \Delta u) + \mu \Delta t u - (M - \mu t)u = F\Delta t.$$

Слагаемое $\mu \Delta t u$ является импульсом количества песка, которое высыпалось из платформы за время Δt. Раскроем скобки и получим:

$$\Delta p = M\Delta u - \mu t \Delta u - \mu \Delta t \Delta u = F\Delta t.$$

Разделим все выражение на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \to 0$

$$\frac{(M - \mu t)du}{dt} = F$$

или

$$a_1 = \frac{du}{dt} = \frac{F}{M - \mu t}$$

Ответ: $a = \frac{FM}{(M+\mu t)^2}$, $a_1 = \frac{F}{M-\mu t}$.

Задача №2 [2]

Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы F, приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k.

Решение

Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие F_x и F_y (рисунок 12).

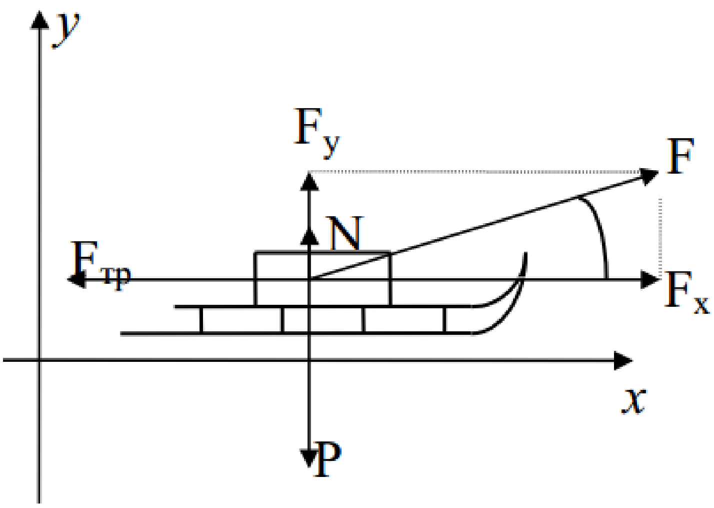

Рисунок 12

Сила нормального давления саней и вертикальной составляющей силы F: $N = P - F\, sin\alpha$ поэтому сила трения $F_{\text{тр}} = kN = k(P - F\, sin\alpha)$. Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил: $F_x = F_{\text{тр}}$, то есть $F\, cos\alpha = k(P - F\, sin\alpha)$. Отсюда находим силу F как функцию угла α:

$$F(\alpha) = \frac{kP}{k\, sin\alpha + cos\alpha}.$$

$$F'(\alpha) = \frac{kP(sin\alpha - k\, cos\alpha)}{(k\, sin\alpha + cos\alpha)^2}.$$

$\Rightarrow F'(\alpha) = 0$ при $k = tg\alpha$.

Определим знак второй производной в этой точке:

$$F''(\alpha) = \frac{(k^2+2)\sin^2\alpha - 2k\sin\alpha\, cos\alpha + (2k^2+1)\cos^2\alpha}{(k\, sin\alpha + cos\alpha)^3}.$$

При $k = tg\alpha$ имеем $\alpha = arctgk$; $\sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$; $\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

Поэтому $F'' = \frac{k^4+2k^2+1}{\sqrt{(k^2+1)^5}} > 0$. Следовательно, сила F будет минимальной. При этом минимальное значение силы F равно

$$F_{\min} = \frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Задания для домашней работы:

1. Максимальная дальность полета ядра, выпущенного из неподвижной пушки, равна $S = 22{,}5$ м. Найдите максимально возможную дальность полета ядра, выпущенного из этой же пушки, установленной на барже, которая движется горизонтально с постоянной скоростью $v = 15{,}0$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать $g = 10{,}0$ м/с^2.

Ответ: 58,5 м.

2. Подвешенному на нити шарику сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Когда нить отклонилась на угол α = 30° от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найдите угол максимального отклонения нити.

Ответ: 0,73.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Пьера де Ферма.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,

- цитаты.

Тема 7: Применение производной при решении задач на строительство

Задача №1 [9]

Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

Решение

Составим схематично план местности по условиям задачи (рисунок 13).

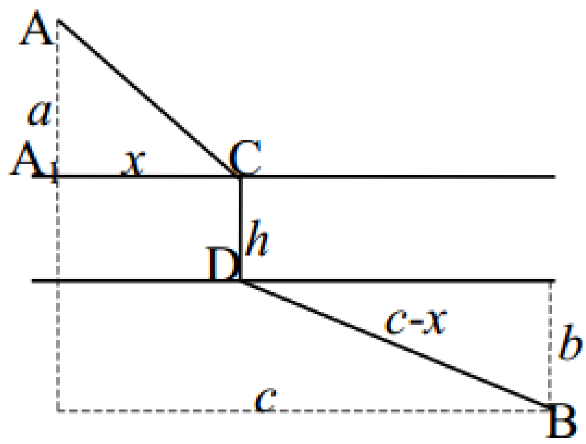

Рисунок 13

Имеем постоянные расстояния а, b, с и h. По расположению моста на схеме можем записать длину дороги между пунктами А и B как

$$l = AC + h + DB.$$

Выбрав за независимую переменную x расстояние A_1C получим

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \qquad DB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (x - c)^2},$$

где x изменяется на отрезке [0; c].

Поиск наименьшего значения функции $l(x)$ на отрезке $[0;\ c]$ начнем с нахождения производной l' и критических точек, которые лежащие внутри этого отрезка:

$$l' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{b^2+(x-c)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2+(x-c)^2}+(x-c)\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+(x-c)^2)}}$$

Решим уравнение и получим:

$$x^2(b^2+(x-c)^2) = (x-c)^2(a^2+x^2),$$

$$b^2x^2 = a^2(x-c)^2,$$

$$x_1 = \frac{ac}{a-b} \text{ и } x_2 = \frac{ac}{a+b}.$$

Точка x_1 лежит вне отрезка $0 \leq\ x \leq c$: при $a > b, x_1 > c$; при $a < b, x_1 < 0$. Точка x_2 лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях a, b и с, так как при этом $x_2 > 0$ и $\frac{a}{a+b} < 1$, т.е. $x_2 < c$.

Производная l'существует всюду, следовательно у функция l другие критические точки отсутствуют.

Внутри отрезка $[0;\ c]$ функция l имеет одну критическую точку x_2. По знаку производной, видим, что точка x_2 точка минимума. Значит в этой точке непрерывная функция l имеет наименьшее значение из всех ее значений на этом отрезке.

Таким образом, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние $A_1C = \frac{ac}{a+b}$.

Задача №2 [11]

Из трех одинаковых тонких досок изготовить желоб с наибольшим поперечным сечением.

Решение

Поперечное сечение данного желоба будет иметь вид равнобокой трапеции (рисунок 14).

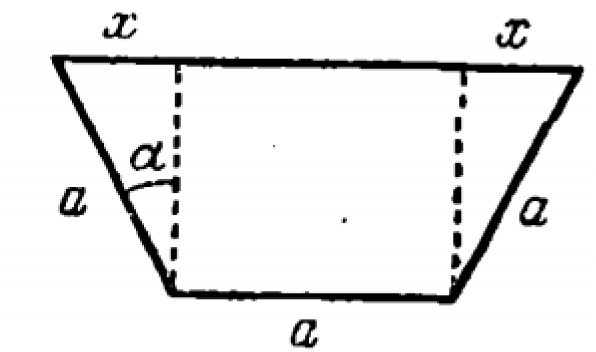

Рисунок 14

Обозначим площадь этой трапеции за s, она будет зависит от наклона боковых сторон трапеции. За неизвестное примем переменную угла между боковой стороной и высотой трапеции который обозначим за α, и выразим через α рассматриваемую площадь s:

$$x = a\sin\alpha\,, h = a\cos\alpha \text{ и } s = h\,(a + x)$$

или

$$s = a^2\,(1 + \sin\alpha)\cos\alpha,$$

где угол α может изменяться на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь необходимо найти наибольшее значение функции $s(\alpha)$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Для начала найдем критические точки функции s, лежащие внутри отрезка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$s' = a^2\,(\cos^2\alpha — (1 + \sin\alpha)\sin\alpha) = a^2\,(1 — \sin\alpha — 2\sin^2\alpha).$$

Найдём нули производной функции s', получим уравнение:

$$2\sin^2\alpha + \sin\alpha — 1 = 0,$$

решая которое, как квадратное, найдем

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \sin\alpha = — \ 1.$$

Из всех точек α, которые задаются вышенаписанными двумя уравнениями, внутри отрезка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ лежит только одна точка $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Она критическая и в ней выполняются все необходимые для этого условия. Производная функции s' существует всюду, следовательно других критических точек у нас нет.

Осталось найти значения функции s в критической точке $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и на концах отрезка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1{,}28a^2,$$

$$s(0) = a^2,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Сравнив полученные значения, можем сделать вывод: наибольшее значение функции s на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ достигается в точке $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Таким образом, желоб из трех одинаковых досок будет иметь наибольшее поперечное сечение, когда это сечение представляет равнобокую трапецию, верхнее основание которой вдвое больше нижнего.

Задания для домашней работы:

1. Из куска жести, форма и размеры которого (в дм.) показаны на рисунке 15, вырезать прямоугольник с наибольшей площадью.

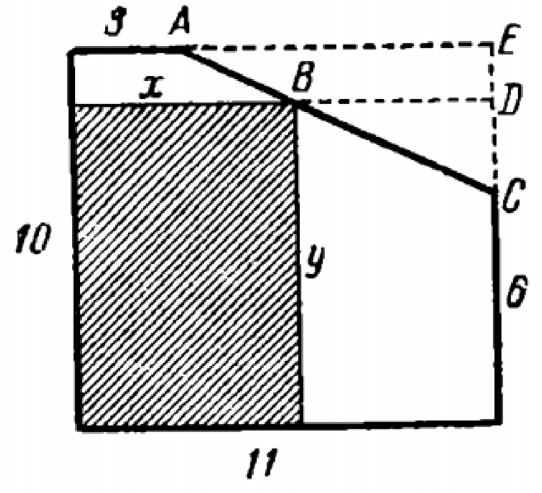

Рисунок 15

Ответ: $S_{\text{наиб}} = 66 \text{ дм}^2$.

2. Компания изготавливает и продает 1000 изделий в месяц по цене 2000 рублей за штуку. При уменьшении цены на 50 рублей можно дополнительно продать еще 50 изделий в месяц. При какой цене фирма получит максимальный доход и каково его значение?

Ответ: 2225000 (руб).

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Андрея Андреевича Маркова.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 8: Задачи с кораблями

Задача №1 [31, с. 95]

Бортовые огни малых судов можно различить в море на расстоянии до 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях от корабля B, который идет на запад со скоростью 7 миль в час.

Будут ли корабли друг от друга на расстоянии, достаточном для приема бортовых сигналов?

Решение

В настоящий момент положение кораблей A и B относительно сторон света выглядит следующим образом (рисунок 16).

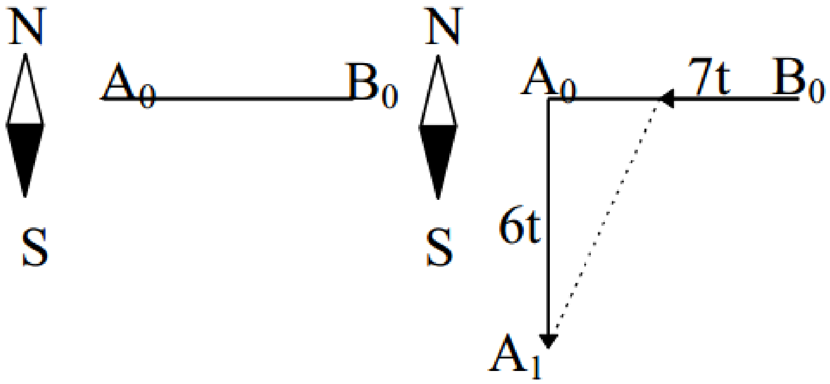

Рисунок 16

Через какой-то промежуток времени t их положение изменится. А именно, корабль A окажется в новой точке A_1 и расстояние между старой и новой точкой будет $|A_0A_1| = 6t$ миль, а корабль B в точке B_1 и расстояние $|B_0B_1| = 7t$ миль. Расстояние (d) между двумя кораблями в момент времени t будет составлять

$$d(t) = |A_1B_1| = \sqrt{|A_0A_1|^2 + |A_0B_1|^2} = \sqrt{(6t)^2 + (5-7t)^2} =$$
$$= \sqrt{85t^2 - 70t + 25}.$$

Теперь исследуем $d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$, где $t > 0$ на экстремум.

$$d'(t) = \frac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}},$$

$d'(t) = 0$, отсюда $t = \frac{7}{17}$ часов. Найдем вторую производную, а затем определим ее знак в критической точке

$$d''(t) = \frac{80100}{4\sqrt{(85t^2 - 70t + 25)^3}} > 0,$$

при $t = \frac{7}{17}$.

Таким образом, наименьшее расстояние которое может быть между кораблями A и B будет составлять

$$d\left(\frac{7}{17}\right) = \sqrt{85 \cdot \frac{49}{289} - 70 \cdot \frac{7}{17} + 25} = \sqrt{\frac{180}{17}} \approx 3{,}25 \text{ мили},$$

а это больше, чем 1 миля. Значит, исходя из условия задачи, мы можем утверждать, что принимать друг от друга сигналы они не смогут.

Задача №2 [18]

Корабль K стоит в 9 км от ближайшей точки B прямолинейного берега (рисунок 17). С корабля нужно послать курьера в лагерь L, находящийся на берегу и расположенный в 15 км (считая по берегу) от точки B. В каком пункте P берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь за кратчайшее время, если он идет пешком со скоростью 5 км/ч, а на веслах — 4 км/ч?

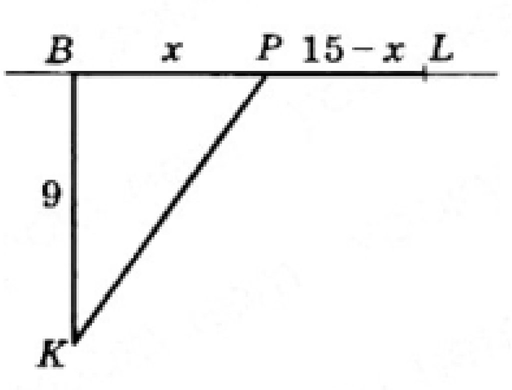

Рисунок 17

Решение

Пусть $BP = x, 0 < x < 15$, тогда $PL = 15 - x, PK = \sqrt{81 + x^2}$ (км.). Тогда время движения курьера по пути PL можно записать так:

$$\frac{15 - x}{5} + \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} \text{ (ч.)}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{15-x}{5} + \frac{\sqrt{81+x^2}}{4}$ на промежутке $(0; 15)$. Найдём производную этой функции

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Найдём критические точки, $f'(x) = 0$. Находим два корня:

$$x_1 = -12 \text{ и } x_2 = 12,$$

из которых только x_2 принадлежит промежутку $(0; 15)$. Следовательно функция имеет единственную критическую точку $x_2 = 12.$, на $(0; 15)$. И в ней функция имеет свое наименьшее значение на $(0; 15)$.

Ответ: курьер должен пристать к берегу в 12 км от пункта B.

Задания для домашней работы:

1. Статуя высотой a м возвышается на постаменте высотой b м. на каком расстоянии от основания постамента должен встать наблюдатель, рост которого до уровня глаз c м, $c < b$, чтобы видеть статую под наибольшим углом? Шириной постамента пренебречь. Решите задачу в общем виде, получите ответ в случае, если: $a = 3, b = 2{,}5, c = 1{,}5$.

Ответ: 2 м.

2. Шар свободно скатывается по наклонной плоскости. Если основание АВ остается неизменным, то каков должен быть угол наклона φ, чтобы время скатывания шара было наименьшее?

Ответ: $\varphi = 45°$ (Использовать зависимость пути от времени при равномерно-ускоренном движении).

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Лопиталя Гийома Франсуа.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 9: Использование производной при решении задач на объёмы

Задача №1 [31, с. 75]

В химических лабораториях часто практикуется изготовление конусообразных фильтров из кружков пропускной бумаги. С этой целью сектор $OACB$ кружка (рисунок 18) складывается и оставшийся от кружка сектор $OAMB$ свёртывается в боковую поверхность конуса. При какой величине угла AOB конусообразный фильтр, полученный таким образом из кружка радиуса r, имеет наибольший объём?

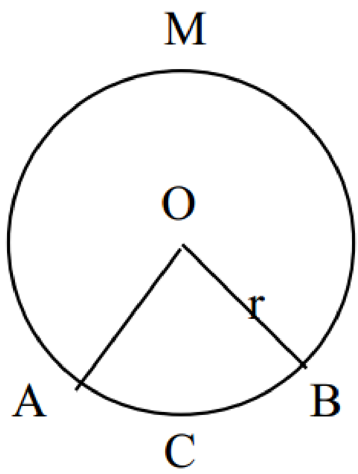

Рисунок 18

Решение

Объём фильтра, который получили, можно выразить через формулу:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2\sqrt{r^2 - x^2},$$

где x — радиус основания конуса.

Длина окружности равна длине дуги AMB. Исследуем функцию на экстремум заранее зная, что $0 < x < r$. Для начала найдём первую производную

$$V' = \frac{\pi x}{3}\left(\frac{2r^2 - 3x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right).$$

Теперь нули функции $V'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$. Найдём вторую производную для определения знака второй производной в критических точках:

$$V''(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{(r^2-x^2)^3}}(2r^4-9x^2r^2+6x^4).$$

Отсюда получаем $V''(0)>0, V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\right)<0$. В точке $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\,r$ функция достигает максимума, но так как

$$2\pi x=\cup\,AMB=\frac{\pi r(360^0-\angle AOB)}{180^0},$$

значит выразим угол $\angle AOB$ и подставим в полученное уравнение $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\,r$. Получим, что объём достигает наибольшего значения, когда $\angle AOB\approx 66^0$.

Задача №2 [1]

В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V$ м^3 меньше, чем первая ($0<V<10$), а третья труба наливает в час на $10V$ м^3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 30% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся $0{,}7$ бассейна. При каком значении V бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Решение

Пусть объем бассейна будет равен 1. Работая вместе, первая и вторая труба вместе за t_1 ч заполняют

$$(30+30-3V)t_1=(60-3V)t_1=0{,}3$$

бассейна. А все три трубы вместе за t_2 ч, заполняют

$$(30+30-3V+10V)t_2=(90+7V)t_2=0{,}7$$

бассейна. По этим данным можем записать за сколько времени наполняется бассейн:

$$t(V)=t_1+t_2=\frac{0{,}1}{20-V}+\frac{0{,}7}{90+7V}=\frac{23}{(20-V)(90+7V)},$$

где $\left(0<V<10\right)$.

Найдём производную этой функции и критические точки, используя равносильность $x^2=y^2\ \Rightarrow\ x=\pm y$:

$$t'(V) = \frac{0{,}1}{(20-V)^2} + \frac{4{,}9}{(90+7V)^2},$$
$$t'(V) = 0.$$

$V = \frac{25}{7}$ — критическая точка. Она же точка минимума функции.

Ответ: $V = \frac{25}{7}$.

Задания для домашней работы:

1. В некотором царстве, в некотором государстве подорожала жесть, идущая на изготовление консервных банок. Экономный хозяин фабрики рыбных консервов хочет выпускать свою продукцию в банках цилиндрической формы объёмом V с наименьшими возможными затратами жести. Вычислите диаметр основания и высоту такой банки.

Ответ: диаметр и высота банки равны $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

2. В некотором государстве используется прогрессивная система налогообложения. Сумма налога состоит из линейной части, пропорциональной доходу, и нелинейной части, зависящей от дохода по степенному закону. Общая величина налога определяется формулой $T(W) = aW + (bW + c)^p$,где $W-$ доход,$p-$ показатель степени, a, b, c − положительные коэффициенты. При каком уровне дохода ставка налога будет минимальной?

Ответ: $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{p-b}}$.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Жана Лерона Д’Аламбера.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,

- научные результаты,
- цитаты.

Тема 10: Применение производной при решении экономических задач

Задача№1 [32]

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи у кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

Решение

Никель и алюминий взаимосвязаны, и нас интересует максимальная производительность металла, поэтому направим всех рабочих из первой области на добычу никеля (втрое эффективнее алюминию). За сутки они добудут $160 \cdot 5 \cdot 0{,}3 = 240$ (кг) никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают y рабочих, а никель — $(160 - y)$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5y}$ (кг) алюминия и $\sqrt{5(160-y)}$ кг никеля. Получим функцию

$$f(x) = \sqrt{5y} + \sqrt{800 - 5y},$$

где $y \in (N < 160)$.

Найдём производную этой функции и критические точки:

$$f'(y) = \frac{5}{2\sqrt{5y}} - \frac{5}{2\sqrt{800-5y}},$$

$$f'(y) = 0.$$

$y = 80$ — критическая точка. Она же точка максимума функции на $[1; 160]$.

Таким образом, из второй области нужно направить 80 рабочих на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. А вместе рабочие из первой и второй области добудут 280 кг металла.

Ответ: 280 кг.

Задача №2 [31, с. 55]

Консервная банка имеет форму прямого кругового цилиндра. Каково должно быть соотношение между диаметром основания и высотой цилиндра, чтобы при данной ёмкости V на производство банки пошло наименьшее количество жести?

Решение

Оптимизируемая величина S — площадь полной поверхности цилиндра. Выразим её как функцию радиуса r основания цилиндра. Если H — высота цилиндра, то из формулы $V = \pi r^2 H$ получаем $H = \frac{V}{\pi r^2}$.

Тогда

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Нам нужно выяснить при каком значении $0 > r$ функция

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

принимает наименьшее значение. Для этого найдём производную.

$$S'(r) = 2\pi \cdot 2r - 2V\frac{1}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

Следовательно, $S'(r) = 0$ при $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Это единственная критическая точка. Определим знак второй производной в этой точке:

$$S''(r) = \frac{4\pi r^3 + 4V}{r^3},$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0.$$

Следовательно, в этой точке функция достигает наименьшего значения. Далее имеем

$$H = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{Vr}{\pi r^3} = \frac{Vr}{\pi \cdot \frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Это означает, что высота цилиндра равняется диаметру основания. Итак, при данной ёмкости на производство банки пойдёт наименьшее количество жести, если банку изготовить в виде равностороннего цилиндра (цилиндр называется равносторонним, если его осевое сечение — квадрат).

Задания для домашней работы:

1. Известно, что частное предприятие работает в условиях совершенной конкуренции. Издержки предприятия зависят от количества выпускаемой продукции по данной формуле: $C(Q) = Q^2 + 100$, где Q — количество продукта в штуках. Известно, что предприятие реализует свой товар по цене 300 руб. / за единицу продукции. Каким должен быть еженедельный выпуск продукции, чтобы получаемая предприятием прибыль от ее реализации была максимальной? Определите величину этой прибыли.

Ответ:150 шт., 22400 руб.

2. Компания продает товар по цене 100 рублей, если объем партии не превышает 5000 единиц. При большем объеме предоставляется скидка в размере 5 рублей на каждую последующую тысячу, превышающую уровень 5000. При каком объеме заказа компания получаем наибольший доход?

Ответ: 781250 руб.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Огюстена Луи Коши.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,

- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

Тема 11: Решение задач из ЕГЭ

Задача №1 [26]

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять $5\,000\,000$ рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение

Так как Григорий готов выделять $5\,000\,000$ рублей в неделю и оплачивает труд рабочего 500 рублей в час, то всего часов вместе рабочие будут трудиться $5\,000\,000 : 500 = 10\,000$ (ч).

Предположим, что в первом городе на заводе рабочие трудятся x^2 (ч.) и производят $3x$ единиц товара, а во втором городе трудятся — y^2 (ч.) и производят $4y$ единиц товара. Тогда можем составить следующее уравнение

$x^2 + y^2 = 10\,000$ — общее количество часов.

$f(x) = 3x + 4y$ — суммарное количество единиц товара с двух заводов.

Выразим $y = \sqrt{10\,000 - x^2}$ и подставим во второе уравнение.

$$f(x) = 3x + 4\sqrt{10\,000 - x^2}.$$

Найдём производную этой функции и критические точки:

$$f'(x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{10\,000 - x^2}},$$

$f'(x) = 0.$ $x = \pm 60$, отрицательное значение не рассматриваем, т.к. часы. $x = 60$ — критическая точка. Она же точка максимума функции. $y = \sqrt{10\,000 - 3600} = 80.$

Таким образом, $f_{\text{наиб}} = f(80) = 3 \cdot 60 + 4 \cdot 80 = 180 + 320 = 500.$

Ответ: 500 единиц товара.

Задача №2 [21]

Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Решение

Предположим, что в конце некоторого года t акции будут проданы за t^2 тыс. руб. Получившуюся сумма положим под 25% годовых в банк на $(20 - -t)$ лет. Тогда можем записать функцию для вычисления цены акций к концу вклада $s(t) = t^2 \cdot 1{,}25^{20-t}$ тыс. руб., где $t \in (N < 20)$.

Найдём производную этой функции и критические точки:

$$s'(t) = 1{,}25^{20-t} t(2 - t \ln 1{,}25),$$

$f'(t) = 0.$ $t = \frac{2}{\ln 1{,}25} = 2\log_{1{,}25} e$ — критическая точка. Она же точка максимума функции.

Заметим, что $\left(\frac{5}{4}\right)^4 < e < \left(\frac{5}{4}\right)^5 \Rightarrow 8 < 2\log_{1,25} e < 10.$ Из этого следует, что точка максимума лежит на промежутке $(8;\ 10)$. Сравним значения функции в точках $8, 9$ и 10.

$$\frac{s(9)}{s(8)} = \frac{81 \cdot 1{,}25^{11}}{64 \cdot 1{,}25^{12}} = \frac{81 \cdot 4}{64 \cdot 5} = \frac{324}{320} > 1,$$

$$\frac{s(9)}{s(10)} = \frac{81 \cdot 1{,}25^{11}}{100 \cdot 1{,}25^{10}} = \frac{81 \cdot 5}{100 \cdot 4} = \frac{405}{400} > 1,$$

Таким образом, наибольшее значением функции на множестве натуральных аргументов достигается в точке 9. Продавать акции необходимо в конце девятого года.

Ответ: в конце девятого года.

Тема 12: Подведение итогов курса

На данном занятии учитель подводит итоги проделанной работы и выводит рейтинг для обучающихся по пройденному курсу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная дипломная работа посвящена разработке курса по выбору «Применение производной для решения задач повышенной трудности». Основная задача которого способствовать эффективности обучения и подготовке обучающихся 11 классов естественнонаучного профиля обучения в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

В процессе исследования были решены все поставленные задачи:

1. При разработке курса был проведен анализ 4 популярных учебников по алгебре и началам анализа 10 и 11 классов, рекомендованных Министерством Образования России, на предмет наличия в них материала, посвященного «производной», а именно сведений теоретического и практического характера.

2. Данный курс был оформлен в соответствии с выявленными требованиями к оформлению элективных курсов. Он содержит:

   - пояснительную записку,
   - тематическое планирование,
   - содержание.

3. Был разработан конспект занятия по теме «Задачи с кораблями».

Таким образом, можно сделать вывод о том, что поставленные в работе задачи исследования решены, цель достигнута.

Материалы дипломной работы могут быть использованы в качестве дополнения и введения данного курса в школы с естественнонаучным профилем обучения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ALEXLARIN.NET : сайт. – Москва, 2020 – . – URL: https://alexlarin.net (дата обращения: 11.01.2020). – Текст: электронный.

2. Абрамов, А. В. Математические задачи с практическим содержанием : учеб. пособие / А. В. Абрамов, Н. В. Абрамова, М. Н. Зайнуллин; Рос. акад. естествознания. – Москва : Академия естествознания, 2015. – 129 с. : ил. ; 20 см. – Библиогр.: с. 127-128. - 500 экз. – ISBN 978-5-91327-332-1. – Текст : непосредственный.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – [6-е изд.]. – Москва : Мнемозина, 2009. − 424 с. : ил. – ISBN 978-5-346-01201-6. – Текст : непосредственный.

4. Алиева, С. В. Социальная педагогика : учебное пособие / А. В. Иванов, С. В. Алиева. – Москва : Дашков и К, 2013. – 424 с.

5. Балаян, Э. Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ : 9-11 классы. – Ростов н/Д : Феникс, 2015. – 317 с.– ISBN 978-5-222-20106-0.

6. Возрастная психология : учебник для бакалавров / Л. Ф. Обухова. – [Москва, 2013]. – Текст : электронный // ЭБС Юрайт. – URL: https://urait.ru/bcode/367629 (дата обращения: 24.03.2020).

7. Воронов, В. В. Педагогика школы : новый стандарт : учеб. пособие для студентов-педагогов и учителей. – Москва : ПО России, 2012. – 288 с. – ISBN 978-5-93134-414-0.

8. Галкина, Т. И. Организация профильного обучения в школе : книга современного завуча / Т. И. Галкина, Н. В. Сухенко. – Ростов н/Д : Феникс, 2007. – 288 с. – ISBN 978-5-222-08379-6 – Текст : непосредственный.

9. Данилов, Н. Н. Математическое моделирование : учебное пособие / Н. Н. Данилов. – Кемерово : КемГУ, 2014. – 98 с. – ISBN 978-5-8353 1633-5. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL:

https://e.lanbook.com/book/58313 (дата обращения: 09.04.2020). – Режим доступа: для авториз. пользователей.

10. Еремин, В. А. Отчаянная педагогика : организация работы с подростками. – Москва : Владос, 2014. – 176 с. – ISBN 978-5-691-01806-0 – Текст : непосредственный.

11. Зайниев, Р. М. Задачи и упражнения по математике с практическим содержанием : учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям техники и технологии; ГОУ ВПО «Кам. госуд. инж.-экон. акад». – Набережные Челны: Камский гос. инж.-экон. акад., 2008. – 80 с.

12. Как выбрать профиль обучения : родительское собрание / Биология в школе. – 2005. – №6. – с. 16-18.

13. Киреева, Э. А. Психология и педагогика (для бакалавров). – Москва : КноРус, 2012. – 496 с.

14. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.]. – [17-е изд.]. – Москва : Просвещение, 2008. – 384 с. : ил. ; – ISBN 978-5-09-019513-3. – Текст : непосредственный.

15. Мерзляк, А. Г. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень : 10 класс : учебное пособие / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский [и др.]. ; под редакцией В. Е. Подольского. – [4-е изд., стереотип]. – Москва : Вентана-Граф, 2019. – 208 с. : ил. – ISBN 978-5-360-10855-9. – Текст : непосредственный.

16. Мудрик, А. В. Социальная педагогика : учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. – [8-е изд., испр. и доп.]. – Москва : Академия, 2013. – 240 с. ISBN 978-5-7695-8842-6. – Текст : непосредственный.

17. Муравин, Г. К. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 кл. : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – [6-е изд.,

стереотип]. – Москва : Дрофа, 2019. – 318, [2] с. : ил. – ISBN 978-5-358-10963-6. – Текст : непосредственный.

18. Никольский, С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – [10-е изд.]. – Москва : Просвещение, 2015. – 464 с. – ISBN 978-5-09-021970-9. – Текст : непосредственный.

19. Педагогика / Иван Подласый. – Москва : ВЛАДОС, 2007. – 365 с. – (Теория и технология воспитания: учеб. для студентов вузов, обучающихся по направлениям подгот. и специальностям в обл. «Образование и педагогика»: [в 3 книгах] / Иван Подласый ; кн. 3). –ISBN 978-5-691-01553-3. – Текст : непосредственный.

20. Радугин, А. А. Психология и педагогика : Учебное пособие для вузов / Составитель и ответственный редактор А. А. Радугин ; научный редактор Е. А. Кротков. – Москва : Центр, 2002. – 256 с. – ISBN 5-88860-054-7. – Текст : непосредственный.

21. РЕШУ ЕГЭ : образовательный портал для подготовки к экзаменам : сайт. – Москва, 2020 – . – URL: https://ege.sdamgia.ru (дата обращения: 11.01.2020). – Текст: электронный.

22. Рурукин, А. Н. Контрольно-измерительные материалы. Алгебра и начала анализа. 10 класс / Сост. А. Н. Рурукин. – [4-е изд.]. – Москва : ВАКО, 2019. – 112 с. – ISBN 978-5-408-03347-8. – Текст : непосредственный.

23. Рурукин, А. Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа : 10 класс. – Москва : ВАКО, 2016. – 352 с. – (В помощь школьному учителю). ISBN 978-5-408-02413-1. – Текст : непосредственный.

24. Сборник задач по физике. В 2 частях. Ч.1. Механика, молекулярная физика, теплота для студентов всех специальностей / А. Б. Федотов, И. А. Вдовиченко, Г. Д. Павлова, Г. И. Шишков. – Н.Новгород : НГТУ, 2004. – 118 с.

25. Сластенин, В. А. Педагогика : Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов.; под редакцией В. А. Сластенина. – Москва : Академия, 2013. – 576 с. – ISBN 5-7695-0878-7. – Текст : непосредственный.

26. Федеральный институт педагогических измерений : открытый банк тестовых заданий : сайт. – Москва, 2020 – . – URL: https://fipi.ru (дата обращения: 11.01.2020). – Текст: электронный.

27. Хрипкова, А. Г. Мир детства. Юность / А. Г. Хрипкова, Г. Н. Филонов. – Москва : Педагогика, 2012. – 432 с. – ISBN 5-7155-0129-6. – Текст : непосредственный.

28. Чекалкин, Н. С. Математический анализ, 1 семестр. Учебное пособие для студентов очной формы обучения / Н.С. Чекалкин, И. М. Аксененкова, О. А. Евсеева, Т. Р. Игонина, Е. Ю. Кузнецова, О. А. Малыгина. – Москва : МИРЭА, 2017. – 129 с.

29. Чистякова, С. Н. Элективные ориентационные курсы и другие средства профильной ориентации в предпрофильной подготовке школьников. Учебно-методическое пособие / С. Н. Чистякова – Москва : АПКиПРО, 2007. – 11 с.

30. Шаповаленко, И. В. Психология развития и возрастная психология : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. В. Шаповаленко – [3-е изд., перераб. и доп.]. – Москва : Издательство Юрайт, 2014. – 575 с. – ISBN 978-5-9916-3510-3. – Текст : непосредственный.

31. Эрентраут, Е. Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников : учебно-методическое пособие / Е. Н. Эрентраут – Челябинск : Изд-во ЧГГТУ, 2004. − 119 с. – ISBN 5-85716-532-6. – Текст : непосредственный.

32. Ященко, И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. – Москва :

Национальное образование, 2020. – 256 с. – (ЕГЭ.ФИПИ – школе). ISBN 978-5-4454-1018-8. – Текст : непосредственный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

План-конспект урока

«Задачи с кораблями»

Тема и номер урока в теме: задачи с кораблями, урок №8.

Цель занятия: создать условия для формирования умений, навыков решения нестереотипных задач.

Задачи:

- способствовать развитию у обучающихся умений и навыков по решению задач повышенной сложности,
- формирование познавательного интереса к изучаемому предмету,
- провести рефлексию, получить обратную связь по занятию.

Структура урока:

1. Организационный момент (1 мин.).
2. Проверка домашнего задания (7 мин.).
3. Решение задач (29 мин.).
4. Рефлексия (2 мин.).
5. Запись домашнего задания (1 мин.).

Формы работы обучающихся: фронтальная, работа на доске и в тетрадях.

Оборудование: компьютер, проектор, экран, классная доска, мел.

Ход занятия

1. **Организационный момент.**

Здравствуйте, ребята! Сегодня у нас занятие по теме: «Задачи с кораблями». На этом занятии мы с вами будем учиться решать задачи повышенной трудности, связанные так или иначе с кораблями, и использовать при решении понятие «производная». Надеюсь, что *сегодняшний урок, поможет вам понять происходящее и подготовит к адекватному восприятию производной, имеющее практическую направленность, ориентированное на ваш жизненный опыт, и поможет ответить на вопрос: «Так ли важно изучать тему «Производная»?». Но для начала приступим к проверке домашнего задания.*

2. **Проверка домашнего задания.**

Есть ли у кого вопросы по решению задач? Если нет, то передаём листочки с решениями на край стола учителя и готовимся к прослушиванию доклада от ваших одноклассников.

Напоминаю, что за полностью правильно решенные домашние задачи, вы получаете по 2 балла за каждую. За доклад — 3 балла.

Домашнее задание

1. Из куска жести, форма и размеры которого (в дм.) показаны на рисунке 15, вырезать прямоугольник с наибольшей площадью.

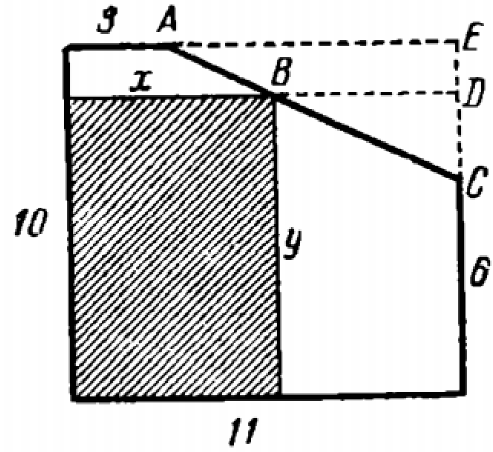

Рисунок 15

Ответ: $S_{\text{наиб}} = 66$ дм^2.

2. Компания изготавливает и продает 1000 изделий в месяц по цене 2000 рублей за штуку. При уменьшении цены на 50 рублей можно дополнительно продать еще 50 изделий в месяц. При какой цене фирма получит максимальный доход и каково его значение?

Ответ: 2225000 (руб).

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Андрея Андреевича Маркова.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.

3. **Решение задач.**

–Перейдём к решению задач по нашей теме. Первая задача представлена на экране. Внимательно читаем и думаем над решением и графическим представлением.

Задача №1

Бортовые огни малых судов можно различить в море на расстоянии до 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях от корабля B, который идет на запад со скоростью 7 миль в час. Будут ли корабли друг от друга на расстоянии, достаточном для приема бортовых сигналов?

Решение

В настоящий момент положение кораблей A и B относительно сторон света выглядит следующим образом (рисунок 16).

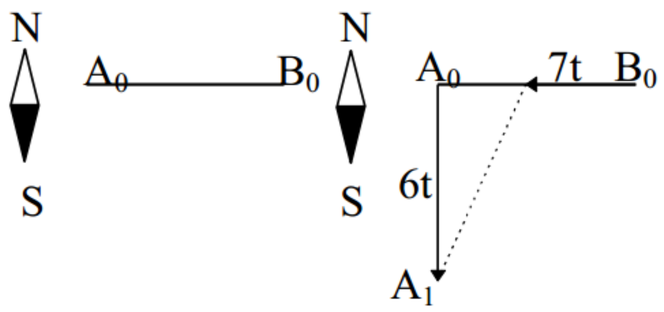

Рисунок 16

Через какой-то промежуток времени t их положение изменится. А именно, корабль A окажется в новой точке A_1 и расстояние между старой и новой точкой будет $|A_0A_1| = 6t$ миль, а корабль B в точке B_1 и расстояние $|B_0B_1| = 7t$ миль. Расстояние (d) между двумя кораблями в момент времени t будет составлять

$$d(t) = |A_1B_1| = \sqrt{|A_0A_1|^2 + |A_0B_1|^2} = \sqrt{(6t)^2 + (5-7t)^2} =$$
$$= \sqrt{85t^2 - 70t + 25}.$$

Теперь исследуем $d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$, где $t > 0$ на экстремум.

$$d'(t) = \frac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}},$$

$d'(t) = 0$, отсюда $t = \frac{7}{17}$ часов. Найдем вторую производную, а затем определим ее знак в критической точке

$$d''(t) = \frac{80100}{4\sqrt{(85t^2 - 70t + 25)^3}} > 0,$$

при $t = \frac{7}{17}$.

Таким образом, наименьшее расстояние которое может быть между кораблями A и B будет составлять

$$\mathrm{d}\left(\frac{7}{17}\right) = \sqrt{85 \cdot \frac{49}{289} - 70 \cdot \frac{7}{17} + 25} = \sqrt{\frac{180}{17}} \approx 3{,}25 \text{ мили},$$

а это больше, чем 1 миля. Значит, исходя из условия задачи, мы можем утверждать, что принимать друг от друга сигналы они не смогут.

–Переходим к решению следующей задачи.

Задача №2

Корабль K стоит в 9 км от ближайшей точки B прямолинейного берега (рисунок 17). С корабля нужно послать курьера в лагерь L, находящийся на берегу и расположенный в 15 км (считая по берегу) от точки B. В каком пункте

P берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь за кратчайшее время, если он идет пешком со скоростью 5 км/ч, а на веслах – 4 км/ч?

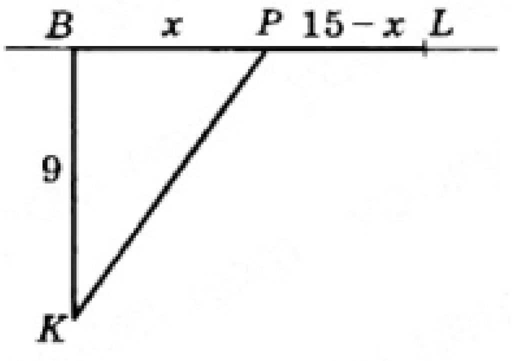

Рисунок 17

Решение

Пусть $BP = x, 0 < x < 15$, тогда $PL = 15 - x, PK = \sqrt{81 + x^2}$ (км.). Тогда время движения курьера по пути KPL можно записать так:

$$\frac{15 - x}{5} + \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} \text{ (ч.)}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{15-x}{5} + \frac{\sqrt{81+x^2}}{4}$ на промежутке $(0; 15)$. Найдём производную этой функции

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Найдём критические точки, $f'(x) = 0$. Находим два корня:

$$x_1 = -12 \text{ и } x_2 = 12,$$

из которых только x_2 принадлежит промежутку $(0; 15)$. Следовательно функция имеет единственную критическую точку $x_2 = 12.$, на $(0; 15)$. И в ней функция имеет свое наименьшее значение на $(0; 15)$.

Ответ: курьер должен пристать к берегу в 12 км от пункта B.

4. **Рефлексия.**

–А теперь предлагаю достать всем свои смартфоны для анализа сегодняшнего занятия.

На экране выведен сайт, который нужно ввести в адресную строку вашего браузера – **menti.com.** *А так же код, который нужно ввести в появившееся окошко.*

Если все готовы, то предлагаю ответить вам на вопрос: С каким словом у вас ассоциируется сегодняшнее занятие? Вписывайте варианты своих ответов и отправляйте. Результаты фиксируются сразу же на экране (анонимно).

5. **Запись домашнего задания.**

Учитель раздаёт листочки с задачами.

–Первое задание практического характера. Ребята, решите предложенные задачи на отдельном листочке. Обязательно подпишите фамилию и имя. Для удобства, после формулировки задачи даётся ответ.

1. Статуя высотой a м возвышается на постаменте высотой b м. на каком расстоянии от основания постамента должен встать наблюдатель, рост которого до уровня глаз c м, $c < b$, чтобы видеть статую под наибольшим углом? Шириной постамента пренебречь. Решите задачу в общем виде, получите ответ в случае, если: $a = 3, b = 2{,}5, c = 1{,}5$.

Ответ: 2 м.

2. Шар свободно скатывается по наклонной плоскости. Если основание АВ остается неизменным, то каков должен быть угол наклона φ, чтобы время скатывания шара было наименьшее?

Ответ: $\varphi = 45°$ (Использовать зависимость пути от времени при равномерно-ускоренном движении).

–Второе задание теоретического характера, как всегда, даётся на 1-2 человека.

3. Подготовить краткое сообщение о трудах великого математика — Лопиталя Гийома Франсуа.

План доклада:

- портрет,
- дата и место рождения,
- биография,
- научные результаты,
- цитаты.