МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обобщающего повторения тригонометрии при подготовке к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
72% авторского текста
Работа рекоменд к защите
« 25 » мая 2020 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
____________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
студентка группы ОФ-513/086-5-1
Еремеева Мария Юрьевна

Научный руководитель:
доктор пед.наук, профессор кафедры МиМОМ
Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск,
2020

Челябинск,
2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В данное время в школьном курсе математики уделяется достаточно большое внимание изучению тригонометрических функций и уравнений.

Поэтому необходимо привести к строгой системе знания учащихся, которые относятся к учебному материалу по тригонометрии (к примеру, свойства тригонометрических функций, методы преобразования тригонометрических выражений) и дает возможность эффективно применять эти знания к предмету алгебра (уравнения, эквивалентность уравнений, неравенства, одинаковые преобразования алгебраических выражений и т.д.) [1].

Поэтому сейчас нужно упрочить прикладные направления в преподавании математики. В соответствии с результатами анализа содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических задач на данный момент очень обширны.

Из-за слишком маленького количества времени, которое выделяется на такие темы как «Тригонометрические уравнения» и «Тригонометрические неравенства» и т.д., возникает множество проблем из-за того, что в темах существует достаточно большой объем информации. Так как эти знания очень широко используются в жизни практически каждого человека, то необходимо сформировать фундаментальные знания различных методов решения тригонометрических задач. Перед учителем ставится одна из главных целей - это научить учащихся решать абсолютно любые тригонометрические уравнения, но в рамках учебной программы это практически невозможно. Тогда на помощь нам приходит элективный курс. В этом и заключается **актуальность** темы моего исследования.

Проблема исследование заключается в том, что из-за скудного количества времени по разделу «Тригонометрия» учащиеся 11 класса на ЕГЭ допускают большое количество ошибок при решении заданий из данного раздела или не решают такие задания вовсе.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в старших классах.

Предмет исследования – методика обобщающего повторения умений решать тригонометрические задачи.

Цель исследования заключается в разработке элективного курса, направленного на обобщающее повторение умений решать тригонометрические задачи при подготовке к ЕГЭ.

Гипотеза. Элективный курс поможет обобщить знания в целом по теме решение тригонометрических задач в ЕГЭ. Если учащиеся освоят материал курса, то повысится их уровень знаний.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие **задачи**:

1. Определить роль тригонометрических задач в школьном курсе математики.
2. Разработать технологию обобщающего повторения навыков и умений для решения тригонометрических задач.
3. Составить программу элективного курса «Тригонометрические задачи при подготовке к ЕГЭ» в 11 классе.
4. Описать проведение педагогического эксперимента.

Квалификационная работа состоит из введения, двух глав и заключения.

Первая глава включает три параграфа. Основная часть первой главы посвящена видам и методам решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Вторая глава строится из трех параграфов, в них описано обобщающее повторение умений и навыков решения тригонометрических задач. Представлен разработанный элективный курс «Тригонометрические задачи при подготовке к ЕГЭ для 11 класса». Приведено описание педагогического эксперимента и его результатов.

ГЛАВА 1. ТРИГОНОМЕТРИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 РОЛЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИКЕ

Вначале нужно выяснить, зачем же нужна тригонометрия? Как она используется в реальной жизни? Тригонометрия применяется в различных сферах, не только в астрономии, химии, медицине, но и в морской и воздушной навигации, в теории музыки, в разработке игр, в оптике, в анализе финансовых рынков, в акустике, в электронике, во многих физических науках, и множестве других различных областей.

Например, геодезисты работают с такими тригонометрическими знаниями как синусы и косинусы. Для точного измерения углов у них есть специальные приборы. Используя понятия синусов и косинусов, углы превращают в длины, координаты точек на земной поверхности.

Зарождение тригонометрии можно проследить в математических рукописных текстах Древнего Египта, Вавилона и Древнего Китая. 56-я задача из папируса Ринда (II тысячелетие до н. э.) предлагает найти наклон пирамиды, высота которой равна 250 локтей, а длина стороны основания — 360 локтей (рисунок 1).

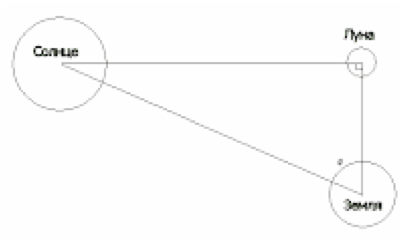

Рисунок 1

Последующее развитие тригонометрии переплетается с именем знаменитого астронома Аристарха Самосского. В его трактате «О величинах и расстояниях Солнца и Луны» рассматривалась задача о нахождении расстояний до различных небесных тел; Эта задача требовала вычисления отношения сторон прямоугольного треугольника при известном значении одного из углов. Аристарх рассматривал прямоугольный треугольник, образованный Солнцем, Луной и Землёй во время квадратуры. Требовалось найти величину гипотенузы (расстояние от Земли до Солнца) через катет (расстояние от Земли до Луны), если известно значение прилежащего угла (87°), что равно вычисленному значению sin угла 3. По оценке Аристарха, эта величина лежит в промежутке от 1/20 до 1/18, то есть расстояние до Солнца в 20 раз больше, чем до Луны; на самом деле Солнце почти в 400 раз дальше, чем Луна, ошибка возникла из-за неточности в измерении угла.

Намного позже Клавдий Птоломей в своих трудах «География», «Аналемма» и «Планисферий» дал развернутое высказывание тригонометрических приложений к картографии, астрономии и механике. Еще в этой работе изложена стереографическая проекция и разобраны некоторые практические задачи, к примеру: найти высоту и азимут небесного светила по его наклону и часовому углу. С точки зрения тригонометрии, это значит, что надо найти сторону сферического треугольника по другим двум сторонам и противолежащему углу (рисунок 2).

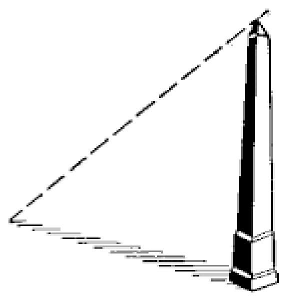

Рисунок 2

Обобщая все ранее сказанное, можно сказать, что тригонометрия использовалась для:

- вычисления времени суток;

- вычисления будущего расположения небесных светил, моментов их восхода и заката, затмений Солнца и Луны;
- нахождения точных координат какого-либо места;
- вычисления расстояния между городами с известными географическими координатами.

Гномон — древнейший астрономический инструмент, вертикальный предмет (стела, колонна, шест), с помощью которого определяли по наименьшей длине его тени (в полдень) угловую высоту солнца.

Так, под котангенсом понималась длина тени от вертикального гномона высотой 12 (иногда 7) единиц; изначально это применяли для расчёта солнечных часов. Тангенсом называлась тень от горизонтального гномона. Косекансом и секансом считались гипотенузы соответствующих прямоугольных треугольников (отрезки AO на рисунке слева) (рисунок 3).

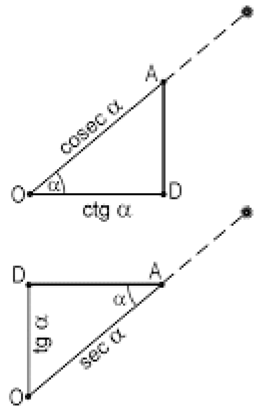

Рисунок 3

Так же тригонометрия очень активно используется в строительстве и особенно в архитектуре. Почти все композиционные решения и построение рисунков притворялись в жизнь с использованием тригонометрии. Но теоретические данные мало что значат. Приведу пример построения некоторой скульптуры французского мастера Золотого века искусства.

Пропорциональное соотношение в конструкции статуи было практически идеально. Но когда статую подняли на высоту, то увидели, что она смотрится ужасно. Скульпторы не учли, что в перспективе к горизонту уменьшаются многие детали и вся скульптура в целом очень сильно искажаются. После этого скульпторам пришлось провести большое количество расчетов, чтобы фигура с большой высоты выглядела пропорционально. В целом эти расчеты были приблизительными, на глаз. Но зная коэффициент разности тех или иных пропорций, они смогли сделать фигуру идеальной. Поэтому, зная хотя бы примерное расстояние от статуи до нашего взгляда, а точнее от верней точки статуи до человеческих глаз и высоту статуи, не сложно вычислить синус угла падения взгляда с помощью таблицы (аналогичное проделывают с нижней точкой зрения), таким образом находится точка зрения.

Ситуация изменяется, потому что статую поднимают на высоту, следовательно расстояние от верхушки статуи до глаз человека увеличивается, поэтому и синус угла падения увеличивается. Теперь нужно сравнить, как изменилось расстояния от самой высшей точки статуи до земли в первом и во втором случае, можно вычислить коэффициент пропорциональности. Таким образом, мы сможем получить чертеж, а затем и саму скульптуру, при поднятии которой зрительно фигура будет практически идеальна.

1.2 ВИДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Необходимо рассмотреть тригонометрические уравнения, которые чаще всего встречаются, а так же их виды и способы решения.

- Квадратные тригонометрические уравнения. Мы должны преобразовать наше уравнение, и если оно принимает такой вид:

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ – одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, то тогда это уравнение при помощи замены $f(x) = t$ сводится к квадратному уравнению. Часто при решении таких уравнений используются **основные тождества**:

– $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
– $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;
– $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \div \cos \alpha$;
– $\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha \div \sin\alpha$;
– $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \div \cos^2 \alpha$;
– $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 \div \sin^2 \alpha$.

Формулы двойного угла:

– $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;
– $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha – 1$;
– $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$;
– $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$;
– $\operatorname{tg} 2\alpha = (2\operatorname{tg} \alpha) \div (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$;
– $\operatorname{ctg} 2\alpha = (\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1) \div (2\operatorname{ctg} \alpha)$.

➢ Кубические тригонометрические уравнения. Мы проводим преобразование какого-либо уравнения и принимает следующий вид:

$$af^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + d = 0,$$

где $a \neq 0$, f(x) – одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, то тогда это уравнение при замене $f(x) = t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений в дополнение к предыдущим формулам используются **формулы тройного угла**:

– $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$;
– $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$;
– $\operatorname{tg} 3\alpha = (3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha) \div (1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha)$;
– $\operatorname{ctg} 3\alpha = (3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha) \div (1 -3\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

➢ Однородные тригонометрические уравнения второй степени:

I. $asin^2(x) + bsin(x)cos(x) + ccos^2(x) = 0, \text{a} \neq 0, \text{c} \neq 0.$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $cos(x) = 0$ или $sin(x) = 0$. Действительно, если $cos(x) = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $asin^2(x) = 0$, откуда следует, что и $sin(x) = 0$. Но мы получаем противоречие основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $cos(x) = 0$, то $sin(x) = \pm 1$.

Поэтому аналогично и $sin(x) = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $cos^2(x)$ или на $sin^2(x)$. Разделим, например, на $cos^2(x)$:

$$a\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + b\frac{sin(x)\cos(x)}{cos^2(x)} + c\frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} = 0 \leftrightarrow atg^2(x) + btg(x) + c = 0.$$

Таким образом, используя деление на $cos^2(x)$ и замену t= $tg(x)$, уравнение сводится к квадратному уравнению:

$at^2 + bt + c = 0$, способ решения, которого нам известен.

- Однородные тригонометрические уравнения первой степени:

II. $\mathrm{a}\sin(x) + bcos(x)$=0, $\mathrm{a} \neq 0, \mathrm{b} \neq 0$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $cos(x)$=0 или $sin(x)$=0. Действительно, если $cos(x)$=0, то, подставляя вместо косинуса 0 в уравнение, мы получаем: $\mathrm{a}\sin(x)$=0, откуда следует, что и $sin(x)$=0. А это противоречит основному тригонометрическому тождеству, так как оно говорит о том, что если $cos(x)$=0, то $sin(x) = \pm 1$.

Аналогично и $sin(x)$=0не является решением такого уравнения. Значит, данное уравнение можно делить на $cos(x)$ или на $sin(x)$. Разделим, например, на $cos(x)$:

$$a\frac{sin(x)}{cos(x)} + b\frac{\cos(x)}{cos^2(x)} = 0,$$ откуда имеем $atg(x) + b = 0 \rightarrow tg(x) = -\frac{b}{a}$.

- Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени:

$$\text{II. } a\sin(x) + b cos(x) = c,\ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

Существует несколько способов решения подобных уравнений. Рассмотрим те из них, которые можно использовать для любого такого уравнения:

1 СПОСОБ: при помощи формул двойного угла для синуса и косинуса и основного тригонометрического тождества:

– $\sin(x) = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$;

– $\cos(x) = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}$;

данное уравнение сведется к уравнению I.

2 СПОСОБ: при помощи формул выражения функций через тангенс половинного угла:

- $\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$;
- $\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$;

уравнение сведется к квадратному уравнению относительно $tg\frac{x}{2}$

3 СПОСОБ: при помощи формулы вспомогательного угла. $a\sin(x) + bcos\ (x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где $cos\ (\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Для использования данной формулы нам понадобятся формулы сложения углов:

– $\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha * cos\beta \pm sin\beta * cos\alpha$;

– $\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha * cos\beta \mp sin\alpha * sin\beta$.

Формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте:
I. Квадрат суммы или разности $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$:

$$(\sin(x) \pm \cos(x))^2 = sin^2(x) \pm 2\sin(x)\cos(x) + cos^2(x);$$
$$= \left(sin^2(x) \pm cos^2(x)\right) \pm 2\sin(x)\cos(x) = 1 \pm \sin(2x).$$

II. Разность квадратов $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$:

$$(\cos(x) - \sin(x))(\cos(x) + \sin(x)) = cos^2(x) - sin^2(x) = \cos(2x)\,;$$
$$sin^2(x) - cos^2(x) = -\cos(2x)\,.$$

III. Сумма или разность кубов $A^3 \pm B^2 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$:

$$sin^3(x) \pm cos^3(x) =$$
$$= (\sin(x) + \cos(x))(sin^2(x) \mp \sin(x)\cos(x) + cos^2(x) =$$
$$= (\sin(x) \pm \cos(x))(1 \mp \sin(x)\cos(x))$$
$$= (\sin(x) \pm \cos(x))\left(1 \mp \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

IV. Куб суммы или разности $(A \pm B)^3 = A^3 \pm B^3 \pm 3AB(A \pm B)$:

$$(\sin(x) \pm \cos(x))^3 = (\sin(x) \pm \cos(x))(\sin(x) \pm \cos(x))^2 = (\sin(x) \pm \cos(x))(1 \pm 2\sin(x)).$$

1.3 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Два тригонометрических выражения, соединённые между собой знаком $<$ или $>$, называются тригонометрическими неравенствами.

Чтобы решить тригонометрическое неравенство нужно найти множество его значений неизвестных, которые есть в неравенстве и при которых неравенство является верным.

Основная часть тригонометрических неравенств решается сведением их к решению простейших:

– $\sin x > a\ (\sin x < a, \sin x \geq a, \sin x \leq a)$,
– $\cos x > a\ (\cos x < a\,, \cos x \geq a\,, \cos x \leq a)$,
– $tg\ x > a(tg\ x < a, tg\ x \geq a, tg\ x \leq a)$,
– $ctg\ x > a(ctg\ x < a, ctg\ x \geq a, ctg\ x \leq a)$.

Решить можно такими методами, как метод разложения на множители, замены переменного ($t = \cos x, u = \sin x$, и т.д.). Используя эти методы, сначала нужно решить обычное неравенство, а потом это неравенство вида $t_1 \leq \sin x \ \leq t_2$и т.д., или другими способами.

Все простейшие неравенства можно решить двумя способами: используя единичную окружность или графически.

Графический метод. Именно этот метод чаще всего используют на практике при решении тригонометрических неравенств. Рассмотрим суть рассматриваемого метода на примере некоторого неравенства $\cos x > a$:

1. Если аргумент – сложный (отличен от x), то заменяем его на t.

2. Строим в одной координатной плоскости tOy графики функций $y = \cos t$ и $y = a$.

3. Находим такие две соседние точки пересечения графиков, между которыми синусоида располагается выше прямой $y = a$. Находим абсциссы этих точек.

4. Затем записываем двойное неравенство для аргумента t, учитывая период косинуса (t будет между найденными абсциссами).

5. Далее делаем обратную замену (возвращаемся к исходному аргументу) и выражаем значение x из двойного неравенства, записываем ответ в виде числового промежутка.

<u>Пример 1.</u> Решить неравенство: $\cos x - 3x + 1 \geq 0$.

Для того, чтобы найти решение этого неравенства графическим методом нужно максимально точно построить график функций. Преобразуем неравенство к виду:

$$\cos x \geq 3x - 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$ (рисунок 4).

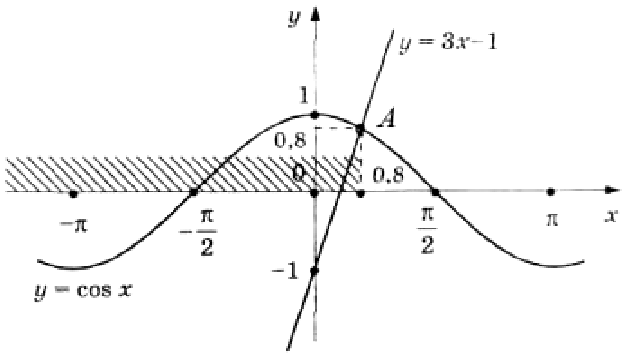

Рисунок 4

Графики функций пересекаются в точке А с координатами $x \approx 0.6$; $y \approx 0.8$. На промежутке $(-\infty; 0{,}6)$ точки графика $y = 3x - 1$ находятся ниже точек графика $y = \cos x$. А при $x \approx 0.6$ значения функции совпадают. Поэтому

$\cos x \geq 3x - 1$ при $x \leq 0.6$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0.6)$.

Алгебраический метод. При помощи подстановки так же часто получается привести неравенство к алгебраическому (рациональному или иррациональному) неравенству. В этом методе используются преобразование неравенства, введение подстановки или замена переменной.

Рассмотрим на конкретных примерах применение этого метода.

<u>Пример 2.</u> Приведение к простейшему виду $\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x\, sin\frac{\pi}{6} \leq 0.5$.

$\sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x\, sin\frac{\pi}{6} \leq 0.5$;

$\sin(x - \frac{\pi}{6}) \leq 0.5$ (рисунок 5);

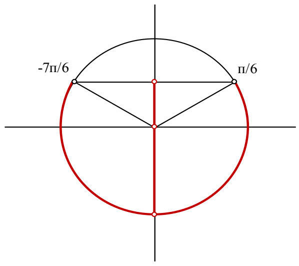

Рисунок 5

$$-\frac{7\pi}{6}+2\pi n\leq x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $-\pi+2\pi n\leq x\leq\frac{\pi}{3}, n\in Z.$

Метод интервалов. Алгоритм решения тригонометрических неравенств данным методом:

1. Используя известные тригонометрические формулы разложить неравенство на множители.
2. Далее необходимо найти точки разрыва и нули функции, затем поставить их на окружность.
3. Взять произвольную точку K (но не найденную ранее) и вычислить знак произведения. Если это произведение положительное, то нужно поставить точку за единичной окружностью на луче, соответствующему углу. В ином случае точку надо поставить внутри окружности.
4. Если эта точка встречается четное число раз, то она будет называться точкой четной кратности, если же она встречается нечетное число раз, то такая точка будет называться точкой нечетной кратности. Теперь необходимо провести дуги: начать следует с точки K, если следующая точка нечетной кратности, то наша дуга пересекает окружность в данной точке, но если же точка четной кратности, то она не пересекает окружность.
5. Если дуги находятся за окружностью, то это положительные промежутки; если внутри окружности, то они отрицательные.

Пример 3. Решить неравенство $\cos 3x + \cos x > 0$;

$$2\cos 2x \cos x > 0\ ;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\end{array}\right..$$

Точки первой серии: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$..

Точки второй серии: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Таким образом, каждая точка встречается нечетное число раз, поэтому и все точки будут нечетной кратности.

Далее необходимо узнать знак произведения при $x = 0$: $2\cos 2x \cos x > 0$. Отметим все точки на единичной окружности (рисунок 6):

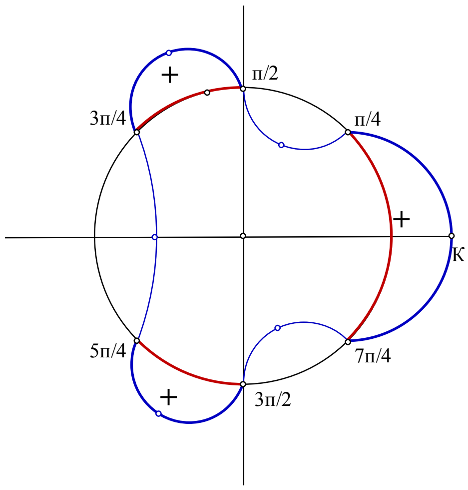

Рисунок 6

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

$\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi l < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z$.

ГЛАВА 2. ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

2.1 ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ ОСНОВНЫХ УМЕНИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Обобщающее повторение – это уроки, на которых формируются завершающие умения и навыки по изучаемым темам. На таких уроках, выявляются наиболее общие и значимые понятия, основные правила, ведущие идеи. Обобщающий урок помогает учащимся привести в понятную систему изученные методы и приемы решения задач, показывает направленность изученных темы, а учителю еще раз представится возможность удостовериться в уровне знаний, умений и навыков учащихся по данной теме.

В методической литературе есть разные интерпретации понятия «умения». Например, Петровский А.В. под ««умениями» понимает способность использовать имеющиеся данные, знания или понятия, оперировать ими для выявления существенных свойств вещей и успешного решения определенных теоретических или практических задач» [3]. По мнению Булыгиной Т.Б. «умения – это способность осознанно выполнять определенное действие» [18]. Матюхина М.В. дает следующее определение: «умение – сочетание знаний и навыков, которое обеспечивает успешное выполнение деятельности» [11]. Навыки – это автоматизированные способы выполнения действий. Знания – это разновидность субъективных образов в сознании. Понятие – это форма знания, которая показывает частное и уникальное, которое еще является в то же время и общим.

Дальше считаю необходимым рассмотреть понятие – «формирование умений». Под ним мы понимаем действия учителя, связанные с построением уяснения конкретного элемента социального опыта учащимся.

Формирование умений – это овладение всей сложной системой операций по изучению и переработке информации, содержащейся в знаниях и получаемой от предмета, по сопоставлению и соотнесению информации с действиями.

Главный путь формирования умений – это научить учащихся видеть все стороны в объекте, применять к нему различные понятия, формулировать в понятиях многообразные отношения этого объекта. Учащихся необходимо научить трансформировать объект с помощью синтеза через анализ. Использованные трансформации обуславливаются тем, какие именно взаимоотношения и взаимозависимости нужно установить. Последовательность этих трансформаций и будет алгоритмом учащимся, для решения подобных задач.

Научить нужным умениям можно различными путями. Первый заключается в том, что учащемуся дают нужные для него знания, а потом перед ним ставят задачи на их использование. Учащийся сам должен отыскать решение, выявляя путем проб и ошибок соответствующие пути нахождения истины. Этот метод называют проблемным обучением. Другой путь заключается в том, что учащихся обучают признакам, по которым можно с точностью определить тип задач и требуемые для ее решения операции. Этот путь называют алгоритмизированным обучением или обучением на полной ориентировочной основе. А третий путь основывается на том, что учащегося учат самой психической деятельности, нужной для качественного использования знаний. В последнем случае учитель не только знакомит учащегося с ориентирами отбора признаков и операций, но и формирует его деятельность, по переработке и использованию полученной информации для решения поставленных перед ним задач. Последний путь является несколько сложнее, так как предполагает методичное проведение учащихся через все этапы деятельности, которая требует ориентировки на признаки, которые в свою очередь закреплены в изучаемом понятии. На первом этапе эти ориентиры (существенные признаки) предмета представляются ученику в готовом, материализованном виде, в виде схем, символа, предметов, а операции по выделению ориентиров осуществляются в форме предметных действий. На втором этапе ориентиры и предметные операции заменяются речевыми выражениями и действиями. На третьем этапе отпадают и словесные действия, их заменяют умственные операции, которые проходят по все более короткой схеме. Этот метод называют методикой поэтапного формирования умственных действий.

На самом деле эти этапы проходит абсолютно каждый человек при формировании новых для него понятий. При классическом обучении все эти этапы учащиеся не проходят сознательно. А значит, ученик вынужден сам отыскивать нужные ему существенные или логические признаки, главное – учится сам подбирать для этого действия. При обучении этим методу у учащихся возникает множество ошибок. Понятия формируются не всегда полные и верные. Традиционное обучение, основанное на «самостоятельном» осмысливании и коррекции через результаты, служит следствием скудности ориентировочной деятельности ученика.

При этом деятельность ученика не должна сводиться к созданию понятий, нахождению их признаков, а к тому, чтобы наполнять сообщаемые понятия смыслом, то есть усваивать способы их использования, - это деятельность не по самостоятельному нахождению существенных признаков вещей, фиксированных в понятиях, а по использованию этих признаков. Чтобы понятия формировались полно и правильно, соответствующая деятельность ученика должна создаваться на полной ориентировочной основе. Иначе говоря, учитель должен давать ученику законченными все существенные признаки объектов и обучать ребенка тем операциям, какими нуждается каждый из признаков для его нахождения и повторения.

Умения решать тригонометрические уравнения и неравенства составляют целый комплекс, в который обязательно входят следующие:

– умения отыскать на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженных в долях числа π ($\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$ и т.д.) и не выраженных в долях числа π (M(2), M(-7), и т.д.);

– умение изображать числа точкой числовой окружности и надписывать точки (имеется в виду определять все числа, которые соответствуют данной точке);

– умение изображать числа на числовой окружности по значению одной из тригонометрических функций;

– составлять двойные неравенства для дуг числовой окружности;

– умение проводить анализ данного уравнения или неравенства с целью получения оснований для определения вида уравнения;

– умение выполнить аргументированный выбор приема решения;

– умение решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства и изображать его решение с помощью графика, тригонометрического круга;

– умение использовать свойства тригонометрических функций при решении уравнений и неравенств;

– умение производить тождественные преобразования тригонометрических выражений, которое, в свою очередь, предполагает умение использовать приемы преобразований алгебраических выражений и соответствующие тригонометрические формулы;

– умение решать алгебраические уравнения определенных видов (линейные, квадратные, дробно-рациональные, однородные, сводящиеся к совокупностям алгебраических уравнений указанных видов) и др.

Выше указанные умения формируются большое количество времени, определенными из них учащимся необходимо владеть на достаточно высоком уровне, переходя к изучению тригонометрических уравнений. Разбор приемов решения тригонометрических уравнений или неравенств, предполагает некий перенос данных умений на новую сущность.

Анализ программ по математике для средней школы, учет целей изучения тригонометрических уравнений и неравенств, а также необходимых результатов обучения, связанных с изучаемой темой, подводит к тому, что упомянутые умения должны быть освоены, по крайней мере, на уровне применения «в ситуации по образцу». Представленные ниже методики предусматривают овладение учащимися умений решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства, и знакомство с приемами решения тригонометрических уравнений и неравенств других видов.

Представим несколько примеров таких заданий:

1) необходимо найти все числа интервала $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для которых верно $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и т.п.;

2) указать на единичной окружности точки Pt, для которых соответствующие значения t удовлетворяют равенству $\sin t = \frac{1}{2}; tg\ t = -\sqrt{3}$ и т.п.

Нужно обратить внимание на два последних задания. В основе решения предложенных уравнений, как правило, – применение определений синуса, косинуса числа (либо таких свойств тригонометрических функций, как наличие корней, наличие экстремумов у функций синус и косинус). В таких ситуациях необходимо намеренно заострить внимание учащихся на цель преобразований тригонометрических выражений при решении поставленных уравнений: замена данного выражения, тождественно ему равным и зависящим от одной тригонометрической функции, либо преобразование выражения в произведение линейных множителей относительно тригонометрических функций.

На втором этапе обучения учащихся решению тригонометрических уравнений происходит формирование и обобщение умений решать простейшие уравнения, этот этап предусматривает введение таких понятий, как «арксинус числа», «арккосинус числа» и других. Изучение общих формул решения простейших тригонометрических уравнений, формирование умений изображать решение простейших тригонометрических уравнений с помощью графика соответствующей функции или тригонометрического круга.

На данный момент понятия арксинуса, арккосинуса числа и т.д. вводятся без обращения к понятию функции, которая является обратной по отношению соответственно к функциям синус, косинус и т.д. Для того чтобы ввести эти понятия используется так называемая теорема о корне. Эта теорема используется так же для изучения нового для учащихся способа решения простейших тригонометрических уравнений. Поэтому следует отметить, что в процессе вывода формул, которые задают множества их решений, некоторые пункты:

– рассмотреть промежутки, длина которых равняется наименьшему положительному периоду функции, которую мы видим в левой части уравнения;

– если в уравнении имеется синус или косинус, то промежуток разбивается на два;

– затем это уравнение необходимо решать на каждом из промежутков;

– при решении нужно вспомнить теорему о корне, так как она конкретизируется для соответствующей тригонометрической функции;

– используя свойства периодичности рассматриваемой тригонометрической функции, нужно сделать вывод о том, что числа $\alpha + 2\pi k$ или $\alpha + \pi k, k \in Z$ (где α - решение данного уравнения, которое принадлежит найденным промежуткам) являются решениями данного уравнения;

– затем сделанный нами вывод используется для получения формулы решений.

2.2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

Мною была разработана программа элективного курса для учащихся 11 класса по решению тригонометрических задач при подготовке к ЕГЭ. Титульный лист программы (Приложение А).

Пояснительная записка.

Данная программа элективного курса предназначена для обучающихся 11 классов общеобразовательных учреждений и рассчитана на 21 час. Она предназначена для повышения эффективности подготовки обучающихся 11 класса к ЕГЭ по математике.

Программа настоящего элективного курса подходит к любому УМК, рекомендованному к использованию в образовательном процессе. Она согласована с содержанием основных программ курса математики основной школы.

Программой школьного курса математики не предусматривает обобщение и систематизацию знаний по различным разделам, полученным учащимися за весь период обучения. Элективный курс по решению тригонометрических задач при подготовке к ЕГЭ позволит обобщить, систематизировать и углубить знания учащихся по разделу тригонометрия. Знание этого материала и умение его использовать на практике даст шанс школьникам решать различные задачи практически любой сложности и быть готовым успешно сдать итоговый экзамен.

Элективный курс предполагает повторное рассмотрение теоретического материала по математике, поэтому имеет большое общеобразовательное значение, содействует развитию логического мышления, предусматривает и реализует целый ряд межпредметных связей (прежде всего с физикой, химией, информатикой).

Используются формы организации занятий, такие как лекция и практика, групповая и индивидуальная деятельность учащихся. Результатом предложенного курса должна быть успешная сдача ЕГЭ.

Цель курса: обобщить знания о разделе «Тригонометрия» и также обобщить знания и развить умения по решению задач при подготовке к ЕГЭ для учеников 11 класса.

Задачи курса:

1) выявить пробелы в знаниях по теме решение тригонометрических задач при подготовке к ЕГЭ.

2) обобщить знания учащихся о разделе «Тригонометрия».

3) развить умения использовать свойства тригонометрических функций и преобразований тригонометрических выражений, решений тригонометрических уравнений и неравенств, при подготовке к ЕГЭ;

4) развить логическое мышление и математические навыки.

Планируемые результаты в освоении школьниками УУД по окончании обучения:

- личностные:
  - положительное отношение к урокам математики;
  - умение признавать собственные ошибки;
  - формирование ценностных ориентиров (саморегуляция, стимулирование, достижение и др.);
- предметные:
  - умение отбирать корни на промежутке
  - уметь отыскать на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженных в долях числа и не выраженных в долях числа;
  - уметь изображать числа точкой числовой окружности и подписывать точки;
  - уметь изображать числа на числовой окружности по значению одной из тригонометрических функций;

- уметь провести анализ предложенного уравнения или неравенства с целью получения оснований для отнесения уравнения к одному из известных видов;
- уметь решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства и изображать решение на графике, тригонометрического круга;
- уметь использовать свойства тригонометрических функций при решении уравнений и неравенств;
- уметь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений.

– познавательные:

- анализировать условие задачи;
- находить закономерности и использовать их при выполнении заданий;
- выполнять синтез числового выражения, условия текстовой задачи (восстановление условия по рисунку, схеме, краткой записи).

По окончании элективного курса учащимся будет предложена практическая контрольная работа.

Кодификатор:

1.2.1 Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла;

1.2.2 Радианная мера угла;

1.2.3 Синус, косинус, тангенс и котангенс числа;

1.2.4 Основные тригонометрические тождества;

1.2.5 Формулы приведения;

1.2.6 Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов;

1.2.7 Синус и косинус двойного угла;

1.4.4 Преобразования тригонометрических выражений;

2.1.4 Тригонометрические уравнения;

2.1.9 Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных;

2.1.10 Использование свойств и графиков функций при решении уравнений;

2.1.11 Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем;

2.2.7 Равносильность неравенств, систем неравенств;

2.2.8 Использование свойств и графиков функций при решении неравенств;

2.2.9 Метод интервалов;

2.2.10 Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем;

3.3.5 Тригонометрические функции, их графики.

Учебно-тематический план.

1. Простейшие тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней. Решение типовых заданий (4 часов).
2. Основные методы решения тригонометрических уравнений (3 часов).
3. Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной (3 часов).
4. Использование метода разложения на множители при решении тригонометрических уравнений (2 часов).
5. Уравнения, решаемые понижением степени (3 часов).
6. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения и умножения тригонометрических функций (3 часов).
7. Умножение обеих частей уравнения на одну и ту же тригонометрическую функцию (2 часов).
8. Итоговое занятие (1 час)

Задача 1. Решить уравнение $2\,sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение.

Проанализировав вид этого уравнения, замечаем, что в его запись входит только одна тригонометрическая функция $\sin x$. Поэтому удобнее всего ввести новую переменную $\sin x = t$.

Пусть $\sin x = t$, тогда получаем: $2t^2 - 7t + 3 = 0$.

Отсюда, $t_1 = 3;\ t_2 = \frac{1}{2}$.

a) при $t = 3$, получаем $\sin x = 3$- уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.

После решения квадратного уравнения нужно выполнить обратную замену и решить полученные простейшие тригонометрические уравнения.

b) при $t = \frac{1}{2}$, получаем $\sin x = \frac{1}{2}$,

тогда $x = -1^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ x = -1^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = -1^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Примечание 1

Записывая решение задачи 1, можно при введении замены $sin\, x = t$ *учесть, что* $|sin\, x\ | \leq 1$*, и записать ограничения* $|t| \leq 1$*, а далее заметить, что один из корней* $t = 3$ *не удовлетворяет условию* $|t| \leq 1$*, и после этого обратную замену выполнять только для* $t = \frac{1}{2}$.

При поиске алгоритма решения более сложных тригонометрических уравнений можно воспользоваться таким ориентиром:

1. Пытаемся привести все тригонометрические функции к одному аргументу.

2. Если это удалось, то пробуем все тригонометрические выражения привести к одной функции.

3. Если к одному аргументу удалось привести, а к одной функции - нет, тогда пытаемся привести уравнение к однородному.

4. В других случаях переносим все члены в одну сторону и пытаемся получить произведение или используем специальные приемы решения.

Задача 2.

a) решите уравнение $\cos 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\ -\pi]$.

Решение.

a) преобразуем уравнение:

$$2cos^2x - 1 \Leftrightarrow 2cos^2x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1,\\ \cos x = \frac{1}{2},\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c}x = 2\pi n\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\end{array}\right. \quad n \in Z.$$

b) отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\ -\pi]:-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3}$ (рисунок 7).

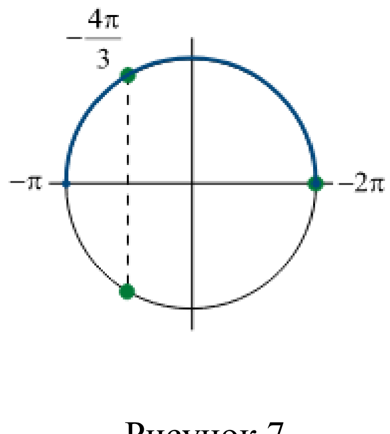

Рисунок 7

Ответ: a) $\left\{2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n : n \in Z\right\}$ b) $-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3}$.

Задача 3.

a) решить уравнение $4cos^4x - 4cos^2x + 1 = 0$

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2x; -x]$

Решение.

a) выделим полный квадрат

$(2cos^2x-1)^2=0 \leftrightarrow 2cos^2x=1 \leftrightarrow cos^2x=\frac{1}{2} \leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right., \leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z;$

b) при помощи тригонометрической окружности отберем корни, принадлежащие промежутку $[-2\pi;-\pi]$. Получим $-3\pi;-\frac{3\pi}{2};-\frac{5\pi}{4}$ (рисунок 8).

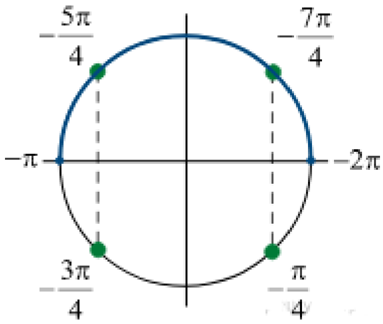

Рисунок 8

Ответ: a) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z\right\}$; b) $-\frac{7\pi}{4};-\frac{5\pi}{4}$.

Задача 4.

a) решить уравнение $\cos 2x-5\sqrt{2}\cos x-5=0$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

a) запишем исходное уравнение в виде: $2cos^2x-1-5\sqrt{2}\cos x-5=0 \leftrightarrow (2\cos x+\sqrt{2})(\cos x-3\sqrt{2})=0 \leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x=3\sqrt{2}, \text{решений нет}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \\ x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z;\end{array}\right.$

b) с помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим число $-\frac{11\pi}{4}$ (рисунок 9).

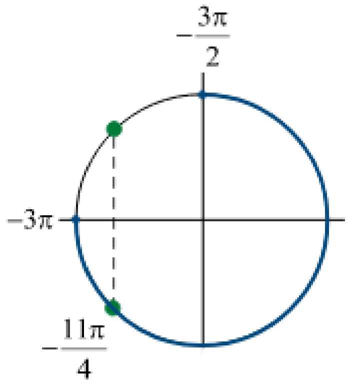

Рисунок 9

Ответ: a) $\left\{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\,, n \in Z\right\}$; b) $-\frac{11\pi}{4}$.

Задача 5.

a) решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

a) если $\cos 2x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin 2x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Поэтому $\cos 2x \neq 0$, на него можно поделить обе части уравнения:

$$\sqrt{3}tg\ 2x + 3 = 0 \leftrightarrow tg\ 2x = -\sqrt{3} \leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi n \leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},$$
$$n \in Z;$$

b) при помощи тригонометрической окружности отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим число $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}$ (рисунок 10).

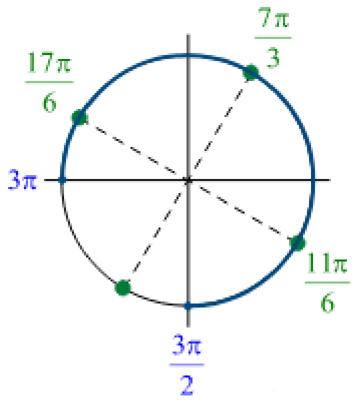

Рисунок 10

Ответ: a) $\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z\right\}$; b) $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}$.

Задача 6.

a) решить уравнение $\frac{1}{sin^2 x}-\frac{3}{\sin x}+2=0$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

a) пусть $t=\frac{1}{\sin x}$, тогда имеем: $t^2-3t+2=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=2, \end{array}\right.$

откуда: $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sin x}=1, \\ \frac{1}{\sin x}=2 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \end{array}\right. n \in Z;$

b) с помощью числовой окружности найдем корни из промежутка $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$. Получим числа $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$ (рисунок 11).

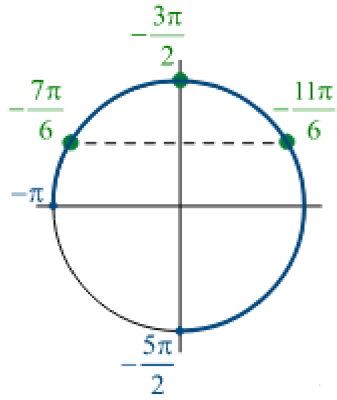

Рисунок 11

Ответ: a) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n\ , n \in Z\right\}$; b) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

Задача 7.

a) решить уравнение $2cos^2x + 1 = 2\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

a) запишем исходное уравнение в виде: $2 - 2sin^2x + 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \leftrightarrow 2sin^2x - 2\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Уравнение $\sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, корней не имеет. Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

b) с помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим число $\frac{7\pi}{4}$ (рисунок 12).

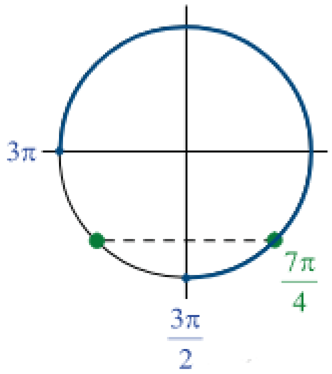

Рисунок 12

Ответ: a) $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi n, -\frac{3\pi}{4}+2\pi n\ , n \in Z\right\}$; b) $\frac{7\pi}{4}$.

Задача 8.

a) решить уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = tg\ x$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

a) преобразуем уравнение: $2\sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \leftrightarrow \sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n, \\ x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\end{array}\right. n \in Z;$

b) отберем корни на промежутке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности. Получаем $x = -2\pi, x = -\frac{5\pi}{3}$ и $x = -\pi$ (рисунок 13).

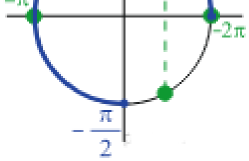

Рисунок 13

Ответ: а) $\left\{\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\ , n \in Z\right\}$; b) $-2\pi, -\frac{5\pi}{3}, -\pi.$

Задача 9.

a) решить уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

a) используем формулу синуса двойного угла, выносим за скобки:

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin x\ = 2\cos x + \sqrt{2} \leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 2\cos x + \sqrt{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z; \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right.$$

b) изображая корни на единичной окружности, находим, что промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{2}$ (рисунок 14).

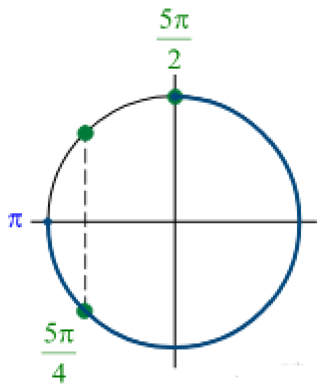

Рисунок 14

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; b) $\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}.$

Задача 10.

a) решить уравнение $cos^2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

a) перенесем все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:

$$cos^2x - \sin x cos\, x + \cos x - \sin x = 0 \leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) -$$
$$- \sin x(\cos x + 1) = 0 \leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos x - \sin x) = 0.$$

1 случай: Если $cos\, x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n,\, n \in Z$.

2 случай: Если $cos\, x \neq -1$, то $cos\, x - \sin x = 0$. При $cos\, x = 0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $cos\, x$. Получаем $1 - tg\, x = 0 \leftrightarrow tg\, x = 1$.

Тогда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$;

b) промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\frac{5\pi}{4}$ (рисунок 15).

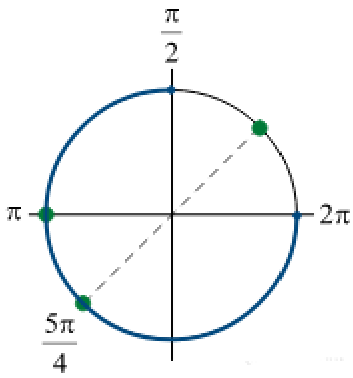

Рисунок 15

Ответ: a) $\left\{\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right\}$; b) π и $\frac{5\pi}{4}$.

Задача 11.

a) решить уравнение $2sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\cos x$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение.

a) заметим, что $sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=cos^2x$.

Поэтому уравнение можно переписать в виде $2cos^2x-\sqrt{3}\cos x=0$, откуда $2cos\,x\left(cos\,x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$. Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, либо $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

b) отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]: x=-\frac{7\pi}{2}, x=-\frac{5\pi}{2}, x=-\frac{13\pi}{6}$ (рисунок 16),

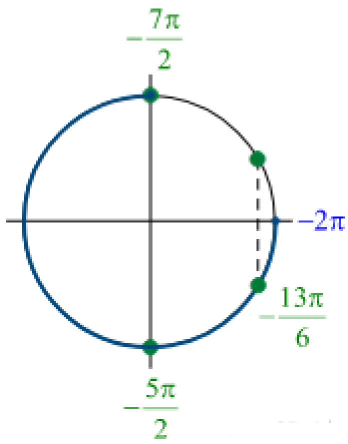

Рисунок 16

Ответ: a) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n,-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\right\}$; b) $-\frac{7\pi}{2},-\frac{5\pi}{2},-\frac{13\pi}{6}$.

Задача 12.

a) решить уравнение $4sin^3x=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right]$

Решение.

a) запишем уравнение в виде $4sin^3x-3\sin x=0$.

Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi n, n\in Z$, или $\sin^2 x=\frac{3}{4}\leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$,откуда $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$ или $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z$;

b) с помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{11\pi}{3}; 4\pi; \frac{13\pi}{3}$ (рисунок 17).

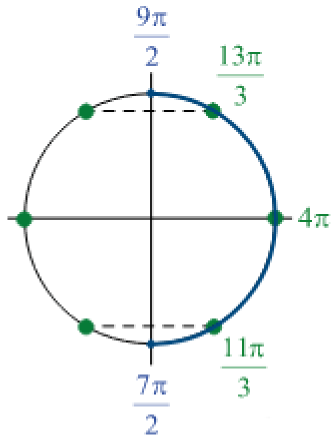

Рисунок 17

Примечание 2

В данном примере мы воспользовались формулой синуса тройного угла:

$3\,sin\,x - 4sin^3x = 0 \leftrightarrow sin\,3x = 0 \leftrightarrow x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Ответ: a) $\left\{\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z\right\}$; b) $\frac{11\pi}{3}; 4\pi; \frac{13\pi}{3}$

Задача 13.

a) решить уравнение $\cos 2x = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)$;

b) найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi)$.

Решение.

a) так как $\cos 2x = 1 - 2sin^2x$ и $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ имеем:

$$1 - 2sin^2x = 1 - \sin x \leftrightarrow 2sin^2x - \sin x = 0 \leftrightarrow \sin x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0\,.$$

Корни уравнения: $x = \pi n, x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$;

b) корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ – точками C и D, промежуток $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi)$

изображается жирной дугой. В указанном промежутке содержатся 3 корня уравнения $-2\pi, -2\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{11\pi}{6}$ и $-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7\pi}{6}$ (рисунок 18).

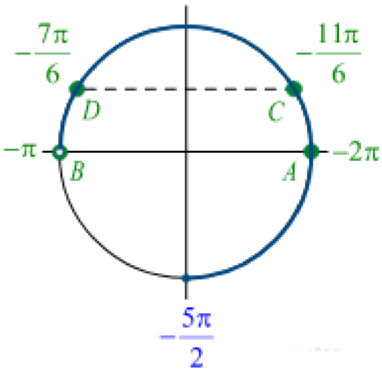

Рисунок 18

Ответ: a) $\left\{\pi n, (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z\right\}$; b) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Задача 14

a) решить уравнение $(tg^2x-1)\sqrt{13cosx}=0$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$.

Решение.

a) заметим, что первый множитель содержит тангенс, поэтому $cosx\neq 0$. Второй множитель – квадратный корень, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно, область определения уравнения задается неравенством $cosx>0$. На этой области второй множитель не обращается в нуль. Рассмотрим случай, когда нулю равен первый множитель. Последовательно получаем:

$$(tg^2x-1)\sqrt{13cosx}=0 \leftrightarrow \begin{cases} tg^2x=1, \\ \cos x>0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z, \\ \cos x>0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;$$

b) корни из промежутка $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$ отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{9\pi}{4}$ и $-\frac{7\pi}{4}$ (рисунок 19).

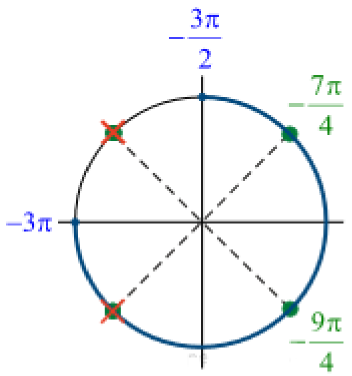

Рисунок 19

Ответ: a) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi n, -\frac{\pi}{4}+2\pi n, n \in Z\right\}$; b) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$.

Задача 15.

a) решить уравнение $(2cos^2 x+\sin x-2)\sqrt{5tg\, x}=0$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$.

Решение.

a) получаем:

$$(2cos^2 x+\sin x-2)\sqrt{5tg\, x}=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\, x=0, \\ \begin{cases} tg\, x \geq 0, \\ 2cos^2 x+\sin x-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\, x=0, \\ \begin{cases} tg\, x \geq 0, \\ \sin x-2sin^{\,2} x=0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\, x=0, \\ \begin{cases} tg\, x \geq 0, \\ \sin x(1-2\sin x)=0 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n, \\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, \end{array}\right. n \in Z;$$

b) корни, принадлежащие промежутку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$, отберем с помощью единичной окружности. Получаем $\pi, 2\pi$ и $\frac{13\pi}{6}$ (рисунок 20).

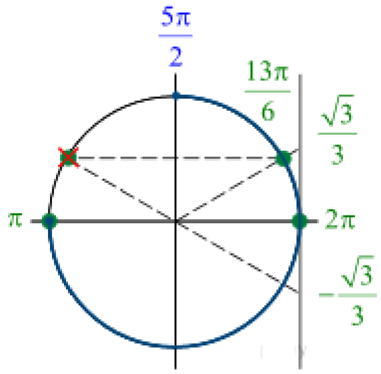

Рисунок 20

Ответ: a) $\left\{\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; b) $\pi, 2\pi, \frac{13\pi}{6}$.

Задача 16.

a) решить уравнение $(tg^2 x - 3)\sqrt{11\cos x} = 0$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

a) последовательно получаем:

$$(tg^2 x - 3)\sqrt{11\cos x} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} tg^2 x = 3, \\ \cos x > 0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} tg x = \pm\sqrt{3}, \\ \cos x > 0, \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \end{array}\right. n \in Z \\ \cos x > 0, \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z.$$

b) корни, принадлежащие промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$, отберем с помощью единичной окружности. Получаем $\frac{-7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$ (рисунок 21).

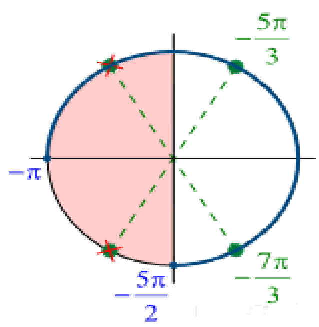

Рисунок 21

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi n, -\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z\right\}$; b) $\frac{-7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$.

Задача 17.

а) решить уравнение $(\cos x - 1)(tg\ x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

Решение.

а) получаем:

$$(\cos x - 1)(tg\ x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2} sin^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0, \\ -\sin x \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \cos x - \sqrt{2} cos^2 x = 0, \\ \sin x \leq ,0 \end{array}\right. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \cos x(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0 \\ \sin x \leq 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} sinx \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = 0 \\ \sin x = 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z;$$

b) корни, принадлежащие промежутку $[2\pi; \frac{7\pi}{2};]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем числа: $2\pi; 3\pi$ и $\frac{7\pi}{2}$ (рисунок 22).

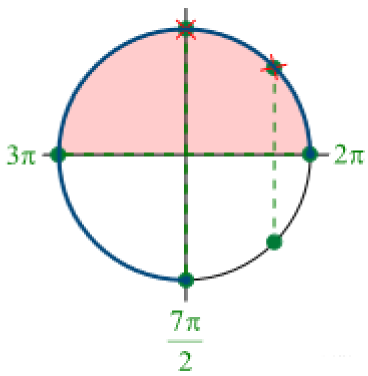

Рисунок 22

Ответ: а) $\left\{\pi n, -\frac{\pi}{4}+2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z\right\}$; b) $2\pi; 3\pi; \frac{7\pi}{2}$.

Задача 18.

a) решить уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)} = \sqrt{3}$;

b) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

a) используя формулу синуса двойного угла и по формуле приведения, имеем:

$$\frac{\sin 2x}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)} = \sqrt{3} \leftrightarrow \frac{2sinxcos\,x}{-\sin x} = \sqrt{3} \leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z;$$

b) при помощи единичной окружности находим, что промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$принадлежит только корень $-\frac{7\pi}{6}$ (рисунок 23).

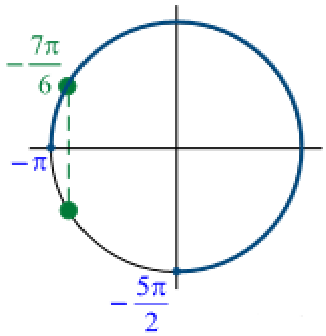

Рисунок 23

Ответ: a) $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z\right\}$; b) $-\frac{7\pi}{6}$.

2.3. ОПИСАНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В данной исследовательской работе был проведен эксперимент, который состоит из двух этапов: констатирующего и поискового. Целью констатирующего этапа эксперимента является: определение уровня знаний одиннадцатиклассников по теме «Тригонометрия». В проведении эксперимента приняли участие 15 учащихся школы МБОУ СОШ « № 91 г. Челябинска» 11Б класса.

Учащимся требовалось решить контрольную работу, состоящую из 7 заданий.

Прежде всего, учащиеся неправильно находили четверть, в которой находится угол, ошибочно решали тригонометрические неравенства, плохо ориентировались на тригонометрической окружности. Но считаю нужным отметить, что многие учащиеся могут преобразовывать выражения и достаточно хорошо знают тригонометрические формулы. Результаты этого этапа были представлены в работе (Таблица 1, диаграмма 1 на рисунке 24).

Таблица 1

Общий уровень сформированности умений решать тригонометрические задачи	Количество учеников	В процентном соотношении
Низкий	3	20%
Ниже среднего	4	26,67%
Средний	6	40%
Высокий	2	13,33%

Рисунок 24

Результаты эксперимента показали, что уровень знаний одиннадцатиклассников по разделу «Тригонометрия» на низком уровне.

Поэтому был проведен поисковой эксперимент. Его цель: обобщить знания по тригонометрии при подготовке к ЕГЭ. Для достижения поставленной перед нами цели были проведены уроки, на которых одиннадцатиклассникам выдавались задачи соответствующего уровня.

На контрольном этапе мы выявили результаты данного элективного курса (Таблица 2, диаграмма 2 на рисунке 25).

Таблица 2

Общий уровень сформированности умений решать тригонометрические задачи	Количество учеников	В процентном соотношении
Низкий	2	13,33%
Ниже среднего	2	13,33%
Средний	7	46.67%
Высокий	4	26,67%

Рисунок 25

Подводя итог, следует заметить, что разработанный курс был эффективен для одиннадцатиклассников. Это видно на сравнительной диаграмме «Динамика изменения уровня сформированности умений решать тригонометрические задачи при подготовке к ЕГЭ в 11 классе на констатирующем и контрольном этапе» (диаграмма 3 на рисунке 26).

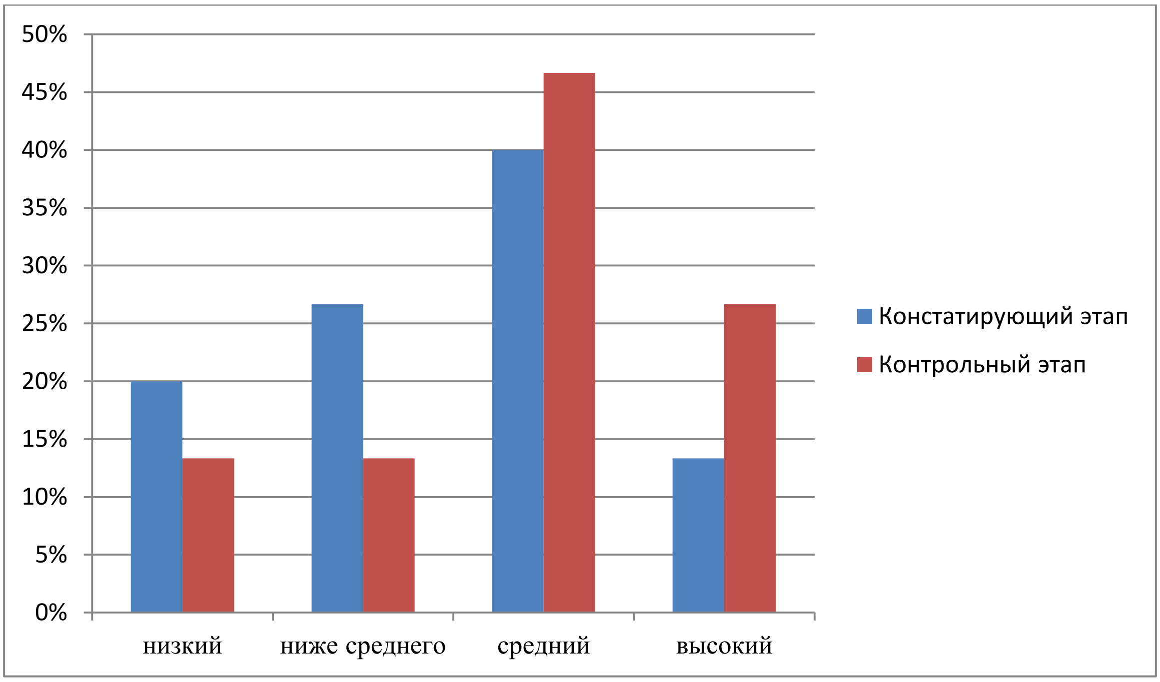

Рисунок 26

Поэтому данный элективный курс рекомендуется использовать для подготовки учащихся-выпускников к итоговому экзамену.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенного исследования необходимо сделать некоторые выводы.

В первой главе мной были рассмотрены основополагающие понятия тригонометрии, виды тригонометрических уравнений и неравенств, а так же методы их решения.

Так же было отмечено, что роль тригонометрических задач очень велика. Тригонометрические знания на данный момент необходимы для всех точных наук, а это большая редкость. Ведь знания широко используются в таких отраслях, как физика, геометрия, инженерия, астрономия, география, музыка, финансовый анализ, электроника, статистика, теория вероятности, но и конечно же в медицине, фармацевтике, архитектуре и компьютерной графике.

Во второй главе были сформированы основные умения, необходимые для решения тригонометрических задач, разработана программа элективного курса «Тригонометрические задачи для подготовки к ЕГЭ». Данный элективный курс более подробно объясняет решение тригонометрических задач. Курс создан в помощь одиннадцатиклассникам при подготовке к ЕГЭ.

В течение всего исследования выявили, что в тригонометрии чаще всего учащиеся 11 класса делают ошибки, и в целом они не понимают этот материал.

Поэтому в рамках настоящего исследования предлагается элективный курс «Тригонометрические задачи для подготовки к ЕГЭ» для учеников 11 класса.

Цель курса: обобщить знания о разделе «Тригонометрия» и также обобщить знания и развить умения по решению задач при подготовке к ЕГЭ для учеников 11 класса.

Задачи курса:

1) выявить пробелы в знаниях по теме решение тригонометрических задач при подготовке к ЕГЭ;

2) обобщить знания учащихся о разделе «Тригонометрия»;

3) развить умения использовать свойства тригонометрических функций и преобразований тригонометрических выражений, решений тригонометрических уравнений и неравенств, при подготовке к ЕГЭ;

4) развить логическое мышление и математические навыки.

Программа элективного курса рассчитана на 11 класс и предполагает 21 часа (по 1 часу в неделю).

Цели и задачи, поставленные мной в данной квалификационной работе, считаю достигнутыми. Данный элективный курс можно использовать для подготовки выпускников к экзамену.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александрова О.В. Математика. Тригонометрия / О.В. Александрова, Е.А. Сагомонян, Ю.С. Семенов. – М.: ИЛЕКСА, 2016. – 88 с.
2. Гельфанд И.М. Тригонометрия/ И. Гельфанд, С.М. Львовский, А. Тоом. – М.: МЦНМО, 2014. – 247 с.
3. Зайкин М.И. Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении (сборник научных и методических работ, предоставленных на региональную научно-практическую конференцию). – М.: Арзамас, 2011. – 334с.
4. Кожухов И.Б. Универсальный справочник по математике/ И.Б. Кожухов. – М.: Лист Нью, 2015. – 327 с.
5. Крамор В.С. Тригонометрические функции/ В.С. Крамор. – М.: Просвещение, 2010. – 298 с.
6. Локоть В.В. Задачи с параметрами и их решение. Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. 10 класс/ В.В. Локоть. – М.: АРКТИ, 2014. – 49 с.
7. Лурье М.В. Тригонометрия. Техника решения задач/ М.В. Лурье. – М.: Высшая школа, 2016. – 104 с.
8. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11/ А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2016. – 168 с.
9. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе/ А.Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2015. – 32-38 с.
10. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А.Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2017. – 163-165 с.
11. Немов Р.С. Психология: Учебник для студентов высших педагогических учебных заведений: В 3 кн. – 4е изд. М.: Гумакнит.изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 608с

12.Новиков А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства/ А.И. Новиков – Р.: РГРА, 2015. – 88 с.
13.Потапов М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции/ М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко – М.: Высшая школа, 2016. – 139 с.
14.Раббот, Ж. Тригонометрические уравнения/ Ж. Раббот. – М.: Квант, 2011. – 84 с.
15.Садовничий Ю.В. Математика. Профильный уровень. Тригонометрические уравнения/ Ю.В. Садовничий. – М.: Экзамен, 2019. – 78 с.
16.Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. URL: https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=sred, (дата обращения: 19.02.2020).
17.Шахмейстер А. Тригонометрия/ А. Шахмейстер. – М.: МЦНМО, 2014. – 163 с.
18. Якиманская И.С. Знания и мышление школьников. М.: Просвещение, 2015. – 78 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа элективного курса для учащихся 11 класса по решению тригонометрических задач при подготовке к ЕГЭ.

Предмет: математика

Составитель: Еремеева М.Ю.

г. Челябинск

2019 – 2020 уч.год