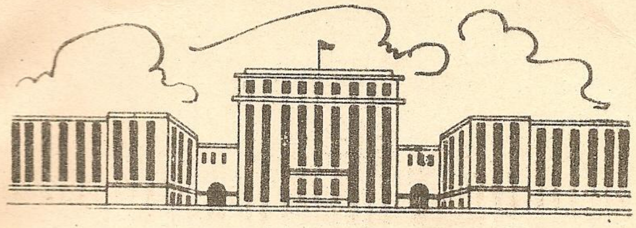

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник научных трудов № 252

ЧЕЛЯБИНСК

1980

В противном случае можно указать последовательность $\{r_n\}$, $\alpha \le r_n \le \beta$ и $\omega(r_n)/r_n \to 1$ при $n \to \infty$. Можно считать, что $r_n \to r_0$ при $n \to \infty$. Обозначим через α_n разность $r_n - \omega(r_n)$. Очевидно, $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу полунепрерывности и неубывания функции ω для достаточно больших n и некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$r_n - \alpha_n = \omega(r_n) < r_0 - \varepsilon. \tag{3}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем противоречие.

Пусть отображение T удовлетворяет условию (I). Тогда существует конечный супремум

$$q(\alpha, \beta) = \sup_{\alpha \le \psi(x,y) \le \beta} \frac{\varphi(Tx, Ty)}{\psi(x,y)}.$$

Ясно, что $q(\alpha,\beta) \le p(\alpha,\beta) < 1$ и $q(\alpha_1,\beta_1) \le q(\alpha,\beta)$, если $\alpha \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \beta$. Введем функцию

$$S(\alpha,\beta) = \max\{3/4;\ q(\alpha,\beta)\}.$$

Определим кусочно-линейную непрерывную неубывающую функцию ω_1, $\omega_1(r) < r$ такую, что для отображения T справедливо условие

$$\varphi(T_x, T_y) \le \omega_1(\psi(x,y)); \tag{Ia}$$

$$\omega_1(r) = \begin{cases} iS(1/2, i+1) + (r-i)\big((i+1)S(1/2, i+2) - iS(1/2, i+1)\big), \\ i \le r < i+1, \ i = 1, 2, \ldots \\ 2^{-i}S(2^{-(i+1)}, 1) + (r - 2^{-i})\big(2S(2^{-(i+1)}, 1) - S(2^{-(i+2)}, 1)\big), \\ 2^{-(i+1)} \le r < 2^{-i}; \ i = 1, 2, \ldots \\ S(1/2, 2) + (r-1)\big(2S(1/2, 2) - S(1/4, 1)\big), \ 1/2 \le r < 1. \end{cases}$$

Таким образом, определенная функция $\omega_1(r)$ непрерывна, так как представляет собой кусочно-линейную функцию, не убывает в силу того, что

$$S(1/2, i+1)i \le S(1/2, i+2)(i+1), \ i = 1, 2, \ldots$$

$$2S(2^{-(i+1)}, 1) \ge S(2^{-(i+2)}, 1), \quad i = 1, 2, \ldots$$
$$S(1/4, 1) \le 2S(1/2, 2).$$

Справедливость неравенства $\omega_1(r) < r$ следует из того, что $S(\alpha,\beta) < 1$. Условие (Ia) также легко проверяется:

$$\varphi(Tx, Ty) \le S(\alpha,\beta)\psi(x,y) \le \omega_1(\psi(x,y))$$

(α и β выбраны надлежащим образом).

Литература

I. Иванов А.А. Неподвижные точки отображений метрических пространств.- Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, с. 5-I02.

А.С. Макаров

О ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА УРЫСОНА

В статье приводятся достаточные условия полной непрерывности оператора Урысона, действующего в банаховых пространствах функций, заданных на произвольном пространстве с σ-конечной мерой, которые как частный случай содержат в себе некоторые утверждения [I].

Пусть (X, μ) и (Y, ν) – пространства с σ-конечными мерами. Интегральный оператор Урысона определяется формулой

$$Ax = \int_X K(s, t, x(t))\,d\mu(t),$$

в которой ядро $K: Y \times X \times (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию Каратеодори, т.е. измеримо по (s, t) при каждом $u \in (-\infty, \infty)$ и непрерывно по u при почти всех $(s, t) \in Y \times X$.

Обозначим через T множество всех функций вида $\sum_{k=1}^{m} \chi_{e_k}(s) g_k(t)$, где χ_{e_k} – характеристические функции попарно дизъюнктных измеримых множеств $e_k \subset Y$ конечной меры, g_k – ограниченные интегрируемые на X функции, m – произвольное натуральное число. Множество T всюду плотно в пространстве $L^1(Y \times X, \nu \times \mu)$ интегрируемых на $Y \times X$ функций.

<u>Лемма I.</u> Пусть $\nu Y < \infty$, $\mu X < \infty$ и $K(s,t,u) \in L^1(Y \times X, \nu \times \mu)$ при любом $u \in [-r, r]$, $r > 0$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое измеримое множество $G \subset Y \times X$ и такая функция

$f(s, t, u)$, удовлетворяющая условию Каратеодори, что $(\nu \times \mu)G^c < \delta$ и

$$|K(s, t, u) - f(s, t, u)| \le \varepsilon \tag{I}$$

при любом $u \in [-r, r]$ и почти всех $(s, t) \in G$ и $f(s, t, u) = 0$ при $(s, t) \in G^c$ $(G^c = Y \times X \setminus G)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть заданы числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и пусть последовательность чисел $\{u^j\}$ плотна на сегменте $[-r, r]$. Положим $\alpha(s,t) = \sup\{\alpha : |K(s,t,u^{j_1}) - K(s,t,u^{j_2})| \le \frac{\varepsilon}{4}$ при $|u^{j_1} - u^{j_2}| \le \alpha\}$. В силу условия Каратеодори $\alpha(s,t) > 0$ почти всюду. Рассмотрим функцию

$$F_\beta = \sup_{|u^{j_1} - u^{j_2}| \le \beta} |K(s,t,u^{j_1}) - K(s,t,u^{j_2})|.$$

Функция $F_\beta(s, t)$ измерима как верхняя грань счетного множества измеримых функций. Следовательно, измеримо множество

$$N(\beta) = \{(s,t) \in Y \times X : F_\beta(s,t) \le \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Но множество $N(\beta)$ совпадает с множеством $\{(s,t) \in Y \times X : \alpha(s,t) \ge \beta\}$. Поэтому функция $\alpha(s, t)$ измерима. Положим

$$G_k = \{(s,t) \in Y \times X : \alpha(s,t) \ge \frac{1}{k}\}.$$

Очевидно, множества G_k измеримы, $G_k \subset G_{k+1}$ и $(\nu \times \mu)G_k \to (\nu \times \mu)(Y \times X)$ при $k \to \infty$. Следовательно, существует такое натуральное число k_0, что

$$(\nu \times \mu)G_{k_0}^c < \frac{\delta}{2}.$$

При $|u_1 - u_2| \le \frac{1}{k_0}$, $u_1, u_2 \in [-r, r]$, $(s,t) \in G_{k_0}$

$$|K(s,t,u_1) - K(s,t,u_2)| \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Действительно, достаточно взять последовательности чисел из всюду плотного в $[-r, r]$ множества $\{u^j\}$, сходящиеся соответственно к u_1 и u_2 и для которых выполняются предыдущие неравенства, а затем перейти к пределу. Разделим отрезок $[-r, r]$ точками $-r = u_1 < u_2 < \ldots < u_q = r$ на части меньшей длины, чем $\frac{1}{k_0}$. В силу плотности множества T в $L^1(Y \times X, \nu \times \mu)$ и условия доказываемой леммы для каждой функции $K(s, t, u_i)$, $i = \overline{1, q}$ можно найти такую функцию

$$f_i(s,t) = \sum_{k=1}^{m_i} \chi_{e_k^i}(s) g_k^i(t),$$

что $(\nu \times \mu)D_i = (\nu \times \mu)\{(s,t) \in Y \times X : |K(s,t,u_i) - f_i(s,t)| \ge \frac{\varepsilon}{4}\} < \frac{\delta}{2q}$.

Положим $G = G_{k_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{q} D_i$. Тогда

$$(\nu \times \mu)G^c = (\nu \times \mu)(G_{k_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{q} D_i)^c \le (\nu \times \mu)G_{k_0}^c + (\nu \times \mu)(\bigcup_{i=1}^{q} D_i) < \delta.$$

При любом $u = (1-\tau)u_i + \tau u_{i+1}$ $(0 \le \tau \le 1)$ определим функцию

$$f(s,t,u) = \begin{cases} f_i(s,t)(1-\tau) + f_{i+1}(s,t)\tau, & \text{если } (s,t) \in G, \\ 0, & \text{если } (s,t) \in G^c. \end{cases} \tag{3}$$

Функция $f(s,t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори. Кроме того, при фиксированном $u \in [-r, r]$ $(u_i \le u \le u_{i+1})$ и при почти всех $(s, t) \in G$, учитывая (2), имеем

$$|K(s,t,u) - f(s,t,u)| = |(1-\tau)K(s,t,u) + \tau K(s,t,u) - f_i(s,t)(1-\tau) -$$
$$- \tau f_{i+1}(s,t)| \le |K(s,t,u) - f_i(s,t)| + |K(s,t,u) - f_{i+1}(s,t)| \le$$
$$\le |K(s,t,u) - K(s,t,u_i)| + |K(s,t,u_i) - f_i(s,t)| + |K(s,t,u) -$$
$$- K(s,t,u_{i+1})| + |K(s,t,u_{i+1}) - f_{i+1}(s,t)| < \varepsilon \ \blacktriangleright$$ [1].

Пусть $\Phi(\Lambda, \lambda)$ – банахово функциональное пространство в смысле Люксембурга [2].

Множество $M \subset \Phi$ назовем α-непрерывным, если для любой последовательности измеримых множеств $D_n \downarrow \varnothing$, $D_n \subset \Lambda$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} \|P_{D_n} x\|_\Phi = 0 \tag{4}$$

(P_D – оператор умножения на характеристическую функцию χ_D, $\varnothing$ – пустое множество).

Если $\lambda\Lambda < \infty$, то соотношение (4) эквивалентно равенству

$$\lim_{\lambda D \to 0} \sup_{x \in M} \|P_D x\|_\Phi = 0.$$

Любой оператор, действующий в банаховых функциональных пространствах и преобразующий ограниченные множества в α-непрерывные, назовем α-непрерывным.

Определим оператор $\mathcal{K}_0 x = K(s, t, x(t))$ и обозначим через $S_\Phi[x_0, r]$ замкнутый шар пространства Φ радиуса r с центром в точке x_0.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mu X < \infty$, $\nu Y < \infty$ и оператор $\mathcal{K}_0 : S_{L^\infty}[0, r] \to L^1(Y \times X, \nu \times \mu)$ является α-непрерывным. Тогда множество $A(S_{L^\infty}[0, r])$ относительно компактно в $L^1(Y, \nu)$.

[1] Символ $\blacktriangleright$ означает завершение доказательства.

<u>Доказательство</u>. В силу условия леммы по заданному числу $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta>0$, что при любом $x\in S_{L^\infty}[0,r]$

$$\|P_D \mathcal{K}_0 x\|_{L^1(Y\times X)} < \varepsilon, \qquad (5)$$

если $(\nu\times\mu)D<\delta$. Для выбранных ε и δ можно построить функцию $f(s,t,u)$, определяемую равенством (3) и обладающую свойствами, указанными в лемме I. Причем функция $f(s,t,u)$ является ограниченной в силу ее определения. Для любого $x\in S_{L^\infty}[0,r]$ положим

$$N_i(x)=\{t\in X:\ u_i\le x(t)\le u_{i+1}\},$$

где u_i – точки разбиения отрезка $[-r,r]$, построенные в лемме I. Обозначим через M_i множество функций z вида:

$$z=\begin{cases} P_{N_i(x)}x, & \text{если } N_i(x)\ne\varnothing,\\ u_i, & \text{если } N_i(x)=\varnothing,\end{cases}$$

где $x\in S_{L^\infty}[0,r]$.

При любом $t\in X$ $u_i\le z(t)\le u_{i+1}$ и $z(t)=(1-\tau(t))u_i+\tau(t)u_{i+1}$, где τ является измеримой функцией, $0\le\tau\le 1$.

Определим на множестве M_i оператор B_i по формуле

$$B_i z=\int_{N_i} f(s,t,z(t))\,d\mu(t),$$

значения которого в силу ограниченности функции $f(s,t,u)$ принадлежат $L^1(Y,\nu)$. Очевидно, что $B_i z=B_i P_{N_i(x)}x$. Покажем относительную компактность множества $B_i M_i$ в $L^1(Y,\nu)$. Пусть

$$f_i(s,t)=\sum_{k=1}^{m_i}\chi_{e_k}(s)g_k^i(t),\quad f_{i+1}(s,t)=\sum_{j=1}^{m_{i+1}}\chi_{c_j}(s)g_j^{i+1}(t).$$

Рассмотрим множества

$$e_{jk}=c_j\cap e_k,\ a_k=e_k\setminus\bigcup_{j,k}e_{jk},\ b_j=c_j\setminus\bigcup_{j,k}e_{jk},$$

$$d=Y\setminus\bigcup_{j,k}(e_{jk}\cup a_k\cup b_j)\ (k=\overline{1,m_i},\ j=\overline{1,m_{i+1}}).$$

Легко проверить, что эти множества попарно дизъюнктны и их объединение равно Y. Пусть обе точки s и s' принадлежат одному из множеств e_{jk}, a_k, b_j, d. Тогда при любой функции $z\in M_i$ в силу определения функции $f(s,t,u)$

$$|(B_i z)(s)-(B_i z)(s')|=\Big|\int_{N_i}f(s,t,z(t))\,d\mu(t)-\int_{N_i}f(s',t,z(t))\,d\mu(t)\Big|=$$

$$=\Big|\int_{N_i}[f_i(s,t)-f_i(s',t)](1-\tau(t))\,d\mu(t)+\int_{N_i}[f_{i+1}(s,t)-f_{i+1}(s',t)]\tau(t)\,d\mu(t)\Big|=0.$$

Следовательно, множество Y можно разбить на такие измеримые подмножества $Y^1, Y^2,\ldots, Y^n$, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s,s'\in Y^k}|(B_i z)(s)-(B_i z)(s')|=0$$

для каждого Y^k $(1\le k\le n)$ и для любой функции $z\in M_i$. Кроме того, множество $B_i M_i\subset L^\infty(Y,\nu)$ и является ограниченным в силу ограниченности функции $f(s,t,u)$. Используя теперь критерий компактности в L^∞ [3, п. IY.13.26], можно заключить, что множество $B_i M_i$ относительно компактно в L^∞ и, следовательно, относительно компактно в смысле сходимости почти всюду. Так как меры множеств X и Y конечны и функция $f(s,t,u)$ ограничена, то множество $B_i M_i$ является α – непрерывным в $L^1(Y,\nu)$. Поэтому в силу критерия компактности в пространстве L^1 [4] множество $B_i M_i$ относительно компактно в $L^1(Y,\nu)$.

Положим для $x\in S_{L^\infty}[0,r]$

$$Bx=\int_X f(s,t,x(t))\,d\mu(t).$$

Так как любую функцию $x\in S_{L^\infty}[0,r]$ можно представить в виде

$$x=\sum_{i=1}^{q}P_{N_i(x)}x,$$

то

$$Bx=\int_X f(s,t,x(t))\,d\mu(t)=\sum_{i=1}^{q}\int_{N_i(x)}f(s,t,P_{N_i(x)}x(t))\,d\mu(t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{q}B_i P_{N_i(x)}x=\sum_{i=1}^{q}B_i z,$$

где $z\in M_i$.

Из относительной компактности множеств $B_i M_i$ в $L^1(Y,\nu)$ при каждом $i=\overline{1,q}$ следует относительная компактность множества $B(S_{L^\infty}[0,r])$ в $L^1(Y,\nu)$. Пусть $x\in S_{L^\infty}[0,r]$. В силу (1), (5) и равенства нулю функции $f(s,t,u)$ при $(s,t)\in G^c$ имеем

$$\|Ax-Bx\|_{L^1}\le\int_Y\int_X|K(s,t,x(t))-f(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\,d\nu(s)=$$

$$=\iint_G|K(s,t,x(t))-f(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\,d\nu(s)+$$

$$+\iint_{G^c}|K(s,t,x(t))-f(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\,d\nu(s)\le$$

$$\le\varepsilon\,\mu X+\iint_{G^c}|K(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\,d\nu(s)\le\varepsilon\,\mu X+\varepsilon.$$

Таким образом, если задано число $\varepsilon_1>0$, то для множества $A(S_{L^\infty}[0,r])$ путем выбора $\varepsilon>0$ можно построить относительно компактную ε_1 – сеть $B(S_{L^\infty}[0,r])$. Отсюда следует относительная компактность в $L^1(Y,\nu)$ множества $A(S_{L^\infty}[0,r])$ ►.

Пусть $E(X,\mu)$, $F(Y,\nu)$ – банаховы функциональные пространства и $[F]$ – подпространство пространства F, состоящее из таких функций $y\in F$, что $\lim_{n\to\infty}\|P_{D_n}y\|_F=0$ при любой последовательности измеримых множеств $D_n\downarrow\varnothing$, $D_n\subset Y$.

Обозначим через $L[L^\infty,E]$ множество измеримых по (s,t) функций $x(s,t)$, для которых $\|x(\cdot,t)\|_{L^\infty(Y)}\in E$, а через $L[F,L^1]$ – множество таких измеримых функций $u(s,t)$, что $\|u(s,\cdot)\|_{L^1(X)}\in F$. $L[L^\infty,E]$ и $L[F,L^1]$ являются банаховыми функциональными пространствами соответственно с нормами

$$\|x\|_{L[L^\infty,E]}=\big\|\|x\|_{L^\infty(Y)}\big\|_{E(X)}\quad\text{и}\quad\|u\|_{L[F,L^1]}=\big\|\|u\|_{L^1(X)}\big\|_{F(Y)},$$

а множество $L[[F],L^1]=\{u\in L[F,L^1]:\|u(s,\cdot)\|_{L^1(X)}\in[F]\}$ – подпространством пространства $L[F,L^1]$.

<u>Лемма 3</u>. Справедливо равенство $L[[F],L^1]=[L[F,L^1]]$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $u\in L[[F],L^1]$ и последовательность измеримых множеств $C_n\downarrow\varnothing$, $C_n\subset Y\times X$. Тогда при почти каждом s $\varphi_n(s)=\|\chi_{C_n}(s,\cdot)u(s,\cdot)\|_{L^1(X)}\downarrow 0$. Из определения подпространства $L[[F],L^1]$ вытекает, что $\varphi_n\in[F]$. Следовательно, $\|P_{C_n}u\|_{L[F,L^1]}=\|\varphi_n\|_F\downarrow 0$ [2] и $u\in[L[F,L^1]]$. Обратно, если $u\in[L[F,L^1]]$ и последовательность измеримых множеств $D_n\downarrow\varnothing$, $D_n\subset Y$, то $\|P_{D_n}\|u\|_{L^1}\|_F=\|\|P_{D_n\times X}u\|_{L^1}\|_F\to 0$ при $n\to\infty$ $(D_n\times X\downarrow\varnothing)$, т.е. $\|u(s,\cdot)\|_{L^1(X)}\in[F]$ ►.

Назовем оператор Урысона $A: S_E[x_0,r]\to F$ нормальным, если оператор Немыцкого $\mathcal{K}x=K(s,t,x(s,t))$ определен на шаре $S_{L[L^\infty,E]}[\chi_Y x_0,r]$ пространства $L[L^\infty,E]$ и действует в $L[F,L^1]$.

<u>Лемма 4</u>. Любой нормальный оператор $A: S_{L^\infty}[0,r]\to[F]$ компактен.

<u>Доказательство</u>. Покажем, что множество $A(S_{L^\infty}[0,r])$ относительно компактно в $[F]$. Из определения нормальности оператора A следует, что оператор Немыцкого $\mathcal{K}$ определен на шаре $S_{L[L^\infty,L^\infty]}[0,r]$ и действует в $L[[F],L^1]=[L[F,L^1]]$ (лемма 3). Так как $L[L^\infty,L^\infty]=L^\infty(Y\times X,\nu\times\mu)$, то оператор $\mathcal{K}$ определен на шаре $S_{L^\infty(Y\times X)}[0,r]$. Так же, как и при доказательстве теоремы 2 [5], можно показать, что множество $\mathcal{K}(S_{L^\infty(Y\times X)}[0,r]$ α -непрерывно в $[L[F,L^1]]$. Пусть $Y_k\uparrow Y$, $X_k\uparrow X$, $\nu Y_k<\infty$, $\mu X_k<\infty$, $\chi_{Y_k}\in F$. Для заданного $\varepsilon>0$ в силу α -непрерывности оператора $\mathcal{K}$ существует такое k, что при любом $x\in S_{L^\infty(X)}[0,r]$

$$\Big\|P_{Y_k^c}\int_X|K(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\Big\|_F<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad (6)$$

$$\Big\|\int_{X_k^c}|K(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\Big\|_F<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Так как $F(Y_k,\nu)\subset L^1(Y_k,\nu)$ [2], то $L[F(Y_k,\nu),L^1(X_k,\nu)]\subset$ $\subset L[L^1(Y_k,\nu),L^1(X_k,\mu)]=L^1(Y_k\times X_k,\nu\times\mu)$ [4]. Поэтому можно определить оператор $P_{Y_k\times X_k}\mathcal{K}_0: S_{L^\infty(X_k)}[0,r]\to L^1(Y_k\times X_k)$, который в силу α -непрерывности оператора $\mathcal{K}: S_{L^\infty(Y\times X)}[0,r]\to L[[F],L^1]$ тоже является α -непрерывным. Следовательно, по лемме 2 множество

$$M=\Big\{P_{Y_k}\int_{X_k}K(s,t,x(t))\,d\mu(t):\ x\in S_{L^\infty(X_k)}[0,r]\Big\}$$

относительно компактно в $L^1(Y_k,\nu)$. Отсюда вытекает, что множество M относительно компактно в смысле сходимости почти всюду. Так как в силу α -непрерывности оператора $\mathcal{K}: S_{L^\infty(Y\times X)}[0,r]\to L[[F],L^1]$ множество M α -непрерывно в $[F(Y_k,\nu)]$, то согласно критерию компактности в $[F]$ [4] множество M относительно компактно в $F(Y_k,\nu)$ и, следовательно, в $F(Y,\nu)$. Из (6) и (7) следует, что при любом $x\in S_{L^\infty(X)}[0,r]$

$$\Big\|Ax-P_{Y_k}\int_{X_k}K(s,t,x(t))\,d\mu(t)\Big\|_F\le\Big\|P_{Y_k^c}\int_{X_k}K(s,t,x(t))\,d\mu(t)\Big\|_F+$$

$$+\Big\|\int_{X_k^c}K(s,t,x(t))\,d\mu(t)\Big\|_F\le\Big\|P_{Y_k^c}\int_X|K(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\Big\|_F+$$

$$+\Big\|\int_{X_k^c}|K(s,t,x(t))|\,d\mu(t)\Big\|_F<\varepsilon.$$

Таким образом, множество M является относительно компактной ε-сетью для множества $A(S_{L^\infty}[0,r])$, которое, следовательно, также относительно компактно в F ►.

<u>Теорема</u>. Нормальный оператор Урысона $A: E \to [F]$ вполне непрерывен, если при любой последовательности измеримых множеств $\mathcal{D}_n \downarrow \emptyset$, $\mathcal{D}_n \subset X$ и при любом $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in S_E[0,r]} \left\| \int_{\mathcal{D}_n} K(s,t,x(t))\,d\mu(t) \right\|_F = 0. \tag{8}$$

<u>Доказательство.</u> Непрерывность оператора A доказана в [5]. Установим его компактность. Пусть заданы $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ и пусть $X_K \uparrow X$, $\mu X_K < \infty$, $\chi_{X_K} \in E$. Тогда в силу (8) существует такое K и такое $\delta > 0$, что при любом $x \in S_E[0,r]$

$$\left\| \int_{X_K^c} K(s,t,x(t))\,d\mu(t) \right\|_F < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9}$$

и

$$\left\| \int_{\mathcal{D}} K(s,t,x(t))\,d\mu(t) \right\|_F < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10}$$

если $\mu\mathcal{D} < \delta$. Так как $E(X_K,\mu) \subset L^1(X_K,\mu)$, то существует такое $b > 0$, что $\|x\|_{L^1(X_K)} \le b\|x\|_{E(X_K)}$ при любом $x \in E(X_K,\mu)$. Положим $c = \frac{br}{\delta}$. Тогда $S_{L^\infty(X_K)}[0,c] \subset E(X_K,\mu)$. Оператор

$$A_K x = \int_{X_K} [K(s,t,x(t)) - K(s,t,0)]\,d\mu(t)$$

определен, очевидно, на $S_{L^\infty(X_K)}[0,c]$, принимает значения из $[F]$ и является нормальным. В силу леммы 4 множество $A_K(S_{L^\infty(X_K)}[0,c])$ относительно компактно в F. Покажем, что это множество является относительно компактной ε-сетью для множества $\{Ax - A0 : x \in S_E[0,r]\}$. Отсюда будет следовать относительная компактность множества $A(S_E[0,r])$ и, следовательно, компактность оператора A.

Для любого $x \in S_E[0,r]$ определим функцию

$$x_c = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \le c, \\ 0, & \text{если } |x| > c. \end{cases}$$

Очевидно, $P_{X_K} x_c \in S_{L^\infty(X_K)}[0,c]$. Положим $\mathcal{D}_x = X_K(|x| > c)$.

Тогда $c\|\chi_{\mathcal{D}_x}\|_{E(X_K)} \le \|x\|_{E(X_K)} < r$, откуда

$$\mu\mathcal{D}_x = \|\chi_{\mathcal{D}_x}\|_{L^1(X_K)} \le b\|\chi_{\mathcal{D}_x}\|_{E(X_K)} < \frac{br}{c} = \delta.$$

В силу (9) и (10) имеем при любом $x \in S_E[0,r]$

$$\|(Ax - A0) - A_K P_{X_K} x_c\|_F = \Big\| \int_X K(s,t,x(t))\,d\mu(t) -$$

$$- \int_{X_K} K(s,t,x_c(t))\,d\mu(t) - \int_{X_K^c} K(s,t,0)\,d\mu(t) \Big\|_F \le$$

$$\le \left\| \int_{X_K} [K(s,t,x(t)) - K(s,t,x_c(t))]\,d\mu(t) \right\|_F +$$

$$+ \left\| \int_{X_K^c} K(s,t,x(t))\,d\mu(t) \right\|_F + \left\| \int_{X_K^c} K(s,t,0)\,d\mu(t) \right\|_F <$$

$$< \left\| \int_{\mathcal{D}_x} [K(s,t,x(t)) - K(s,t,x_c(t))]\,d\mu(t) \right\|_F + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \text{ ►}.$$

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., Наука, 1966.
2. Luxemburg W.A. Banach function spaces. Thesis, Delft, 1955.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1963.
4. Грибанов Ю.И. Банаховы пространства функций и интегральные операторы. - "Известия вузов. Математика", 1966, № 4.
5. Макаров А.С. О непрерывности оператора суперпозиции в банаховых пространствах измеримых функций. Сб. асп. работ (математика). Казань, Изд-во КГУ, 1971.