ВЕСТНИК
ЧЕЛЯБИНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ
*Основан
в 1991 году*

Серия 3

Математика
Механика

2/1999

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ И g-ИНТЕГРИРОВАННЫХ ПОЛУГРУПП

А.С.Макаров
Челябинский государственный педагогический университет

Определены и построены обобщенные полугруппы и g-интегрированные по группы, частным случаем которых являются, соответственно, C-полугруппы и интегрированные полугруппы.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, аналитические разреша обобщенные полугруппы уравнений, аналитическая g-интегрированная полугрупп*

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ лин и ограничен, то есть $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, ядро $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M : \mathrm{dom}\, M$ $\mathcal{U} \to \mathcal{F}$ линеен и замкнут с плотной областью определения $\mathrm{dom}\, M$.

Определим L-резольвентное множество оператора M как множест [1] $\rho^L(M) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (\lambda L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})\}$. Считая, что $\rho^L(M) \neq \emptyset$, дем, соответственно, правую и левую L-резольвенты $R^L_\lambda(M) = (\lambda L - M)^{-1}$ и $L^L_\lambda(M) = L(\lambda L - M)^{-1}$ оператора M [1], $R^L_\lambda(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $L^L_\lambda(M) \in \mathcal{L}($ Для правой и левой L-резольвенты оператора M имеют место правое

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M)$$

и левое

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)L^L_\lambda(M)L^L_\mu(M)$$

L-резольвентные тождества. L-резольвентное множество $\rho^L(M)$ откры оператор-функции $R^L_\lambda(M)$ и $L^L_\lambda(M)$ аналитичны на этом множестве.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L\dot{u} = Mu$$

и при $\lambda \in \rho^L(M)$ пару эквивалентных ему уравнений:

$$R^L_\lambda(M)\dot{u} = (\lambda L - M)^{-1}Mu,$$

$$L^L_\lambda(M)\dot{f} = M(\lambda L - M)^{-1}f\,.$$

В дальнейшем предполагается, что оператор M является относит но L-секториальным [1], то есть удовлетворяет следующим двум усло ям:

(*i*) найдутся такие $a \in \mathbf{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, что

$$S_{a,\Theta} = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg(\lambda - a)| < \Theta, \lambda \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(*ii*) для всех $\lambda \in S_{a,\Theta} \setminus B(a,r)$, где $B(a,r) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda - a| < r\}$ справедлива оценка

$$\max\{\|R^L_\lambda(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_\lambda(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{\mathrm{const}}{|\lambda - a|}\,. \tag{7}$$

В условиях (i) и (ii), не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0$. При этом положим $S_{0,\Theta} = S_\Theta$, $B(0,r) = B(r)$.

Пусть контур $\Gamma \subset \mathbf{C}$ ориентирован против часовой стрелки, содержит собственную точку, $\Gamma \subset S_\Theta \setminus B(r)$, $\arg\lambda \to \pm\Theta$ при $|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \in \Gamma$, и $G(\lambda)$ — семейство линейных ограниченных сюръективных операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$ такое, что оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в некоторой области, содержащей контур Γ. Далее эта область аналитичности будет уточняться. Предположим еще, что операторы $G(\lambda)$ коммутируют друг с другом и с правой L-резольвентой $R^L_\lambda(M)$.

Объектом дальнейшего изучения является однопараметрическое семейство $\{U^t, t > 0\}$ линейных ограниченных операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$, определяемое равенством

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}G(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda\,. \tag{8}$$

1. Обобщенные полугруппы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Сильно непрерывное семейство $\{V^t, t > 0\}$, $V^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ назовем *обобщенной полугруппой*, если $\forall s, t > 0$, $\forall \xi \in (0, s+t)$ выполняется равенство

$$V^sV^t = V^{s+t-\xi}V^\xi\,. \tag{9}$$

Очевидно, если V^t удовлетворяет классическому полугрупповому равенству, то V^t удовлетворяет и равенству (9). Если V^t определена в нуле и $V^0 = C$, где C — инъективный оператор, то равенство (9) при $\xi = 0$ определяет C-полугруппу [2]. Из равенства (9) следует, что $V^sV^t = V^tV^s$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть оператор M L-секториален, оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < w$ при достаточно большом $w > 0$ и $\forall\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$*

$$\|G(re^{i\varphi})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \mathrm{const} \tag{10}$$

равномерно по $\varphi \in [\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3}{2}\pi - \varepsilon]$ и $r > 0$.

Тогда семейство $\{U^t, t > 0\}$, определяемое равенством (8), является обобщенной полугруппой.

Доказательство. Условие теоремы и способ задания U^t обеспечива ют равномерную сходимость интеграла в (8) на любом промежутке $[t_0, t$ $0 < t_0 < t_1$. Поэтому U^t сильно непрерывна по t и $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Пусть — контур, полученный сдвигом вправо контура Γ так, чтобы Γ' оставал в области аналитичности оператор-функции $G(\lambda)$. Использовав равенст (1) и меняя порядок интегрирования, найдем

$$\begin{aligned} U^sU^t = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma\int\limits_{\Gamma'} e^{\lambda t}e^{\mu s}G(\lambda)G(\mu)R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M)d\mu d\lambda = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}G(\lambda)R^L_\lambda(M)\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)e^{\mu s}}{\mu - \lambda}d\mu d\lambda + \\ + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu s}G(\mu)R^L_\mu(M)\int\limits_\Gamma\frac{G(\lambda)e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}d\lambda d\mu\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Применив теорему о вычетах, условие (10) и приняв во внимание аналитичность оператор-функции $\frac{G(\lambda)}{\lambda - \mu}e^{\lambda t}$ в области, ограниченной Γ и лежащей слева от Γ, можно показать, что в выражении (11)

$$\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)e^{\mu s}}{\mu - \lambda}d\mu = 2\pi iG(\lambda)e^{\lambda s}\,, \quad \int\limits_\Gamma\frac{G(\lambda)e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}d\lambda = 0\,.$$

Тогда равенство (11) примет вид

$$U^sU^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda(s+t)}G^2(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda\,.$$

Точно также устанавливается, что

$$U^{s+t-\zeta}U^\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda(s+t)}G^2(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda\,.$$

Следовательно, U^t удовлетворяет равенству (9). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если интеграл в (8) сходится при $t = 0$, то обо щенная полугруппа $\{U^t, t \geq 0\}$ при выполнении условий теоремы 1.1 удов летворяет равенству $U^sU^t = U^{s+t}C$, где

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda\,.$$

так как $\ker C \neq \{0\}$, то оператор C не является инъективным. Поэтому несмотря на то, что обобщенная полугруппа $\{U^t, t \geq 0\}$ удовлетворяет полугрупповому равенству в определении C-полугруппы, все же она не является C-полугрупповой в общепринятом смысле [2].

Будем уравнения (4) и (5) рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$A\dot{v} = Bv\,, \tag{12}$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, оператор $B : \mathrm{dom}\, B \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ линеен, замкнут, плотно определен в $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ — банахово пространство. Решением уравнения (12) назовем вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$, удовлетворяющую уравнению (12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ называется *разрешающей обобщенной полугруппой* уравнения (12), если:

(i) $\{V^t, t > 0\}$ — обобщенная полугруппа;

(ii) $\forall v_0 \in \mathcal{B}$ вектор-функция $v(t) = V^tv_0$ является решением уравнения (12).

Обобщенная полугруппа $\{V^t, t > 0\}$ называется *аналитической*, если она аналитически продолжима в некоторый сектор, содержащий положительную полуось.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда существует разрешающая аналитическая обобщенная полугруппа уравнения (4).*

Доказательство. Искомая обобщенная полугруппа $\{V^t, t > 0\}$ задается выражением (8). Она бесконечно дифференцируема при любом $t > 0$ и имеет аналитическое продолжение в сектор $\{\tau \in \mathbf{C} : |\arg\tau| < \Theta - \frac{\pi}{2}\}$, где Θ — угол, фигурирующий в условии (i) определения L-секториального оператора. То, что $\forall u_0 \in \mathcal{U}$ вектор-функция $u(t) = U^tu_0$ удовлетворяет уравнению (4), проверяется непосредственно.

2. g-интегрированные полугруппы

Предположим, что оператор-функция $G(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию:

(A) $G(\lambda)$ является аналитической на S_Θ, имеет конечное число изолированных особых точек в секторе $\mathbf{C} \setminus S_\Theta$ и $\lim\limits_{r \to +\infty}\|G(re^{i\varphi})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = 0$ равномерно по $\varphi \in [-\Theta, \Theta]$.

Пусть контур Γ' такого же вида, как выше. Положим при $t > 0$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu t}G(\mu)d\mu\,. \qquad (13)$$

Для каждого $t > 0$ $g(t)$ — линейный ограниченный оператор из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Сильно непрерывное семейство $\{S^t, t \geq 0\}$, $S^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, назовем *$g$-интегрированной полугруппой*, если $\forall s, t \geq 0$

$$S^sS^t = \int\limits_t^{t+s} g(s+t-r)S(r)dr - \int\limits_0^s g(s+t-r)S(r)dr \qquad (14)$$

и $S^0 = 0$.

Если $G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}I$, где $\alpha > 0$, I — тождественный оператор из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$, то $g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I$ ($\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция) и мы имеем α раз интегрированную полугруппу [3], в частности, при $\alpha = n$, $n \in \mathbf{N}$, получаем n раз интегрированную полугруппу [2]. Если $G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n}C$, то имеем n раз интегрированную C-полугруппу [4, 5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. g-интегрированная полугруппа называется *аналитической*, если она может быть аналитически продолжена в некоторый сектор, содержащий положительную полуось.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть выполнено условие (A). Тогда семейство $\{S^t, t \geq 0\}$, определяемое правой частью равенства (8), является аналитической g-интегрированной полугруппой.*

Доказательство. Так как подынтегральная функция в (13) – аналитическая на S_Θ, то контур Γ' в (13) можно получить сдвигом контура Γ в (8) вправо. Преобразуем правую часть равенства (14), используя (8), (13) и меняя порядок интегрирования. В результате получаем

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)\left(\int\limits_t^{t+s} g(s+t-r)e^{\lambda r}dr - \int\limits_0^s g(s+t-r)e^{\lambda r}dr\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)e^{\lambda(s+t)}\left(\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}(e^{(\mu-\lambda)s}-1)d\mu - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}(e^{(\mu-\lambda)(s+t)} - e^{(\mu-\lambda)t})d\mu\right)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)e^{\lambda t}\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu s}d\mu d\lambda -$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu(s+t)}d\mu d\lambda + \qquad (15)$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)e^{\lambda s}\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu t}d\mu d\lambda\,.$$

Здесь в процессе преобразований использовано равенство

$$\int\limits_{\Gamma'}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu t}d\mu = 0\,, \qquad (16)$$

которое может быть установлено с помощью теоремы о вычетах с использованием контура, составленного из правой дуги окружности с центром в нуле и части кривой Γ', содержащейся внутри окружности. Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом в (15) и применяя теорему о вычетах для внутреннего интеграла с использованием контура, аналогичного контуру в предыдущем случае, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu(s+t)}G(\mu)\int\limits_\Gamma\frac{G(\lambda)R^L_\lambda}{\mu-\lambda}d\lambda d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu(s+t)}G^2(\mu)R^L_\mu(M)d\mu\,.$$

Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — особые точки оператор-функции $G(\lambda)$, то снова применяя теорему о вычетах к внутренним интегралам в правом и третьем слагаемом в (15), получим

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}G(\lambda)R^L_\lambda(M)\left(G(\lambda)e^{\lambda s} + \sum_k \operatorname*{res}_{\mu=a_k}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu s}\right)d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu(s+t)}G^2(\mu)R^L_\mu(M)d\mu +$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda(s+t)}G^2(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}G(\lambda)R^L_\mu(M)\sum_k \operatorname*{res}_{\mu=a_k}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu s}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda s}G(\lambda)R^L_\lambda(M)\sum_k \operatorname*{res}_{\mu=a_k}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu t}d\lambda\,.$$

В интеграле

$$\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu(s+t)}G^2(\mu)R^L_\mu(M)d\mu$$

контур Γ' можно заменить на Γ в силу аналитичности подынтегральной функции. Левую часть равенства (14) можно преобразовать к виду (1
Затем, вычисляя внутренние интегралы, получим

$$S^sS^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda(s+t)}G^2(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}G(\lambda)R^L_\lambda(M)\sum_k \operatorname*{res}_{\mu=a_k}\frac{G(\mu)}{\mu-\lambda}e^{\mu s}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} e^{\mu s}G(\mu)R^L_\mu(M)\sum_k \operatorname*{res}_{\lambda=a_k}\frac{G(\lambda)}{\lambda-\mu}e^{\lambda t}d\mu\,.$$

Учитывая, что здесь Γ' можно заменить на Γ в силу аналитичности подынтегральной функции, и сравнивая полученное выражение с выражением (17), убеждаемся, что равенство (14) для S^t выполняется. То, что

$$S^0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma G(\lambda)R^L_\lambda(M)d\lambda = 0$$

, проверяется так же, как равенство (16) с использованием равномерного по $\varphi \in [-\Theta, \Theta]$ условия

$$\lim_{r\to\infty}\|G(re^{i\varphi})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = 0$$

и L-секториальности оператора M. Как и в случае обобщенной полугруппы g-интегрированную полугруппу $\{S^t, t \geq 0\}$ можно аналитически продолжить в сектор $\{\tau \in \mathbf{C} : |\arg\tau| < \Theta - \frac{\pi}{2}\}$. Теорема доказана.

Рассмотрим случай α раз интегрированной полугруппы:

$$S^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^\alpha}R^L_\lambda(M)d\lambda\,. \qquad (18)$$

Поскольку оператор-функция $G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}I$, $\alpha > 0$, удовлетворяет условию (A), то (18) является аналитической α раз интегрированной полугруппой (в качестве λ^α берется главное значение).

ТЕОРЕМА 2.2. *α раз интегрированная полугруппа (18) удовлетворяет неравенству $\|S^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq const \cdot t^\alpha$.*

Доказательство. Сделаем в (18) замену $\lambda t = \nu$. Тогда

$$S^t = \frac{t^\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{e^\nu}{\nu^\alpha t}(\frac{\nu}{t}L - M)^{-1}Ld\nu = \frac{t^\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{e^\nu}{\nu^\alpha}(\nu L - tM)^{-1}Ld\nu\,.$$

Здесь контур Γ' можно взять не зависящим от t в силу аналитичности подынтегральной функции. Так как в силу L-секториальности оператора

$$\|(\nu L - tM)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = \frac{1}{t}\|(\lambda L - M)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \frac{\text{const}}{|\nu|},$$

$$\|S^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq t^\alpha\text{const}\int\limits_{\Gamma'}\frac{e^\nu}{|\nu|^{\alpha+1}}d\nu = \text{const}\cdot t^\alpha.$$

Теорема доказана.

Аналогичные построения можно провести, используя левую L-резольвенту оператора M вместо правой L-резольвенты $R^L_\lambda(M)$.

Список литературы

[illegible] Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. [illegible] вып. 1(298). С. 47-74.

[illegible] И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // Успехи [illegible] наук. 1994. Т.49, вып. 6(300). С. 111-150.

[illegible] Mijatović and Stevan Pilipović. α-Times Integrated Semigroups ($\alpha \in \mathbf{R}_+$) // J. [illegible] An. App. 210. 1997. С. 790-803.

[illegible] R.W. Mild integrated C-existence families // Studia Math. 1995. 112(3). С. 251-

[illegible] А.С. Об интегрированных полугруппах // Вестн. Челяб. гос. пед. ун-та. [illegible] 1. Естеств. науки. 1996. N.1. С. 91-95.

SUMMARY

Generalized semigroups and g-integrated semigroups including respectively