ИНДЕКС 70560

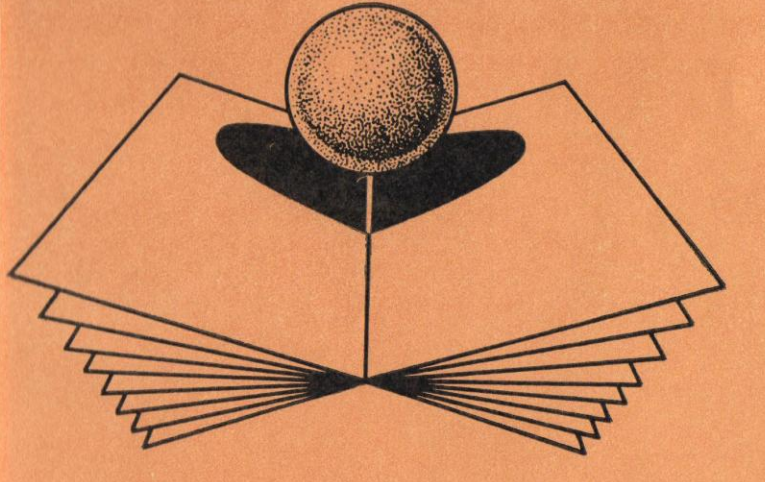
Математические заметки том 47 выпуск 1 январь 1990

Москва «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы

ISSN 0025-567X

Академия наук СССР

Математические заметки



том 47
выпуск 1 январь 1990

Математические заметки

том 47 выпуск 1 январь 1990

МИНИМАЛЬНОЕ ПОДСТАНОВОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ ЯНКО J_4

В. М. Ситников

Как показано в [1], изучение минимальных подстановочных представлений известных конечных простых групп, т. е. их представлений на смежных классах по собственным подгруппам минимального индекса, является одним из путей пересмотра классификации конечных простых групп. В настоящей работе исследуется минимальное подстановочное представление простой спорадической группы Янко J_4.

В. Д. и Н. П. Мазуровы в [2] доказали, что собственной подгруппой минимального индекса J_4 является подгруппа M, изоморфная нетривиальному расщепляемому расширению элементарной абелевой группы порядка 2^{11} с помощью группы Матье M_{24}. Индекс M в J_4 равен 173067389.

ТЕОРЕМА. *Подстановочное представление группы* J_4 *на смежных классах по подгруппе* $M = 2^{11} : M_{24}$ *имеет подстепени, равные 1*, 82575360, 28336, 15180, 32643072, 54405120, 3400320. *Соответствующие стабилизаторы двух точек изоморфны* $M = 2^{11} : M_{24}$, $L_2(23)$, $2^{1+12} : 3\Sigma_6$, $2^{3+12}(\Sigma_3 \times L_3(2))$, $[2^7]\cdot\Sigma_5$, $[2^8]\cdot(\Sigma_3 \times \Sigma_3)$, $[2^{12}](\Sigma_3 \times \Sigma_3)$.

Здесь при обозначении подгрупп 2^{m+k} означает специальную группу порядка 2^{m+k} с центром порядка 2^m, 2^m — элементарную абелеву группу порядка 2^m, $[2^m]$ — подгруппу порядка 2^m, $A\cdot B$ $(A : B)$ — расширение (расщепленное расширение) группы A с помощью B.

Подстановочным представлением группы $\mathcal{G}$ на смежных классах по подгруппе H называется действие $\mathcal{G}$ на фактормножестве $\mathcal{G} \mid H = \{Hg \mid g \in \mathcal{G}\}$, определенное правилом

$$Hg \to Hgx \ \forall x \in \mathcal{G}.$$

Соответствующий подстановочный характер χ группы $\mathcal{G}$ совпадает с характером группы, индуцированным на $\mathcal{G}$ с тривиального характера подгруппы H, $\chi = 1_H^{\mathcal{G}}$. Для этого подстановочного

Таблица 1

Классы в M	Классы в J_4	Подстановочный характер χ	Структура $C_M(x)$	$R_i : M$		$L_2(23)$	$2^{1+12}\cdot 3\Sigma_6$	$2^{3+12}\cdot(\Sigma_3 \times L_3(2))$	$[2^7]\cdot\Sigma_5$	$[2^8](\Sigma_3\cdot\Sigma_3)$	$[2^{12}](\Sigma_3\cdot\Sigma_3)$
				$\lvert C_M(x)\rvert$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
$3A$	$3A$	737	$2^5 : 3A_6$	$2^8\cdot3^3\cdot5$	1	.	76	60	.	480	120
$3B$	$3A$	737	$(2^3 : L_3(2))\times 3$	$2^6\cdot3^2\cdot7$	1	336	7	15	84	168	126
$5A$	$5A$	14	$(2^3 : A_4)\times 5(QQ_3) : 3\cdot5$	$2^5\cdot3\cdot5$	1	.	1	.	12	.	.
$7A$	$7A$	5	$2\Sigma_4\cdot 7$	$2^3\cdot3\cdot7$	1	.	.	4	.	.	.
$7B$ **	$7B$ **	5	$\Sigma_4\times 7$	$2^3\cdot3\cdot7$	1	.	.	4	.	.	.
$11A$	$11B$	11	11	11	1	10	.	.	.	.	.
$15A$	$15A$	2	$2\times3\times5$	$2\cdot3\cdot5$	1	.	1	.	.	.	.
$15B$ **	$15A$	2	$2\times3\times5$	$2\cdot3\cdot5$	1	.	1	.	.	.	.
$21A$	$21A$	2	$2\times3\times7$	$2\cdot3\cdot7$	1	.	.	1	.	.	.
$21B$ **	$21B$ **	2	$2\times3\times7$	$2\cdot3\cdot7$	1	.	.	1	.	.	.
$23A$	$23A$	2	23	23	1	1	.	.	.	.	.
$23B$ **	$23A$	2	23	23	1	1	.	.	.	.	.
$10A$	$10A$	14	$(Q_8\times Q_8 : 3)\times 5$	$2^5\cdot3\cdot5$	1	.	1	.	12	.	.
$10B$	$10A$	14	$(2\times D_8)\times 5$	$2^4\cdot5$	1	.	1	.	12	.	.
$10C$	$10B$	2	$(2\times D_8)\times 5$	$2^4\cdot5$	1	.	1	.	.	.	.
$10D$	$10B$	2	$(2\times D_8)\times 5$	$2^4\cdot5$	1	.	1	.	.	.	.
$20A$	$20A$	2	$Z_4\times Q_8\times Z_5$	2	1	.	1	.	.	.	.
$20B$	$20B$	2	$Z_4\times Q_8\times Z_5$	2	1	.	1	.	.	.	.

характера справедливо соотношение

$$1_H^{\mathscr{G}}(x)=\frac{\lvert x^{\mathscr{G}}\cap H\rvert\cdot\lvert C_{\mathscr{G}}(x)\rvert}{\lvert H\rvert}=\frac{\lvert x^{\mathscr{G}}\cap H\rvert\cdot\lvert C_{\mathscr{G}}(x)\rvert}{\lvert x^H\cap H\rvert\cdot\lvert C_H(x)\rvert}. \tag{1}$$

Если $\{x^{\mathscr{G}}\cap H\}=\bigcup_{i=1}^{k}\{x_i^H\cap H\}$, то это соотношение можно переписать в виде

$$1_H^{\mathscr{G}}(x)=\sum\nolimits_{i=1}^{k}\frac{\lvert C_{\mathscr{G}}(x)\rvert}{\lvert C_H(x_i)\rvert}, \tag{2}$$

где $x^{\mathscr{G}}=\{g^{-1}xg \mid g\in\mathscr{G}\}$ — класс элементов, сопряженных с x в $\mathscr{G}$, а $x_1,\ldots,x_k$ — представители различных классов сопряженных элементов в H, на которые распадается множество $\{x^{\mathscr{G}}\cap H\}$. Очевидно, $\chi(x)=1$ тогда и только тогда, когда $\lvert C_{\mathscr{G}}(x)\rvert=\lvert C_H(x)\rvert$ и $x^{\mathscr{G}}\cap H=x^H\cap H$, а $\chi(x)=0$, когда $x^{\mathscr{G}}\cap H=\varnothing$.

Ранг подстановочного представления группы $\mathscr{G}$ на множестве смежных классов $\mathscr{G}\mid H$ по подгруппе H совпадает с числом различных двойных смежных классов по H в разложении группы $\mathscr{G}$ [3]. Если $\mathscr{G}=\bigcup_{i=1}^{k}Hx_iH$ — разложение группы $\mathscr{G}$ на двойные смежные классы по подгруппе H, то подстановочное представление ρ группы H на смежных классах $\mathscr{G}\mid H$ есть прямая сумма подстановочных представлений $\rho_i\ (i=\overline{1,k})$ подгруппы H на смежных классах группы $\mathscr{G}$ по H, лежащих в двойном смежном классе Hx_iH соответственно. Смежные классы из Hx_iH образуют орбиту $\Delta_i\ (i=\overline{1,k})$ для подгруппы H (подорбиты для группы $\mathscr{G}$). Если φ_i — характер представления ρ_i, то $\chi\,|_H=\sum_{i=1}^{k}\varphi_i$.

Число смежных классов $\mathscr{G}$ по H, лежащих в Δ_i, называется подстепенью группы $\mathscr{G}$. Представление ρ_i эквивалентно подстановочному представлению H на смежных классах по подгруппе $R_i=H\cap x_i^{-1}Hx_i$. Следовательно, $\lvert\Delta_i\rvert=\lvert H:R_i\rvert$ и стабилизатор точки из Δ_i в подгруппе H изоморфен R_i.

Таким образом, задачу определения подстепеней подстановочного представления группы $\mathscr{G}$ по подгруппе H и стабилизаторов в H точек из подорбит Δ_i можно свести к определению пересечений $R_i=H\cap x_i^{-1}Hx_i$ и индексов $\lvert H:R_i\rvert\ (i=\overline{1,k})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. В основу доказательства положены результаты о подгруппах J_4 из [4], а также результаты из [5], где найден ранг подстановочного представления J_4 по M и найдены значения соответствующего подстановочного характера на элементах группы J_4.

Пусть $\mathscr{G}=J_4$ и $M=V\colon K$, где $V\simeq 2^{11}$, $K\simeq M_{24}$. По [5] ранг подстановочного представления J_4 по подгруппе M равен 7. Следовательно, $\chi\,|_M=\sum_{i=1}^{7}\varphi_i$. Нашей целью будет найти пересечения $R_i=M\cap x_i^{-1}Mx_i\ (i=\overline{1,7})$ и порядок $\lvert M:R_i\rvert=\lvert\Delta_i\rvert$. В ходе доказательства будем постепенно заполнять таблицу 1, вычисляя значения φ_i на отдельных элементах группы M. При этом будем использовать значения подстановочного характера χ группы J_4 по M на элементах группы J_4, которые были получены в [5]. Для подгрупп группы J_4 будем использовать обозначения из [4].

Рассмотрим подгруппу $M = V: K$. Пусть $P_{23} = \langle a \rangle$ — силовекал 23-подгруппа из K. Тогда $N_M(P_{23}) = N_k(P_{23}) = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle b \rangle$, где $|b| = 11$. С другой стороны, $N_{\mathscr{G}}(P_{23}) = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle bc \rangle$, где $|bc| = 22$, $|c = 2|$ и $b \cdot c = cb$. Положим $x_2 = c$ и $R_2 = M \cap M^c$. Подгруппа R_2 инвариантна относительно элемента c и содержит $N_M(P_{23})$. Так как показатель 2 относительно 23 равен 11, то либо $R_2 \cap \mathscr{V} = 1$, либо $\mathscr{V} \leqslant R_2$. В последнем случае $c \in N_{\mathscr{G}}(\mathscr{V}) = M$, что противоречиво. Следовательно, $\mathscr{V} \cap R_2 = 1$. Если $|R_2| = |N_M(P_{23})| = 23 \cdot 11$, то $|M| / |R_2| > |\mathscr{G}| / |M|$, что невозможно. Список максимальных подгрупп из $K \simeq M_{24}$, содержащих $N_K(P_{23})$, показывает, что либо $R_2 = M_{23}$, либо $R_2 = L_2(23)$. Так как M_{23} совершенная группа, то $R_2 = L_2(23)$. Соответствующая орбита $\Delta_2 = \{Mx_2M \mid M\}$ имеет длину $|M| / |R_2|$. Таким образом, доказано

$$|\Delta_2| = 82.575.360, \quad R_2 = M \cap M^{x_2} \simeq L_2(23). \qquad (3)$$

В подгруппе M справедливо $C_M(3A) \simeq 2^5 : 3A_6$ и $C_M(3B) \simeq [2^3 : L_3(2)] \times 3$, где $C_V(3A) = 2^5$, $C_K(3A) \simeq 3A_6$, $C_{\mathscr{V}}(3B) = 2^3$, $C_K(3B) \simeq 3 \times L_3(2)$.

Покажем, что 3-элементы из R_2 типа $3B$. Действительно, если бы 3-элементы из R_2 были типа $3A$, то тогда $\varphi_2(3A) = |C_M(3A)| / |C_{R_2}(3)| = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 / 2^2 \cdot 3 > \chi(3A)|_M = 737$, что невозможно. Следовательно, $\varphi_2(3A) = 0$ и $\varphi_2(3B) = |C_M(3B)| / |C_{R_2}(3)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 / 2^2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336$.

Так как 3-элементы из R_2, сопряженные в M, также сопряжены и в R_2, то $\varphi_2(23) = |C_M(23)| / |C_R(23)| = 1$.

Заметим, что в $L_2(23)$ 5 классов 11-элементов, а в M — один класс. Поэтому $\varphi_2(11) = \sum_{i=1}^{5} |C_M(11)| / |C_{R_2}(11)| = 10$, так как $|C_M(11)| = 22$, а $|C_{R_2}(11)| = 11$.

Теперь мы можем заполнить полностью столбец φ_2 таблицы 1. Так как $\chi|_M(23) = (\varphi_1 + \varphi_2)(23)$ и $\chi|_M(11A) = (\varphi_1 + \varphi_2)(11)$, то длины орбит Δ_j $(j = \overline{3, 7})$ делятся на 11 и 23. Более того, порядки соответствующих стабилизаторов не содержат 11-элементы и 23-элементы.

Перейдем к определению следующей орбиты. Пусть z — центральная инволюция в $\mathscr{G}$ и $z \in V$. Тогда $H = C(z) = E \cdot F$, где $E = 2^{1+12}$, $F = 6M_{22}: 2$ и $E \cap F = \langle z \rangle$ [4, предложение 1]. Так как множество инволюций $V^{\#} = (2A_{1771}, 2B_{276})$ разбивается на 2 класса относительно действия K, то $C_M(z) = V: U : 3\Sigma_6 = E \cdot U_1 : 3\Sigma_6$, где $U = 2^6$, $U_1 = 2^5$, $E \cap U_1 = \langle z \rangle$. Обозначим через P циклическую 3-подгруппу из центра 3. Тогда $[U, P] = U$, $[U_1, P] = 1$, $C_E(P) = \langle z \rangle$ [4].

Пересечение $H \cap M = N_V(H) = E \cdot U_1 : 3\Sigma_6$ является максимальной подгруппой и в H и в M. Подгруппа $S = U_1 : 3\Sigma_6$ максимальна в группе $\mathscr{F}$ и содержит инвариантную в $\mathscr{F}$ подгруппу

$(\langle z \rangle \times P)$. Подстановочное представление группы $\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F} / (\langle z \rangle \times P)$ по подгруппе $\bar{S} = S / (\langle z \rangle \times P)$ имеет ранг 3 и подстепени 1, 16, 60 [6]. Следовательно, существует элемент $x \in \mathscr{F}$ такой, что $|\bar{S} : \bar{S} \cap \bar{S}^{\bar{x}}| = 16$ и $\bar{S} \cap \bar{S}^{\bar{x}} = \Sigma_6$. Но тогда $M \cap M^x \geqslant E \cdot 3\Sigma_6$. Так как $\mathscr{V}$ — единственная подгруппа типа 2^{11} в M, то $\mathscr{V} \not\lhd M \cap M^x$. Учитывая, что $E \cdot 3\Sigma_6 < \cdot\, C_M(z) < \cdot\, M$, получаем $M \cap M^x = E: 3\Sigma_6$. Таким образом, для $x_3 = x$ доказано

$$R_3 = M \cap M^{x_3} = E: 3\Sigma_6, \quad |\Delta_3| = 28.336. \qquad (4)$$

Найдем значения характера φ_3 на элементах из таблицы 1. Подгруппа R_3 содержит 2 класса элементов типа $3A$ из M и один класс элементов типа $3B$. Имеем $|C_{R_3}(3A_1)| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, $|C_{R_3}(3A_2)| = |C_{R_3}(3B)| = 2^8 \cdot 3^2$ [4, предложение 1]. Следовательно, по формуле (2)

$$\varphi_3(3A) = \frac{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} + \frac{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5}{2^6 \cdot 3^2} = 76, \quad \varphi_3(3B) = \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}{2^6 \cdot 3^2} = 7.$$

Все элементы порядка 5 сопряжены в R_3. Следовательно, $\varphi_3(5A) = |C_M(5A)| / |C_{R_3}(5A)| = 1$, ибо $|C_E(5)| = |Q_8 \times Q_8| = 2^5$ [4]. Заметим, что $\varphi_3(15A) = \varphi_3(15^{**}) = 1$. Так как $\chi(15A) = \varphi_1(15A) + \varphi_3(15A) = 2$, то все остальные стабилизаторы точек R_i $(i = \overline{4, 7})$ не содержат элементы порядка 15.

Обозначим через $Q = \langle q \rangle$ силовскую 5-подгруппу из K. Тогда

$$C_M(Q) = C_V(Q): C_K(Q) = W_1: [(\langle \mu_2 \rangle \times \langle \nu \rangle_2): \langle b_3 \rangle \times Q],$$

$$N_M(Q) = C_M(Q): \langle d \rangle_4.$$

Подгруппа $W_1: (\langle \mu \rangle \times \langle \nu \rangle) \approx Q_8 \times Q_8$ содержит точно 19 инволюций, причем 12 инволюций — нецентральные [4, предложение 15]. Центральные инволюции порождают подгруппу $W = 2^3$ и $W \cap V = \langle z \rangle_2$, $W \cap K = 1$. Более того, все инволюции из $W \setminus \langle z \rangle$ сопряжены в $C_M(Q)$. Инволюции из $W_1 \setminus \langle z \rangle$ — нецентральные и также сопряжены в $C_M(Q)$. Поэтому $C_M(Q)$ содержит точно 4 класса элементов порядка 10 относительно группы M, причем у элементов из двух классов $\{10A\}$, $\{10B\}$ 2-часть — центральные в $\mathscr{G}$ инволюции, у элементов из других двух классов $\{10C\}$, $\{10D\}$ 2-часть — нецентральные в $\mathscr{G}$ инволюции. Сопряженные классы 10-элементов из R_3 не сливаются в M и порядки их централизаторов в R_3 совпадают с порядками их централизаторов в M. Следовательно, $\varphi_3(10A) = \varphi_3(10B) = \varphi_3(10C) = \varphi_3(10D) = 1$. Из таблицы 1 следует, что $\varphi_i(10B) = \varphi_i(10C) = 0$ $(i = \overline{4, 7})$. Поэтому подгруппы R_i $(i = \overline{4, 7})$ не содержат элементы порядка 10, 2-часть которых есть нецентральная инволюция. Это справедливо и для элементов порядка 20, так как $\varphi_3(20A) = \varphi_3(20B) = 1$ и $\varphi_i(20A) = \varphi_i(20B) = 0$ $(i = \overline{4, 7})$. Можно считать, что $x_3 \in N_{\mathscr{G}}(R) \setminus N_M(R)$, где R — силовская 3-подгруппа из $U\, 3\Sigma_6$. Так как [4] $|N_{\mathscr{G}}(R): N_M(R)| = 2$, то $N_{\mathscr{G}}(R) \leqslant Mx_3M$.

Рассмотрим максимальную в M подгруппу $T = V : A : (B \times C)$, где $\mathscr{V} = 2^{11}$, $ABC \leqslant K$, $A = 2^6$, $B \approx \Sigma_3$, $C \approx L_3(2)$.

Из [4, предложения 13, 17] следует, что $\mathscr{V}^* = C_{\mathscr{V}}(A) = 2^3$ и $N = N_{\mathscr{G}}(\mathscr{V}^*) = L(Q \cdot C)$, где $L = O_2(N) = Q_2(C(\mathscr{V}^*)) \approx 2^{3+12}$, $Q \approx \Sigma_5$. Более того, $LC \lhd N$ и $LQ \lhd N$. Заметим также, что $N \cap M = L(Q_0 \cdot C)$, $Q_0 = \Sigma_4$ и $B \leqslant Q_0 \leqslant C_M(C_7)_3 \subset C_{\mathscr{G}}(C_7) = C_7 \times Q$, где C_7 — силовская 7-подгруппа из C. В подгруппе $Q \setminus M$ существует инволюция y такая, что $Q_0 \cap Q_0^y = B$. Следовательно, $M \cap M^y \supset L(B \times C)$. Так как $VAB = LQ_0$, $A \leqslant L$ и $V \nleqslant M \cap M^y$, то в силу максимальности $L(B \times C)$ в T вытекает $M \cap M^y = LBC$. Следовательно, для $x_4 = y$ доказано, что

$$R_4 = M \cap M^{x_4} = LBC \approx 2^{3+12}(\Sigma_3 \times L_3(2)), \quad |\Delta_4| = 15.180. \quad (5)$$

Найдем значения подстановочного характера φ_4 на элементах таблицы 1. Так как 7-элементы из R_4, сопряженные в M, сопряжены в R_4 и $|C_{R_4}(7)| = 2 \cdot 3 \cdot 7$ в силу $C_L(C_7) = 1$, то $\varphi_4(7A) = \varphi_4(7B^{**}) = 4$. Аналогично $\varphi_4(21A) = \varphi_4(21B^{**}) = 1$. Из таблицы 1 видно, что подгруппы R_i $(i \in \overline{5, 7})$ не содержат 7-элементы, ибо $\chi(7A) = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j(7A)$ и $\varphi_i(7A) = 0$ $(i \in \overline{5, 7})$. Следовательно, длины орбит $|\Delta_i|$ $(i \in \overline{5, 7})$ делятся на число 7. Обозначим через $S_1 = P_1 \times P$ — силовскую 3-подгруппу из R_4, где $P_1 = O_3(B)$, P — силовская 3-подгруппа из C. Заметим, что P порождается элементом типа $3A$, а все элементы из $S_1 \setminus P$ — типа $3B$. Более того, элементы типа $3B$ образуют 2 сопряженных класса относительно R_4.

Пусть $P_1 = \langle a \rangle$, $P = \langle b \rangle$. Тогда $|C_M(a)| = |C_{R_4}(a)|$, $|C_{R_4}(b)| = 2^6 \cdot 3^2$, $|C_{R_4}(ab)| = 2^5 \cdot 3^2$. Следовательно, $\varphi_4(3A) = |C_M(3A)| : |C_{R_4}(3A)| = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5 / 2^6 \cdot 3^2 = 60$, а

$$\varphi_4(a) = \frac{|C_M(a)|}{|C_{R_4}(a)|} + \frac{|C_M(a)|}{|C_{R_4}(ab)|} = 1 + 14 = 15.$$

Из таблицы 1 теперь видно, что длины орбит Δ_5, Δ_6 и Δ_7 делятся на 7, 11 и 23. Более того, $\sum_{j=5}^{7} |\Delta_j|$ $(= 173067389)$ — $- \sum_{j=1}^{4} |\Delta_j|$ $(= 90448512) = 7112351072$.

Заметим, что $(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7)(5A) = \chi(5) - \sum_{i=1}^{4} \varphi_i(5A) = 12$ и пересечения $R_i = M \cap M^{x_i}$ $(i = \overline{5, 7})$ не содержат элементы порядка 15, элементы порядка 20, а также элементы порядка 10 типа $10C$, $10D$. Так как центральные инволюции из $C_M(Q)$ порождают подгруппу индекса 512 в $C_M(Q)$, то только одно из этих пересечений содержит подгруппу порядка 5. Без ограничения общности положим, что R_5 содержит силовскую 5-подгруппу из M. Тогда R_6 и R_7 являются $\{2, 3\}$-группами. Следовательно,

$$\sum_{i=5}^{7} |\Delta_i| = 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 5107 = 7 \cdot 11 \cdot 23 (2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} + 2^{\gamma} \cdot 3^{\delta} \cdot 5 + 2^{\mu} \cdot 3^{\nu} \cdot 5),$$

где $|M : R_5| = 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, $|M : R_6| = 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2^{\gamma} \cdot 3^{\delta} \cdot 5$, $|M : R_7| = 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2^{\mu} \cdot 3^{\nu} \cdot 5$.

Таким образом,

$$5107 = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} + 2^{\gamma} \cdot 3^{\delta} \cdot 5 + 2^{\mu} \cdot 3^{\nu} \cdot 5. \quad (6)$$

Если R_5 содержит силовскую 3-подгруппу R, то существует элемент $m \in M$ такой, что $R^{mx_5} = R$. Следовательно, $mx_5 \in N_{\mathscr{G}}(R)$. Но, как было показано раньше, $N_{\mathscr{G}}(R) \leqslant Mx_3M$. Это влечет $x_5 \in Mx_3M$, что противоречиво. Поэтому в разложении (6) можно считать, что $\beta \geqslant 1$. Из простого перебора вариантов для разложения (6) вытекают следующие возможности для порядков подгрупп R_5, R_6, R_7.

Таблица 2

R_6	R_6	R_7
$2^{14} \cdot 3 \cdot 5$	$2^{13} \cdot 3^2$	$2^{11} \cdot 3$
$2^{14} \cdot 3 \cdot 5$	2^{13}	$2^{11} \cdot 3^2$
$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^{14} \cdot 3^2$	$2^{11} \cdot 3$
$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5$	2^{14}	$2^{10} \cdot 3^2$
$2^{10} \cdot 3 \cdot 5$	2^{14}	$2^{11} \cdot 3^2$
$2^{10} \cdot 3 \cdot 5$	$2^{14} \cdot 3^2$	$2^{10} \cdot 3^2$
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^{16} \cdot 3^2$	$2^{10} \cdot 3$
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^{15} \cdot 3^2$	$2^{15} \cdot 3^2$

Таким образом, порядок силовской 2-подгруппы из R_i $(i = \overline{5, 7})$ не превосходит 2^{16}.

Покажем, что централизатор $F = C_{\mathscr{G}}(P)$, где $P = Z(R)$ — центр силовской 3-подгруппы R из M, содержится с точностью до сопряжения $Mx_4M \cup Mx_3M$. Подстановочное представление группы $\mathscr{F} = 6M_{22}$: 2 по подгруппе $6 \cdot (2^4 : \Sigma_6)$ имеет подстепени, равные [1, 16, 60, 6]. Следовательно, существует элемент $y \in \mathscr{F}$ такой, что $|6.(2^4 : \Sigma_6) \cap 6.(2^4 : \Sigma_6)^y| = 2^7 \cdot 3^2$. Но тогда $|M \cap M^y| \geqslant 2^{19} \cdot 3^2$, так как для центральной инволюции централизатор $C_{\mathscr{G}}(z) = EF = 2^{1+12} \cdot 6M_{22}$: 2 и $C_M(z) = E \cdot (U_1 \cdot 3\Sigma_6) \approx 2^{1+12}[6(2^4 : \Sigma_6)]$. Сравнения возможных порядков для пересечений R_i $(i = \overline{5, 7})$ показывают, что $y \in Mx_3M \cup Mx_4M$.

Покажем теперь, что $3^2 \mid |R_S|$. Нормализатор $N = N_M(R)$ содержит точно два класса сопряженных подгрупп порядка 3^2 с представителями $S_1 = P \times P_1$ и $S_2 = P \times P_2$, где $P = Z(R)$, P_2 порождается элементом типа $3A$. Следовательно, S_1 не содержит элементов типа $3B$, а подгруппа S_1 содержит 6 элементов типа $3B$ и 2 элемента типа $3A$.

Из описания максимальных подгрупп группы M_{24} (см. [4]) следует, что $\{2, 3, 5\}$-группы из M_{24}, которые не содержат элементы порядка 15 и порядок которых делится на 3^2, имеют секцию, изоморфную A_6. Следовательно, при наших предположениях подгруппа R_5 содержит 3-подгруппу, сопряженную с S_2, так как силовская 3-подгруппа из A_6 содержит более 2 элементов типа $3A$. С точностью до сопряжения элементами из M можно считать, что S_2-силовская 3-подгруппа в R_5. Если $S_2 = S_2^{x_5}$, где $S_2 = S_2^y$ для некоторого $y \in M$, то $yx_5 \in N_{\mathscr{G}}(S_2) \leqslant M$, что противоречиво. Пусть $S_2 = S_1^{x_5}$, где $\tilde{S}_1 = S_1^y$ для некоторого $y \in M$. В этом случае существует элемент $m \in M$ такой, что $P^{mx_5} = P$, т. е. $mx_5 \in N_{\mathscr{G}}(P) = \mathscr{F}$. Это противоречит доказанному выше включению $\mathscr{F} \leqslant Mx_3M \bigcup Mx_4M$. Следовательно, $3^2 \nmid |R_5|$ и порядок $|R_5|$ может быть равен либо $2^{14}\ 3\ 5$, либо $2^{10}\ 3\ 5$. Различных возможных распределений для порядков $|R_5|$, $|R_6|$, $|R_7|$ осталось таким образом только четыре (N1, N2, N5, N6).

Покажем теперь, что если силовская 3-подгруппа из R_i $(i = \overline{5, 7})$ порядка 3, то она порождается элементом типа $3B$. Предположим противное. Пусть $R_i = M \cap M^{x_i}$ $(i = \overline{5, 7})$ содержит силовскую 3-подгруппу P порядка 3 и пусть P порождается элементом типа $3A$ группы M. Тогда либо $P = \tilde{P}^{x_i}$, где $\tilde{P} = P^m$ для некоторого элемента $m \in M$, либо $P = \tilde{P}_1$, где $\tilde{P}_1 = P_1^m$, $m \in M$ и P_1 порождается элементом типа $3B$. В первом случае $P^{mx_i} = P$ и $mx_i \in N(P) = \mathscr{F} \leqslant C_{\mathscr{G}}(z) = E \cdot \mathscr{F}$. Как было показано раньше, пересечение $M \cap M^{mx_i} = M \cap M^{x_i}$ изоморфно либо M, либо R_3, либо R_4, что противоречит выбору x_i.

Во втором случае $P_1^{mx_i} = P$. Но тогда $|M \cap M^{mx_i}| = |M \cap M^{x_i^{-1}}|$ и $P_1^m \leqslant M \cap M^{x_i^{-1}}$ и группа M должна иметь две орбиты одной длины, что противоречиво. Таким образом, силовская 3-подгруппа из R_5 порождается элементом типа $3B$. Поэтому $\varphi_5(3A) = 0$ и $(\varphi_6 + \varphi_7)(3A) = \chi(3A) - \sum_{i=1}^{5} \varphi_i(3A) = 600$. Теперь заметим, что $\varphi_i(3A) = |C_M(3A)| \,/\, |C_{R_i}(3A)| = 5 \cdot 3\,(3^{\beta} \cdot 2^{\alpha}) \neq 600$ ни при каких целых числах α и β $(i = 6, 7)$. Следовательно, элементы типа $3A$ должны содержаться как в R_6, так и в R_7. Из распределений порядков пересечений $|R_i|$ $(i = \overline{5, 7})$ удовлетворяет требованиям, перечисленным выше, только следующее распределение:

$$|R_5| = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5, \quad |R_6| = 2^{14} \cdot 3^2, \quad |R_7| = 2^{10} \cdot 3^2. \tag{7}$$

Первая часть теоремы доказана. Осталось еще определить строение R_i и значения характеров φ_i для $i = 5, 7$ на элементах из таблицы 1.

Пусть Q — силовская 5-подгруппа из $R_5 = M \cap M^{x_5}$. Так как $\varphi_5(5A) = 12$, то все элементы порядка 5 сопряжены в R_5. Более того, R_5 не содержит элементов порядка 15. Следовательно, R_5 содержит секцию, изоморфную Σ_5. Таким образом,

$$R_5 = [2^7] \cdot \Sigma_5. \tag{8}$$

Все элементы порядка 3 в R_5 сопряжены. Поэтому $\varphi_5(3B) = |C_M(3B)| \,/\, |C_R(3B)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 / 2^4 \cdot 3 = 84$, так как $|C_{O_2(R_5)}(3B)| = 2^3$.

Заметим, что R_5 содержит один класс элементов типа $10A$ и 6 классов элементов типа $10B$ из группы M. Следовательно,

$$\varphi_5(10A) = \frac{|C_M(10A)|}{|C_R(10A)|} = 12 \text{ и } \varphi_5(10B) = 6 \cdot \frac{|C_M(10B)|}{|C_{R_5}(10B)|} = 12.$$

Перейдем к рассмотрению пересечений R_6 и R_7. С точностью до сопряжения элементами из M можно считать, что $S_1 = P \times P_1$ — силовская 3-подгруппа в R_6 и R_7, где $P = \langle p \rangle$ и $P_1 = \langle p_1 \rangle$ циклические подгруппы порядка 3, порожденные элементами типа $3A$ и $3B$ соответственно. Имеем $N_{\mathscr{G}}(S_1) \simeq (2^3 \times 3^2){:}\ \mathrm{GL}(3,2)$. Нормализатор $N_n(S_1) \approx (2 \times 3^2){:}\ (2 \times \Sigma_3)$ имеет индекс 16 в $N_{\mathscr{G}}(S_1)$. Ранг подстановочного представления $N_{\mathscr{G}}(S_1)$ по $N_M(S_1)$ равен 4, а подстепени равны 1, 3, 6, 6. Более того, $N_M(S_1) \cap N_M(S_1)^x \geqslant \Sigma_3 \times \Sigma_3$ для любого $x \in N_{\mathscr{G}}(R_2)$. Откуда следует, что если $x \in N_{\mathscr{G}}(S_1)$, то $M \cap M^x$ содержит подгруппу, изоморфную $\Sigma_3 \times \Sigma_3$.

Если $S_1 = S_2^{mx_i}$ $(i = 6, 7)$ для некоторого $m \in M$, где S_2 — подгруппа порядка 3^2, порожденная элементами типа $3A$, то можно считать $P^{mx} = P$. Но тогда $mx \in C_{\mathscr{G}}(P) = \mathscr{F} \leqslant Mx_4M \bigcup Mx_3M$, что противоречиво. Следовательно, $S_1 = S_1^{mx_i}$ для некоторого $m \in M$. Можно считать, что $x_i \in N_{\mathscr{G}}(S_1)$. Но тогда R_6 и R_7 содержат подгруппу, изоморфную $\Sigma_3 \times \Sigma_3$. Следовательно,

$$R_6 \simeq [2^8]{:}\ (\Sigma_3 \times \Sigma_3), \quad R_7 \simeq [2^{12}](\Sigma_3 \times \Sigma_3). \tag{9}$$

Ясно, что R_6 и R_7 содержат точно по три класса сопряженных элементов порядка 3, один из которых состоит из элементов типа $3A$, два других сливаются в M в один класс элементов типа $3B$. Положим $T_i = O_2(R_i)$ $(i = 6, 7)$. Тогда

$$T_i = \langle C_{T_i}(P_1), C_{T_i}(P), C_{T_i}(P^{-1}P), C_{T_i}(P_1P) \rangle.$$

Без ограничения общности будем считать, что 3-элементы из S_1 относительно $N_{R_i}(S_1)$ разбиваются на следующие классы: $\{P_1, P_1\}$, $\{P, P^{-1}\}$, $\{P_1\ P, P_1^{-1}P, P_1^{-1}P^{-1}, P_1P^{-1}\}$ $(i = \overline{6, 7})$.

Так как $(\varphi_6 + \varphi_7)(3A) = 600$ и элементы типа $3A$ в R_6 и R_7 сопряжены, то $600 = |C_M(3A)|/|C_{R_6}(3A)| + |C_M(3A)|/|C_{R_7}(3A)| = 5 \cdot 3\,(2^{\alpha} \cdot 2^{\beta})$. Следовательно, $\alpha = 5$, $\beta = 3$. Таким образом, $|C_{R_i}(3A)| = 3^2 \cdot 2^3$ или $3^2 \cdot 2^5$ $(i = 6, 7)$. Оценим теперь порядки централизаторов в R_6 и R_7 элементов типа $3B$. Заметим, что подстановочное представление централизатора $C_{\mathscr{G}}(P_1) = \overline{\mathscr{F}}$, где $\tilde{\mathscr{F}} \simeq 6M_{22}{:}\ 2$ и $Z(\tilde{\mathscr{F}}) = \langle a \rangle \times \langle P_1 \rangle$, по подгруппе $\hat{C} = \langle a \rangle \times C_M(P_1) \simeq 2 \times 3 \times (2^3{:}\ L_3(2))$ имеет ранг, равный 5 с подстепенями 1, 7, 42, 112, 168 [6]. Следовательно, существуют такие элементы $y_i \in \tilde{\mathscr{F}}$ $(i = \overline{1, 5})$, что $|\hat{C} \cap \hat{C}^{y_i}| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7,\ 2^7 \cdot 3^2,\ 2^6 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 3^3,\ 2^4 \cdot 3$ соответственно, откуда вытекают неравенства: $|C_M(P_1) \cap C_M(P_1)^{y_1}| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$,

$$2^5 \cdot 3^2 \leqslant |C_M(P_1) \cap C_M(P_1)^{y_2}| \leqslant 2^6 \cdot 3^2, \quad 2^4 \cdot 3 \leqslant |C_M(P_1) \cap C_M(P_1)^{y_3}| \leqslant 2^5 \cdot 3,$$

$$|C_M(P_1) \leqslant C_M(P_1)^{y_4}| \leqslant 2^2 \cdot 3^2, \quad 2^2 \cdot 3 \leqslant |C_M(P_1) \cap C_M(P_1)^{y_5}| \leqslant 2^3 \cdot 3.$$

Теперь заметим, что x_6 и x_7 можно взять из централизатора $C_{\mathscr{G}}(P_1)$, так как $S_1 = S_1^{m_i x_i}$ $(i = 6, 7)$, $m_i \in M$. Следовательно, $C_{M \cap M^{x_i}}(P_1) = C_M(P_1) \cap C_M(P_1)^{x_i}$ $\quad (i = 6, 7)$.

Учитывая полученные выше оценки, получаем:

$$|C_{R_6}(P)| = |C_{R_6}(P_1)| = 2^3 \cdot 3^2, \quad |C_{R_6}(P_1P)| = 2^2 \cdot 3,$$
$$|C_{R_7}(P)| = |C_{R_7}(P_1)| = 2^5 \cdot 3^2, \quad |C_{R_7}(P_1P)| = 2^2 \cdot 3,$$

откуда

$$\varphi_6(3A) = \frac{|C_M(P)|}{|C_{R_6}(P)|} = 480,$$

$$\varphi_6(3B) = \frac{|C_M(P_1)|}{|C_{R_6}(P_1)|} + \frac{|C_M(P_1)|}{|C_{R_6}(P_1P)|} = 56 + 112 = 168,$$

$$\varphi_7(3A) = \frac{|C_M(P)|}{|C_{R_7}(P)|} = 120,$$

$$\varphi_7(3B) = \frac{|C_M(P_1)|}{|C_{R_7}(P_1)|} + \frac{|C_M(P_1)|}{|C_{R_7}(P_1P)|} = 14 + 112 = 126.$$

Таблица 1 заполнена полностью.

Примечание. Аналогичный результат был анонсирован Нортоном [7], где доказательство целиком основывается на машинных вычислениях, суть которых в работе не отражена. Доказательство, приведенное выше, по существу не зависит от вычислений на ЭВМ.

Челябинский государственный университет

Поступило 23.07.87
Переработанный вариант 21.06.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мазуров В. Д., Фомин А. Н. О конечных простых неабелевых группах // Математические заметки. 1983. Т. 34. вып. 6. С. 821—824.
[2] Мазуров В. Д., Мазурова Н. П. Широкие подгруппы простых спорадических групп. I. Структурные вопросы теории групп. Свердловск, 1986. С. 71—84.
[3] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1961.
[4] Janko Z. A. Finite simple group of order 86 775 371 046 077 562 880 wich possesses M_{24} and the full covering group of M_{22} as subgroups // J. Algebra. 1976. V. 42. P. 564—596.
[5] Мазурова Н. П. Подгруппы больших конечных групп и задача нелинейной оптимизации // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 405—414
[6] Иванов А. А., Клин М. Х., Фараджаев И. А. Примитивные представления неабелевых простых групп порядка меньше 10^6 // Препринт. Часть I. ВНИИ системных исследований. М., 1982. С. 1—40.
[7] Norton S. The construction of J_4 // The Santa Cruz conference of finite groups. Proc. Symp. Pure Math. 1980. V. 37. P. 271—279.