МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика изучения производной в профильных классах средней школы

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль) программы бакалавриата: «Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
83 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«6» июня 2022 г.
Зав. кафедрой ММОМ
________ Суховиенко Е. А.

Выполнила:
студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Мотошкова Анастасия Евгеньевна
Научный руководитель: доцент кафедры МиМОМ, к.ф.-м.н., доцент
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Кардинальные видоизменения социально-экономических целей социума в области материальных и духовных ценностей, надобность решения проблемы подготовки выпускников к жизни и труду в условиях современного социума требуют изучения и разработки подходов к задаче образования вообще и профильного в частности.

Так, перед школой существует задача обеспечить преемственность между общим и профессиональным обучением и подготовить обучающихся старших классов к усвоению программ высшего профессионального образования.

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий, изучаемых в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы. Именно этим, в первую очередь, обусловлена актуальность нашей работы. Изучая производную, возникает понимание о многих явлениях в окружающем мире. Именно поэтому в педагогической науке и практике методика обучению темы «Производная» занимает особое место.

Для того, чтобы обучающиеся смогли разобраться в этой теме на достаточном уровне, преподавателю необходимо выбрать правильный подход к изучению, учитывая особенности программы, индивидуальные способности детей, уровень подготовки школьников.

Цель выпускной квалификационной работы: изучить методику обучения производной в старших классах средней школы и разработать методическое сопровождение изучения темы «Производная» в классе с углубленным изучением математики.

Задачи:

1) исследовать уже имеющие знания и состояние системы профильного обучения обучающихся 10-11 классов в современной России;

2) изучить становление профильного обучения в условиях реализации ФГОС;

3) изучить психолого-педагогические и возрастные особенности обучающихся 10-11 классов;

4) изучить особенности методик, с помощью которых формируются знания и умения учеников по теме «Производная», вывести наилучший подход к изучению данного материала;

5) представить таблицу производных и правила дифференцирования, объяснить геометрический смысл производной, а также продемонстрировать применение производной для исследования функции;

6) проанализировать материалы Единого государственного экзамена на предмет наличия заданий по теме «Производная»;

7) рассмотрев методические особенности изучения темы «Производная», представить технологическую карту урока алгебры для классов с углубленным изучением математики.

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах средней школы.

Предмет исследования: методика обучения решению производной в курсе алгебры старшей школы.

Гипотеза исследования: использование качественного методического сопровождения темы «Производная» будет способствовать эффективной подготовке обучающихся профильных классов средней школы.

Структура исследования: работа состоит из введения, теоретической части (ГЛАВА 1), содержащей четыре параграфа, практической части (ГЛАВА 2), которая раскрывает методические особенности изучения производной и содержит анализ школьных учебников, заключения, списка литературы и приложения.

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОФИЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ

1.1 Становление и развитие профильного обучения

Мысль профилирования старшей школы касается 1864 года, когда был принят указ, по которому все гимназии были распределены на классические и реальные, а вместо уездных училищ формировались прогимназии. Эта реформа в самом начале ставила учеников в неравное положение, так как гимназия предоставляла традиционное образование и готовила к поступлению в университет, а в реальных училищах организация обучающихся осуществлялась путём практической деятельности и поступлению в специализированные учебные заведения.

Последующим шагом развития профильного обучения стал 1925 год, когда вводилось дифференцированный профессиональный уклон для обучающихся старших классов средней школы: индустриального, кооперативного, сельскохозяйственного, педагогического, библиотечного и других. В соответствии с принятым решением содержание образования отвечало специфике того или иного уклона, при этом обучающийся должен был получить минимальный уровень знаний, необходимый для последующего обучения в вузе. Широкое распространение профильных уклонов было обусловлено общественными условиями и педагогическими причинами. С одной стороны, проблемы в экономической жизни страны, безработица требовали вооружения старшеклассников какой-либо профессией, с другой — курс на связь школы с жизнью, конкретное участие школьников в производительном труде выдвигали задачу профессионализации школы.

В 30-е годы вступает в силу постановление «О структуре начальной и средней школы», предусматривающее единый учебный план и единые учебные программы. Но введение единой школы со временем высветило серьезную проблему: нехватка преемственности среди единой средней школой и глубоко специализированными высшими учебными заведениями, что заставило ученых преподавателей в который раз обратиться к проблеме профильной дифференциации на старших ступенях обучения [11].

В результате реорганизации выступила интеграция общеобразовательных и профессиональных знаний, вводились специальные дисциплины и особые практики, определилась взаимосвязь профессионализированного и общеобразовательного цикла. Кроме того, произошло ограничение общего количества часов учебного плана и его деление на составляющие от 20 до 24 часов на общеобразовательный цикл, на специальные дисциплины от 6 до 8 часов и столько же часов на практику.

Спецификой этого периода стали также попытки разрешить через трудовое обучение вопрос о формирование мировоззрения обучающихся. В школах доминировало увлечение практической деятельностью, что привело к снижению значения общеобразовательной подготовки, поэтому в 1937 году трудовое обучение как самостоятельный учебный предмет в школе было ликвидировано.

В 50-е годы, в момент восстановления народного хозяйства, когда вновь были востребованы высококвалифицированные кадры, случилось становление трудового обучения в школе. В сельских школах вводится дисциплина «Основы сельского хозяйства», а в городских школах — «Основы промышленного производства». В 10 классе изучались «Автомобиль» и «Электротехника». У обучающихся была обязательной производственная и сельскохозяйственная практика.

В 1957 году Академия педагогических наук приступила к проведению эксперимента по дифференциации школьного образования: физико-математическому, техническому, биолого-агрономическому, социально-экономическому и гуманитарному направлениям. В связи с этим выходит закон «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР». В старших классах планировалось введение обязательного производственного обучения, для этого были расширены производственные площади и техническое оснащение учебно-производственных комбинатов. Средние общеобразовательные трудовые политехнические школы становятся школами с производственным обучением, в которых обучающиеся получают среднее образование и профессиональную подготовку для работы в народном хозяйстве.

Прогресс школы 1984 года был направлен на слияние общего и системы профессионально-технического образования с точки зрения их задач.

К 1987-1988 учебному году подготовлены программы профессионального обучения: в 8-9 классах по 30 профилям и в 10-11 классах по 80 профессиям.

Ключевая идея реформы заключалась в следующем: ученики получают среднее образование и одновременно овладевают профессией, с учетом этой профессии они подходят к осознанному выбору своего будущего. Но, невзирая на увеличение численных показателей по качеству трудового и профессионального образования, в общем и целом, реформа так и не принесла ожидаемого результата.

1.2 Этапы и условия введения профильного обучения в современном мире

С момента одобрения концепции профильного обучения, принятой в июле 2002 года, прошло довольно много лет, для того чтобы исследование стало реальностью. И все это время, шесть Тольяттинских школ апробировали идеи, написанные в концепции.

Профильное обучение учитывает специализированную подготовку обучающихся общеобразовательной школы, ориентированную на индивидуализацию обучения, их социализацию с учетом истинных потребностей рынка труда. Оно обусловлено личностно-ориентированным подходом как одной из новых парадигм образования, при этом ученик является субъектом всего образовательного процесса, а его профессиональное развитие рассматривается одной из приоритетных задач образовательного процесса.

Проведенное историко-ретроспективный исследование показал, что в основе формирования профильного обучения находится дифференцированный подход, содержимое которого во всевозможные исторические периоды обуславливалось в основном социально-экономическими потребностями государства и в меньшей степени личностно-ориентированной стратегией образования [9, с. 28-30].

Сегодняшние подходы к профильному обучению определяют интересы и запросы личности школьника, предельно формируя его индивидуальный и творческий потенциал.

Профильное образование способствует максимальному раскрытию индивидуальности, творческих возможностей и склонностей школьников и является одним из направлений повышения особенности подготовки старшеклассников к вхождению их в социальную и трудовую жизнь. Профильное образование наведено на создание у старшеклассников профессиональных устремлений, обеспечивая реализацию интересов, возможностей и ориентировано как на запросы личности, так и на потребности рынка труда. При этом значительным является выявление на более ранних ступенях обучения способностей и предпочтений, обучающихся к тем или иным видам деятельности. В этом случае формируются условия для максимального развития личности ученика в соответствии с их познавательными и профессиональными намерениями.

Стоит отметить, что профильное образование способствует эффективной адаптации выпускников школы к социально-экономическим условиям жизни, концепции собственной образовательной траектории, обеспечению потребностей в знаниях и стремлении к непрерывному самообразованию.

Основная мысль профильного обучения — это социальная целенаправленность и сбалансированность интересов школы с учреждениями профессионального образования, наукой, культурой, здравоохранением, прочими причастными ведомствами, родительской общественностью и работодателями.

Критериями успешного профильного образования являются:

1) формирование мотивации школьников к содержанию учебного материала;

2) практико-ориентированная установка образовательного процесса;

3) самостоятельность и темперамент обучающихся в учебном процессе.

Профильная дифференциация в организационном аспекте подразумевает объединение обучающихся в относительно стабильные группы, где учебный процесс идет по образовательным программам, различающимся по содержанию, запросам к уровню подготовленности школьников.

Для введения или становления системы профильного обучения в школе необходимо иметь последующие планы:

1) учебные планы обучающихся и сводный учебный план;

2) рабочие программы курсов по выбору предпрофильной подготовки и элективных предметов профильного обучения;

3) календарно-тематическое планирование работы учителей школы;

4) расписание занятий — как оперативное планирование выполнения учебных планов профильного обучения;

5) планы деятельности руководителей школы по введению профильного обучения, включающие концепцию профильного обучения и предпрофильной подготовки школьников;

6) стратегический план введения системы профильного обучения, план первого этапа реализации стратегии перехода школы на профильное обучение в старшей школе.

Разрабатывая теорию профильного обучения в школе, необходимо совершить анализ существующей образовательной программы и ответить на такие вопросы:

1) какие недостатки углубленного либо традиционного общего образования в работе школы должна будет устранить новая система профильного обучения;

2) каков выбор направления (направлений) профилизации или обучения по индивидуальным учебным планам;

3) в чем заключаются подходы к комплектованию профильных классов;

4) какова организационная модель профильного обучения: внутришкольная или сетевая;

5) какие профили целесообразно преподавать в школе;

6) сохранять ли в школе универсальное образование;

7) вводить ли обучение школьников по индивидуальным учебным планам;

8) как интегрировать школу в образовательную сеть: какие ее ресурсы нужно привлечь для организации профильного обучения, какими ресурсами можно поделиться с другими учреждениями; в каких вопросах школа может служить ресурсным центром для других школ;

9) как комплектовать десятые классы: набирать ли обучающихся из числа собственных школьников или проводить набор, привлекая обучающихся других школ;

10) каким образом нейтрализовать отрицательные последствия сделанного выбора.

Каждая основательная инновация требует от администраторов приложения усилий не только в направлении координации деятельности подчиненных и постановки перед ними новых задач, но и нормативно-правового оформления важных аспектов внедряемой системы [9, с. 25].

Качество профильного обучения в первую очередь зависит от качества преподавания конкретного педагога. Уровень его профессионализма, владение широким набором методических приемов, умение отойти от традиционных форм обучения и найти индивидуальный подход к обучающемуся лежат в основе успешности реализации идей профильного обучения. Для обеспечения качества преподавания необходимо перестраивать работу методической службы, налаживать систему внутришкольного повышения квалификации педагогов.

Проблема обеспечения учебно-методической литературой профильных дисциплин и элективных курсов. Отсутствие учебно-методической литературы сильно осложняет качественное преподавание профильных дисциплин и элективных курсов. Решение этой проблемы видится в приобретении школой комплектов учебной литературы (хотя бы на класс) в библиотеку, а также использование лекционных методов преподавания [6].

Проблема информационного обеспечения управления введением порядка профильного обучения, действенное управление инноваторским процессом невозможно без своевременной и правдивой информации о состоянии дел на различных участках выстраиваемой системы. Собственно, на основе такой информации должны приниматься управленческие решения. Текущую проблему возможно решить за счет выстраивания системы мониторинга эффективности профильного обучения.

1.3 Профильное обучение в условиях реализации ФГОС

После общественного обсуждения в течение года, с учетом замечаний и предложений, поступивших на сайт, а также от группы по доработке стандарта под руководством М. В. Ковальчука, федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования был утвержден 17 мая 2012 года приказом Минобрнауки России и 7 июня 2012 года зарегистрирован Минюстом России.

Одной из особенностей нового стандарта является профильный принцип образования.

Профильное обучение реализуется посредством:

1) изучения отдельных учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей) в рамках одной и (или) нескольких предметных областей по выбору обучающихся по программам углубленного изучения;

2) организации внеурочной деятельности обучающихся;

3) организации дополнительного образования по общеразвивающим и (или) предпрофессиональным программам;

4) организации и (или) проведения проектной, исследовательской (проектно-исследовательской и (или) творческой) деятельности обучающихся.

Итак, новыми ФГОС для 10-11 классов определены 5 профилей обучения: естественно-научный, гуманитарный, социально-экономический, технологический и универсальный (Таблица 1). При этом учебный план должен содержать не менее 9(10) учебных предметов и предусматривать изучение не менее одного учебного предмета из каждой предметной области

Таблица 1 — Профиля обучения

№	Профиль обучения	Сферы деятельности	Предметы углубленного изучения
1	Технологический	Производственная, инженерная и информационная	Математика. Информатика. Физика
2	Естественно-научный	Медицина, биотехнологии	Математика. Химия. Биология
3	Гуманитарный	Педагогика, психология, общественные отношения	Иностранный язык. История. Право
4	Социально-экономический	Социальная сфера, экономика, обработка информации, управление, предпринимательство, финансы	Математика. География. Экономика
5	Универсальный	—	—

При этом учебный план профиля обучения (кроме универсального) должен содержать не менее 3 или 4 учебных предмета на углубленном уровне изучения из соответствующей профилю обучения предметной области и (или) смежной с ней предметной области.

Требования ФГОС СОО к учебному плану СОО:

1) количество учебных занятий за 2 года на одного обучающегося – не менее 2170 часов и не более 2590 часов (не более 37 часов в неделю);

2) учебный план должен содержать 11-12 учебных предметов;

3) учебный план должен предусматривать изучение не менее одного предмета из каждой предметной области, определенной ФГОС СОО;

4) общими для включения во все учебные планы являются 8 учебных предметов: Русский язык, литература, иностранный язык, математика, история (или Россия в мире), физическая культура, ОБЖ, астрономия;

5) в учебном плане должно быть предусмотрено выполнение обучающимися индивидуальных проектов;

6) учебный план профиля обучения (кроме универсального) должен содержать не менее 3-4 учебных предметов на углубленном уровне изучения;

7) определены 5 профилей (представленные в таблице выше).

В системе профильного обучения важную роль играют элективные курсы, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Они выбираются обучающимися и являются обязательными для посещения. Элективные курсы выполняют две функции: поддерживают изучение основных профильных предметов на заданном профильном уровне и служат для внутри профильной специализации обучения и для построения индивидуальных образовательных траекторий. Элективные курсы по своему назначению подразделяются на следующие типы: дополнение к профильному курсу, обеспечение межпредметных связей и подготовка к сдаче Единого государственного экзамена по предмету, изучаемому в данном профиле на базовом уровне.

1.4 Психолого-педагогические особенности старшеклассников

Юность — важный период в развитии человека, в этот период происходит вхождения человека во взрослую жизнь. Это в буквальном смысле «третий мир», существующий между миром взрослых и детей.

Старший школьный возраст определяется возрастными рамками с 15 до 18 лет. Ведущей деятельностью в данном возрасте является учебно-профессиональная, в процессе которой формируются такие новообразования, как мировоззрение, интересы, самосознание, идеалы и ценности. В старшем школьном возрасте активно продолжается процесс познавательного развития. У старшеклассников уже не только имеется достаточный запас знаний, но и отчётливо проявляется стремление и возможность их систематизировать и упорядочивать. В данный период значительно возрастает интерес к теоретическим знаниям, желание обобщить опущенные факты, установить общие принципы и закономерности; существенно расширяется сфера осознаваемого и углубление знаний о себе, о людях, об окружающем мире. Такое положение подготовлено всем ходом предшествующего психологического развития личности [10, с. 45].

По мнению Р. С. Немова, в старших классах «развитие познавательных процессов детей достигает высокого уровня. Они оказываются практически готовыми к выполнению всех видов умственной работы взрослого человека, включая самые сложные».

Чешский педагог Я. А. Коменский писал: «Какое бы занятие не начинать, нужно прежде всего возбудить у учеников серьезную любовь к нему, доказав превосходство этого предмета; его пользу, приятность, и что только можно».

Обучающиеся математических классов отличаются характером восприятия математической задачи (задачи в широком смысле слова). Способные к математике обучающиеся, воспринимая задачу, сразу выделяют показатели, существенные для данного типа задач, величины, не существенные для данного типа задач, но существенные для данного конкретного варианта.

У обучающихся математических классов преобладает абстрактно-логическое мышление, которое характеризуется:

1) быстрым и широким обобщением (каждая конкретная задача решается как типовая);

2) тенденциями мыслить свёрнутыми умозаключениями;

3) большой подвижностью мыслительных процессов, многообразием аспектов в подходе к решению задач, лёгким и свободным переключением от одной умственной операции к другой, с прямого на обратный ход мысли;

4) стремлением к ясности, простоте, рациональности, экономичности решения.

Память способных к математике обучающихся имеет обобщённый характер: быстро запоминаются и прочно сохраняются типы задач и способы их решения, схемы рассуждений, доказательств, логические схемы. Такие ученики отличаются хорошо развитыми пространственными представлениями, при решении ряда задач они могут обходиться без опоры на наглядные образы. В каком-то смысле логичность заменяет им «образность», они не испытывают трудностей при оперировании абстрактными схемами. На уроке обучающиеся математических классов предпочитают решение нестандартных, проблемных, исследовательских задач. Красоту математики видят в необычных, неожиданных решениях. Во время работы чаще действуют индивидуально [5].

Математический профиль согласно Концепции общего среднего образования относится к курсу повышенного типа, обеспечивающему дальнейшее изучение математики и её применение в качестве элемента профессиональной подготовки. Это наиболее строгий и полный курс, ориентированный на обучающихся, выбравших для себя деятельность, непосредственно связанную с математикой.

Целями изучения математики в этом профиле являются овладение обучающимися необходимым объёмом конкретных математических знаний и формирование в этом процессе интеллектуальной культуры личности.

Больше всего трудностей возникает при организации обучения математике в гуманитарных классах. Это связано с некоторыми особенностями познавательной деятельности обучающихся-гуманитариев.

Для учеников гуманитарного профиля имеет значение содержание задачи, соответствие условия действительности. Именно в этом плане проходит её первоначальное осмысление, лишь затем начинается перевод на математический язык. Обучающиеся видят решение конкретной задачи, а не приём решения задач данного типа.

По сравнению с учениками других профилей у гуманитариев наблюдается низкая изобретательная способность при запоминании информации. Они стараются запомнить не способ доказательства теоремы, а всё доказательство полностью и, если забывают, то восстановить, чаще всего, не могут.

Обучающиеся гуманитарных классов с интересом относятся к историческим справкам, фактам и др. В отличие от учеников математического профиля ученики гуманитарного профиля хорошо запоминают исторические сведения, с удовольствием готовят сообщения.

Из форм работы на уроке они предпочитают объяснение учителем нового материала, лабораторную работу, деловые игры, выполнение индивидуальных заданий с привлечением научно-популярной литературы. Из методов работы выбирают коллективные методы, дискуссии.

Целями изучения математики в гуманитарном профиле являются умственное развитие школьника, знакомство с математикой как областью человеческой деятельности, формирование тех знаний и умений, которые необходимы для свободной ориентации в современном мире.

Итак, математика в гуманитарном профиле является курсом общекультурной ориентации. Этот курс рассчитан на обучающихся, склонных рассматривать математику только как элемент общего образования и не предполагающих использовать её непосредственно в своей будущей профессиональной деятельности.

В классах экономического профиля обучающиеся рассматривают математику как инструмент для решения прикладных задач. Если же говорить об особенностях мышления, то их мышление характеризуется прикладным стилем.

Учителю следует как можно чаще акцентировать внимание обучающихся на универсальности математических методов, показывать на конкретных примерах их прикладной характер. Особый интерес вызовут примеры, иллюстрирующие применение метода в экономике.

Большое значение в процессе обучения математике имеет понимание школьниками практической значимости того или иного учебного материала. Поэтому при изучении любой темы необходимо сразу же очертить область, в которой этот материал может иметь фактическое применение.

Закрепление теоретических знаний следует осуществлять, в основном, в ходе решения математических и экономических задач.

Для привития интереса к предмету очень важна мотивационная сторона обучения: каждое новое понятие или положение должно, по возможности, первоначально проявляться в задаче прикладного характера.

Итак, экономический профиль, также, как и математический профиль относится к курсу повышенного типа, обеспечивающему дальнейшее изучение математики и её применения в качестве элемента профессиональной подготовки. Но, в отличие от математического, ориентирован на обучающихся с прикладным стилем мышления, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира. Поэтому, он должен быть построен с учётом того, что математика для таких обучающихся является хотя и необходимым, но не самым важным предметом.

Изучение математики в экономическом профиле преследует такие цели:

1) овладение изучения закономерностей окружающего мира. деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства конкретными математическими знаниями, позволяющими выработать представление о применении математики в профилирующей науке и достаточными для изучения в вузе соответствующего направления;

2) формирование прикладного стиля мышления;

3) общекультурное развитие школьников, так как большое внимание необходимо уделять гуманитарной направленности курса.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОИЗВОДНАЯ» В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

2.1 Анализ школьных учебников на предмет изложения темы «Производная»

Я решила изучить материалы трех учебников, которые вошли в федеральный перечень учебников на период всего 2021-2022 года: А. Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11», Колягин Ю.М. «Алгебра и начала математического анализа», М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, В.Н. Соломин, А. Н. Головин «Алгебра и начала математического анализа».

2.1.1 А. Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа». 10-11 класс

Абсолютно всем темам (Таблица 2) прилагаются грамотные определения, формулировки теорем (некоторые с доказательствами), рисунки, огромное количество примеров, которые помогают наглядно разобраться и отвечать на вопросы, возникшие у учеников.

Таблица 2 — Рабочая программа

Тема	Количество часов
Определение производной	2 часа
Вычисление производных	3 часа
Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции	3 часа
Уравнение касательной к графику функции	3 часа
Контрольная работа № 7	1 час
Применение производной для исследования функций	3 часа
Построение графиков функций	2 часа
Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин	4 часа
Итог	21 час

Вводится определение производной, геометрический и физический смысл производной и алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

с помощью определения предела. Нам предлагается таблица производных от элементарных функций, например, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ или $(x^2)' = 2x$. После чего переходим к изучению правил дифференцирования, и нахождению производной от сложной функции: $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Дальше мы с помощью учебника выводим уравнение касательной к графику: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. И здесь же предлагается алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$.

После мы учимся применять производную для исследования функции на монотонность и экстремумы. Здесь мы знакомимся с новыми определениями точек максимума и минимума и их условиями, алгоритмом исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы.

В завершение данной главы, предлагается построение графиков функций следующего типа: $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, и применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений функции, например: $y = |x^3 - 1| - 3x, x \in [-1; 3]$.

Мне кажется, что в данном учебнике тема изложена достаточна полно и доступно для учеников, грамотно структурированы параграфы, нет ничего лишнего, что, безусловно, поможет даже в самостоятельном изучении.

Данная тема очень важна в курсе алгебры, именно, в этом учебнике материал подобран наилучшим образом, для себя я выделила некий план изучения темы «Производная» для успешного усвоения:

1) знакомство с задачами, приводящими к понятию производной: задачи о скорости движения и задачи о касательной к графику функции, что подготавливает учеников к изучению темы «Производная»;

2) определение и вычисление производных функций, геометрический смысл производной, формулы и правила дифференцирования, дифференцирование сложных функций;

3) применение производной для исследования функций: монотонность, точки экстремума, нахождение наибольших и наименьших значений функции, построение графиков функций.

2.1.2 Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. «Алгебра и начала математического анализа». 11 класс

Анализируя данный учебник и темы (Таблица 3), стоит отметить, что Ю. М. Колягин, так же, как и А. Г. Мордкович, начинает с определения производной.

Таблица 3 — Рабочая программа

Тема	Количество часов
Глава 2. Производная и её геометрический смысл	
Определение производной	2 часа
Правила дифференцирования	3 часа
Производная степенной функции	2 часа
Производные элементарных функций	3 часа
Геометрический смысл производной	3 часа
Урок обобщения и систематизации знаний	1 час
Контрольная работа № 2 по теме «Производная и её геометрический смысл»	1 час
Глава 3. Применение производной к исследованию функций	
Возрастание и убывание функции	2 часа
Экстремумы функции	2 часа
Наибольшее и наименьшее значения функции	3 часа
Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба	2 часа
Построение графиков функций	4 часа
Урок обобщения и систематизации знаний	1 час
Контрольная работа № 3 по теме «Применение производной к исследованию функций»	1 час
Итог	30 часов

Параграф, посвященный правилам дифференцирования, включает в себя также нахождение производной обратной и сложной функции, с примерами и доказательствами. Нахождение производных степенной функции, элементарных функций типа $f(x) = (\ln^2(1+x) \cdot 3^{2x})$ рассматривается в отдельных параграфах.

Геометрический смысл производной начинается с понятия углового коэффициента, приведено уравнение касательной к графику функции.

Также тема «Производная» рассматривается в следующей главе. Здесь приводят теорему Лагранжа (без доказательства), с помощью которой доказываются достаточные условия возрастания и убывания функции.

Даны определения максимума и минимума функции, теорема Ферма представлена без доказательства. На практических примерах показано нахождение наибольшего и наименьшего значения функции и отыскание площади фигур, например: из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади (рисунок 1).

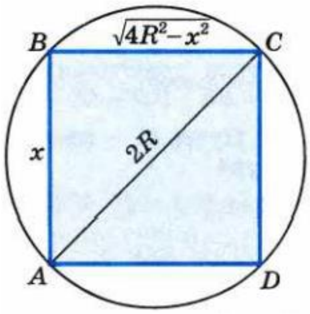


Рисунок 1 — Вписанный прямоугольник

Даны определения выпуклости функции и точки перегиба, с использованием второй производной $f''(x) = (f'(x))'$.

Введено понятие наклонной асимптоты $y = kx + b$. Для построения графика функции дан план и наглядные примеры.

Главы в учебнике заканчивается большим количеством упражнений и вопросов по главе, а также исторической справкой.

Учебник содержит много тематических задач, которые выделены по степени сложности. Теоретическая часть также имеет метки: обязательные к изучению, для профильного уровня и материал для интересующихся математикой.

Стоит отметить, что материал, который нам дают А. Г. Мордкович и Ю. М. Колягин достаточно схож: четкая структура тем, формулировки понятий и теорем, и задания, прилагаемые к каждому параграфу, имеют несущественные различия. Достаточное количество теории, подкрепленное понятными примерами.

2.1.3 М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, В.Н. Соломин, А. Н. Головин «Алгебра и начала математического анализа». 11 класс

Анализируя параграфы (Таблица 4), при первом знакомстве с производной мы встречаемся с задачами двух типов: задачами, связанными с определением производной как предела и задачами, призванными сформировать у обучающихся неформальное понимание понятия производной. Это задачи, в которых производная интерпретируется как скорость.

Таблица 4 — Рабочая программа

Тема	Количество часов
Глава 9. Производная и её применение	
Определение производной. Производная линейной комбинации функций	2 часа
Производные некоторых элементарных функций	3 часа
Задача о касательной. Уравнение касательной	2 часа
Приближение функции линейной функцией. Дифференциал	1 час
Производная произведения и частного. Производная композиции.	3 часа
Таблица производных. Первообразная	2 часа
«Французские теоремы»	2 часа
Исследование функции с помощью производной	4 часа
Вторая производная. Выпуклые функции.	2 часа
Построение эскизов графиков с помощью производной. Решения задач с использованием производной.	4 часа
Контрольная работа № 3 «Применение производной к исследованию функций»	1 час
Итог	26 часов

При изучении производной элементарных функций начинается формирование навыков вычисления производной. Задачи (при каких значениях параметра a производная функции f всегда положительна, если $f(x) = ax + 5$) вносят разнообразие в монотонные технические задачи на вычисление производной и приглашают обучающихся рассуждать.

Стандартными являются задачи на составление уравнения касательной в данной точке или уравнения касательной, проходящей через данную точку. Примеры решения подобных задач разобраны в тексте параграфа. В учебнике приведено достаточно большое количество симпатичных (в том числе весьма сложных) задач на касательную. Предлагать их можно, исходя из уровня класса.

Опыт изложения материала по теме «Дифференциал» авторами показывает, что формальные выкладки, в частности теорема о равносильности дифференцируемости функции в точке и существовании её конечной производной, непросты для обучающихся, но в то же время геометрический смысл дифференциала нагляден и понятен.

В следующем параграфе разбираются формулы производных произведения, частного и композиции функций и предлагается много задач на технику дифференцирования. Эти задачи, возможно, не самые интересные, однако, необходимо добиться от обучающихся автоматического применения правил дифференцирования и запоминания формул производных элементарных функций — без этого решать задачи на применение производной сложно.

Материал изложения темы «Исследование функции с помощью производной» параграфа достаточно стандартен. В нём обсуждаются и отрабатываются алгоритмы нахождения промежутков возрастания и убывания функций, а также экстремумов и наибольших и наименьших значений.

Понятие выпуклости является одним из центральных в современной теории оптимизации, функциональном анализе и иных дисциплинах. Кроме того, применение неравенства Йенсена к конкретным выпуклым функциям позволяет получать множество полезных неравенств (например, неравенство Коши).

И в завершении, задачи на построение графиков и исследование свойств функции. Авторам значительно ближе те задачи, в которых построение графика не является самоцелью, а служит инструментом решения задач. В качестве примера можно привести задачи, в которых нужно ещё сообразить, какой график нужно построить; задачи, в которых возможно построение нескольких графиков и выбор нужного графика зачастую является творческой задачей, существенно упрощающей решение задачи (при каких неотрицательных значениях параметра a наибольшее значение функции $f(x) = ax + \frac{1}{x}$ на промежутке $[-2; -1]$ будет наименьшим по модулю?).

Анализируя представленный в школьных учебника материал, можно прийти к выводу, что в учебниках с углубленным уровнем изучение предмета теория по теме «Производная и ее применение» дана обширнее и полно. Основные понятия и правила схожи, но имеются различия в интерпретации, в применении производной. Изучая выбранный в соответствии с учебной программой учебник, можно брать примеры из других учебников, составлять тесты и давать домашнее задание.

2.2 Анализ ЕГЭ на наличия заданий по теме «Производная»

ЕГЭ — это форма государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования.

ЕГЭ по математике предполагает два уровня: базовый (для выпускников, планирующих выбрать специализацию, не связанную с математикой) и профильный (для выпускников, у которых математика будет одним из ведущих предметов в высшем учебном заведении). Экзаменационная работа для базового уровня состоит из 21 задания с кратким ответом, а для профильного уровня состоит из двух частей: первая часть содержит 8 заданий с кратким ответом и проверяет базовые знания, вторая часть содержит 3 задания повышенного уровня с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развернутым ответом.

Я предлагаю рассмотреть типы заданий по производной, которые встречаются в вариантах, размещенных на сайтах fipi.ru (открытый банк заданий ЕГЭ) и sdamgia.ru (образовательный портал Д. Д. Гущина для подготовки к экзаменам) для профильного уровня.

Задание № 6 ЕГЭ.

Текущее задание полностью посвящено теме производная. Здесь предлагаются задания на физический и геометрический смысл производной, а также применение производной к исследованию функций.

Пример 1 (физический смысл производной). Материальная точка движется прямолинейно по закону $x = t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Пример 2 (геометрический смысл производной). На рисунке 2 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.

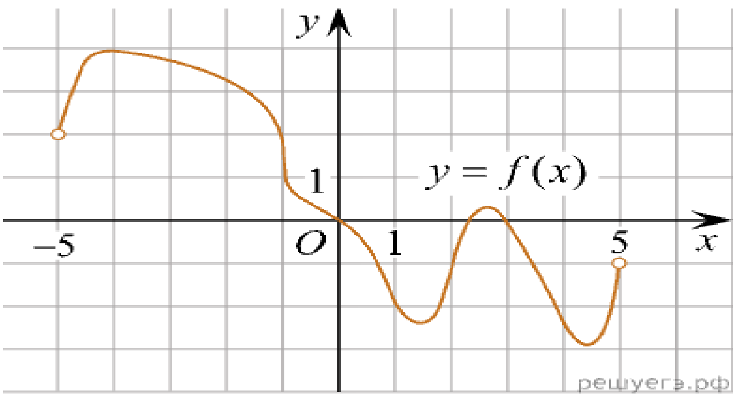


Рисунок 2 — График функции

Пример 3 (геометрический смысл производной). На рисунке 3 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

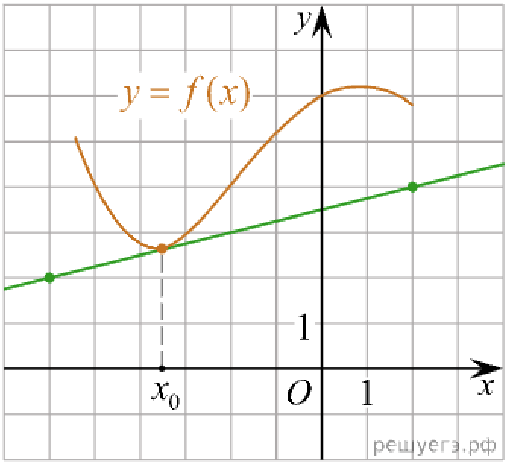


Рисунок 3 — График функции

Пример 4 (геометрический смысл производной). Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Пример 5 (геометрический смысл производной). Прямая $y = -5x - 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Пример 6 (применение производной к исследованию функций). На рисунке 4 изображен график производной функции $f(x)$ определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

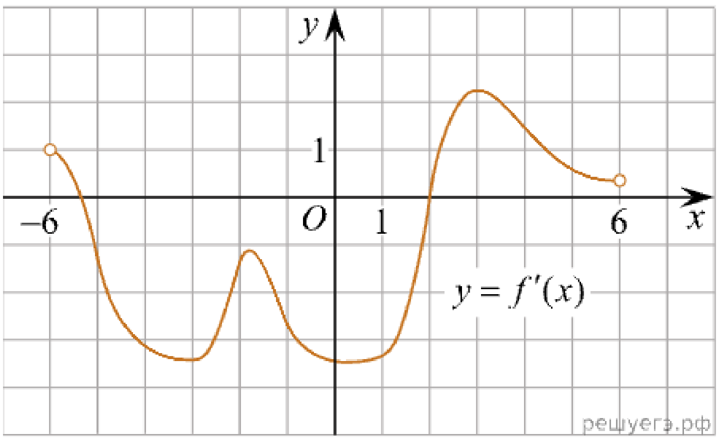


Рисунок 4 — График функции

Пример 7 (применение производной к исследованию функций). На рисунке 5 изображён график функции $f(x)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ принадлежащих интервалу $(-4;\ 7)$.

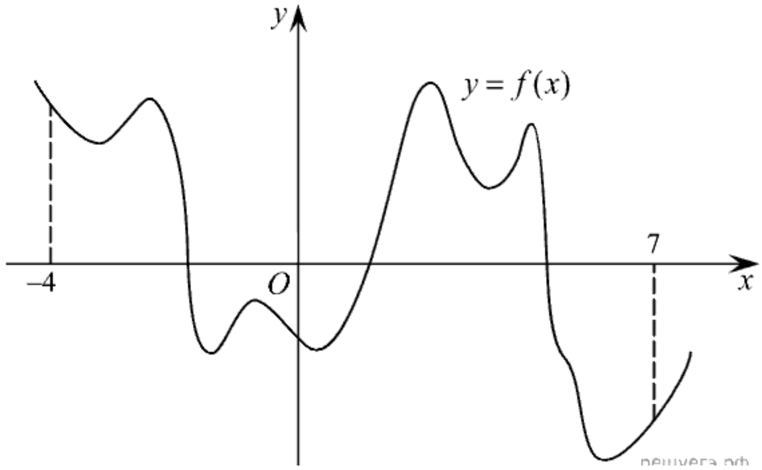


Рисунок 5 — График функции

Задание № 11 ЕГЭ.

Это задание посвящено нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, а также нахождению точек экстремума. Здесь необходимо исследовать функции по правилам дифференцирования. Исследование проводится для показательных и логарифмических функций, тригонометрических функций, степенных и иррациональных функций.

Пример 8. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2+1}$.

Пример 9. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

Как мы видим, в ЕГЭ теме производной посвящено лишь 2 задания. Но тем не менее, знаний, необходимых для решения таких заданий потребуется немало.

2.3 Комплекс заданий, направленных на закрепление и углубление знаний по теме «Производная» в 10-11 классах

2.3.1 Задания на геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Напишите уравнения всех общих касательных к графику функции $y = e^x$ и $y = e^{-x}$. Ответ: $y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}\ln 2$.

2. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, при $f(x) = \ln x\,, x_0 = 1$. Ответ: $y = x - 1$.

3. Найдите все точки на графике функции $y = \ln x$, касательные в каждой из которых перпендикулярны прямой $y = -\frac{x}{2}$. Ответ: $\left(\frac{1}{2}; -\ln 2\right)$.

4. Число $x = 1$ не является корнем уравнения $x^2 - x = 2x - \frac{x^2}{2}$, но является корнем уравнения, полученного приравниванием производных его левой и правой частей. Объясните геометрический смысл этого факта. Ответ: Касательные к графикам данных функций в точках с абсциссой 1 параллельны (и не совпадают).

5. Касается ли прямая $x + 4y - 4 = 0$ гиперболы $y = \frac{1}{x}$? Ответ: да, в точке $(2; 0{,}5)$.

6. При каком значении параметра a прямая $y = x + a$ касается графика функции $y = 2\sqrt{x}$? Ответ: $a = 1$.

7. Найти геометрическое место вершин всех парабол следующего вида: $y = x^2 + ax + b$, касающихся прямой $y = 4x - 1$. Ответ: $y = 4x + 3$.

8. При каком параметре p через точку $B(p; -1)$ можно провести три различные касательные к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 3$? Ответ: $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

9. На прямой $y = 2x - 1$ найдите все точки, через каждую из которых проходит две касательные к графику функции $y = x^2$, а угол между ними равен $\frac{\pi}{4}$. Ответ: $\left(\frac{7}{12}; \frac{1}{6}\right)$; $(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{2})$.

10. Под каким углом пересекаются графики функций: $y = x^3 - x$ и $y = x + 4$? Ответ: $\alpha = arctg\frac{5}{6}$.

Задача 5. Касается ли прямая $x + 4y - 4 = 0$ гиперболы $y = \frac{1}{x}$?

Решение.

Составим систему уравнения и посмотрим пересекаются ли графики данных функций в какой-либо точке:

$$\begin{cases} x + 4y - 4 = 0, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{x} - 4 = 0, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 4 - 4x}{x} = 0, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ x \neq 0, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдём угловой коэффициент функций:

$$y' = -\frac{1}{x^2};\ y'(2) = -\frac{1}{4};$$

$$y' = \left(1 - \frac{x}{4}\right)' = -\frac{1}{4}.$$

Так как угловые коэффициенты равны, значит прямая касается параболы в точке $\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: прямая касается параболы в точке $\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Задача 8. При каких p через точку $B(p;-1)$ можно провести три различные касательные к графику функции $y=x^3-3x^2+3$?
Решение.

Составим уравнение касательной к графику функции $y=x^3-3x^2+$ $+3$ в точке с абсциссой x_0:

$$y=(3(x_0)^2-6x_0)x-2(x_0)^2+3(x_0)^2+3.$$

Так как касательная проходит через точку $B(p;-1)$, то

$$(3(x_0)^2-6x_0)x-2(x_0)^3+3(x_0)^3+3=-1;$$

$$(3(x_0)^2-6x_0)p-2(x_0)^3+3(x_0)^3+4=0;$$

$$(3(x_0)^2-6x_0)p+(x_0)^3+4=0;$$

$$3x_0p(x_0-2)-(x_0-2)(2(x_0)^2+x_0+2)=0;$$

$$(x_0-2)(3x_0p-(2(x_0)^2+x_0+2))=0;$$

$$\left[\begin{array}{c} x_0=2, \\ 2(x_0)^2+x_0+2-3px_0=0. \end{array}\right.$$

Решим второе уравнение относительно x_0, найдём p, при котором уравнение будет иметь два различных корня, ни один из которых не равен двум:

$$2(x_0)^2+x_0+2-3px_0=0;$$

$$2(x_0)^2+(1-3p)x_0+2=0;$$

$$D=(1-3p)^2-4\cdot 2\cdot 2=9p^2-6p-15.$$

Так как $D>0$:

$$9p^2-6p-15=0;$$

$$3p^2-2p-5=0;$$

$$D=4+4\cdot 3\cdot 5=64;$$

$$\left[\begin{array}{l} p=-1, \\ p=\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Получаем $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. Исключаем из найденных значений число 2 и запишем результат:

$$p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Задача 10. Под каким углом пересекаются графики функций: $f(x) = $ $= x^3 - x$ и $g(x) = x + 4$?

Решение.

Для того чтобы найти абсциссы точек пересечения графиков, решим следующее уравнение:

$$x^3 - x = x + 4;$$

$$x^3 - 2x - 4 = 0;$$

$$(x^3 - 8) - 2x + 4 = 0;$$

$$(x^3 - 2^3) - 2x + 4 = 0;$$

$$-2(x - 2) + (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0;$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{c} x = 2, \\ x^2 + 2x + 2 = 0; \end{array}\right.$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0;$$

$$D = -4 => \emptyset.$$

Вычислим производные функций в точке $x = 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1; f'(2) = 3 \cdot 4 - 1 = 11;$$

$$g'(x) = 1.$$

Найдем тангенс угла между графиками данных функций в точке их пересечения с абсциссой 2:

$$tg\alpha = \left|\frac{11 - 1}{1 + 11 \cdot 1}\right| = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad => \quad \alpha = arctg\frac{5}{6}.$$

Ответ: $\alpha = arctg\frac{5}{6}$.

2.3.2 Задания на определение монотонности функции и нахождения точек экстремума

Производная широко используется для исследования функций, а именно для изучения различных свойств функции. Здесь мы рассмотрим, как с помощью производной, можно находить промежутки возрастания и убывания функции, её минимумы и максимумы.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите промежутки монотонности $y=(x+1)\sqrt{x^2-1}$. Ответ: возрастает на $(-\infty;0)$и $(0;+\infty)$.

2. Найдите промежутки монотонности $y=\frac{x}{\sqrt{(x+1)^3}}$. Ответ: возрастает на промежутке $(-1;0]$, убывает на $[0;+\infty)$.

3. Найдите промежутки монотонности $y=e^{\pi x}\cdot\cos\pi x$. Ответ: возрастает на $[-1;2]$, убывает на $[2;+\infty]$.

4. При каких значениях параметра a функция возрастает на R: $f(x)= = at^3+at$. Ответ: $a>0$.

5. Найдите, при каких значениях параметра a функция $y=f(x)$ строго убывает на $(1;+\infty)$: $f(x)=-x^3+ax$. Ответ: $a\leq 3$.

6. Укажите точки экстремума и экстремальные значения функции: $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$. Ответ: $(-1;2);(1;2)$.

7. Исследуйте следующую функцию на экстремумы: $y=\frac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$. Ответ: $x_{max}=-1{,}25$.

8. Исследуйте данную функцию на экстремумы: $y=\sin|x-3|+ +\cos x\,, x\in(0;\pi)$. Ответ: $x_{max}=0{,}715; x_{min}=3$.

9. Исследуйте функцию на экстремумы: $y=\ln(x^2+1)-2arctg\,x$. Ответ: $x_{min}=1$.

10. Найдите при каких значениях параметра a функция $y = a\sin 4x - -10x + \sin 7x + 4ax$ убывает на R и не имеет критических точек. Ответ: $a \le \frac{3}{8}$.

Задача 2. Найдите промежутки монотонности $y = \frac{x}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

Решение.

$$D(f): x \in (-1; +\infty);$$

$$y' = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3x}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^3} = \frac{\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{3x}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}(2(x+1) - 3x)}{2(x+1)^3} = \frac{2x + 1 - 3x}{2(x+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2 - x}{2(x+1)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{2 - x}{2(x+1)^{\frac{5}{2}}} = 0;$$

$$x = 0, x \ne 1.$$

По рисунку 6 видим, что функция возрастает на промежутке $(-1; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$.

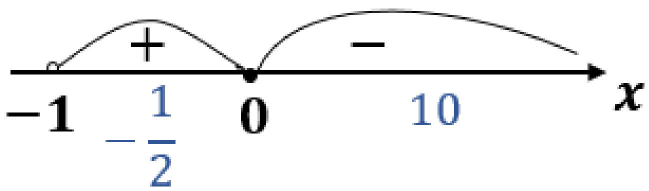


Рисунок 6 — Промежутки монотонности

Ответ: возрастает на промежутке $(-1; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$.

Задача 10. Найдите при каких значениях параметра a данная функция $y = a\sin 4x - 10x + \sin 7x + 4ax$ убывает на R и не имеет критических точек.

Решение.

Начнём с нахождения производной функции:

$$y' = 4a \cdot \cos 4x - 10 + 7\cos 7x + 4a.$$

Для того чтобы условие выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы y' была бы неположительной при любом x. Если $x = 0$, то:

$$4a(\cos 0 + 1) - 10 + 7\cos 0 = 8a - 3;$$

$$8a - 3 \leq 0;$$

$$a \leq \frac{3}{8}.$$

Ответ: $a \leq \frac{3}{8}$.

2.3.3 Задания на поиск наибольшего и наименьшего значений функции

На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение, из всех значений, которые функция принимает на отрезке.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти набольшее и наименьшее значения функции $f(x) = $ $= e^{-x^2} \cdot \cos x^2, x \in R$. Ответ: $y_{\text{наим}} = -e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; y_{\text{наиб}} = 1$.

2. Найти набольшее и наименьшее значения данной функции $f(x) = 5x^3 - x|x + 1|, x \in [-2; 0]$. Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{3}{25}; y_{\text{наим}} = -38$.

3. Найти набольшее и наименьшее значения данной функции $f(x) = x^x, x \in (0; 1]$. Ответ: $y_{\text{наиб}} = 1, y_{\text{наим}} = e^{-e^{-1}}$.

4. Для любого $a \in (-\infty; 5)$ найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x$ на промежутке $[a; 5]$ как функции от a. Ответ: $y_{\text{наиб}} = 65; y_{\text{наим}} = -16, a \in [-4; 2]$ и $a^3 - 12a, a \in (2; 5]$ и $a < -4$.

5. Найти набольшее и наименьшее значения данной функции $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$ на $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Ответ: $y_{\text{наим}} = 0, y_{\text{наиб}} = 6{,}04$.

6. Найти набольшее и наименьшее значения данной функции $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 12x - 17, & x < -2 \\ (x+1)^3, & x \geq -2 \end{cases}$ на текущем отрезке $[-5; -1]$. Ответ: $y_{\text{наиб}} = 1, y_{\text{наим}} = -7$.

7. Найдите множество значений функции $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+2}$. Ответ: $E(f) = [\sqrt{6}; 2\sqrt{3}]$.

8. Для каждого $a > -1$ найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 12x$ на отрезке $[-1; a]$ как функцию от a.

9. Найдите, при каком $a \in R$ наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 1$ на отрезке $[0; 1]$ достигается на его правом конце. Ответ: $a \geq \frac{3}{4}$.

10. Через точку $A(2; 0{,}25)$ проводятся прямые, пересекающие положительные полуоси в точках B и C. Найдите уравнение прямой, для которой отрезок BC наименьший. Ответ: $y = -0{,}25x + 0{,}75$.

Задача 4. Для любого $a \in (-\infty; 5)$ найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x$ на промежутке $[a; 5]$ как функции от a.

Решение.

Начнём с нахождения производной функции:

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2);$$

$$3(x-2)(x+2) = 0;$$

$$x = \pm 2.$$

По рисунку 7 видим, что функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[2; 5]$, убывает на $[-2; 2]$.

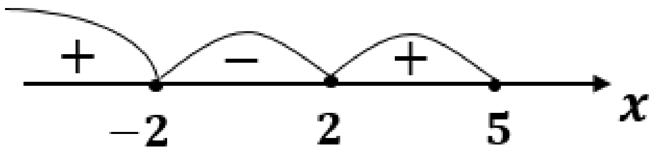


Рисунок 7 — Промежутки монотонности

Определим теперь наибольшее значение y напромежутке $(-\infty; 5]$:

$$f(-2) = -8 + 24 = 16;$$

$$f(2) = 8 - 24 = -16;$$

$$f(5) = 125 - 60 = 65 = y_{\text{наиб}}.$$

Найдем теперь наименьшее значение функции на промежутке $[a; 5]$ в зависимости от a. Так как y возрастает на $[2; 5]$, то наименьшее значение достигается в левом конце отрезка, т.е. в точке a и равно:

$$y(a) = a^3 - 12a.$$

Заметив, что $16 = f(2) = f(-4)$, сделаем вывод, что при $a \in [-4; 2]$ наименьшее знаечние функции на промежутке $[a; 5]$ достигается, когда $x = 2$ равно 16.

При $a < -4$ наименьшее значение достигается в левом конце и равно $y(a) = a^3 - 12a$.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = 65; y_{\text{наим}} = -16, a \in [-4; 2]$ и $a^3 - 12a, a \in (2; 5]$ и $a < -4$.

Задача 9. Найдите, при каком $a \in R$ наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 1$ на отрезке $[0; 1]$ достигается на его правом конце.

Решение.

Для того чтобы функция на отрезке принимало наименьшее значение в правом конце необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$f(1) \leq f(0);$$

$$2 - 2a \leq 1;$$

$$a \geq \frac{1}{2}.$$

Далее:

$$f'(x) = 3x^2 - 4ax = 3x\left(x - \frac{4}{3}a\right); \left(\frac{4}{3}a > 0\right);$$

$$3x\left(x - \frac{4}{3}a\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{4}{3}a. \end{array}\right.$$

По рисунку 8 видим, что функция убывает на промежутке $\left[0; \frac{4}{3}a\right]$, возрастает на $\left[\frac{4}{3}a; +\infty\right)$.

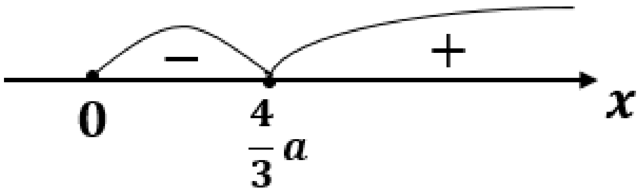


Рисунок 8 — Промежутки монотонности

Поэтому для того чтобы наименьшее значение функции на промежутке $[0; 1]$ достигалось в точке $x = 1$, необходимо и достаточно, чтобы точка $x = \frac{4}{3}a$ была правее точки $x = 1$:

$$\frac{4}{3}a \geq 1;$$

$$a \geq \frac{3}{4}.$$

Ответ: $a \geq \frac{3}{4}$.

Задача 10. Через точку $A(2; 0,\text{прямые}25)$ проводятся, пересекающие положительные полуоси в точках B и C. Найдите уравнение прямой, для которой отрезок BC наименьший.

Решение.

Пусть прямая, проходящая через точку A, имеет угловой коэффициент k:

$$y = k(x - 2) + 0{,}25;$$

$$y - 0{,}25 = k(x - 2).$$

Получим квадрат длины отрезка BC:

$$l(k) = |BC|^2 = (0{,}25 - 2k)^2 + \left(2 - \frac{1}{4k}\right)^2;$$

$$l'(k) = \frac{(8k - 1)(64k^3 + 1)}{k^3}.$$

Учитывая, что $k < 0$, получаем наименьшее значение $l(k)$ достигается при $k = -0{,}25$, таким образом исходное уравнение примет следующий вид:

$$y = -0{,}25x + 0{,}75.$$

Ответ: $y = -0{,}25x + 0{,}75$.

2.3.4 Задания на доказательство неравенств с помощью производной

Одно из простейших применений производной к доказательству неравенств связано с возрастанием и убыванием функции на промежутке и знаком ее производной. Задачи, в которых требуется доказать неравенство, регулярно встречаются на олимпиадах высокого уровня.

Задания для самостоятельной работы:

1. Доказать, что $e^x > 1 + x, x \neq 0$.
2. Доказать, что при $x > 1,\ x^2 - 1 > 2\ln x$.
3. Выясните, что больше: $79^{3/5} + 1900^{3/5}$ или $1979^{3/5}$?
4. Проверьте справедливость неравенства: $(p+q)^6 < 32(p^6 + +q^6), p > 0, q > 0, p \neq q$.
5. Проверьте справедливость неравенства: $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, x > 0$.
6. Проверьте справедливость неравенства: $\sin x < \frac{1}{2}x(\pi - x), 0 < < x < \frac{\pi}{2}$.
7. Проверьте справедливость неравенства: $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + +\frac{x^3}{3}, x > 0$.
8. Проверьте, справедливо ли при $x_1 > x_2 > 0$ неравенство $\frac{x_1 - x_2}{\ln\frac{x_1}{x_2}} < < \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.
9. Докажите, что неравенство $e^x + e^{-x} > 2 + x^2$ справедливо, при $x \neq 0$.
10. Докажите, что неравенство справедливо $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$, при $a, b > > 0$, если p, q — положительные числа, такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Задача 2. Докажите, что при $x > 1,\ x^2 - 1 > 2\ln x$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$. Имеем следующее:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1) > 0;$$

при $x > 1$.

Поэтому, $f(x)$ возрастает на $(1; +\infty)$.

Учитывая, что функция непрерывна на $(1; +\infty)$, то возрастание функции имеет место на $(1; +\infty)$. Следовательно, при $1 < x < +\infty$ будет:

$$f(x) > f(1);$$

$$x^2 - 1 - 2\ln x > 0;$$

$$x^2 - 1 > 2\ln x;$$

что и требовалось доказать.

Задача 3. Выясните, что больше: $79^{3/5} + 1900^{3/5}$ или $1979^{3/5}$?

Решение.

Покажем решение для более общей задачи: что больше $a^p + b^p$ или $(a+b)^p$, если $0 < a < b$ и $0 < p < 1$?

На $(0; +\infty)$ функция $f(x) = (a+x)^p - (a^p + x^p)$. Найдем производную:

$$f'(x) = p(a+x)^{p-1} - px^{p-1} = p\left[\left(\frac{1}{a+x}\right)^{1-p} - \left(\frac{1}{x}\right)^{1-p}\right] < 0;$$

при $0 < x < +\infty$.

Значит, $f(x)$ на $(0; +\infty)$ убывает. Поэтому, из $0 < a < b$ следует, что $f(b) < f(a)$:

$$(a+b)^p - (a^p + b^p) < (a+a)^p - (a^p + a^p) = a^p(2^p - 2) < 0;$$

$$a^p + b^p > (a+b)^p.$$

В частности, $79^{3/5} + 1900^{3/5} > 1979^{3/5}$.

Задача 8. Проверьте, справедливо ли при $x_1 > x_2 > 0$ неравенство $\frac{x_1 - x_2}{\ln\frac{x_1}{x_2}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Решение.

Перейдем к неравенству с одной переменной, для этого сделаем замену $x = \frac{x_1}{x_2}$, получим:

$$\frac{x-1}{\ln x} < \frac{1}{2}(x+1).$$

Из $x_1 > x_2 > 0$ вытекает $x > 1$. Дифференцировать дробь, у которой в знаменателе $\ln x$ неудобно, поэтому запишем неравенство в таком виде:

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2}\ln x.$$

Чтобы решить, верно ли данное неравенство, выясним, верно ли неравенство, которое возникает при его дифференцировании почленно.

$$\frac{2}{(x+1)^2} < \frac{1}{2x};$$

$$(x-1)^2 > 0.$$

При $x > 1$ верно и, следовательно, при этих x верно.

При $x = 1$ обе части неравенства $\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2}\ln x$ принимают равные (нулевые) значения. Неравенство верно:

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2}\ln x;$$

так как условия теоремы 2 соблюдены.

2.3.5 Задания с параметрами по теме «Производная»

Задачи с параметрами представляют для учащихся наибольшую сложность. Универсальных указаний по решению задач с параметрами дать нельзя. Приходится рассматривать различные случаи – в зависимости от значений параметров и методы решения различны. Но знание некоторых правил и алгоритмов решения необходимо. В процессе решения этих заданий можно проверить знание основных разделов школьной математики, уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности. Учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите все значения a, при каждом из которых касательная к графику функции $y = \sin\frac{x+11}{2} + 1{,}5a - a^2$ в точке графика с абсциссой a не имеет точек пересечения с графиками функций $y = 0{,}5a + 2$ и $y = -\frac{2}{x}$. Ответ: $a = 4\pi - 11$.

2. При каких значениях параметра a кривые пересекаются под углом $\frac{\pi}{2}$: $y = ax^2$ и $y = \frac{1}{x}$. Ответ: $a = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$.

3. При каких значениях параметра a функция $f(x) = -x^3 + 4x^2 - -ax - 8$ возрастает на интервале $(1; 2)$? Ответ: $a \leq 4$.

4. При каких значениях параметра a функция $y = (x - a)^2 \times \times (x - 2a + 4)^2$ возрастает на отрезке $[0; 1]$? Ответ: $a = 2, a \leq 0$.

5. Найдите, при каких значениях параметра a функция $y = \frac{1}{2}e^{2x} + +(1 - a)e^x - ax + \sin 2$ имеет критические точки. Ответ: $a > 0$.

6. Существует ли значение параметра a, при котором наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 4ax^2$ на отрезке $[-1; 1]$ достигаются внутри него? Ответ: таких a не существует.

7. Для каждого $a > -2$ найдите наименьшее значения функции $f(x) = 27x - x^3$ на отрезке $[-2; a]$. Ответ: $-46, -2 < a \leq 1 + \sqrt{24}; 27a - -a^3, a > 1 + \sqrt{24}$.

8. Найти все значения параметра а, при каждом из которых функция $f(x) = sin\ 2x – 8(a + 1)sin\ x + (4a^2 + 8a – 14)$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек. Ответ: $\left[\begin{array}{l} a > \sqrt{5}, \\ a < -2 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$

9. Постройте график функции $f(a) = \min\limits_{x \in [a; a+1]} (x^3 - x)$.

10. При каких значениях $a \in R$ функция $f(x) = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба? Ответ: $a \neq 0$.

Задача 5. Найдите, при каких значениях параметра a данная функция $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(1-a)e^{x}-ax+\sin 2$ имеет критические точки.

Решение.

Исследуем данную функцию:

$$D(f)=R;$$

$$y'=e^{2x}+(1-a)\cdot e^{x}-a;$$

$$e^{2x}+(1-a)\cdot e^{x}-a=0.$$

Сделаем замену и выясним при каких значениях параметра a существуют положительные корни уравнения:

$$e^{x}=t;$$

$$t^{2}+(1-a)t-a=0;$$

$$D=(1-a)^{2}+4a=(a+1)^{2};$$

$$t_{1}=\frac{a-1+a+1}{2}=\frac{2a}{2}=a; t_{2}=\frac{a-1-a-1}{2}=-\frac{2}{2}=-1.$$

Следовательно, $a>0$.

Ответ: $a>0$.

Задача 8. Найти все значения параметра а, при каждом из которых функция $f(x)=sin\,2x-8(a+1)sin\,x+(4a^{2}+8a-14)$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Решение.

Условие задачи выполняется, если $f'(x)>0$ на всей числовой прямой. Найдем производную функции:

$$f'(x)=\ 2cos\,2x-\ 8(a\ +\ 1)cos\,x\ +\ 4a^{2}+8a-14.$$

Наша задача сводится к следующей: при каких значениях параметра a неравенство $2cos\,2x-\ 8(a\ +\ 1)cos\,x\ +\ 4a^{2}+8a-14>0$ выполняется на всей числовой прямой.

Преобразуем данное неравенство, учитывая, что $2\cos 2x=2\cos 2x-1$ получим:

$$\cos^{2}x-2(a+1)\cos x+a^{2}+2a-4\ >0.$$

Сделаем подстановку $t = \cos x$, при этом $t \in [-1;\ 1]$. Получим квадратное неравенство:

$$t^2 - 2(a+1)t + a^2 + 2a - 4 > 0.$$

$\frac{D}{x} = 5$, следовательно, квадратный трехчлен имеет два различных корня:

$$t_1 = a + 1 - \sqrt{5};\ t_2 = a + 1 + \sqrt{5};$$

при этом $t_1 < t_2$.

Решение квадратного неравенства имеет вид:

$$t \in (-\infty; t_1) \cup (t_2; +\infty).$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x < t_1, \\ \cos x > t_2; \end{array}\right.$$

то есть:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x < a + 1 - \sqrt{5}, \\ \cos x > a + 1 + \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Эта совокупность выполняется при любом x, если справедливы следующие условия:

$$\left[\begin{array}{l} a + 1 - \sqrt{5} > 1, \\ a + 1 + \sqrt{5} < -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} a > \sqrt{5}, \\ a < -2 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{c} a > \sqrt{5}, \\ a < -2 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$

Задача 10. При каких значениях $a \in R$ функция $f(x) = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба?

Решение.

Исследуем данную функцию:

$$D(f) = R;$$

$$f'(x) = e^x + 3ax^2;$$

$$f''(x) = e^x + 6ax;$$

$$e^x + 6ax = 0;$$

$$a = -\frac{e^x}{6x}; x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0.$$

Ответ: $a \neq 0$.

2.3.6 Практические задачи на экстремум

В реальной жизненной ситуации возникает необходимость выбора оптимального варианта и нахождения экстремумов определенной функции. Ежедневно, при решении проблем в различных областях, мы сталкиваемся с терминами наибольшая прибыль, наименьшие затраты, наибольшее напряжение, наибольший объем, наибольшая площадь и так далее. Большое экономическое значение в промышленности, при определении дизайна упаковки, имеет вопрос, как подобрать размеры упаковки с наименьшими затратами. Такого рода задания связаны с нахождением максимального или минимального значения величины. Задачи на нахождение максимального и минимального значения величины называются задачами на оптимизацию. Для решения данных задач применяется производная.

Задача 1. Два столба высотой 4 м и 12 м находятся на расстоянии 12 м друг от друга. Самые высокие точки столбов соединены с металлической проволокой, каждая из которых, в свою очередь крепится на земле в одной точке. Выберите такую точку на земле, чтобы для крепления использовалось наименьшее количество проволоки.

Решение.

Изобразим рисунок 9, соответствующий условию задачи, и обозначим соответствующие данные.

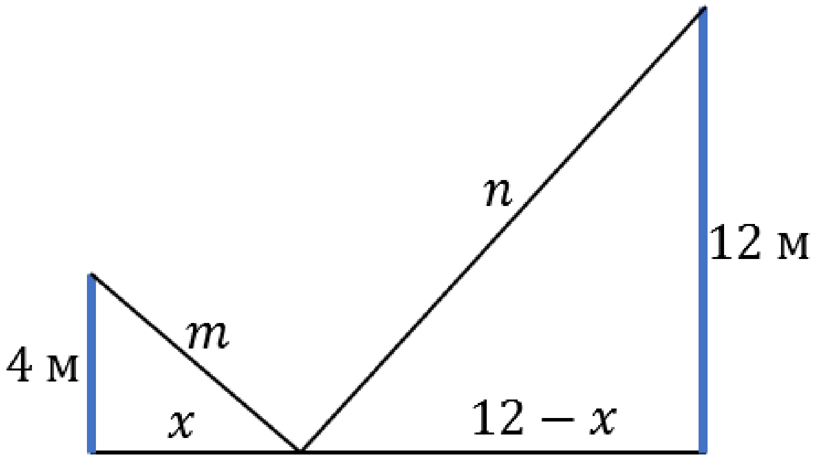


Рисунок 9 — Условия задачи

Решение.

Аналитически выразим зависимость между переменными. Длину проволоки обозначим через L. Часть проволоки от каждого столба обозначим соответственно через m и n, тогда $L = m + n$. Величина L изменяется в зависимости от точки крепления на земле. Обозначим одно из них через x, тогда другое будет равно $12 - x$. Выразим величины m и n через переменную x по теореме Пифагора:

$$m^2 = x^2 + 4^2;\ \ n^2 = 12^2 + (12 - x)^2;$$

$$m = \sqrt{x^2 + 16};\ \ n = \sqrt{x^2 - 24x + 288};$$

$$L = m + n = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}.$$

Зависимость функции $L(x)$ от переменной x:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288};\ \ 0 \le x \le 12.$$

Производная функции:

$$L'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}}.$$

Найдем критические точки функции $L(x)$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}} = 0;$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = -\frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}}.$$

Воспользуемся правилом пропорции:

$$x\sqrt{x^2-24x+288}=(12-x)\sqrt{x^2+16}.$$

Возведём обе части уравнение во вторую степень, чтобы избавиться от корней и решим полученное уравнение:

$$x^2(x^2-24x+288)=(12-x)^2(x^2+16);$$

$$x^4-24x^3+288x^2=144x^2-24x^3+x^4+2304-384x+16x^2;$$

$$128x^2+384x-2304=0;$$

$$x^2+3x-18=0.$$

По теореме Виета:

$$x_1=3;\ x_2=-6\notin 0\leq x\leq 12.$$

Сравним значения функции $L(x)$*:*

$$L(0)=\sqrt{16}+\sqrt{288}=4+12\sqrt{2}\approx 20{,}8;$$

$$L(3)=\sqrt{3^2+16}+\sqrt{3^2-24\cdot 3+288}=5+15=20;$$

$$L(12)=\sqrt{12^2+16}+\sqrt{12^2-24\cdot 12+288}=\sqrt{160}+12\approx 24{,}6.$$

Получим, что наименьшее количество проволоки используется при $x=3, L(3)=20$ (метров).

Ответ: 20 метров.

Задача 2. Фирма планирует выпуск коробки без крышки, с квадратным основанием и площадью поверхности 192 см^2. Найдите размеры коробки, при которых она будет иметь наибольший объем?

Решение.

Так как основанием коробки является квадрат, то ее объем можно вычислить по формуле: $V=x^2h$. Вычислим площадь поверхности коробки. Она равна 192 см^2 и состоит из 4 площадей боковых граней и площади основания:

$$S_{\text{п.п.}}=4xh+x^2=192.$$

Используя другие данные задачи, выразим объем только через одну переменную x и подставим в формулу объема:

$$h=\frac{192-x^2}{4x};$$

$$V = x^2 \cdot \left(\frac{192 - x^2}{4x}\right) = 48x - \frac{x^3}{4}.$$

Найдем область определения функции $V(x)$, согласно условию задачи:

$$D(f) = \left(0; \sqrt{192}\right).$$

Понятно, что длина не может быть отрицательной, то есть $x > 0$. Площадь квадрата в основании коробки должна быть меньше 192, следовательно $x < \sqrt{192}$. Найдем максимальное значение функции $V(x)$ на интервале $(0; \sqrt{192})$. Для этого используем производную первого порядка.

$$V'(x) = \left(48x - \frac{x^3}{4}\right)' = 48 - \frac{3x^2}{4} = \frac{3}{4}(8 - x)(8 + x);$$

$$(8 - x)(8 + x) = 0;$$

$$x = \pm 8; \quad -8 \notin \left(0; \sqrt{192}\right).$$

Значит, $x = 8$ – критическая точка.

При $0 < x < 8$ имеем $V'(x) > 0$ (рисунок 10), при $8 < x < \sqrt{192}$ имеем $V'(x) < 0$, функция $V(x)$ в точке $x = 8$ принимает максимальное значение.

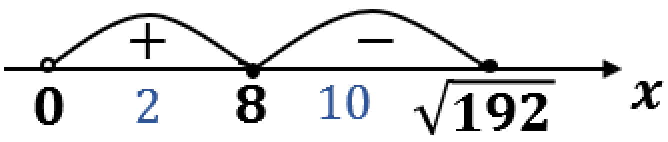


Рисунок 10 — Промежутки монотонности

Если длина основания коробки будет 8 см, то высота будет равна:

$$h = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4.$$

Ширина коробки тогда будет равна 8 см. Значит, максимальный объем будет иметь коробка, у которой длина равна 8 см, ширина — 8 см, высота — 4 см.

Ответ: длина — 8 см, ширина — 8 см, высота — 4 см.

Задача 3. По реке шириной $a = 64$ м сплавляют бревна. К реке подведен канал шириной $b = 8$ м под прямым углом. Какую максимальную длину могут иметь бревна, чтобы пройти в этот канал (рисунок 11)? Толщиной бревна пренебречь.

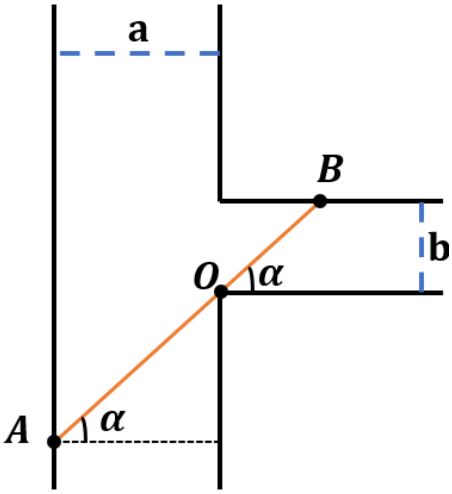


Рисунок 11 — Условия задачи

Решение.

Задача сводится к нахождению минимума длины, при котором бревно может повернуть, упираясь в стенки канала. Выразим длину бревна, как функция угла альфа:

$$L(\alpha) = AO + OB = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Найдем производную и точку экстремума:

$$L'(\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0(\cos\alpha \neq 0, \sin\alpha \neq 0);$$

$$\operatorname{ctg}^3\alpha = \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}};$$

$$\alpha = arctg\sqrt[3]{\frac{8}{64}};$$

$$\alpha \approx 0{,}5.$$

Определим, какой же точкой является α (рисунок 12):

$$f'(-1) = \frac{64 \cdot \sin(-1)}{\cos^2(-1)} - \frac{8 \cdot \cos(-1)}{\sin^2(-1)} \approx -211;$$

$$f'(1) = \frac{64 \cdot \sin(1)}{\cos^2(1)} - \frac{8 \cdot \cos(1)}{\sin^2(1)} \approx 199;$$

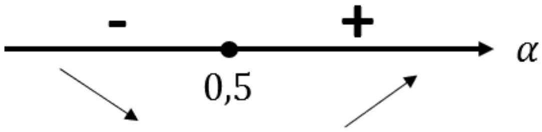


Рисунок 12 — Промежутки монотонности

$\alpha \approx 0{,}5$ – точка минимума.

Выразим косинус и синус и найдем уже длину бревна:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}};\ \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}};$$

$$L_{max} = \frac{64}{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{64}\right)^{\frac{2}{3}}}}} + \frac{8}{\frac{\left(\frac{8}{64}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{64}\right)^{\frac{2}{3}}}}} = 64 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} + 16\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= 80\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}} = 80\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{80\sqrt{5}}{2} = 40\sqrt{5}.$$

Ответ: $40\sqrt{5}$ метров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим, что цель данной работы была направлена на изучение методики обучения решению задач, связанных с производной в старших классах средней школы и разработку методического сопровождения изучения темы «Производная» в классе с углубленным изучением математики.

Мы убедились, что в соответствии с концепцией профильного обучения, вводимого сегодня в нашей стране, основной целью проводимых образовательных реформ является дифференциация и индивидуализация учебного процесса, более полное удовлетворение интересов, склонностей и способностей обучающихся, создание условий для образования старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

На основании изученной психолого-педагогической, методической литературы, анализа школьной учебной литературы по теме «Производная» был сделан вывод о наиболее удачном изложение теоретического материала — эта концепция представлена в учебнике А. Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа 10 класс».

Изложение темы «Производная» представлено на наглядно-интуитивном, рабочем и формально-логическом уровне. Определение производной дается с использованием понятия предела, которое вводится перед изучением данной темы на наглядно-интуитивном уровне. Материал в учебнике излагается доступно с большим числом подробно решенных примеров. Задан алгоритм для нахождения производной и приведены примеры для использования этого алгоритма на практике.

На основе методических особенностей мы создали совмещенную с конспектом технологическую карту одного из уроков алгебры для класса с углубленным изучением математики, которую можно увидеть в Приложение 1, по теме «Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке», способствующая эффективной подготовке обучающихся профильных классов средней школы.

Подводя итоги, можем сказать, что поставленные перед нами задачи решены и цель выпускной квалификационной работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : углубленный уровень. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, В.Н. Соломин, А. Н. Головин. — 2-е издание — Москва : Просвещение, 2017. — 286 с. : ил. — ISBN 978-5-09-028083-9.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни. Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, М. И. Шабунин, А. Б. Жижченко. — 4-е издание — Москва : Просвещение, 2011. — 368 с. : ил. — ISBN 978-5-09- 025401-0.
3. **Алибулатова, А. М – А.** Психологические особенности учащихся старших классов. Статья. Цифровая наука № 2. 2021. https://cyberleninka.ru/article/n/psihologicheskie-osobennosti-uchaschihsya-strashih-klassov (дата обращения: 06.05.2022).
4. Блог. Живой круг. Плюсы и минусы профильного образования https://inring.ru/blog/chto-takoe-profilnoe-obrazovanie/ (дата обращения: 23.03.2022).
5. **Мордкович, А. Г.** О некоторых проблемах школьного математического образования / А. Г. Мордкович // Математика в школе. — 2012. — № 10. — с. 35–43. https://files.lbz.ru/authors/matematika/7/modrkovich-problems.pdf (дата обращения: 10.06.2022).
6. **Мордкович, А. Г.**, Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений : профильный уровень / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов — 6-е издание — Москва : Мнемозина, 2009. — 424 с. : ил. — ISBN 978-5-346- 01201-6.
7. Научно-популярный физико-математический журнал “Квант”. http://kvant.mccme.ru/1979/10/p37.htm (дата обращения: 23.06.2022).

8. **Пинчук И. А.**, Тимошенкова Н. И. Методические рекомендации изучения производной в старших математических классах / И. А. Пинчук, Н. И. Тимошенкова. Московский государственный областной университет, Москва https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-rekomendatsii-izucheniya-proizvodnoy-v-starshih-matematicheskih-klassah (дата обращения: 23.03.2022).

9. **Пискунов, А. И.** История педагогики и образования. От зарождения воспитания в первобытном обществе до конца XX в. : учебное пособие для педагогических учебных заведений / А. И. Пискунов, Р. Б. Вендровская, В. М. Кларин. — 2-е издание, — Москва : ТЦ «Сфера», 2001. — 512 с. — ISBN 5-89144-142-X.

10. **Плешакова, Т. В.** Роль письменной речи в свете современных требований к формированию коммуникативных компетенций / Т.В. Плешакова // Социосфера. 2015. № 4. https://psyjournals.ru/sociosphera/2010/n3/35475_full.shtml (дата обращения: 06.05.2022).

11. Сдам ГИА: Решу ВПР, ОГЭ, ЕГЭ, ГВЭ и ЦЕ : образовательный портал для подготовки к экзаменам. — URL: https://sdamgia.ru (дата обращения: 23.05.2022).

12. **Смирнова В. Б.** Производная и дифференциал функции одной переменной. Учебное пособие / В. Б. Смирнова, М. Ю. Федорова, Л. Е. Морозова. 2016, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ https://www.iprbookshop.ru/epd-reader?publicationId=63639 (дата обращения: 01.02.2022).

13. Статья из раздела «Поступление», 2020, https://prostudenta.ru/post-654.html (дата обращения: 05.02.2022).

14. **Сыманюк, Э. Э.** Компетентностный подход к модернизации высшего образования / Э.Э. Сыманюк, Э. Ф. Зеер // Высшее образование в России. 2005. № 4. https://cyberleninka.ru/article/n/kompetentnostnyy-podhod-k-modernizatsii-professionalnogo-obrazovaniya (дата обращения: 06.05.2022).

15. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» : официальный сайт. — Москва. — URL: https://fipi.ru (дата обращения: 23.05.2022).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Технологическая карта урока

ФИО: Мотошкова Анастасия Евгеньевна

Предмет: алгебра и начала математического анализа

Класс: 10

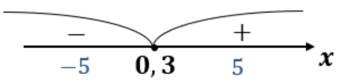
Тип урока: изучение нового материала

Основные сведения об уроке представлены в Таблице 1.1. Конспект урока представлен в Таблице 1.2.

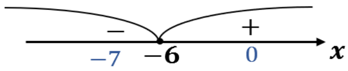
Таблица 1.1 — Сведения об уроке

Тема	Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке
Цель	Организовать деятельность обучающихся по изучению нового материала по теме «Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке». Продолжить работу по развитию умений анализировать, выделять главное, обобщать и систематизировать.
Задачи	− *Образовательные:* уметь находить производную функции, понимать, что такое непрерывная функция, определять наибольшее и наименьшее значение. − *Развивающие:* развитие навыков анализа, синтеза, обобщения, умения размышлять, аргументировать, воспроизводить информацию, формирование грамотной математической речи. *Воспитательные:* развитие коммуникативных навыков (умения работать в группе, слушать и слышать, понимать и принимать; толерантность, тактичность, коммуникабельность, самокритичность); навыков самостоятельной работы, самоконтроля.
УДД	− *Личностные*: понимать необходимость приобретения новых знаний; уметь аргументировать свою точку зрения. − *Регулятивные*: уметь определять и формулировать цель на уроке с помощью учителя; высказывать свое предложение. − *Коммуникативные:* уметь оформлять свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других, взаимодействовать в диалоге с учителем и одноклассниками. − *Познавательные:* добывать новые знания (находить ответы на вопросы, используя учебник, свой жизненный опыт и информацию, полученную на уроке).
Ресурсы	Учебники: Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. А.Г. Мордкович. Учебник для обучающихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., с. – Москва : Мнемозина, 2009 – 424 с. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. А.Г. Мордкович. Задачник для обучающихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А.Г. Мордковича. – 6-е изд., с. – Москва : Мнемозина, 2009 – 343 с.
Формы организации	Фронтальная, индивидуальная.

Таблица 1.2 – Конспект урока

Этап урока (время, мин)	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Планируемые результаты	
			Предметные	УУД
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1. Организационный этап. (1 мин)	Организовывает внимание, проверяет готовность обучающихся к уроку, настраивает класс на продуктивную деятельность.	Организуют свое рабочее место; оценивают готовность к уроку; приветствуют учителя.		Регулятивные: умение настроить себя на рабочий лад.
2. Проверка знаний и умений по пройденному материалу. (6 мин)	Прежде чем мы с вами приступим к изучению новой темы, предлагаю вам решить задания по уже имеющимися у вас знаниями. 1. Фронтальный опрос: найти производную функции: 1) $y = \cos x$; 2) $y = ctg\ x - 4x$; 3) $y = x^3 + e^x$; 4) $y = 2x + 10$; 5) $y = x^4$. 2. Найти критические и стационарные точки функции: 1) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$; 2) $f(x) = x^2 + 12x - 10$.	1. Ученики устно находят производную, для ответа поднимают руку. 1) $y' = -\sin x$; 2) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} - 4$; 3) $y' = 3x^2 + e^x$; 4) $y' = 2$; 5) $y' = 4x^3$. 2. Два ученика выходят к доске и решают задание, остальные делают эти задания по вариантам. *1)* $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$. $D(f) = R$ — функция непрерывная. $f'(x) = 10x - 3$. $D(f') = R =>$ критических точек нет. $10x - 3 = 0$; $10x = 3$. $x = 0{,}3$ — стационарная точка. По рисунок 1.1, делаем вывод, что $x_{min} = 0{,}3$. Функция убывает на $(-\infty; 0{,}3]$. Функция возрастает на $[0{,}3; +\infty)$.  Рисунок 1.1 $f(x) = x^2 + 12x - 10$ $D(f) = R$ — функция непрерывная.	Знание производных элементарных функций, умение нахождения промежутков монотонности и точек экстремума, понимание критических и стационарных точек.	Регулятивные: контроль и коррекция. Познавательные: структурирование знаний.

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
		$f'(x) = 2x + 12.$ $D(f') = R =>$ критических точек нет. $2x + 12 = 0;$ $2x = -12.$ $x = -6$ — стационарная точка. По рисунок 1.2, делаем вывод, что $x_{min} = -6$. Функция убывает на $(-\infty; -6]$. Функция возрастает на $[6; +\infty)$.  Рисунок 1.2		
3. Изучение новой темы урока. Постановка цели урока. (8 мин)	Итак, ребята. Вы уже накопили некоторый опыт нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего для этого мы использовали график функции. Но что же делать если график функции заранее нам неизвестен? Действительно, это так! Тогда, кто-нибудь из вас сможет сформулировать цель урока? Молодцы! А теперь давайте с вами запишем некоторые условия, с помощью которых, вам станет яснее определять наибольшее и наименьшие значения.	Будем искать наибольшее и наименьшее значения функции через производную. Целью сегодняшнего урока будет следующие: научиться применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Ученики пишут в тетрадь следующее: Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значения. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри его. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, только в	Умение находить производную функции, осуществлять подстановки для нахождения значений функции.	Коммуникативные: взаимодействуют с учителем; отвечая на его вопросы, строят логические цепочки Познавательные: развитие умения структурировать знания.

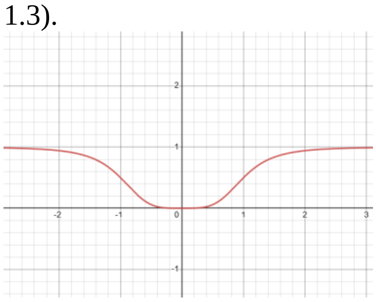
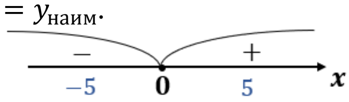
Продолжение таблицы 1.2

1	2	3	4	5
	Подводя итог сказанному, получаем следующий алгоритм. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. 1. Найти производную $f'(x)$. 2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$. 3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее ($y_{\text{наим}}$) и наибольшее ($y_{\text{наиб}}$). Как вы можете заметить алгоритм довольно-таки простой. Предлагаю вам разобрать один пример по алгоритму. *Пример.* Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$ на отрезке $[0; 6]$. Решение. 1. Найдем производную нашей функции, чему она будет равна? 2. Что вы мне скажете про критические точки для этой функции? Хорошо! Теперь определим стационарные точки. Как будем их находить? Что скажем про корни уравнения? Теперь нам предстоит найти значение функции в трех точках. Чему они будут равны? Таким образом, видим, что $y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = 5$, $y_{\text{наим}} = -174$, при $x = 0$.	стационарной или критической точке. Ученики вместе с учителем записывают алгоритм у себя в тетрадях. 1. $y' = 3x^2 - 6x - 45$. 2. $D(f') = R =>$ критических точек нет. Приравняем производную к нулю и найдем корни уравнения. $3x^2 - 6x - 45 = 0;$ $x^2 - 2x - 15 = 0;$ $x = -3 \notin [0; 6]$. $x = 5$ — стационарная точка. 3. $f(0) = 1;$ $f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6^2 - 45 \times \times 6 + 1 = -161;$ $f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 45 \times \times 5 + 1 = -174.$ Ответ: $y_{\text{наиб}} = 1$, $y_{\text{наим}} = -174$.		

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
4. Первичное закрепление нового материала. (8 мин)	Предлагаю решить следующие номера: № 32.17 (а;б). Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке. а) $y = 2x - \sqrt{16x-4}$, $\left[\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right]$; б) $y = x\sqrt{1-2x}$, $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.	№ 32.17 (а). $y = 2x - \sqrt{16x-4}$, $\left[\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right]$. 1.$D(f) = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. 2. $y' = 2 - \frac{16}{2\sqrt{16x-4}}$. 3. $D(f') = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. => критических точек нет. $2 - \frac{16}{2\sqrt{16x-4}} = 0$; $x = \frac{5}{4}$. $x = \frac{5}{4}$ — стационарная точка. 4.$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{0} = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{17}{4}\right) = \frac{17}{2} - \sqrt{64} = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2} - \sqrt{16} = -\frac{3}{2}$. $y_{наиб} = \frac{1}{2}$, $y_{наим} = -\frac{3}{2}$. Ответ: $y_{наиб} = \frac{1}{2}$, $y_{наим} = = -\frac{3}{2}$. № 32.17 (б). $y = x\sqrt{1-2x}$, $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$. 1. $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. 2. $y' = \sqrt{1-2x} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$. 3. $D(f') = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ => критических точек нет. $\sqrt{1-2x} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}} = 0$; $x = 1 - 2x$; $x = \frac{1}{3} \notin \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$. 4. $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{4} = -3$; $f(0) = 0$. $y_{наиб} = 0$, $y_{наим} = -3$. Ответ: $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = = -3$.	Умение находить наибольшее и наименьшее значение с помощью производной используя алгоритм.	Регулятивные: получение результата при решении заданий. Коммуникативные: логически стройная речь. Познавательные: понимать математический алгоритм для решения заданий.
5. Физ. минутка. (1 мин)	Так, ребята! Давайте мы с вами немного прервемся, встанем и проведем зарядку.	Выполняют физ. минутку.		
6. Ознакомление	А теперь давайте с вами попробуем найти наименьшее и наибольшее значение заданной функции		Умение находить производную	Коммуникативные: взаимодействуют с

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
с новым материалом. (6 мин)	на заданном интервале. $y = \frac{x^4}{x^4+1}, (-\infty; +\infty)$. Чем отличается это задание от предыдущего? Как же мы будем поступать в таком случае? Хорошо, давайте попробуем! Хочу вам показать график данной функции (рисунок 1.3).  Рисунок 1.3 Здесь вы можете увидеть, что на промежутке $(-\infty; +\infty)$ наибольшего значения не существует, $y_{наим} = 0$. Так вот, для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на интервале есть следующая теорема: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда: а) если $x = x_0$ – точка максимума, то $y_{наиб} = f(x_0)$; б) если $x = x_0$ – точка минимума, то $y_{наим} = f(x_0)$. В дальнейшем будем с вами пользоваться данной теоремой.	Здесь дан не отрезок, а интервал. Попробуем решать также по алгоритму. $y = \frac{x^4}{x^4+1}, (-\infty; +\infty)$. 1. $y' = \frac{4x^3(x^4+1)-x^4\cdot 4x^3}{(x^4+1^2)} =$ $= \frac{4x^7+4x^3-4x^7}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}$. 2. $D(f') = R$ — критических точек нет. $\frac{4x^3}{(x^4+1)^2} = 0;$ $4x^3 = 0.$ $x = 0$ — стационарная точка. По рисунку 1.4 видим, что точка $x = 0$ — точка минимума. Значит $f(0) =$ $= y_{наим}$.  Рисунок 1.4 3. $f(0) = y_{наим} = \frac{0}{0+1} = 0$. Ответ: $y_{наим} = 0$.	функции, осуществлять подстановки для нахождения значений функции.	учителем; отвечая на его вопросы, строят логические цепочки Познавательные: развитие умения структурировать знания.

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
7. Первичное закрепление нового материала. (8мин)	А теперь давайте с вами решим еще два номера, закрепив новую тему урока. 1. $y = 2\sin^2 x, \left[\frac{\pi}{6}; +\infty\right)$. 2. $y = \frac{x(x+1)}{x^2+2x+2}, (-\infty; +\infty)$.	№ 1. $y = 2\sin^2 x, \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right)$. 1. $y' = 4\cos^2 x \cdot \sin x$. 2. $D(f') = R$ — критических точек нет. $4\cos^2 x \cdot \sin x = 0;$ $\cos^2 x = 0; \sin x = 0;$ $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k; x_2 = \pi k;$ $k \in Z.$ $x = \frac{\pi}{2}$ — стационарная точка. 3.$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. $y_{\text{наим}} = \frac{1}{2}; y_{\text{наиб}} = 2$. Ответ: $y_{\text{наим}} = \frac{1}{2}; y_{\text{наиб}} =$ $= 2$. № 2. $y =$ $= \frac{x^2+x}{x^2+2x+2}, (-\infty; +\infty)$. 1.$y' = \frac{(2x+1)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} -$ $- \frac{(2x+2)(x^2+x)}{(x^2+2x+2)^2}$. 2. $D(f') = R$ — критических точек нет. $\frac{(2x+1)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} -$ $- \frac{(2x+2)(x^2+x)}{(x^2+2x+2)^2} = 0;$ $x^2 + 4x + 2 = 0;$ $D = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2;$ $x_1 = -2 + \sqrt{2}; x_2 =$ $= -2 - \sqrt{2}.$ 3. $f\left(-2 + \sqrt{2}\right) =$ $= \frac{\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 - 2 + \sqrt{2}}{\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(-2+\sqrt{2}\right) + 2} =$ $= \frac{4-3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. $f\left(-2 - \sqrt{2}\right) =$ $= \frac{\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 - 2 - \sqrt{2}}{\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(-2-\sqrt{2}\right) + 2} =$ $= \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$. $y_{\text{наим}} = \frac{4-3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}; y_{\text{наиб}} =$ $= \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$. Ответ: $y_{\text{наим}} =$ $= \frac{4-3\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}; y_{\text{наиб}} = \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$.	Умение находить наибольшее и наименьшее значение с помощью производной, используя алгоритм.	Регулятивные: получение результата при решении заданий. Коммуникативные: логически стройная речь. Познавательные: понимать и использовать математический алгоритм для решения заданий.

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
8. Рефлексия. Домашнее задание. (2 мин)	Запишем домашнее задание. Найти наибольшее и наименьшее значения функций: 1. $y = \frac{x+4}{x^{\frac{1}{2}}}$, $[1; 9]$. 2. $y = \sin^2 x - -\cos^2 x, (0; 2\pi)$. 3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + +\sqrt{16 - x^4} + \left|\sqrt{16 - x^4}\right| - -5$. Итак, сегодня мы с вами отлично поработали, я надеюсь, что проблем с новой темой у вас не возникнет. В любом случае, кому непонятно, пожалуйста, задавайте вопросы.	Оценивают собственную деятельность на уроке.		Регулятивные: понимают уровень усвоения материала. Коммуникативные: логически структурированная речь.