МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО–УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО–ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения методу координат в старшей школе и в процессе подготовки к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
60% авторского текста

Работа рекомендована к защите
«27» апреля 2022 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
____________ Суховиенко Е.А.

Выполнила:
Студент группы ОФ-513/204-5-1
Комарова Александра Евгеньевна

Научный руководитель:
доцент кафедры МиМОМ
Мартынова Елена Владимировна

Челябинск,
2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для развития математики и ее применения к исследованию свойств геометрических фигур, а также для изучения их свойств, была создана аналитическая геометрия, которая стала самостоятельной наукой – аналитической геометрией. Открытие метода координат было сделано в результате открытия аналитической геометрии. Особенностью данного метода является определение геометрических фигур аналитическими условиями (также, как и в случае с методом координат), что позволяет проводить геометрические исследования и решать геометрические задачки средствами алгебры.

Метод координат позволяет перенести в геометрию важнейшие особенности алгебры – единообразие способов решения задач. Главной ценностью этого метода является перенос в геометрию способствующих алгебре способов решения задач. Это еще один плюс метода координат. Он избавляет от необходимости прибегать к визуальному представлению сложных пространственных конфигураций.

Выделим следующие цели изучения метода координат в школьном курсе геометрии в процессе подготовки к ЕГЭ:

- развить умение применять алгебраический аппарат при решении геометрических задач, на основе этого показать тесную связь алгебры и геометрии развивать вычислительную и графическую культуру учащихся
- показать учащимся эффективный способ решения задач и доказательства теорем.

Изучение данного метода в школе, является неотъемлемой частью школьного курса геометрии. При решении задачи координатным методом, то потребуется умение алгебраических вычислений и высокий уровень сообразительности, что может привести к снижению творческих способностей учеников. Следовательно, необходимо разработать методику изучения метода координат, которая бы позволяла учащимся научиться решать различные задачи координатным методом, но не демонстрировала бы этот метод как основной для решения геометрической задачи. Это и определяет актуальность выбранной темы:

Еще одним достоинством этого метода является отсутствие необходимости в наглядном представлении сложных пространственных объектов и возможность их визуализации без применения специальных приборов. Для того, чтобы научить учеников методу координат в курсе геометрия, выделяют следующие цели:

- развить вычислительную и графическую культуру учащихся;
- показать учащимся эффективный метод доказательства ряда теорем и решения задач;
- выявить тесную связь геометрии и алгебры на основе этого метода [20].

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КООРДИНАТНЫМ МЕТОДОМ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ.

1.1 История возникновения координат на плоскости. Суть метода координат

В начале XVII в. возникла аналитическая теория, установившая связь между алгеброй и геометрией. Это не было случайностью. Оно подготовлено ходом развития математики этого времени и общим потребностям производства, экономики торговли той эпохи. После Аполлония в Древней Греции не произошло крупных открытий в геометрии. В этой области произошел застой, причиной которого стали не только политические и экономические условия, а также следующий важный факт: геометрическая проблематика классического периода оказалась почти полностью исчерпанной. Все, что можно было сделать в геометрии с помощью ограниченного математического аппарата того времени, которым пользовались греки, было ими сделано, и сделанное вполне удовлетворяло запросам экономики, техники и науки. Смысл идей Евдокса, Архимеда и других великих математиков древности не моги быть продолжены без расширения понятия числа, введения в математику символики, идеи переменных величин и движения. Без создания дифференциального и интеграционного исчисления. По этой причине такое революционное преобразование математики требовало не только длительного времени, но прежде всего объективных дополнительных внешних факторов и стимулов. Они зависят от производительности труда или производственных отношений. Приблизительно после великих географических открытий (Америка в 1492 году, морской путь к Индии) и задач составления географических карт для определения места корабля на море. Только после появления в ряде европейских стран новой формы производства, а также создания более совершенных тригонометрических таблиц с более рациональными методами вычисления, только после возникновения в некоторых европейских странах новой формы производства стало заметно.

В работах Галилея и других ученых была разработана новая механика, которая нужна была военному делу. Это касается также и военных дел в частности баллистики, изучающей законы движения пуль или снарядов. В астрономии новое учение Коперника привело к открытиям, которые были сделаны Кеплером по законам движения планет. При необходимости более точного наблюдения небесных светил, необходимо было построить целый ряд оптических инструментов и развивать геометрическую оптику. Тем не менее, все эти вопросы науки и техники поставили перед математикой ряд новых задач, которые невозможно решить с помощью старых методов. В XVII веке они и привели к созданию сначала аналитической геометрии, а затем дифференциального или интегрально–аналитического исчисления.

В основе аналитической геометрии, созданной П. Ферма и Р. Декартом, лежат две идеи:

1) идея координат, приведшая к арифметизации плоскости, т. е. к тому, что каждой точке плоскости ставится в соответствие два числа, взятые в определенном порядке, и наоборот,

2) идея истолкования любого уравнения с двумя неизвестными как некоторой линии на плоскости и, наоборот, представления любой линии, определяемой, как некоторое геометрическое место точек, соответствующим уравнением.

Первыми работами, содержащими описание системы координат и использование этого метода при решении задач, были написаны приблизительно в середине 30–х годов XVII века Пьером Ферма и названы они «Введение в учение о плоских и телесных местах». Ферма пришел к своим новым идеям после изучения классических трудов древнегреческих ученых, в частности Аполлония. К своим новым идеям он пришел, изучая труды Платона и других древних математиков того времени. Ферма занимался даже восстановлением одного утерянного сочинения Аполлония – “Плоские места”.

Предисловие к «Введению» Ферма указывает, что древнегреческие ученые не имели общих методов решения геометрических задач. Каждая задача трактовалась отдельно и независимо от других, с нею родственных. Отсутствие единого общего подхода к исследованию и решению задач, как и отсутствие символики, приводило к повторениям одного и того же и делало невозможным рационально классифицировать разрозненные задачи и обозревать их сущность с более широкой точки зрения. Ферма задался целью установить общий подход к исследованию геометрических мест. Он с самого начала заявляет, что всякое уравнение между двумя «неизвестными» представляет геометрическое место, описываемое концом одной из неизвестных. Его «неизвестные», т. е. переменные, являются отрезками (рис.1.1.1)

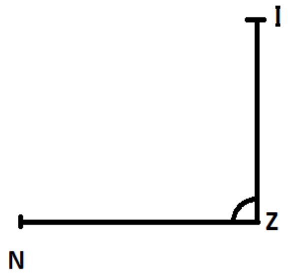

Рисунок 1.1.1

На прямой NZ (наша ось абсцисс), обозначаемой буквой A (наш x), он отмечает начальную точку N, затем при точке Z строит угол (обычно прямой) и откладывает 6 отрезок (ординату), обозначаемый буквой E (наш y) и равный второй неизвестной. (рис. 1) Конец ординаты I и описывает соответствующее геометрическое место. Идея измерения абсцисс на некоторой фиксированной прямой N2 и определения точек любой прямой посредством их расстояний от некоторой фиксированной точки нам кажется теперь тривиальной, однако никто раньше Ферма и Декарта до такой «простой вещи» не додумался. Одним из недостатков труда Ферма была ограниченность его системы координат.

Во–первых, фиксированной считалась только ось абсцисс. Ось ординат по существу отсутствует, она как бы подразумевается. Во–вторых, x и y принимают, как и в древности, лишь положи тельные значения. Фактически вся система координат состояла из одного, первого квадранта.

«Геометрия» Декарта была впервые опубликована на французском языке в 1637 г. в качестве одного из трех приложений к его философскому труду «Рассуждение о методе». В этом, как и в других своих произведениях, Декарт высказал мысль, что математика является важнейшим средством для понимания законов вселенной и лучшим подтверждением того, что человеческий разум способен найти истину в науке и познавать природу. Еще в 23–летнем возрасте Декарта озарила мысль о перестройке всех наук на математической, аналитической основе, мысль о создании одной единой и всеобъемлющей науки — «универсальной математики». Эта мысль его постоянно воодушевляла, хотя ему так и не удалось осуществить ее полностью. «Геометрия» Декарта и появилась как частичная реализация общей его идеи, как объединение арифметики и алгебры с геометрией. Фактически «Геометрия» Декарта является алгебраическим трудом, и мало в ней можно найти из того, что мы сегодня называем «аналитической геометрией», однако основная идея последней—алгебраический способ исследования вопросов геометрии с помощью метода координат – в ней четко изложена. Значительная часть «Геометрии» посвящена методам алгебраического и графического решения уравнений. Итак, не только у Ферма, но и у Декарта еще нет того, что мы называем системой декартовых координат на плоскости, есть только ось абсцисс с начальной точкой на ней. Хотя «Геометрия» Декарта еще не представляла собой настоящую аналитическую геометрию, все же она как наука развивалась именно под влиянием этой книги Декарта, а не под влиянием «Введения» Ферма, появившегося в печати лишь в 1679 г. Из–за нелегкого стиля и нечеткого способа изложения «Геометрия» Декарта оказалась очень трудной для чтения.

Уже в 1649 г. француз Ф. Дебон в своих «Кратких замечаниях» комментирует и несколько дополняет Декарта. Так же поступил голландский математик Франц ван Скоотен, издававший «Геометрию» Декарта на латинском языке в 1649 и 1659 гг. У ван Скоотена мы уже находим самостоятельное уравнение прямой у = а − к, преобразования координат и др. Дж. Валлис впервые ввел и отрицательные абсциссы, которые он применил наряду с отрицательными ординатами. Метод координат с трудом пробивал себе дорогу. Некоторые из продолжателей дела Декарта хотя и рисовали вторую ось координат, но не применяли ее. Существенным толчком для дальнейшего развития «координатной геометрии на плоскости были небольшой труд Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка» (1706) и книга его соотечественника Дж. Стирлинга «Ньютоновы кривые третьего порядка» 8 (1717), в которых рисовались обе оси (хотя ось V еще не считалась равноправной с осью X) и квадранты. Лишь Г. Крамер в своем «Введении в анализ алгебраических кривых» (1750) впервые по современному ввел ось V, считая ее равноправной с осью X1 , и четко пользовался понятием двух координат точки на плоскости. Этого новшества, однако, еще нет во втором томе «Введения в анализ» (1748) Эйлера. С другой стороны, эта работа Эйлера, посвященная геометрии, явилась первой в современном смысле аналитической геометрии конических сечений. Близкие к современным новые обозначения и расположение материала плоской аналитической геометрии мы находим впервые у С. Лакруа в «Элементарном курсе прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии», который переиздавался много раз на протяжении целого столетия, начиная с 1798 г. Еще сложнее что–то говорить о полярной системе координат. Считается, что ее основы были также заложены в геометрии Декарта, но дальнейшего глубоко развития ее в математике не прослеживается. И математики мало уделяют внимания полярной системе координат. Это связано с неудобством ее использования при проведении расчетов и построений, а также сложностью восприятия объектов в полярной системе координат. Хотя при изучении объектов, находящихся на огромных расстояниях и недоступных объектов очень удобно использовать именно полярную систему координат. Вся теория движения небесных тел построена на основе полярной системы координат. Были разработаны формулы перехода от декартовой системы координат в полярную и наоборот[13].

Французские математики Рене Декарт и Жан–Пьер Ферма открыли первый координатный метод. В их формулировках расстояния до координатных осей могли быть только положительными числами или нулем. Позже ученый И.Ньютон высказал важнейшую идею о том, что одно или оба расстояния до осей координат можно так же считать и отрицательными. Немного позднее Лейбниц назвал данные расстояния «координатами

Метод координат является способом перевода с геометрического языка на язык математики, после чего геометрические проблемы становятся алгебраическими, и появляется возможность использовать для решения математических задач алгебраические методы [20]. У школьников знакомство с координатами начинается уже с пятого класса на примере измерительных приборов, которые используются для изучения алгебраического материала: «Шкалы и координаты».

С шестого класса начинается изучение отрицательных чисел, появляется новый термин «координатная прямая». Только в девятом классе на уроках геометрии начинается изучение темы «Координаты вектора», «Связь между координатами вектора, координатами его начала и конца», «Уравнение линии на плоскости», «Уравнение окружности и прямой. К простейшим задачам, которые изучаются в данный период можно отнести: решение задачи на нахождение середины отрезка; решение задачи нахождения длинны вектора; задача на нахождение расстояния между двух точек [18]. Главной задачей современной геометрии является показать учащимся применение координатного метода для решения задач. А теперь раскроем суть метода координат. В курсе алгебры 7 класса, в начале изучения функции, становится известным понятие прямоугольной системы координат. При задании на плоскости системы координат, любую точку плоскости можно охарактеризовать ее координатами, то есть парой действительных чисел, а геометрическую фигуру, разбив ее на более простые элементы, задать аналитическими условиями, а именно, с помощью уравнений, неравенств, или системы уравнений или неравенств. Благодаря этому можно осуществить перевод задач геометрии на алгебраический язык. Для изучения фигур с помощью метода координат выделяются две взаимно обратных задачи: найти уравнение данной фигуры по ее геометрическим свойствам, и исследовать геометрические свойства фигуры (сначала разбив ее на более простые элементы) по ее заданному уравнению. При этом, достижение обеих целей исследования метода координат показано в задачах на поиск множества точек плоскости. В школьном курсе метод координат дает возможность доказывать и решать задачи рациональнее, чем только геометрическими способами. Одну и ту же задачу можно представить аналитически по–разному в зависимости от выбора системы координат. Чем больше опыт ученика в решении задач, тем больше вероятность того, что он выберет более подходящую для данной задачи систему координат [10].

В отношении школьного курса геометрии можно сказать, что в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими способами. Метод координат связан, правда, с одной геометрической сложностью. Одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от того или иного выбора системы координат. И только достаточный опыт позволяет выбирать систему координат наиболее целесообразно.

1.2 Суть метода координат.

Сущность метода координат как метода решения задач состоит в том, что, задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах различные 21 геометрические соотношения, мы можем решать геометрическую задачу средствами алгебры. Обратно, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и таким образом применять геометрию к решению алгебраических задач.

Метод координат – это универсальный метод. Он обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией, которые, соединяясь, дают «богатые плоды», какие они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

В отношении школьного курса геометрии можно сказать, что в некоторых случаях метод координат дает возможность строить доказательства и решать многие задачи более рационально, красиво, чем чисто геометрическими способами. Метод координат связан, правда, с одной геометрической сложностью. Одна и та же задача получает различное аналитическое представление в зависимости от того или иного выбора системы координат. И только достаточный опыт позволяет выбирать систему координат наиболее целесообразно.

С помощью метода координат, можно решать задачи двух видов:

1. Пользуясь координатами, можно истолковать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функции первый пример такого применения координатного метода.

2. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии. Например, можно выразить через координаты основную геометрическую величину – расстояние между точками.

Решение задач, как алгебраических, так и геометрических сводится к выполнению определенного алгоритма, состоящего из III основных этапов:

- перевести задачу на координатный (аналитический) язык;
- преобразовать аналитическое выражение;
- обратный перевод, то есть перевести с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Рассмотрим решение алгебраической задачи координатным методом, используя данный алгоритм (задачи на составление уравнения фигуры).

Задача №1. Сколько решений имеет система уравнений.

Решение:

I. этап: выявить характеристическое свойство данных фигур, иначе говоря, требуется найти, количество точек пересечения фигур, заданных уравнениями. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$. это есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, а уравнение $y = x^2$ – уравнение параболы.

II. этап: выбрать на плоскости прямоугольную систему координат, построить окружность и параболу; найти точки их пересечения.

III. этап: записать характеристическое свойство фигуры на языке координат, то есть количество точек пересечения окружности и параболы.

1.3 Анализ изложения метода координат в школьных учебниках

Обучение применению метода координат к решению задач и само изучение данного метода проходит в несколько этапов. На первоначальном этапе, в 5–6 классах, проходит подготовка к изучению данной темы в последствие (пропедевтика). Вводится основной понятийный аппарат, который хорошо отрабатывается, а затем систематизируется в курсе геометрии

Итак, рассмотрим учебник для 5 класса А.Г. Мерзляка, В.Б.Полонского и М.С. Якира. В первую очередь, вводятся опорные понятия метода координат: «отрезок», «длина отрезка», «прямая», «луч». Далее определяют метрическую систему, дается история ее появления, также рассказывается об устаревших системах измерения. Позже идет ознакомление с измерительными приборами, рассказывается про шкалы и деления, а потом про координатный луч. Самые первые задачи, связанными с изучением метода координат являются: нахождение координат точек, определение показаний термометра, нахождение расстояния между объектами и задачи на движение. Далее появляются следующие задания – сравнить числа или буквенные выражения на координатном луче. В следующем учебнике для 5 класса Н.Я. Виленкина и др. изучение происходит по немного другой схеме. Школьники сначала изучают понятия «отрезок», «длина отрезка» и «треугольник». Позже ученики знакомятся с понятиями «плоскость», «прямая» и «луч»[9]. Далее тема «Шкалы и координаты» объясняется на примере измерительных приборов. Больше данная тема нигде не встречается, кроме решения некоторых задач графическим способом. Дополнение координатного луча до координатной прямой происходит в 6 классе при изучении отрицательных чисел, которое происходит к концу первого полугодия. В качестве примера, аналогично программе 5 класса, приводится термометр [12]. Позднее сложение и вычитание чисел будут показаны на координатной прямой. Позже, при дополнении изученных числовых множеств до множества рациональных чисел вводится понятие «координатная плоскость»[5]. Примерами координатной плоскости в учебниках являются поле для игры в морской бой и шахматная доска. Второй этап изучения метода координат проходит в 7–8 классах. Школьники изучают элементарные функции с помощью координатного метода, находят координаты точки и отмечают их на координатной плоскости. Но на данном этапе данному методу уделяется мало внимания.

Третий этап изучения проходит в 9 классе. Вначале раскрываются основные этапы применения метода, после при решении задач показывается непосредственное применение координатного метода. Рассмотрим примеры изучения данного метода в различных УМК. На изучение темы «Метод координат» в УМК «Геометрия 7–9 класс» авторов Л.С.Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б Кадомцева отводится 18 часов. Данной теме в учебнике посвящена отдельная глава[11]. Координатный метод изучается после изучения темы «Векторы», но до изучения скалярного произведения векторов. Определение метода координат дается следующим, указанным ниже, образом.

Введение системы координат дает возможность изучать различные фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и решать задачи геометрии с помощью методов алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется методом координат [2]. В данной главе изучаются координаты вектора, уравнение прямой и окружности, решаются простейшие задачи в координатах (нахождение координат середины отрезка, длины вектора по его координатам, расстояния между точками). В этом учебнике метод координат дается как метод изучения геометрических фигур с помощью средств алгебры. Автор задается целью обучить учеников применять координатный метод не только к задачам на построение фигур по их уравнению, но и к задачам на доказательство, также для вывода геометрических формул. Позже с помощью метода координат доказываются определения тригонометрических функций, основное тригонометрическое тождество, формулы приведения и теорема косинусов. На этом использование этого метода заканчивается [4]. При изучении линий координатным методом появляются две задачи: по геометрическим свойствам данной линии найти ее уравнение и по заданному уравнению линии исследовать по авторской программе А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонского, М.С. Якира, Д.А. Номировского на изучение предмета геометрии в 9 классе отводится примерно 70 часов в год. Изучение метода координат в учебнике «Геометрия 9 класс» Мерзляка начинается с главы «Декартовы координаты» [19]. Материал данной главы расширяет знания учащихся о координатной плоскости и о методах решения задач, в которых используются свойства точек и фигур на координатной плоскости. На базе освоенного материала далее будут изучаться векторы на плоскости и в пространстве, элементы аналитической геометрии и так далее [8]. Первый параграф этой главы – «Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка». Формула расстояния между двумя точками на координатной плоскости выводится на основе теоремы Пифагора. Авторы методического пособия к учебнику советуют напомнить учащимся, что две точки, лежащие на прямой, параллельной оси абсцисс, имеют одинаковую ординату, а две точки, лежащие на прямой, параллельной оси ординат, — одинаковую абсциссу [8]. Вводятся понятие «декартовы координаты». В этом параграфе представлен ряд задач, в которых необходимо по известным координатам вершин треугольника или четырёхугольника определить, или доказать некоторые его свойства. То есть учащиеся должны находить расстояние между точками, искать координаты середины отрезка и делать вывод о совпадении двух точек на основании равенства их координат. Для поиска величин углов между прямыми на координатной плоскости авторы рекомендуют использовать теорему косинусов. Следующий параграф «Уравнение фигуры. Уравнение окружности». Дается понятие «уравнение фигуры на координатной плоскости», «уравнение окружности». ее геометрические свойства.

Проводится аналогию между уравнением фигуры на координатной плоскости и графиком функции, подчеркивая при этом разницу между ними: для графика каждому значению координаты x может соответствовать не более одного значения координаты y, для уравнения фигуры может существовать любое количество различных точек с одной и той же координатой x. Также указывается, что фигуру можно рассматривать как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Поэтому:

- пересечение фигур рассматривается как множество решений системы уравнений, составленной из уравнений этих фигур;
- объединение фигур рассматривается как множество решений совокупности уравнений, составленной из уравнений этих фигур. Благодаря данному подходу можно использовать метод ГМТ, который был рассмотрен в 7 классе (учебник «Геометрия. 7 класс» А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонского, М.С. Якира), в совокупности с методом координат. Применение описанного подхода описывается более подробно в пункте «Метод координат». Следующий параграф «Уравнение прямой». Вводятся понятия «уравнение прямой», «вертикальная прямая», «невертикальная прямая». Далее в

параграфе «Угловой коэффициент прямой» вводится понятие угла между прямым и положительным направлением оси абсцисс. Также приводится два важных факта, позволяющих по уравнению прямой устанавливать её расположение на координатной плоскости: 1) угол наклона координатной прямой к положительному направлению оси абсцисс зависит от коэффициента k в уравнении прямой, записанном в виде $y = kx + b$у; 2) все прямые с одинаковым значением коэффициента k параллельны, и наоборот, если невертикальные прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны [19].

Рассмотрим введение метода координат в учебнике «Геометрия 9 класс» авторов В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, В.В. Прасолова Сразу после введения, посвященного повторению пройденного в 8 классе материала, в данном учебнике начинается глава «Векторы и координаты». Понятие «декартова прямоугольная система координат» школьники уже знают из курса алгебры. Также авторы акцентируют внимание на важнейшем значении системы координат для применения в геометрии алгебраических методов [6]. Глава начинается параграфа «Ось координат». Дается определение понятий «ось координат», «начало координат», «координата точки». Учащиеся должны твёрдо усвоить, что ось координат — это прямая, на которой выбрана точка (начало координат), разделяющая прямую на две полуоси (два луча), одна из которых называется положительной полуосью и отмечается стрелкой, а другая — отрицательной полуосью; кроме того, выбрана единица измерения отрезков. Каждой точке на оси координат соответствует определённое число — координата этой точки [18]. Приводится доказательство утверждения о координатах середины отрезка. Длину отрезка AM обозначают $x - x1$.Для доказательства справедливости обозначения AM в виде данного равенства необходимо рассмотреть все возможные случаи расположения точек A и M относительно начала координат (точки O), учитывая условие $x1 < x2$, то есть точка M лежит на оси правее точки. Следующий параграф – «Прямоугольная система координат». Даются определения понятий «прямоугольная система координат», «ось абсцисс», «ось ординат». Доказывается утверждение «каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка». В УМК справедливость данного равенства предлагается доказать с помощью теоремы Фалеса [8]. Далее в параграфе «Длина вектора и расстояние между двумя точками» приводится формула расстояния между двумя точками в виде следствия. Дается доказательство данного следствия через формулу длины вектора. Рассматриваются задачи на нахождение координат вершин равнобедренного треугольника, параллелограмма, координаты точки пересечения диагоналей прямоугольника, расстояния между двумя точками. В параграфе «Уравнение окружности» определяется понятие «уравнение линии L», выводится уравнение окружности через нахождение расстояние от центра окружности до точки на окружности, которое в то же время является радиусом окружности. В следующем параграфе выводится уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно к ненулевому вектору. Определяется понятие «угловой коэффициент прямой» и показывается значение углового коэффициента в расположении двух прямых. Аналогично выводу уравнения прямой, проходящей через одну точку, выводится уравнение прямой, проходящей через две данные точки [20]. Авторы представили задачи на вывод уравнения окружности по известным координатам центра и радиусу, задачи на вычисление угловых коэффициентов прямых, задачи на вывод уравнения прямых, задачи на выяснение взаимного расположения прямой и окружности.

1.4 Виды задач, решаемые координатным методом

Важно выявить требования к структуре решения задач мышления решающего. Для разработки методики важно определить требования, которые предъявляет структура принятия решений для мышления решающего. Координатный метод подразумевает наличие у учащегося навыков и умений для использования на практике данного метод.

Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов

1. Для того чтобы понять уравнения и неравенства геометрически, можно использовать координаты. Это позволяет применить геометрию к алгебре или анализу. Графическое изображение функции первый пример такого применения метода координат.

2. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии. Например, можно выразить через координаты основную геометрическую.

В связи с усилением роли координатного метода в изучении геометрии особенно актуальной становиться проблема его формирования. Наиболее распространенными среди планиметрических задач, решаемых координатным методом, являются задачи следующих 2 видов:

1) на обоснование зависимостей между элементами фигур, особенно между длинами этих элементов;

2) на нахождение множества точек, удовлетворяющих определенным свойствам.

Рассмотрим пример задачи первого вида:

Задача №1.

В стороны треугольника ABC, AB, AC и BC равны соответственно c, b и a, из вершины треугольника ABC проведена медиана BD.

Докажите, что $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2}{4}$;

Решение:

Выберем систему координат так, чтобы точка A служила началом координат, а осью Ox – прямая AC (рисунок 1.4.1).

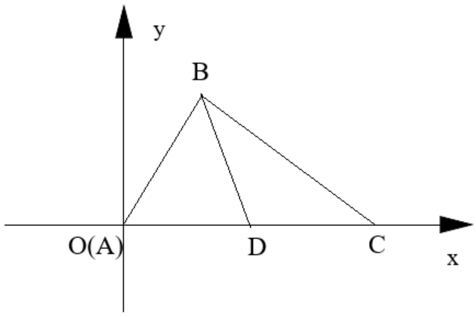

Рисунок 1.4.1 – Изображение к задаче № 1

Тогда точки выбранные в данной системе координат имеют данные координаты A (0,0), D ($\frac{b}{2}$,0) и C(b,0). Для нахождения точки B обозначим координаты через x и y, используя формулу нахождения расстояния между двумя точками, получаем:

$x^2 + y^2 = c^2$, $(x–b)^2 + y^2 = a^2$ применяется знание нахождения расстояния между точками с заданными координатами.

По той же формуле $BD^2 = (x - \frac{b}{2})^2 + y^2$. (1)

Находим x и y:

$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}$;

$y = \sqrt{c^2 - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{4b^2}}$;

После чего подставим в формулу (1) и находим

$BD^2 = (\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2})^2 + c^2 - \frac{c^2 - a^2 + b^2}{4b^2}$;

$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Учитывая недостатки метода координат, такие как наличие большого количества формул и отсутствие развития творческих способностей учащихся без использования этого метода. Некоторые виды задач невозможно решить с помощью данного способа. Метод координат необходим для изучения и более детальное знакомство с этим методом целесообразно проводить на факультативных занятиях. После этого мы перейдем к ряду заданий для факультативов [26].

Например, задача №2

Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных ему хорд постоянна .

Решение:

Введем декартовую систему координат, так что б начало координат совпадало с центром окружности. Пусть хорда BC параллельна оси абсцисс, а точка A принадлежит диаметру (рисунок). Тогда обозначим расстояние OA через a, а расстояние от точки B до оси Ox через b. Тогда точка имеет следующие координаты ($a,0$)

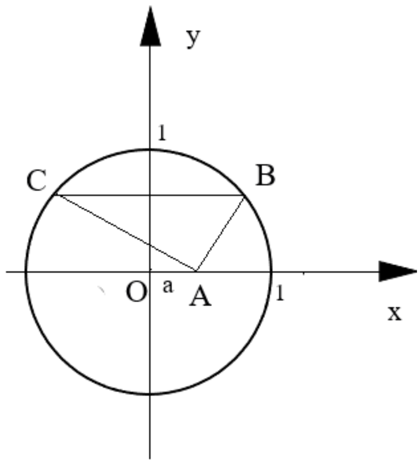

Рисунок 1.4.2 – Изображение к задаче № 2

Так как точки C и B принадлежат окружности с центром в начале координат и радиусом 1, можно сказать что их координаты удовлетворяют уравнению данной окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Следовательно находим координаты точек $B(\sqrt{1-b^2};b)$ и $C(-\sqrt{1-b^2};b)$. Тогда необходимо доказать независимость выражения $AC^2 + AB^2$ от переменной b. Для этого найдем AC^2 и AB^2 ,используя формулу нахождения расстояния между двумя точками по их координатам: $d =$

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, тогда $AC^2 = (\sqrt{1 - b^2 + a})^2 + b^2$ и $AB^2 = (\sqrt{1 - b^2 - a})^2 + b^2$, а их сумма после приведения подобных равна $2a^2 + 2$. Это число не зависит от переменной b, что и требовалось доказать [26].

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ «МЕТОД КООРДИНАТ» ДЛЯ 11 КЛАССА

В методе координат главная нагрузка приходится на алгебраические выкладки, однако, их целесообразность базируется на наглядном осмыслении задачи. Как показывает практика, этот метод доступен учащимся даже с недостаточно развитым пространственным воображением, что позволяет повысить уровень их подготовки к ЕГЭ [29].

Надо отметить, что координатным методом разумно пользоваться в задачах, решение которых вызывает затруднение при применении обычного метода, сводящего стереометрическую задачу к ряду планиметрических.

Метод координат – большая и важная тема школьного курса геометрии.

Цели курса:

- углубить теоретическое и практическое содержание курса стереометрии;
- развивать пространственные представления и логическое мышление;
- развивать умение применять знания на практике, приводить аргументированное решение, анализировать условие задачи и выбирать наиболее рациональный способ решения.
- формирование системы знаний по теме «Метод координат»

Задачи курса:

- расширить и углубить представления учащихся о приемах и методах решения стереометрических задач;
- создать условия для выдвижения различных гипотез при поиске решения задачи и доказательства истинности или ложности этих гипотез;
- развивать интерес и положительную мотивацию изучения геометрии,

создавать условия для подготовки учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по математике.

2.1 Содержание программы курса

Тема №1. Метод координат. Повторение основных понятий.

В данной теме рассматиривается суть координаного метода, введем основные понятия: понятие вектора, координатного метода, угол между векторам, понятие нормали, уравнение плоскости и тд. А также рассмотрим преимущество координатного метода на примере решения одной задачи (решить разными способами). Оптимальный выбор системы координат для различных многогранников (призма, пирамида, куб, прямоугольный параллелепипед).

Тема №2. Введение системы координат

Оптимальный вариант введения системы координат и нахождение координат вершин геометрических фигур

Тема №3. Метод координат в плоскости

Тема №4. Метод координат в пространстве.

Вычисление координат векторов, вычисление направляющих векторов для прямых, вычисление нормальных векторов для плоскостей, координаты середины отрезков, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями и расстояние от точки до плоскости.

Тема №5. Вычисление площадей и объёмов

Рассматриваются формулы для вычисления объема параллелепипеда, тетраэдра в координатной форме и формулы для вычисления площадей.

Нахождение расстояний от точки до прямой методом координат

2.1.1Учебно–тематический план

Учебно–тематический план факультативного курса представлен в таблице 2.1.1.

Таблица 2.1.1

№ п.п.	Тема	Кол–во часов	Форма занятий
Метод координат. Повторение основных понятий. (2 ч)			
1.	Суть и преимущество координатного метода решения задач	1	лекция
2.	Введение основных понятий	2	Лекция, математический диктант
Введение системы координат (2 ч)			
3.	Оптимальный выбор прямоугольной системы координат для различных многогранников	1	Лекция, практикум
4.	Нахождение координат вершин геометрических фигур	1	Лекция, самостоятельная работа
Метод координат в плоскости (8ч)			
5.	Расстояние между двумя точками	1	Лекция, практикум
6.	Уравнение плоскости	2	Лекция, практикум
7.	Деление отрезка в данном отношении, координаты середины отрезка	3	Лекция, практикум, самостоятельная работа
8.	Уравнение прямой на плоскости	2	Лекция, практикум
Метод координат в пространстве (16 ч)			
9.	Вычисление координат векторов,	1	Лекция, практикум
10.	Вычисление направляющих векторов для прямых	1	Лекция, практикум
11.	Вычисление нормальных векторов для плоскостей	2	Лекция, практикум

Продолжение таблицы 2.1.1

12.	Расстояние от точки до прямой	1	Лекция, практикум
13.	Расстояние от точки до плоскости	2	Лекция, практикум
	Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми	2	Лекция, практикум
14.	Угол между прямыми	1	Лекция, практикум
15.	Угол между прямой и плоскостью	3	Лекция, практикум, контрольная работа
16.	Угол между плоскостями	3	Лекция, практикум
Вычисление площадей и объемов(8ч)			
17.	Вычисление площадей и объемов	3	Лекция, практикум
18.	Решение задач вариантов ЕГЭ	5	Практикум
19.	Итоговое занятие	1	Зачетная работа

2.1.2 Ожидаемые результаты изучения курса

По мере освоения программы, учащиеся будут выбирать оптимальное расположение точек в пространстве и применять необходимые формулы для нахождения расстояний и углов в пространстве, составлять уравнение фигуры по её характеристическому свойству и за уравнениями видеть конкретный геометрический образ. Находить площади и объёмы многогранников.

2.2 Разработка занятий курса

2.2.1 Урок 1.Расстояние от точки до плоскости

Тип урока: урок применения и изучения новых знаний.

Цели урока:

Дидактические:

- обобщить и систематизировать знания учащихся по теме;
- формировать умения и навыки по решению задач;

– проконтролировать степень усвоения знаний, умений и навыков по теме.

Развивающие:

– развивать логическое мышление учащихся в области математики,
– сообразительность,
– умение быстро ориентироваться в изображениях геометрических фигур,
– умение строить геометрические фигуры по условию задач,
– тренировать память.

Воспитательная:

– воспитывать внимание;
– формировать вычислительные навыки, эстетические навыки при оформлении записей и построении чертежей.

Ход урока

I. Организационный момент: Проверка готовности к уроку.

II. Мотивация к учебной деятельности: Создание проблемной ситуации.

III. Изучение нового материала

Структура урока:

1) Организационный момент (2–3 мин)
2) Актуализация знаний (10–12 мин)
3) Введение нового материала (15–18 мин)
4) Первичное закрепление нового материала (15–20 мин)
5) Подведение итогов, постановка домашнего задания (2–3 мин)

В задачах ЕГЭ профильной математики часто требуется найти угол между прямой и плоскостью, расстояние между скрещивающимися прямыми, расстояние от точки до плоскости. Для решения этих задач надо уметь выводить уравнение плоскости.

Расстояние от точки M($x_0; y_0; z_0$) до плоскости α:ax+by+cz+d=0 вычисляется по формуле: $\rho(M;\alpha)=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (1)

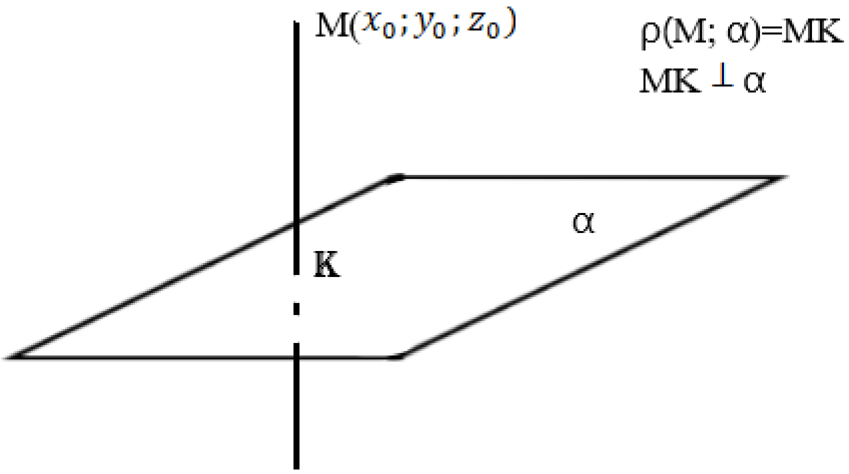

Рисунок 2.2.1.1

Расстояние– это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Надо отметить, что расстояние– величина всегда положительная.

Рассмотрим задачи на нахождения расстояния от точки до плоскости.

Задача №1 В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=12 BC=$5\sqrt{3}$. Длина боковых ребер пирамиды SA=5, Sb=13, SD=10.

а) докажите, что SA–высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Для решения задачи нужно построить рисунок и отметить все что у нас дано (рис. 2.2.1.2)

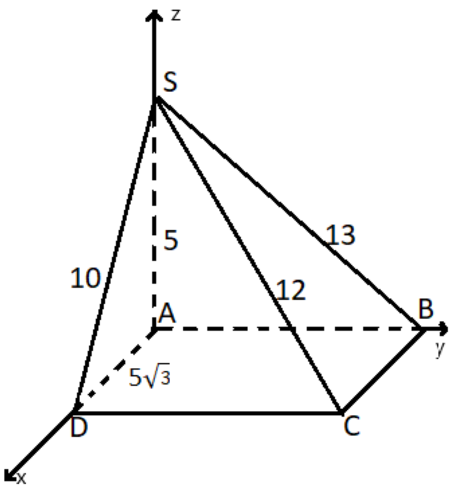

Рисунок 2.2.1.2- Изображение к задаче № 1

а) Для начала рассмотрим треугольник SAB, он прямоугольный так как по обратной теореме Пифагора :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2$$

169=25+144

169=169

Из это следует, что SA ⊥ AB.

Аналогично докажем, что треугольник SAD– прямоугольный.

$$SD^2 = SA^2 + AD^2$$

100=25+75

100=100

Тогда SA ⊥ AD. Из этого следует, что SA ⊥ (ABCD), а значит SA– высота, чтд.

б) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой А, а стороны основания АВ и АD принадлежали соответственно осям Оу и Ох. Тогда точки имеют следующие координаты А(0;0;0), S(0;0;5), B(0;12;0), C($5\sqrt{3}$;12;0). Если наша плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент d = 1, если же плоскость проходит через начало координат, то d = 0

Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Получилась система из трёх уравнений, но неизвестных четыре: A,B, C,D. Теперь получили три уравнения и три неизвестных, можно решать систему:

$$\begin{cases} 5c + 1 = 0, \\ 12b + 1 = 0, \\ 5\sqrt{3}a + 12b + 1 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдём коэффициенты A,B, C,D и, подставив их в общее уравнение, получим уравнение плоскости, проходящей через заданные точки S, B, C .: $\begin{cases} c = -\frac{1}{5}, \\ b = -\frac{1}{12}, \\ a = 0. \end{cases}$

$-\frac{1}{12}y - \frac{1}{5}z + 1 = 0$ домножим данное уравнение на (–60)

5y+12z–60=0. $\vec{n} = \{0; 5; 12\}$

Подставляем в формулу (1) для нахождения расстояния

ρ(A; SBC)= $\frac{|-60|}{\sqrt{25+144}} = \frac{60}{13}$

Задача №2

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от т.А до плоскости CB_1D_1.

Решение:

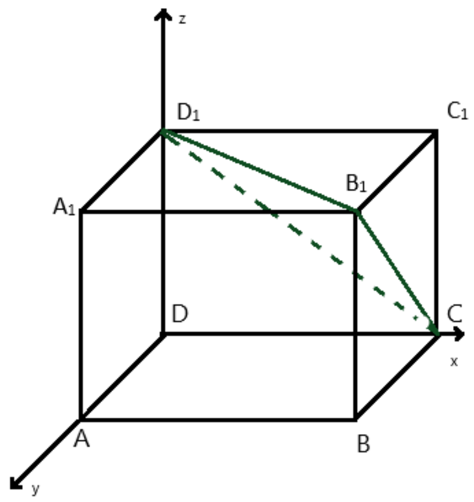

Рисунок 2.2.1.3- Изображение к задаче № 2

1) Введем систему координат (рис. 2.2.1.3), таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой D, а стороны основания DC и AD принадлежали соответственно осям Ox и Oy. Тогда точки имеют следующие координаты A(0;1;0), D_1 (0;0;1), B_1 (1;1;1), C(1;0;0).

2) Если наша плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент d = 1, если же плоскость проходит через начало координат, то d = 0

3) Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} \mathrm{ax}_1 + \mathrm{by}_1 + \mathrm{cz}_1 + \mathrm{d} = 0 \\ \mathrm{ax}_2 + \mathrm{by}_2 + \mathrm{cz}_2 + \mathrm{d} = 0 \\ \mathrm{ax}_3 + \mathrm{by}_3 + \mathrm{cz}_3 + \mathrm{d} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} c + 1 = 0, \\ a + b + c + 1 = 0, \\ a + 1 = 0 \end{cases}$$

4) Решив систему, найдём коэффициенты a,b,c,d и, подставив их в общее уравнение ax+by+cz+d=0, получим уравнение плоскости, проходящей через заданные точки D_1, B_1, C :

$$\begin{cases} \mathrm{c} = -1, \\ b = 1, \\ a = -1. \end{cases}$$

5) Найдем расстояние от точки A до плоскости CB_1D_1 по формуле (1)

$\rho(A;\ CB_1D_1)=\frac{|(-1)\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 0+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Задача №3

В правильной шестиугольной призме ребра которой равны 1. Найдите $\rho(A;\ DEF_1)$ (рис. 2.2.1.4).

Решение:

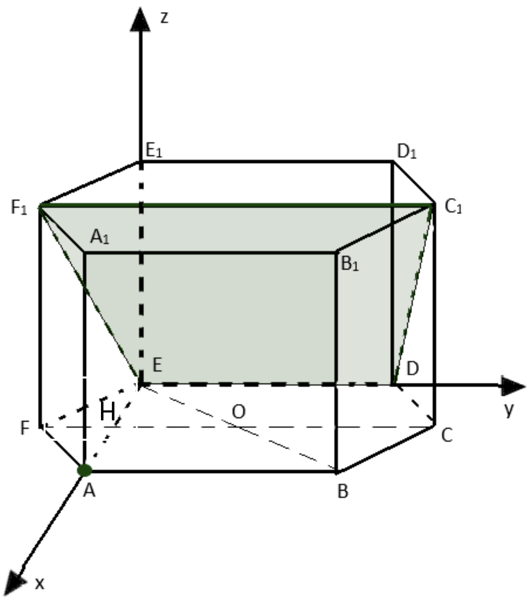

Рисунок 2.2.1.4

$FH=\frac{1}{2}FO=\frac{1}{2}$

$EH=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$EA=2EH=\sqrt{3}$

1) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой E, а стороны основания DE и EA принадлежали

соответственно осям Oy и Ox. Тогда точки имеют следующие координаты A($\sqrt{3}$;0;0), D_1 (0;1;0), F_1 ($\frac{\sqrt{3}}{2}$;$-\frac{1}{2}$;1), E(0;0;0).

2) Если наша плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент d = 1, если же плоскость проходит через начало координат, то d = 0

3) Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0; \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \begin{cases} b = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b + c = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + c = 0 \end{cases}$$

4) Решив систему, найдём коэффициенты a,b,c,d и, подставив их в общее уравнение ax+by+cz+d=0, получим уравнение плоскости, проходящей через заданные точки F_1,E, D :

$$\begin{cases} -c = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \\ b = 0. \end{cases}$$

Подставим в $ax + by + cz + d = 0$ и получим $ax - \frac{\sqrt{3}}{2}az = 0$; $x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$.

5) Найдем расстояние от точки A до плоскости DEF_1 по формуле (1)

$$\rho(A;\ DEF_1) = \frac{\left|1\cdot\sqrt{3}+0\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Домашнее задание:

a) выучить формулу вычисления расстояния от точки до плоскости;

b) решить задачи:

Задача №1 из ЕГЭ: На рёбрах CD и BB1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём DP = 4, а B1Q = 3. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

Задача №2 из ЕГЭ: В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковых ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки K и M так, что $AK : A_1K = 2 : 3$, $DM : D_1M = 4 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BMK параллельна прямой AC.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BMK, если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.

Итог урока:

«Три М». Учащимся надо назвать три момента, которые получились хорошо в процессе урока, и предложить одно действие, которое улучшит их результат на следующем уроке.

2.2.2 Урок 2.Расстояние от точки до прямой

Тип урока: Урок изучения нового материала.

Цель: Научить учащихся решать задачи на нахождение расстояния от точки до прямой

Задачи:

Обучающая: Изучить, как находится расстояние от точки до прямой и расстояние между параллельными прямыми.

Воспитательная: Воспитание ответственности, серьезного отношения к какому–либо делу.

Развивающая: Развитие памяти, запоминание теорем.

Структура урока:

1) Организационный момент (2–3 мин)

2) Актуализация знаний (10–12 мин)

3) Введение нового материала (15–18 мин)

4) Первичное закрепление нового материала (15–20 мин)

5) Подведение итогов, постановка домашнего задания (2–3 мин)

Ход урока

I. Организационный момент: Проверка готовности к уроку.

II. Мотивация к учебной деятельности: Создание проблемной ситуации.

III. Изучение нового материала

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой.

Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Расстояние от точки M до прямой AB есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую AB. Найти MH можно из прямоугольного треугольника (рис.2.2.2.1).

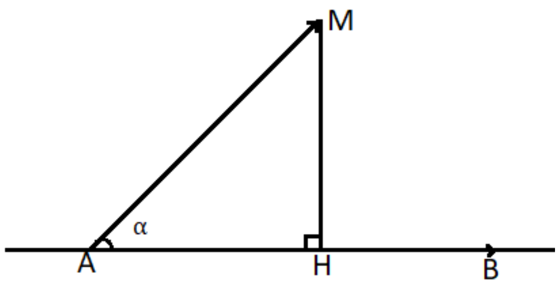

Рисунок 2.2.2.1

Метод решения:

1) Найти косинус угла α: cosα=$\cos(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) = \frac{|\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$

2) Зная косинус cosα, найдем синус sinα :

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

3) Теперь можем найти длину MH из прямоугольного треугольника AMH.

$\sin \alpha = \frac{MH}{|\overrightarrow{AM}|}$

$MH = |\overrightarrow{AM}| \cdot \sin \alpha$

Теперь на практике рассмотрим задачи на нахождения расстояния от точки до прямой.

Задача №1. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2. Найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G середина ребра SC (рис. 2.2.2.2).

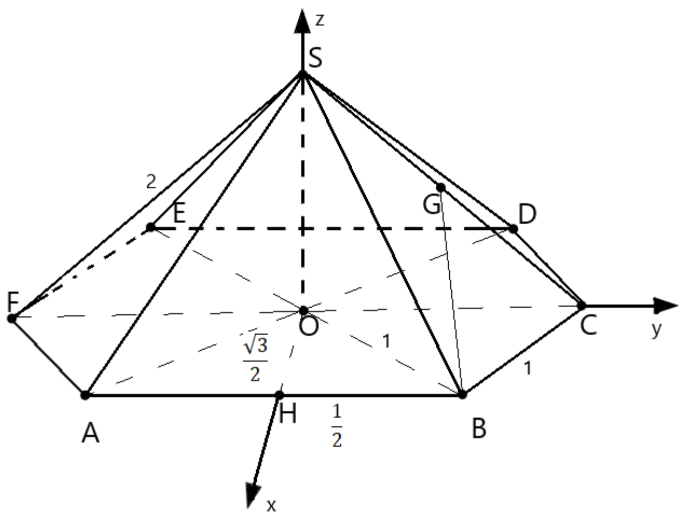

Рисунок 2.2.2.2

Решение:

1) Рассмотрим треугольник SOC– прямоугольный треугольник, так как SO– высота. По теореме Пифагора найдем SO:

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

2) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой O. Тогда точки имеют следующие координаты S(0;0; $\sqrt{3}$), C (0;1;0),G (0;$\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$), F(0;–1;0), B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0)

3) Рассмотрим треугольник HOB – прямоугольный, так как OH– высота в равностороннем треугольнике. По теореме Пифагора найдем HO:

$$HO = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) Рассмотрим рисунок 2.2.2.3 и найдем координаты векторов $\overrightarrow{BF}\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 0\}$ и $\overrightarrow{BG}\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

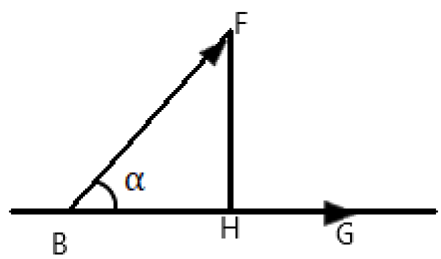

Рисунок 2.2.2.3

5) cosα$= \frac{\left|\frac{3}{4}\right|}{\left|\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right|\cdot\left|\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right|} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{18}}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

6) Зная косинус cosα, найдем синус sinα :

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{16-2}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$

7) Теперь можем найти длину FH.

$\sin \alpha = \frac{FH}{|\overrightarrow{BF}|}$

$FH = \left|\overrightarrow{BF}\right| \cdot \sin \alpha$

$FH = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{42}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$

Задача №2. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 3. Найдите расстояние от точки S до прямой MK, где M и K середины ребер AB и SE соответственно. (рис 2.2.2.4).

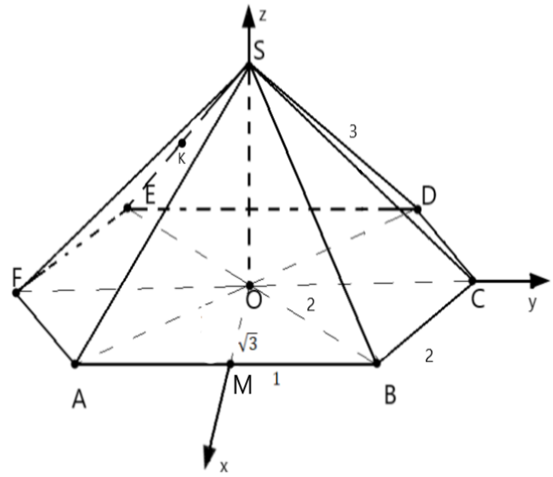

Рисунок 2.2.2.4

Решение:

1) Рассмотрим треугольник SOC– прямоугольный треугольник, так как SO– высота. По теореме Пифагора найдем SO:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

2) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой O. Тогда точки имеют следующие координаты S(0;0; $\sqrt{5}$), M ($\sqrt{3}$;0;0)

3) Рассмотрим треугольник MOB – прямоугольный, так как OM– высота в равностороннем треугольнике. По теореме Пифагора найдем MO:

$$MO = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

Тогда E$(-\sqrt{3}; -1; 0)$, K–середина ES поэтому точка K имеет следующии координаты K$(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2})$

4) Рассмотрим рисунок 2.2.2.5 и найдем координаты векторов $\overrightarrow{MK}\{-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\}$ и $\overrightarrow{MS}\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{5}\}$

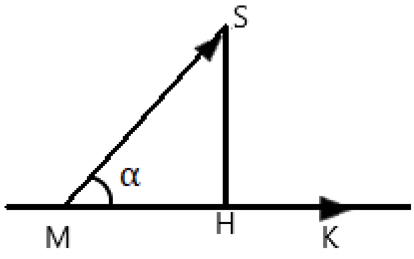

Рисунок 2.2.2.5

5) Cosα$= \frac{\left|\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3+5}} = \frac{7}{\sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{33}}{2}} = \frac{7}{\frac{\sqrt{18}}{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{66}}$

6) Зная косинус cosα, найдем синус sinα :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{49}{66}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{66}}$

7) Теперь можем найти длину SH в треугольнике MSH.

$SH = \left|\overrightarrow{MS}\right| \cdot \sin\alpha$

$SH = \sqrt{8}\cdot\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{66}} = \sqrt{\frac{8\cdot 17}{66}} = \sqrt{\frac{4\cdot 17}{33}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{33}}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{561}}{33}$

Задача№ 3

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ длина всех ребер равна 1. Найдите расстояние от точки A до прямой D_1E_1 (рис.2.2.2.6)

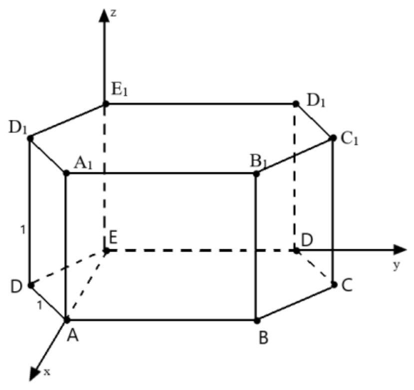

Рисунок 2.2.2.6

1) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой Е. Тогда точки имеют следующие координаты $E_1(0;0;1)$, $A(\sqrt{3};0;0)$, $D_1(0;1;1)$

2) Рассмотрим рисунок 2.2.2.7 и найдем координата векторов $\overrightarrow{D_1A}\left\{\sqrt{3};-1;-1\right\}$ и $\overrightarrow{D_1E_1}\{0;-1;0\}$.

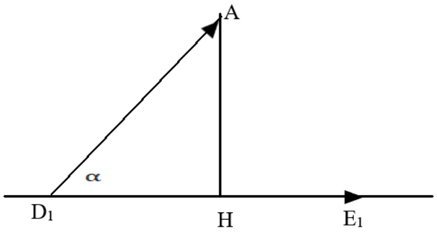

Рисунок 2.2.2.7

3) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3+1+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

4) Зная косинус cosα, найдем синус sinα :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5-1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

5) Теперь можем найти длину АН.

$AH = \left|\overrightarrow{D_1A}\right| \cdot \sin\alpha$

$AH = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2$

Ответ: 2

Задания для домашней работы:

Задача №1 Основанием правильной параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб ABCD. Сторона которого равна $4\sqrt{3},$ а угол BAD равен $60°$. Найдите расстояние от точки А до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

Задача №2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP

Рефлексия: на доске таблица 2.2.1 со знаками

Таблица 2.2.2.1

Цели урока	+ (все понятно)	– (ничего не понял)	? (интересно, хочу узнать подробнее)

В таблице цели урока можно записать самому учителю (для учащихся младших классов). Со старшими можно ставить цели совместно. В конце урока учащиеся плюсуют напротив каждой цели и в той графе, которую они считают более приемлемой.

2.2.3 Урок 3.Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Цели урока:

- отработать применение теоретических знаний, связанных с нахождением расстояния между скрещивающимися прямыми,
- формировать умения анализировать, выдвигать гипотезы и предположения, строить доказательства, переносить знания в новые ситуации при решении исследовательских задач и задач опережающего обучения;
- тренировать пространственное воображение;
- создать условия для развития уверенности в себе, самостоятельности мышления.

Структура урока:

1) Организационный момент (2–3 мин)
2) Актуализация знаний (10–12 мин)
3) Введение нового материала (15–18 мин)

4) Первичное закрепление нового материала (15–20 мин)

5) Подведение итогов, постановка домашнего задания (2–3 мин)

Ход урока

I. Организационный момент: Проверка готовности к уроку.

II. Мотивация к учебной деятельности: Создание проблемной ситуации.

III. Изучение нового материала

Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другу прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.

На примере задач из ЕГЭ разберем способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми с помощью метода координат.

Для нахождения расстояний между скрещивающимися прямыми необходимо:

1) Провести через одну прямую плоскость, которая будет параллельно другой.

2) Опустить перпендикуляр из любой точки второй прямой на полученную плоскость рисунок 2.2.3.1

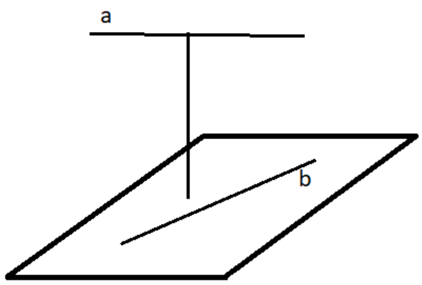

Рисунок 2.2.3.1

Разберем на примере решений задач из Егэ по математике.

Задача №1

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1 (рисунок 2.2.3.2).

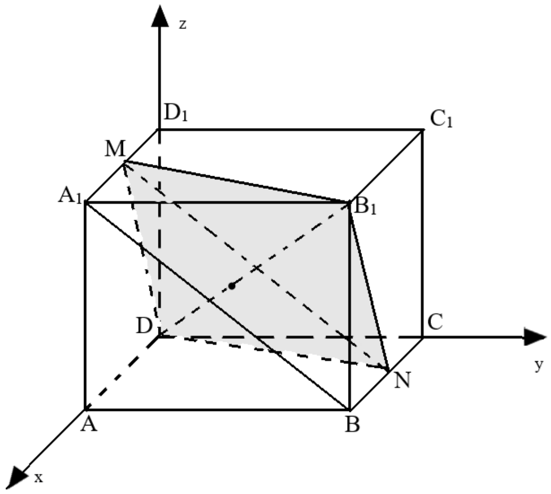

Рисунок 2.2.3.2

1) Через середину диагонали куба DB_1 (точку О) проведем прямую параллельную прямой BA_1.

Точки пересечения прямой с ребрами BC и D_1A_1 обозначим соответственно N и M .

2) Прямая MN принадлежит плоскости MNB_1. $MN \parallel A_1B$, A_1B не принадлежит плоскости MNB_1. Ищем теперь расстояние от какой–нибудь точки прямой A_1B до плоскости MNB_1. Это расстояние по определению будет является искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми.

3) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой D. Стороны основания DC и DA принадлежат соответственно осям Oy и Ox. Тогда точки имеют следующие координаты $B_1(1;1;1)$, $N(\frac{1}{2};1;0), B(1;1;0), M(\frac{1}{2};0;1)$

4) Если наша плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент d = 1, если же плоскость проходит через начало координат, то d = 0

5) Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0; \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + 0 = 0, \\ a + b + c = 0, ; \\ \frac{1}{2}a + c = 0. \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{1}{2}a, \\ c = -\frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Подставим в ax+by+cz+d=0 и получим ax$-\frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}az = 0$, поделим все на $\frac{a}{2}$

$2x - y - z = 0$

$\vec{n}\{2; -1; -1\}$

$\rho(\mathrm{BA_1}\ ;\ \mathrm{DB_1}) = \frac{|2-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Задача №2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все стороны которой равны 1. Найдите $\rho(BA\ ;\ CB_1\ )$ (рисунок 2.2.3.3)

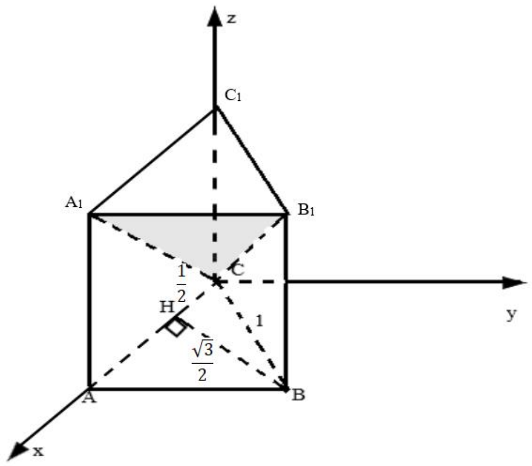

Рисунок 2.2.3.3

Решение:

1) Через прямую CB_1 проведем плоскость параллельную AB. Тогда $A_1B_1 \| AB$.

2) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало координат совпала с точкой D. Стороны основания DC и DA принадлежат соответственно осям Oy и Ox. Тогда точки имеют следующие координаты $A_1(1;0;1)$, $A(1;0;0), B_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), C(0;0;0)$

3) Если наша плоскость не проходит через начало координат, то коэффициент d = 1, если же плоскость проходит через начало координат, то d = 0

4) Подставим координаты этих точек в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0; \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \begin{cases} a + c = 0, \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + c = 0,; \end{cases} \begin{cases} a = -c, \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{3}c \end{cases}$$

$$-cx - \frac{\sqrt{3}}{3}cy + c = 0$$

$$-x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + z = 0 / \cdot (-3)$$

$$3x + \sqrt{3}y - 3z = 0$$

$$\rho(AB\,;\,CB_1) = \rho(A\,;(\,A_1CB_1))\frac{3}{\sqrt{9+3+9}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Задача №3

В единичном кубе нужно найти расстояние между прямыми AB_1 и BC.

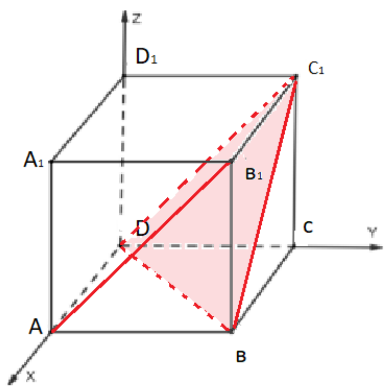

Рисунок 2.2.3.4

Способ 1:

Решение:

1) $C_1D \parallel AB_1$ значить $(BC_1D) \parallel AB_1$

2) Введем систему координат, таким образом чтобы ее начало совпадало с точкой D.

3) Находим уравнение плоскости BC_1D в данной системе координат

4) Полученные координаты D(0;0;0), B(1;1;0), A(1;0;0), C_1(0;1;1) подставляем в уравнение ax+by+cz+d=0, где d=0 так как плоскость проходит через систему координат. $\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$; $\begin{cases} a=-b \\ c=-b \end{cases}$

5) $-bx+by-bz=0\ /:(-b)$

$x-y+z=0$

$\vec{n}\{1;-1;1\}$

6) $\rho=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Способ 2:

Во втором способе рассматривается факультативный метод решения (рис. 2.2.3.5):

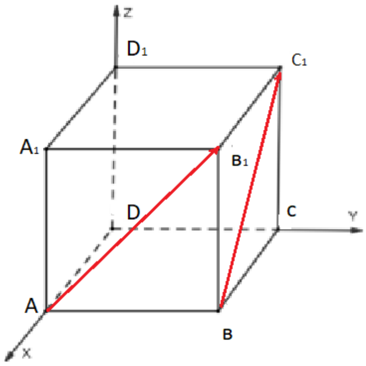

Рисунок 2.2.3.5

1) Ввести прямоугольную систему координат

2) Найдите координаты направляющего вектора $\{l_1;m_1;n_1\}$ прямой а, зафиксировать координаты начала вектора $A(x_1;y_1;z_1)$

3) Найдите координаты направляющего вектора $\{l_2;m_2;n_2\}$ прямой а, зафиксировать координаты начала вектора $B(x_2;y_2;z_2)$

4) Найдите расстояние между прямыми a и b по формуле: $\rho(a,b)=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$

Решение:

1) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало совпадало с точкой D.

2) Найдем координаты направляющего вектора $\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$ $\overrightarrow{BC_1}\{-1;0;1\}, \overrightarrow{AB}\{0;1;0\}$

3) Подставим в формулу расстояния $\rho(AB_1, BC_1) =$

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \frac{|0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 0 - 0 - 0 - 0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

В правильной шестиугольной призме ребра равны 1, Найдите расстояние между BA_1 и CB_1 (Рисунок 2.2.3.6)

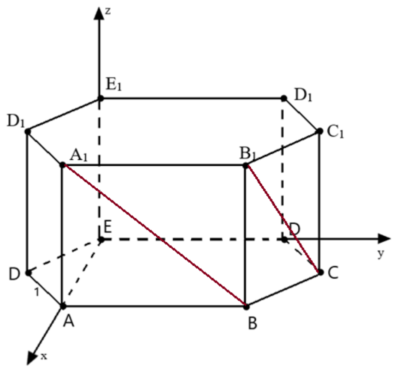

Рисунок 2.2.3.6

Решение:

1) Введем систему координат, таким образом, чтобы ее начало совпадало с точкой E. $A_1(\sqrt{3};0;1), B(\sqrt{3};1;0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right), B_1(\sqrt{3};1;1)$

2) Найдем координаты направляющего вектора $\overrightarrow{CB_1}\{\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\}$ $\overrightarrow{BA_1}\{0;-1;1\}, \overrightarrow{BC}\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\}$

3) Подставим в формулу расстояния $\rho(AB_1, BC_1) =$

$$\frac{\left|\begin{matrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix}\right|}{\sqrt{\left|\begin{matrix} 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{matrix}\right|^2}} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-1+\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{7}} == \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Задания для домашней работы:

Задание№1

Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. M — середина ребра BC, L — середина ребра AB.

а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой CL и содержащая прямую DM, делит ребро AB в отношении 3 : 1, считая от вершины A.

б) Найдите угол между прямыми DM и CL

Задание№2

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AB_1 и параллельная прямой CA_1 проходит через середину ребра BC.

б) Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1.

Задание №3

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AC_1 и параллельная прямой CB_1 проходит через середину ребра A_1B_1.

б) Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1

Рефлексия:

Детям предлагается **облако «тегов»,** которые необходимо дополнить. Например, на интерактивной доске можно вывести слайд, где указаны варианты:

- сегодня я узнал...
- было трудно…
- я понял, что…
- я научился…
- я смог…
- было интересно узнать, что…
- меня удивило…
- мне захотелось… и т.д.

Каждый ученик выбирает по 1–2 предложения и заканчивает их. Проводить такую рефлексию можно устно, а можно и письменно (на листочках или прямо в тетради).

2.2.4 Урок 4.Угол между прямой и плоскостью

Тип урока: урок применения и закрепления знаний.

Цели урока:

- повторить понятия перпендикуляр, наклонная и ее проекция, и основные теоремы курса планиметрии, отражающие соотношения в прямоугольном треугольнике;
- продолжить формирование умений находить угол между прямой и плоскостью;
- продолжить формирование умений обосновывать или опровергать выдвигаемые предположения;
- развивать пространственное мышление, самостоятельность и умение преодолевать трудности в учении;
- воспитывать интерес к предмету.

Оборудование: ПК, проектор, презентации к уроку, учебники геометрии, таблица значений тригонометрических функций некоторых углов, чертежные инструменты.

Углом между прямой и плоскостью называют угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Чтобы построить проекцию прямой на плоскость, достаточно опустить из любых двух ее точек перпендикуляры на плоскость (спроектировать эти точки), после чего провести через них прямую – это и будет проекция (рис. 2.2.4.1)

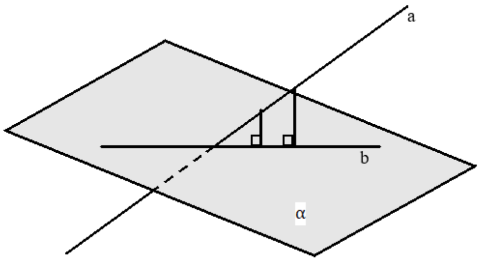

Рисунок 2.2.4.1

Так, проекции всех точек данной прямой будут лежать на одной прямой. Обратите внимание на частую ошибку, которую допускают учащиеся. Углом между прямой и плоскостью называется угол именно между прямой и ее проекцией, а не между прямой и любой прямой в плоскости. Потому как такие углы могут быть разными. Вспомним, что два луча в пространстве, не лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей ОО1. Если стороны двух углов соответственно сонаправленны, то такие углы равны.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ – и нормальный вектор плоскости , $\vec{n}$ перпендикулярный плоскости α (рис 2.2.4.2).

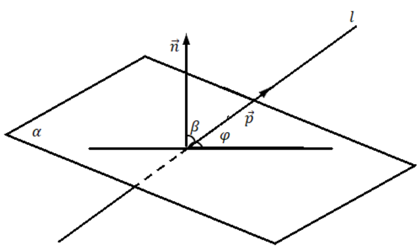

Рисунок 2.2.4.2

$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$

Угол между прямой l и плоскостью $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ можно найти используя угол между направляющим вектором прямой l и вектором нормали плоскости.

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \cos(90 - \alpha) = sin\alpha$$

$$sin\alpha = \sin(\widehat{l;\alpha})$$

Разберем на примере решений задач из ЕГЭ по математике.

Задача №1.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.2.4.3).

а) Докажите, что все грани тетраэдра ACB_1D_1 — равные треугольники.

б) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

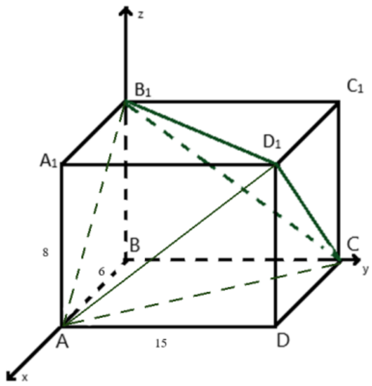

Рисунок 2.2.4.3

1) Введем систему координат, таким образом чтобы ее начало совпадало с точкой B. Тогда точки имеют следующие координаты $A_1(6;0;8)$, $B(0;0;0)$, $C(0;15;0)$.

2) плоскость α: $ax + by + cz + d = 0$ проходит через начало координат, то d = 0

3) $\begin{cases} 6a + 8 = 0, \\ 15b = 0. \end{cases}$; $\begin{cases} a = -\frac{4}{3}, \\ b = 0. \end{cases}$

$-\frac{4}{3}cx + cz = 0 \ / \cdot (-3)$

$4cx - cz = 0 \ / : c$

$4x - 3z = 0$

4) $\vec{n}\{4; 0; -3\}$

5) Точки имеют следующие координаты $\mathrm{B}(0; 0; 0)$ и $\mathrm{C}_1(0; 15; 8)$, тогда $\overrightarrow{\mathrm{BC_1}}\{0;15;8\}$

6) $\sin((A_1BC); \overrightarrow{\mathrm{BC_1}}) = \frac{|-24|}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{225+64}} = \frac{24}{5\cdot 17} = \frac{24}{85}$

$\left(\widehat{(A_1BC)}; \overrightarrow{\mathrm{BC_1}}\right) = arsin\frac{24}{85}$

Ответ: $arsin\frac{24}{85}$

Задача №2.

В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB = 4 и BC = 3. Длины боковых рёбер пирамиды SA= $\sqrt{11}$,SB=$3\sqrt{3}$,SD=2 $\sqrt{5}$ (рис. 2.2.4.4).

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

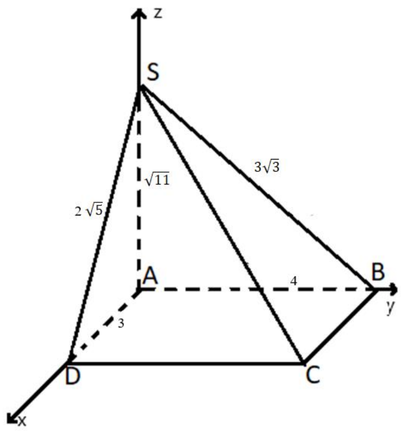

Рисунок 2.2.4.4

а)

1) Рассмотрим треугольник SAB по обратной теореме Пифагора : $SB^2 = AB^2 + SA^2$

27=11+16

27=27 из этого следует, что треугольник SAB – прямоугольный и SA перпендикулярен AB.

2) Рассмотрим треугольник SAD по обратной теореме Пифагора : $SD^2 = AD^2 + SA^2$

20=9+11

20=20 из этого следует, что треугольник SAD – прямоугольный и SA перпендикулярен AD. AD пересекается с AB в точке A, значит SA перпендикулярен (ABCD). $S\text{A} - \text{высота}$

b)

1) Введем систему координат, таким образом чтобы ее начало совпадало с точкой A. Тогда точки имеют следующие координаты A(0;0;0), S(0;0;$\sqrt{11}$), C(3;4;0). Тогда $\overrightarrow{SC}\{3;4;-\sqrt{11}\}$, $\overrightarrow{AD}$ перпендикулярен (ASB) и $\overrightarrow{AD}\{3;0;0\}$

2) $\sin(\widehat{SC;ASB}) = \frac{9}{\sqrt{9+16+11}\cdot 3} = \frac{9}{\sqrt{36}\cdot 3} = \frac{9}{6\cdot 3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

$(\widehat{SC;ASB}) = 30°$

Ответ : $30°$

Задача № 3

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра B_1C_1 (рисунок 2.2.4.5). Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1

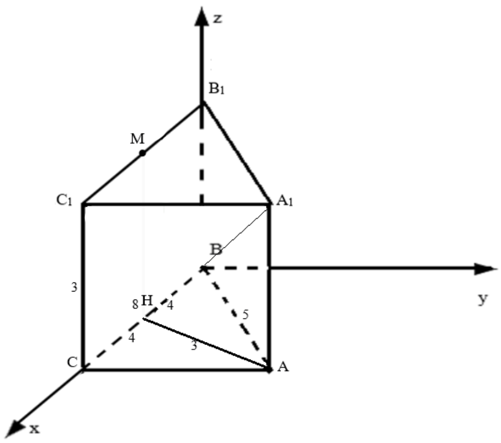

Рисунок 2.2.4.5

1) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC , MH перпендикулярен CB, так как M середина ребра B_1C_1, то и H середина ребра

CB. AM является медианой и высотой, тогда треугольник ABH прямоугольный, найдем AH по теореме Пифагора AH=$\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

2) Введем систему координат, таким образом чтобы ее начало совпадало с точкой A. Тогда точки имеют следующие координаты A(4;3;0), H(4;0;0), B(0;0;0), A_1(4;3;3). Тогда $\overrightarrow{HA}\{0;3;0\}$, $\overrightarrow{HA}$ перпендикулярен (BCC_1) и $\overrightarrow{BA_1}\{4;3;3\}$

3) $\sin(\widehat{\overrightarrow{HA};\ \overrightarrow{BA_1}})=\frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{16+9+9}}=\frac{9}{3\cdot\sqrt{34}}=\frac{3}{\sqrt{34}}$

Ответ: arcsin$\frac{3}{\sqrt{34}}$

Домашнее задание:

- Знать формулу нахождения угла между прямой и плоскостью;
- знать и понимать алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью; решить задачи:

Задача №1.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны AB = 2, AD = AA_1 = 1.

а) Пусть B_1E — высота треугольника BB_1C_1. Докажите, что AE — проекция AB_1 на плоскость ABC_1.

б) Найдите угол между прямой AB1 и плоскостью ABC_1.

Задача №2.

В правильном тетраэдре *ABCD M* — середина ребра *AD*.

а) Докажите, что проекция точки *M* на плоскость *BCD* делит высоту *DN* треугольника *BCD* в отношении 1 : 2, считая от вершины *D*.

б) Найдите угол между медианой *BM* грани *ABD* и плоскостью *BCD*.

Итог урока:

- Сегодня на уроке я повторил……
- Сегодня на уроке я научился……
- Сегодня мне необходимо ещё поработать над…

2.2.5 Урок 5. Контрольная работа

Вариант1.

1) В правильном тетраэдре ABCD точка K — центр грани ABD, точка M — центр грани ACD.

а) Докажите, что прямые BC и KM параллельны.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABD.

2) Точка M середина ребра AB правильного тетраэдра DABC.

а) Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD.

б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD.

Вариант2.

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что KM = KB.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если AB = 8, AC = 6 и $AA_1 = 3$.

2) В основании пирамиды SABCD лежит ромб ABCD, сторона которого равна 8, а угол при вершине A равен 60°. Известно, что SA = 15, $SC=\sqrt{33}$ и, кроме того, SB = SD.

а) Докажите, что SC — высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью ASC и ребром SB.

2.3 Рекомендуемая литература

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 10–11 классов – Москва: Просвящение, 1999

2. Атанасян Л.С. и др. Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. – Москва: Просвящение, 2010

3. Ершова А.П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы. Геометрия 10–11. –Москва: Илекса, 2010.

4. Литвиненко В.Н. Многогранники. Задачи и решения. – Москва: Вита – Пресс, 1995.

5. Понтрягин Л.С. Метод координат. – Москва: Наука, 1987

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Придавая геометрическим исследованиям алгебраический характер, метод координат переносит в геометрию наиболее важную особенность алгебры — единообразие способов решения задач. Если в элементарной геометрии приходится, как правило, искать для каждой задачи особый путь решения, то в алгебре и аналитической геометрии решения проводятся по общему для всех задач плану, легко приспособляемому к любой задаче. Можно сказать, что аналитическая геометрия занимает такое же положение по отношению к элементарной геометрии, какое алгебра занимает относительно арифметики. Перенесение в геометрию свойственных алгебре и поэтому обладающих большой общностью способов решения задач составляет главную ценность метода координат.

Другое достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций.

Метод координат важен также и тем, что он позволяет решение геометрических задач, исследование геометрических объектов и соотношений реализовать с помощью современных компьютерных технологий.

Цель данной работы была направлена на изучение методики обучения решению геометрических задач координатным методом в старших классах средней школы и разработку факультативного курса по применению «Метода координат к решению стереометрических задач в условиях ЕГЭ» рассчитанный на выпускников, которые желают углубить свои знания, качественно подготовиться к сдаче ЕГЭ. Подводя итоги данной выпускной работы, можно сказать, что при подготовке к экзаменам факультативные занятия занимают важное место в обучении.

Они решают две главные задачи:

во–первых, развитие интересна, углубление знаний, совершенствование знаний и умений по математике;

во–вторых, организация свободного времени с целью их общего развития.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Автономова, Т. В. Основные понятия и методы школьного курса геометрии: книга для учителя / Т.В. Автономова, Б. И. Аргунов. – Москва: Просвещение, 1988. – 127 с.

2) Атанасян Л.С. Геометрия: Учеб.для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б Кадомцев и др.– М.:Просвещение, 2015. –384 с.

3) Атанасян, Л.С. О конкретном учебнике геометрии для 7–9 кл. / Л.С. Атанасян // Математика в школе. – 1989. – № 1.

4) Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. Геометрия. 9 класс : поурочные планы по учебнику Л.С. Атанасяна [и др.] / авт.–сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина – Волгоград : Учитель, 2013. – 167 с.

5) Бощенко, О. В. Итоги работы в 7 кл. по учебнику Шарыгина И. Ф. 7–9 / О.В. Бощенко // Математика в школе. – 2002. – № 5.

6) Бутузов В. Ф. Геометрия. Поурочные разработки. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В.В.Прасолов. — 2–е изд. — М. : Просвещение, 2017.—160 с.

7) Бутузов В.Ф. Геометрия 9 класс: Учеб.для общеобразоват. учреждений. / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов – М.: Просвещение, 2012. – 143 с.

8) Буцко Е.В., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.. Геометрия : 9 класс : методическое пособие — М. : Вентана–Граф, 2018. — 176 с.

9) Виленкин, Н. Я. Математика: учебник для 5 классов среднейшколы / Н.Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И Шварцбурд. – Москва :Просвещение, 1989. – 304 с.

10) Гельфанд, И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд. – Москва: Наука, 1973. – 7 с.

11) Геометрия для 7-9 классов средней школы / В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. – Москва : Просвещение, 1992. –335 с.

12) Дорофеев, Г. В. Математика: учебник для 5 классовобщеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова. – Москва: Просвещение, 2000. – 368 с.

13) Дорофеев, Г. В. Математика: учебник для 6 кл. общеобразоват. учеб. заведений / Г.В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова. –Москва : Дрофа, 1998. – 416 с.

14) К началу обучения геометрии 1–7 кл. // Математика в школе. – 1983. – № 6.

15) Лудина, Г. Б. К изучению перемещений на координатной плоскости / Г.Б. Лудина // Математика в школе. – 1983. – № 2.

16) Лускина М. Г. Факультативные занятия по математике в школе: Методические рекомендации / М. Г. Лускина, В. И. Зубарева. –Киров ВГПУ, 1995.

17) Лященко, Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физико – математической специальности педагогических институтов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко. – Москва. :Просвещение, 1988. – 233 с.

18) Математика : учебник для 6 кл. общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И Шварцбурд. –Москва : Мнемозина, 2001. – 304 с.

19) Мерзляк А.Г. Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир.– М.: ВентанаГраф, 2014. – 240 с.]

20) Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учебное пособие для студентов педогогических институтов по физико – математической специальности / В. И. Мишин, А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев. – Москва , 1987. – 416 с.

21) Мищенко, Т. М. Индивидуальные карточки по геометрии для 7–9 кл. / Т. М. Мищенко // Математика в школе. – 2001. – № 8.

22) Никольская, И. Л. Факультативный курс по математике: учебное пособие для 7-9 классов средняя школа / И. Л. Никольская. –Москва : Просвещение, 1991. – 383 с.

23) Новые компьютерные технологии. Координатная плоскость // Математика – Приложение к газ. «Первое сентября». – 2004. – № 29.

24) Нужна ли школе XXI века геометрия /И. Шарыгин // Математика – Приложение к газ. «1 сентября». – 2004. – № 12.

25) Петерсон, Л. Г. Изучение координат в III – IV кл. / Л. Г. Петерсон // Математика в школе. – 1983. – № 4.

26) Погорелов, А. В. Геометрия для 7–11 классов средней школы/ А. В. Погорелов. – Москва: Просвещение. – 1990. – 384 с.

27) Понтрягин, Л. С. Знакомство с высшей математикой. Метод координат / Л. С. Понтягин. – Москва. Наука. – 1987. – 128 с.

28) Программа по математике для средней школы – Москва: Просвещение. – 1998. – 205 с.

29) Савин, А. П. Метод координат / А. П. Савин // Квант. – 1977. –№ 9.

30) Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранце. – Москва: Просвещение. – 1995. – 240 с.

31) Сикорский, К. П. Дополнительные главы по курсу математики. учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7–8 классов / К. П. Сикорский. – Москва: Просвещение. –1974. – 315 с.

32) Упражнения по теме «Координатная плоскость» / О.А. Леонова// Математика в школе. – 2001. – № 10.

33) Феоктистов, И. Е. Обсуждение одного учебника / И. Е Феоктистов // Математика в школе. – 2001. – № 5.

34) Шарыгин, И. Ф. Геометрия 7–9 кл.: учебник для общеоразовательных учебных заведений / И.Ф. Шарыгин. – Москва. Дрофа. – 2000. – 368 с.