МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению задач с параметрами на этапе обобщающего повторения в основной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата «Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
90 % авторского текста

Работа к защите
рекомендована/не рекомендована
«25» мая 2020 г.
и.о.зав. кафедрой математики и методики обучения математике
______________ Шумакова Е.О.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Радионова Ольга Андреевна

Научный руководитель:
канд.пед. наук, доцент
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

Требования настоящего ФГОС к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования по математике, среди всего прочего, включают в себя не только освоение учащимися определенной базы математических знаний, но и формирование научно-исследовательского типа мышления посредством развития у них навыка самостоятельно добывать, преобразовывать и применять новые знания. Именно этим обусловлена необходимость включения в курс основной школы линии задач, содержащих параметр, так как они представляют собой один из главных инструментов организации не только творческой, но и исследовательской деятельности обучающихся, способствующей развитию их логического мышления и математической культуры.

В силу того, что единого алгоритма выполнения данных заданий не существует, то выбор конкретного шага и определенного метода в процессе решения, а также запись конечного ответа предполагают наличие достаточно высокого уровня развития навыка проводить анализ, сравнение и обобщение полученных результатов [27]. Очевидно поэтому данный тип задач принадлежит к числу наиболее сложных для овладения учащимися не только в техническом, но и логическом плане. Включение же заданий с параметрами в структуру выпускных экзаменов (ОГЭ и ЕГЭ), а также в содержание вступительных испытаний многих вузов порождает необходимость более тщательного и систематического изучения данной темы.

В свою очередь, анализ сдачи ОГЭ позволяет заключить следующее:

- многие учащиеся не приступают к решению задач с параметром, представленной во второй части ОГЭ;

- учащиеся, приступившие к решению данного задания, неспособны математически грамотно записать решение, ответ и обоснование задач;
- в целом, учащиеся с трудом справляются с заданиями, в которых требуется применить знакомый для них алгоритм в чуть изменившейся ситуации.

Приведенные факты свидетельствуют о том, что данная тема требует более детального исследования и дальнейшей разработки, что обуславливает актуальность выбранной проблемы. Кроме того, важность изучения и комплексного обобщения задач с параметрами на этапе повторения всего курса основной школы определяется так же тем фактом, что весь последующий материал по решению задач данного блока будет базироваться именно на знаниях учащихся, полученных в средней школе.

Объектом исследования является процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения решению задач с параметрами на этапе обобщающего повторения в основной школе.

Гипотеза: построение логичной и методически верной линии задач с параметрами способствует формированию прочных навыков работы учащихся с данными заданиями и в целом повышает уровень сдачи ОГЭ.

Цель исследования: разработать факультативный курс и методические рекомендации по обучению учащихся основной школы решению задач, содержащих параметр, на этапе обобщения, в частности при подготовке к ОГЭ.

В соответствии с целью, объектом, предметом и гипотезой исследования были определены **следующие задачи:**

1. Провести анализ научно-методической, математической и психолого-педагогической литературы по теме исследования.
2. Раскрыть основные понятия и определения данной темы.

3. Рассмотреть основные задачи с параметром, представленные в открытом банке заданий ОГЭ по математике.

4. Разработать обобщающий факультативный курс по алгебре «Решение задач с параметрами в основной школе».

5. Апробировать разработанный факультатив с учащимися 9 класса.

6. Провести анализ эффективности применения предлагаемого факультатива.

Методы исследования:

- теоретические: анализ научно-методической, психолого-педагогической литературы;
- эмпирические: изучение педагогического опыта, наблюдение, сравнение, обобщение.

База исследования: исследование проводилось на базе МАОУ "СОШ №153 г. Челябинска". В исследовании приняли участие ученики 9 «А» класса.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанный факультатив и предлагаемые методические рекомендации могут быть активно использованы в школьном преподавании математики как в процессе всего обучения в 7-9 классах, так и на этапе обобщающего повторения материала основной школы при непосредственной подготовке к ОГЭ.

Структура исследования: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1. Понятие параметра и методы решения задач, содержащих параметр

Что же такое параметр? Современный толковый словарь определяет данное понятие следующим образом: «Параметр – (от греч. *parametron* – «отмеривающий») в математике, величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент из множества элементов того же рода» [30].

Однако такое понятие является достаточно сложным для восприятия. Поэтому воспользуемся следующим, более простым определением данного понятия: **Параметр** – это переменная величина, которую в процессе решения уравнения (или задачи) считают фиксированной и относительно которой проводится анализ полученного решения [33].

То есть, если уравнение наряду с неизвестной величиной содержит неизвестное, но фиксированное число, обозначенное буквой, то оно называется **параметром**, а уравнение – **параметрическим**.

Решить уравнение с параметром – это значит, для каждого значения параметра найти значение неизвестной переменной, удовлетворяющее данному уравнению [2].

Если параметру, содержащемуся в уравнении, придать некоторое значение, то возможен один из двух следующих случаев:

1. Получится уравнение, содержащее лишь данные числа и неизвестные и не содержащее параметров.
2. Получится условие, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называется *допустимым*, во втором – *недопустимым*.

По своему существу, все задачи с параметром можно условно разделить на две группы (на два вида):

1. Требуется решить данное уравнение, то есть для всех допустимых значений параметра найти соответствующие им решения. Причем если хотя бы один случай остался неисследованным, признать такое решение удовлетворительным нельзя.
2. Требуется указать возможные значения параметра, при которых уравнение обладает определенными свойствами. Например, имеет одно решение, не имеет решений, имеет решения, принадлежащие промежутку и т. д. В таких заданиях необходимо четко указать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется.

Приведем примеры уравнений, содержащих параметры:

а) $ax = 4$;

б) $3x - 6p = 8$;

в) $zx^2 = z - 4$,

где x – неизвестное; a, p, z – параметры.

Существуют разнообразные методы решения задач с параметрами, но среди основных выделяют следующие.

Аналитический метод. Это метод, так называемого, прямого решения, при котором повторяются стандартные процедуры, применяемые для нахождения ответа в задачах без параметра. Основной частью данного метода решения является метод равносильных преобразований, то есть, замена одного математического выражения другим, равносильным ему математическим выражением. Кроме того, в аналитическом методе решения задач чаще всего используется прием дробления – разделение условия задачи на совокупность более простых условий [8].

Аналитический метод решения задач с параметром, по мнениям некоторых авторов, есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

В основу **графического метода** решения задач с параметром положена идея замены декартовой прямоугольной системы координат Oxy на Oxa, где Oa и Ox – это параметрическая и координатная оси соответственно. В этом случае решение задачи рассматривается как значение координаты, соответствующей искомой переменной, принадлежащей линии или области, задаваемой условием [8].

Чаще всего учеников основной школы знакомят именно с этими двумя методами решения задач с параметром. Между тем, особенная наглядность и красота графического способа иногда чрезмерно увлекает обучающихся, и они начинают игнорировать другие возможные способы решения задач. Однако не стоит забывать о том, что иногда авторы и составители задач могут сформулировать такое задание, которое может блестяще решаться одним способом и вызывать колоссальные трудности при применении к нему остальных способов. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать лишь с графических приемов решения задач с параметром. Но их рассмотрение, так или иначе, необходимо включать в программу хотя бы в ознакомительных целях.

1.2. Анализ школьных учебников 7-9 класса в контексте содержательно-методической линии «Задачи с параметрами»

В школьном курсе математики выделяют различные содержательно-методические линии, то есть системы примеров, задач, опирающиеся на соответствующие им понятия и методы решения. Проанализируем действующие учебники курса алгебры за 7-9 класс, чтобы выяснить, насколько в них представлены задания (и способы их решения), относящиеся к линии задач с параметрами.

1.2.1. Макарычев Ю.Н. и др. «Алгебра 7 класс»

Учебник Макарычева Ю. Н. содержит в себе 1231 задачу, из которых около 32 – с параметром. То есть, в 7 классе задачи с параметрами составляют примерно 2,6% от общего количества упражнений по алгебре.

Впервые задания с параметром в данном учебнике встречаются в **I** главе в теме «Уравнения с одной переменной» в разделе дополнительных задач (№№238-239, 245) и отнесены они к заданиям повышенной сложности. При этом понятие как такового «параметра» при рассмотрении линейного уравнения вида $ax = b$ не вводится, а используется термин «коэффициент». Перечисленные задания содержат простейшие линейные уравнения, при которых коэффициент при x является параметром. Поэтому перед учащимися ставится цель – исследовать данное уравнение на количество корней (решений) или принадлежность его корня к целым числам.

№238. При каких значениях коэффициента m уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение m, при котором это уравнение не имеет корней? Имеет бесконечно много корней?

№245. Найдите все целые значения a, при которых корень уравнения $ax = 6$ является целым числом.

Затем в главе **II** в теме «Линейная функция» рассматривается прямая пропорциональность, где также, не вводя понятия параметра, его активно используют. Учащиеся знакомятся с формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число, и выясняют расположение графика функции в зависимости от коэффициента, который по своему существу и является параметром. Аналогично учащиеся знакомятся с уравнением прямой вида $y = kx + b$, после которого им предлагается выполнить №320, представляющее собой задание-исследование: необходимо изучить поведение функции $y = kx + 4$ в зависимости от параметра k . Похожие задания (№№368, 369) на выяснение расположения графиков линейных функций в зависимости от коэффициентов предложено в разделе дополнительных задач повышенной сложности.

В главе **III** «Степень с натуральным показателем» в разделе повторения встречаются лишь три задания с параметрами (№№453, 482, 492). В главах **IV** «Многочлены» и **V** «Формулы сокращенного умножения» задания с параметрами находятся в разделе дополнительных задач: №796, №1005, №1006 и имеют повышенную сложность.

№ 453. Известно, что график функции $y = kx + 5{,}4$ проходит через точку $A\ (3{,}7; -2)$. Найдите значение коэффициента k.

№ 796. При каком значении a произведение $(x^3 + 4x^2 - 17x + 41)(x + a)$ тождественно равно многочлену, не содержащему x^3?

№1005. При каком значении a многочлен стандартного вида, тождественно равный произведению $(x^2 + x - 1)(x - a)$, не содержит:

а) x^2; б) x?

Следующая наиболее обширная совокупность заданий (№№1035, 1136, 1139, 1140, 1159-1161, 1165-1167) с параметрами предлагается в дополнительных заданиях к главе **VI** «Системы линейных уравнений». Задания также имеют повышенный уровень сложности и требуют либо исследовать уравнения в зависимости от параметра, либо найти параметры при неких заданных условиях, либо найти значение параметра, при котором система имеет ровно одно, бесконечно много или не имеет решений.

№1139. Докажите, что если в уравнении $ax + by = 81$ коэффициенты a и b – целые числа, то пара чисел $(15; 40)$ не может быть решением этого уравнения.

№1140. Известно, что:

а) пара значений переменных $x = 5$, $y = 7$ является решением уравнения $ax - 2y = 1$. Найдите коэффициент a.

№1165. Укажите какое-либо значение k , при котором система $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Лишь две задачи (№№1152-1153) с параметрами связаны с построением графиков функций, однако они не иллюстрируют графический метод решения уравнений с параметрами.

№1152. В линейном уравнении $ax - y = 4$ подберите коэффициент a так, чтобы график этого уравнения проходил через точку $M(3; 5)$. Постройте график этого уравнения.

Так же в конце учебника задачи повышенной трудности возглавляет следующая задача с параметром:

№1184. Найдите все натуральные значения a, при которых корень уравнения $(a - 1)x = 12$ является натуральным числом.

Таким образом, в представленном учебнике Ю.Н. Макарычева содержится незначительное число задач, содержащих параметры, которые в большей мере расположены в разделе дополнительных задач повышенной сложности. Пропедевтических задач на выражение одной переменной через другие представлено также крайне мало (№№196-198, 205, 1031-1033). Понятие, смысл параметра и графический метод решения уравнений с параметрами в данном учебнике не отражены.

1.2.2. Макарычев Ю.Н. и др. «Алгебра 8 класс»

Данный учебник включает в себя 1153 задачи, из которых около 87 содержат параметр, что составляет 7,5% от всего количества упражнений.

Уже в первой главе «Рациональные дроби» в блоке повторения учащимся предлагаются задания (№№147, 176) на исследование расположения графиков функции в зависимости от знака коэффициентов.

№147. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если $k > 0$? если $k < 0$?

Далее в теме «Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график» рассматривается обратная пропорциональность. Учащиеся знакомятся с формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число, и выясняют расположение графика функции в зависимости от коэффициента, который по своему существу опять-таки является параметром (№№188, 192). Однако понятие параметра авторами по-прежнему не вводится, а предлагаемые задания на закрепление имеют повышенный уровень сложности.

№188. Используя графические представления, выясните, сколько решений имеет уравнение:

а) $\frac{k}{x} = x^2$, где $k > 0$;

б) $\frac{k}{x} = x^2$, где $k < 0$;

в) $\frac{k}{x} = x^3$, где $k > 0$;

г) $\frac{k}{x} = x^3$, где $k < 0$.

Задания из раздела «Для тех, кто хочет знать больше» возглавляет задача №197 повышенной трудности на нахождение значений параметров, при которых выполнялось бы заданное тождество. Аналогичные задания включены в блок дополнительных задач к главе **I** (№№195, 235, 238).

№197. При каких значениях a и b равенство $\frac{6x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ является тождеством?

Так же среди дополнительных задач представлены следующие виды более сложных упражнений на исследование расположения графиков функций в зависимости от параметров (№№260-262):

№260. При каких значениях k и b гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = kx + b$ проходят через точку:

а) $P(2; 1)$; б) $Q(-2; 3)$; в) $R(-1; 1)$?

№261. Могут ли графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = ax + b$ пересекаться:

а) только в одной точке;

б) только в двух точках;

в) в трех точках?

Глава **II** «Квадратные корни» содержит в себе задания (аналогичные №260) на повторение, в которых учащимся предлагается найти параметры при определенных условиях (№№296, 297). Далее при изучении темы «Уравнение $x^2 = a$ » обучающиеся рассматривают количество решений данного уравнения в зависимости от знака параметра $a.$ Однако основное задание с параметром в обобщенном виде учащимся предлагается лишь в разделе дополнительных задач (№468).

В главе **III** «Квадратные уравнения» учащиеся знакомятся с общим видом квадратного уравнения $y = ax^2 + bx + c$, где $x -$ переменная, $a, b, c -$ некоторые числа, причем $a \neq 0$. Понятие параметра так же не вводится, как и прежде используется понятие «коэффициент».

После изучения неполных квадратных уравнений учащимся предложено выполнить следующее тестовое задание с параметром.

№520. При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2 + 15x + a^2 - 4 = 0$ является неполным квадратным уравнением? Выберите верный ответ.

1) $a = -1$;
3) $a = -2$;
2) $a = 1$;
4) $a = 2$.

Далее, как только учащиеся отработали навыки нахождения корней квадратного уравнения (с помощью дискриминанта и теоремы Виета), им предлагается небольшой блок задач с параметрами (№№555, 585-592, 595, 638), часть из которых также обладает повышенной сложностью.

№555. Существует ли такое значение a, при котором уравнение $x^2 - ax + a - 4 = 0$:

а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет два корня?

№585. В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

№589. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ равна 2. Найдите q.

Явным преимуществом данного учебника является наличие отдельно выделенной темы «Уравнения с параметром» (хоть и в разделе «Для тех, кто хочет знать больше»), в которой учащиеся впервые сталкиваются с понятиями «параметр» и «уравнение с параметром», выясняют, что значит «решить уравнение с параметром». Так, в учебнике приведена следующая формулировка: «Вообще решить уравнение с параметром – это значит показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет» [17].

Далее автор подробно рассматривает несколько примеров решения линейных и квадратных уравнений, содержащих параметр, и предлагает блок задач на закрепление (№№640-649), в котором все задания (за исключением №641) относятся к задачам повышенной сложности.

№641. Решите относительно y уравнение:

а) $py - p - 1 = 0$;

б) $py - 3y - 4p + 12 = 0$.

№642. Решите уравнение с параметром a: $ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18$.

№645. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:

а) $3x^2 + tx + 3 = 0$;

б) $2x^2 - tx + 50 = 0$;

в) $tx^2 - 6x + 1 = 0$;

г) $tx^2 + x - 2 = 0$?

№646. Выясните, при каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 3 = 0$ принимает наименьшее значение, и найдите это значение.

Дополнительные упражнения к главе **III** также содержат достаточно обширный перечень разнообразных (на поиск неизвестного, на доказательство) задач с параметром (№№651, 659, 672-689), среди которых есть задачи, как среднего, так и повышенного уровня сложности.

№651. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 = a$;

б) $x^2 = a^2$;

в) $x^2 + 4b = 0$;

г) $x^2 + 9b^2 = 0$.

№659. При каком значении a один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1? Найдите, чему равен при этом значении a второй корень.

№678. Частное корней уравнения $4x^2 + bx - 23 = 0$ равно -3. Найдите b.

В главу **IV** «Неравенства» с целью повторения включено уже знакомое учащимся задание №798, а также №863-864 повышенной сложности. Кроме того, включены следующие задачи (№№896-897, 946-947, 960-961) нового типа.

№896. При каких значениях a уравнения $x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ имеет два корня, принадлежащие промежутку $(-6; 6)$?

№946. Найдите, при каких значениях a уравнение имеет положительный корень:

а) $3x = 9a$;

б) $x + 2 = a$;

в) $x - 8 = 3a + 1$;

г) $2x - 3 = a + 4$.

В главе **V** «Степень с целым показателем. Элементы статистики» учащиеся снова встречают задачу повышенной сложности:

№1009. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $8x^2 - 6x + n = 0$ и $x_1^{-1} + x_2^{-1} = 6$. Найдите n. (Аналогичная ей задача №1092).

Остальные задания (№№1025, 1027, 1038) расположены в разделе повторения.

№1025. При каком значении m сумма корней уравнения $3x^2 - 18x + m = 0$ равна произведению этих корней?

№1027. Замените a каким-либо натуральным числом так, чтобы система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x > 40{,}8, \\ 5x - a < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 6x < 19, \\ 4x - a < 6 \end{cases}$

не имела решений.

Интересно отметить, что в разделе «Для тех, кто хочет знать больше» представлены задачи близкие (но более простые) по типу к №23 из ОГЭ. Автор учебника также относит их к наиболее сложным (№№1070-1071).

№1070. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-2}, \text{если } -2 \le x < -1, \\ x^{2}, \text{если } -1 \le x \le 1, \\ x^{-2}, \text{если } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Сколько общих точек имеет этот график с прямой $y = a$ в случае, когда:

а) $a = 2$;

б) $a = 1$;

в) $a = \frac{1}{2}$;

г) $a = 0$?

Среди задач повышенной трудности особое место отведено следующим заданиям с параметрами: №№1123-1124, 1126 и 1127, которые служат больше для повторения и закрепления полученных навыков исследования уравнений.

Таким образом, в учебнике Ю.Н. Макарычева за 8 класс задачи с параметром составляют уже больший процент от числа всех упражнений, но расположены они также в основном в разделе дополнительных задач и имеют высокий уровень сложности. Пропедевтические задачи (№№7, 131, 143, 146, 391, 406, 442, 903) составляют также незначительный процент от числа всех задач данной темы. Кроме того, автор в отдельной теме вводит понятие параметра (однако формулировка достаточно сложная для восприятия учащимися), но использует его только в рамках данного параграфа. Уже в 8 классе среди прочих задач по данной теме учащимся предлагается к рассмотрению упрощенный вариант задания №23 из ОГЭ. Так же в данном учебнике встречаются задачи (№№188, 475, 612, 1064) на применение графического метода решения задач с параметром.

1.2.3. Макарычев Ю.Н. и др. «Алгебра 9 класс»

В данном учебнике среди 1097 задач около 55 задач с параметрами, что составляет 5% от общего числа предлагаемых заданий. Несмотря на то, что в 8 классе было введено понятие «параметр», в формулировках заданий автор, однако, избегает использования данного термина.

В главе **I** «Квадратичная функция» при изучении темы «Свойства функции» учащиеся сталкиваются с заданием, в котором необходимо проследить взаимосвязь параметров с коэффициентами прямой и ее расположением:

№45. При каких значениях a функция $y = (a-2)x + 3$:

а) является возрастающей;

б) является убывающей;

в) не является ни возрастающей, ни убывающей?

Упражнения, предлагаемые далее, относятся к заданиям повышенной трудности (№№100, 115, 129, 130) и представляют собой более усложненный вариант уже знакомых для учащихся заданий. Формулировки некоторых из них встречаются в задачах №23 в ОГЭ.

№100. При каких значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку?

№129. Найдите значение b, при котором прямая $y = 6x + b$ касается параболы $y = x^2 + 8$.

Далее в разделе «Для тех, кто хочет знать больше» учащиеся знакомятся с дробно-линейной функцией $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (где $x-$ переменная, $a, b, c, d -$ произвольные числа, причем $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$) и ее графиком, а также в рамках изученного материала исследуют расположение графика в зависимости от знаков коэффициентов.

№183. Покажите схематически, как расположен график функции

$$y = \frac{k}{x-m} + n, \text{где } k < 0, \text{если:}$$

а) $m > 0, n < 0$; б) $m < 0, n > 0$.

Блок дополнительных задач включает в себя задания с параметром, большинство из которых имеют повышенную сложность (№№216, 218, 219, 225, 226, 229, 231, 238-242, 247).

№216. При каком значении p выражение $2px^2 - 2x - 2p - 3$ становится квадратным трехчленом, одним из корней которого является число нуль? Найдите другой корень.

№218. Найдите трехчлен вида $x^2 + px + q$, корнями которого являются не равные нулю числа p и q.

№225. Зная, что $m-$ целое число, найдите целые корни трехчлена $mx^2 + (m-3)x - 3$.

№238. При каких значениях c график функции $y = x^2 - 6x + c$ расположен выше прямой:

а) $y = 4$; б) $y = -1$?

Глава **II** «Уравнения и неравенства с одной переменной» содержит задания (№№310, 311, 345, 379-382), аналогичные изученным в 8 классе на выяснение количества корней квадратного уравнения, а так же следующее задание, предполагающее применение графического метода решения:

№357. С помощью графиков выясните, сколько решений может иметь уравнение $x^3 + ax + b = 0$ при различных значениях a и b.

В главе **III** «Уравнения и неравенства с двумя переменными» появляются новые, более сложные задания:

№408. При каких значениях m графиком уравнения $(x-4)^2 + (y+m)^2 = 15$ является окружность, центр которой расположен в четвертой координатной четверти?

№409. При каких значениях r окружность $(x-5)^2 + (y-7)^2 = r^2$:

а) касается оси x; б) касается оси y?

Помимо нового типа задач данная глава включает в себя упражнения (№№425, 426, 450, 451, 521, 525, 526) на повторение решения как систем уравнений, так и просто уравнений с параметрами, большинство из которых обладает высоким уровнем сложности.

№425. При каком значении b пара чисел $(18; 3)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 4b; \\ 2x + y = 39? \end{cases}$

№526. При каких значениях m система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ x - y = m, \end{cases}$ имеет: а) одно решение; б) два решения?

Раздел дополнительных заданий содержит две наиболее сложные для учащихся задачи (№№537, 558).

№537. Если умножить квадратный трехчлен $ax^2 - 2x + b$ на квадратный трехчлен $x^2 + ax - 1$, то получится многочлен четвертой степени, в котором коэффициенты при x^2 и x соответственно равны 8 и -2. Найдите a и b.

№558. Укажите какие-нибудь значения k и b, при которых система неравенств $\begin{cases} y \leq 2x + 3; \\ y > kx + b \end{cases}$ задает на координатной плоскости: а) полосу; б) угол.

Упражнения для повторения всего курса 7-9 классов включают в себя задания на исследование числа корней квадратных уравнений в зависимости от параметра (№№933, 934), на нахождение решения систем уравнений с параметрами в зависимости от заданных условий (№959, 964, 965), а также на исследование случаев, когда система имеет одно, бесконечно много или не имеет решений (№№961, 976, 978). Кроме того, есть задание на выяснение расположения графика в зависимости от параметров (№1031). В конце учебника в формулировках задач повышенной трудности (№№1039, 1045, 1047, 1048, 1049, 1050, 1061) автор предлагает найти значение параметра при определенных ограничениях на корни («При каком a корни (сумма /разность корней) ….»). Так же в данном блоке встречается задача на доказательство (№1040) и на отработку упражнений-аналогов из ОГЭ (№1043).

№1039. При каком значении a сумма квадратов корней квадратного трехчлена $x^2 - (a-2)x - a - 1$ принимает наименьшее значение?

№1040. Докажите, что при любых значениях a, b и c график функции $y = (x-a)(x-b) - c^2$ имеет хотя бы одну общую точку с осью x.

№1043. При каком значении a графики функций $y = x^2 - 7x + a$ и $y = -3x^2 + 5x - 6$ имеют единственную общую точку? Найдите ее координаты.

Таким образом, в данном учебнике количество задач с параметром немного уменьшилось по сравнению с предлагаемым объемом заданий в 8 классе. Автор по-прежнему не использует понятие параметра, заменяя его словом «коэффициент». В учебнике совсем отсутствуют упражнения с пропедевтикой, однако встречаются задания на геометрический метод решения задач с параметрами, а также точные формулировки задания из ОГЭ. В разделе повторения всего курса 7-9 класса представлены основные типы задач на квадратные уравнения, системы уравнений с параметрами, а также задания-исследования на расположение графиков в зависимости от коэффициентов. Однако эти задания не представляют собой целостную систему.

Вывод:

Анализ теоретической составляющей серии учебников: в данной серии учебников Макарычева Ю. Н. в учебник 8 класса включен отдельный параграф, посвященный понятию параметра. Однако так как он расположен в разделе «Для тех, кто хочет знать больше», то вероятно, данный материал легко может отойти на второй план. Кроме того, сам автор на протяжении всего курса не использует понятие параметра в формулировках заданий.

Анализ упражнений: линия предлагаемых авторами упражнений включает разнообразные задачи с параметрами, соответствующие определенным темам курса и подобранные по степени возрастающей сложности. Кроме того, встречается ряд заданий из ОГЭ и задачи олимпиадного уровня. Однако почти все упражнения отнесены к категории «повышенной трудности» и заключены в раздел дополнительных задач, что указывает на их второстепенность.

1.2.4. Мерзляк А. Г. «Алгебра 7 класс»

Данный учебник содержит 1235 упражнений, из которых около 82 с параметрами. Таким образом, задачи с параметрами составляют примерно 6,6% от общего количества всех заданий по алгебре в 7 классе.

Уже в первой главе «Линейное уравнение с одной переменной» в теоретической части не только дается общее понятие, что «уравнение вида $ax = b$, где $x -$ переменная, a и $b -$ некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной», но и рассматриваются примеры линейных уравнений, содержащих параметр. Однако само понятие параметра автором не указывается.

Пример 2. Решите уравнение:

1) $(a-1)x = 2$; 2) $(a+9)x = a+9$

Решение: 1) При $a = 1$ уравнение принимает вид $0x = 2$. В этом случае корней нет. При $a \neq 1$ получаем: $x = \frac{2}{a-1}$.

Ответ: если $a = 1$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае корнем уравнения является любое число. При $a \neq -9$ получаем: $x = \frac{a+9}{a+1} = 1$.

Ответ: если $a = -9$, то $x -$ любое число; если $a \neq -9$, то $x = 1$.

Кроме того, среди задач по закреплению навыка решения линейных уравнений задания с параметром занимают значительное место. Они представлены несколькими уровнями сложности. К задачам среднего уровня сложности отнесены №№53-55. К сложным заданиям отнесены задачи №№57-67 на исследование линейных уравнений. Следующие задания №№70-73 – задания повышенной сложности.

№53. При каком значении a уравнение:

1) $5ax = -45$ имеет корень, равный числу 3;

2) $(a-4)x = -5a + 4x - 7$ имеет корень, равный числу -6?

№55. Укажите какое-либо значение b, при котором будет целым числом корень уравнения:

1) $0{,}1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.

№64. Решите уравнение:

1) $(b+1)x = 9$; 2) $(b^2+1)x = -4$.

№70. При каких целых значениях a корень уравнения:

1) $x - a = 2$; 3) $2x - a = 4$;

2) $x + 7a = 9$; 4) $x + 2a = 3$

является целым числом, которое делится нацело на 2?

Кроме того, задания в тестовой форме также включают в себя задание (№9), содержащее в себе параметр.

В главе **II** «Целые выражения» в теме «Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки» в теоретической части авторами снова рассмотрено задание, сдержащее параметр.

Пример 6. При каком значении a уравнение $(x+2)(x+a) - x(x+1) = 3a + 1$ имеет бесконечно много корней?

Решение: Имеем $x^2 + ax + 2x + 2a - x^2 - x = 3a + 1$;

$$ax + x + 2a = 3a + 1;$$

$$ax + x = a + 1;$$

$$(a+1)x = a + 1.$$

При $a = -1$ последнее уравнение принимает вид $0x = 0$ и имеет бсконечно много корней. Заметим,что если $a \neq -1$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{a+1}{a+1} = 1$.

Ответ: при $a = -1$.

Далее в качестве закрепления предложены №461, №462, №467 и №468, которые отнесены к сложным заданиям.

№467. При каком значении a не имеет корней уравнение:

1) $(x+1)(x-3) - x(x-3) = ax$;

2) $x(5x-1) - (x-a)(5x-1) = 4x - 2a$;

3) $(2x-5)(x+a) - (2x+3)(x+1) = 4$?

Затем следующие задания встречаются в темах «Разность квадратов двух выражений», «Квадрат суммы и квадрат разности» и отнесены также к сложным заданиям (№№557-558, 611-612).

№557. При каком значении b уравнение $(b^2 - 4)x = b - 2$:

1) имеет бесконечно много корней;

2) не имеет корней;

3) имеет один корень?

№611. При каком значении a уравнение $(6x-a)^2 + (8x-3)^2 = (10x-3)^2$ не имеет корней?

В главе **III** «Функции» задание с параметром сначала встречается в разделе повторения (№786), где необходимо найти наименьшее значение параметра, чтобы заданное выражение принимало лишь положительные значения при любом x.

Далее в теме «Линейная функция, ее график и свойства» учащимся предлагается следующий блок задач (№№879-884, 889-890) на поиск значения параметра при заданных условиях. Упражнение №889 содержит точную формулировку задания №23 из ОГЭ.

№879. Найдите значение b, при котором график функции $y = -\frac{1}{9}x + b$ проходит через точку $A(-27; 4)$.

№889. Графики функций $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке. Найдите значение k. Постройте в одной системе координат графики этих функций.

Завершающий главу тестовый контроль также включает в себя задание (№12), содержащее в себе параметр.

Глава **IV** «Системы линейных уравнений с двумя переменными» в теме «Уравнения с двумя переменными» содержит в себе блок задач (как на поиск и доказательство) с параметрами (№№972-977, 985-988) среднего уровня сложности.

№972. При каком значении a пара чисел $(a; 2a)$ является решением уравнения $2x + 7y = 16$?

№985. Докажите, что не существует такого значения a, при котором прямая $ax - 3y = 12$ проходит через начало координат.

В теме «Системы уравнений с двумя переменными» задачи среднего уровня сложности представлены №№1014, 1015, сложные задачи – №№1020-1024.

№1014. Пара чисел $(6; 4)$ является решением системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$$

Найдите значения a и b.

№1020. При каких значениях a не имеет решений система уравнений

$$\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 8x + 9y = a? \end{cases}$$

Далее в темах «Решение систем линейных уравнений методом подстановки», «Решение задач с помощью систем линейных уравнений» задачи с параметрами встречаются лишь в разделах повторения (№№1042, 1136-1137). В теме «Решение систем линейных уравнений методом сложения» задачи среднего уровня, содержащие параметр, представлены №№1057-1060, 1065-1066.

№1057. При каких значениях a и b график уравнения $ax + by = 8$ проходит через точки $A(1; 3)$ и $B(2; -4)$?

Завершающий главу тестовый контроль также включает в себя два задания (№№6, 7), содержащие параметр.

В подборку упражнений для повторения всего курса 7 класса также включен блок заданий с параметрами, имеющих разный уровень сложности: задачи легкого уровня – №№1159-1160, 1166-1167, 1181, 1213, 1215, 1219-1229, задачи повышенной сложности – №№1223-1224.

№1166. При каком значении a уравнение $(x + 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 4) = ax$ имеет бесконечно много корней?

№1223. При каком значении a сумма $x + y$ принимает наименьшее значение, если: $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$

Таким образом, в данном учебнике А. Г. Мерзляка содержательно-методическая линия более расширенная и присутствует в явном виде. Понятие параметра не вводится, однако в теоретической части автор уделяет особое внимание решению задач с параметром. Кроме того, задачи данной темы представлены разными уровнями сложности, а тестовый контроль по каждой главе или теме обязательно включает в себя задания с параметром. Уже в курсе 7 класса учащимся предлагается к решению задание №23 из ОГЭ. Пропедевтическим же заданиям (№№957-958, 1032) отведено незначительное место.

1.2.5. Мерзляк А. Г. «Алгебра 8 класс»

Данный учебник включает в себя всего 938 задач, из которых около 72 содержат параметр, что составляет 7,7% от всего количества упражнений по алгебре в 8 классе.

В главе **I** «Рациональные выражения» в теоретической части темы «Основное свойство рациональной дроби» автор снова сначала подробно разбирает задание, содержащее параметр, а затем предлагает ряд задач на закрепление (№№60-61).

Пример 6. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2-9)x = a + 3$.

Решение: запишем данное уравнение в виде $(a+3)(a-3)x = a+3$ и рассмотрим три случая.

1. $a = 3$.

Тогда получаем уравнение $0x = 6$, которое не имеет корней.

2. $a = -3$.

В этом случае получаем уравнение $0x = 0$, корнем которого является любое число.

3. $a \neq 3$ и $a \neq -3$.

Тогда $x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

Ответ: если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a-3}$.

№60. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $ax = 1$;
2) $ax = a$;
3) $(a-6)x = a^2 - 12a + 36$;
4) $(a^2x - 4)x = a - 2$.

В теме «Равносильные уравнения. Рациональные уравнения» задания повышенной сложности представлены уравнениями с параметром (№№219-221), где необходимо исследовать уравнения разного вида на количество решений.

№220. При каких значениях a уравнение $\frac{x+a}{x^2-4} = 0$ не имеет корней?

Далее учащимся предлагается познакомиться с обратной пропорциональностью и рассмотреть функцию $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Понятие параметра авторами по-прежнему не вводится.

Контрольный тест, завершающий данную главу, содержит в себе задание с параметром на повторение (№11).

В главе **II** «Квадратные корни. Действительные числа» задания с параметрами встречаются в темах «Функция $y = x^2$ и ее график» (№374), «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень» (№№413, 416, 417), «Числовые множества» (№477), а так же в теме «Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график» (№607). Многие из них имеют повышенный уровень сложности.

№413. При каком значении a уравнение $x^2 = a + 1$:

1) имеет два корня;

2) имеет один корень;

3) не имеет корней?

№416. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1} = 0$; 3) $a\sqrt{x-1} = a$;

2) $\sqrt{(a-1)x} = 0$; 4)$\sqrt{x-2} = a$.

№607. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = a - x$ в зависимости от значения a?

В главе **III** «Квадратные уравнения» также представлены задачи, содержащие параметр, разного уровня сложности. Так после темы «Квадратные уравнения» учащимся предложены следующие задачи №№635-636, 642-644 среднего уровня сложности и №№649-650, отнесенные к сложным заданиям.

№643. Каким числом, положительным или отрицательным, является отличный от нуля корень неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$, если:

1) $a > 0, b > 0$; 2) $a < 0, b > 0$;

3) $a > 0, b < 0$; 4) $a < 0, b < 0$?

№649. При каком значении a уравнение $(a-2)x^2 + (2a-1)x + a^2 - 4 = 0$ является:

1) линейным;

2) приведенным квадратным;

3) неполным неприведенным квадратным;

4) неполным приведенным квадратным.

При изучении темы «Формулы корней квадратного уравнения» в теоретической части автор снова подробно рассматривает задания, содержащие параметр.

Пример 3. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1. $2x^2 - bx + 18 = 0$;

2. $(b+6)x^2 - (b-2)x + 1 = 0$?

Решение: 1. Данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$

$$b^2 - 144 = 0;$$

$$b = -12 \text{ или } b = 12.$$

Ответ: $b = -12$ или $b = 12$.

2. При $b = -6$ получаем линейное уравнение $8x + 1 = 0$,имеющее один корень.

При $b \neq -6$ данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = (b-2)^2 - 4(b+6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Имеем: $b^2 - 8b - 20 = 0$, отсюда $b = -2$ или $b = 10$.

Ответ: $b = -2$ или $b = 10$, или $b = -6$.

После знакомства учащихся с формулами корней квадратного уравнения им предлагается следующий блок заданий (№№672-673, 688-692 – среднего уровня сложности; №№693-696 – сложные задания).

№690. Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:

1) $4x^2 - px - 3 = 0$; 2) $x^2 + px + p - 2 = 0$.

№693. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;

2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;

3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;

4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

При изучении теоремы Виета автор так же разбирает ее применение к заданиям с параметрами.

Пример 5. Число 4 является корнем уравнения $3x^2 - 10x + n = 0$. Найдите второй корень уравнения значение n.

Решение: Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения, причем $x_1 = 4$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. Тогда $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$. Имеем: $\frac{n}{3} = x_1x_2 = -\frac{8}{3}$, $n = -8$.

Ответ: $x_2 = -\frac{2}{3}, n = -8$.

Как только учащиеся отработали навыки применения теоремы Виета на обычных числовых упражнениях, им предлагается ряд задач с параметром (№№711-712 – легкие задачи, №№715-721 – задачи среднего уровня, №№725-726 – сложные задачи и №№737-744 – задачи повышенной сложности).

№711. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:

1) -8 и 6; 2) 4 и 5.

№715. Число -2 является корнем уравнения $x^2 - 8x + q = 0$. Найдите значение q и второй корень уравнения.

№725. Один из корней уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 меньше другого. Найдите значение c и корни уравнения.

№737. Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$. Найдите значение a.

Контрольный тест для проверки знаний, завершающий данную главу, содержит в себе задание с параметром (№12).

Рассматривая тему «Квадратный трехчлен», автор также в теоретической части приводит подробное решение задачи с параметром.

Пример 3. При каком значении m разложение на множители трехчлена $2x^2 + 9x + m$ содержит множитель $(x + 5)$?

Решение: поскольку разложение данного трехчлена на множители должно содержать множитель $(x + 5)$, то один из корней этого трехчлена равен -5. Тогда имеем:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0,$$

$$m = -5.$$

Ответ: $m = -5$.

Затем в разделе сложных задач учащимся предлагается решить №№759-760 на исследование разложения трехчлена на линейные множители, а в разделе задач повышенной сложности содержатся №№767-768, представляющие собой усложненные линейные уравнения с параметрами.

№759. При каком значении b разложение на линейные множители трехчлена:

1) $2x^2 - 5x + b$ содержит множитель $(x - 3)$;

2) $-4x^2 + bx + 2$ содержит множитель $(x + 1)$;

3) $3x^2 - 4x + b$ содержит множитель $(3x - 2)$?

№767. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$;

2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

В теме «Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям» в разделе задач повышенной сложности предложены задания №№796-797.

№797. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$ имеет единственный корень?

В конце учебника в разделе повторения курса 8 класса учащимся так же предлагается решить ряд ранее разобранных видов и типов задач с параметрами (№№846, 871, 855, 920, 924-928, 932, 935-936).

Таким образом, количество задач с параметром незначительно увеличилось, понятие параметра по-прежнему не вводится. Однако присутствует достаточно большое количество задач с параметром, которые подробно рассмотрены авторами учебника. Кроме того, данные упражнения неразрывно связаны с изучаемыми темами, а тестовый контроль включает обязательное повторение заданий с параметром. Пропедевтические задачи в учебнике практически отсутствуют.

1.2.6. Мерзляк А. Г. «Алгебра 9 класс»

Данный учебник включает в себя всего 1043 задачи, из которых около 110 содержат параметр, что составляет 10,5% от всего количества упражнений.

В главе **I** «Неравенства» задания с параметрами встречаются в теме «Решение линейных неравенств с одной переменной» и являются повторением материала 8 класса. В заданиях данной темы, разбитых на средний (№№142-143) и сложный (№№157-158) уровни, учащимся предлагается либо выяснить количество корней линейного и квадратного уравнения в зависимости от параметра, либо выяснить, при каких значениях параметра уравнения имеют положительные или отрицательные корни.

В заданиях высокой сложности задачи с параметром (№№159-164) включают не только исследование уравнений, но и исследование линейных неравенств, содержащих парамер, расположенных в порядке увеличения трудности их выполнения.

№160. Найдите все значения a, при которых не имеет корней уравнение $(a-2)x^2+(2a+1)x+a=0$.

№161. Существует ли такое значение a, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение):

1) $ax > 3x + 4$;   2) $(a^2 - a - 2)x \leq a - 2$?

Так же задания с параметром встречаются и после изучения темы «Система линейных неравенств с одной переменной» в разделе задач высокой сложности (№№207-218).

№207. При каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств:

1) $\begin{cases} x \geq 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq a. \end{cases}$

№210. Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < 2, \\ x \leq a. \end{cases}$

Далее контрольный тест для проверки знаний, завершающий данную главу, тоже содержит в себе задание с параметром (№18).

В главе **II** «Квадратичная функция» после темы «Свойства функции» учащимся предложены задачи среднего (№№270-273) и повышенного уровня сложности (№№279-280) на нахождение параметров в уравнении в зависимости от условий. Кроме того, задача №280 предполагает применение графического метода решения заданий с параметром.

№270. При каких значениях a функция $y = x^2 + (2a-1)x + a^2 + a$ имеет два нуля?

№280. Постройте график функции $f(x) = x^2$, определенной на промежутке $[a;\ 2]$, где $a < 2$. Для каждого значения a найдите наибольшее и наименьшее значение функции.

Задачи с параметром легкого уровня сложности представлены номерами №№288-291 после изучения темы «Построение графика функции $y = kf(x)$». По своему существу они являются задачами на повторение. Упражнения №№292-293 представляют собой исследование графика функции с целью нахождения по нему коэффициентов (параметров) в соответствующем ему уравнении (аналогичные задания в последующих темах №№324-328).

№288. При каких значениях a точка $A(a;\ 16)$ принадлежит графику функции $y = 4x^2$?

Далее обширный список задач с параметром учащимся предлагается после изучения темы «Квадратичная функция, ее график и свойства». Задачи среднего уровня представлены №№364-371, сложные задачи – №№372-381, 388-389 и задачи повышенной сложности – №№390-391. Все упражнения непосредственно связаны с изучаемой темой.

№365. При каких значениях a и b нулями функции $y = ax^2 + bx + 7$ являются числа -2 и 3?

№367. Пусть $D -$ дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a > 0, D > 0, c > 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0, D = 0, -\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0, D < 0, -\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0, c = 0, -\frac{b}{2a} < 0$.

№372. При каких значениях a функция $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x?

Упражнения под номерами 376-387 максимально приближены к заданиям из ОГЭ: в №376 учащимся требуется по данному графику параболы выяснить знаки коэффициентов задающего ее уравнения (аналог №12 из ОГЭ); №388 предполагает графический метод решения уравнений с параметром (аналог №23 в ОГЭ).

№388. Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя построенный график, определите, при каких значениях a уравнение $x^2 + 2x - 3 = a$:

1) имеет да корня;

2) имеет один корень;

3) не имеет корней.

№390. Пусть x_1 и x_2 — нули функции $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$. При каких значениях a выполняется неравенство $x_1 < -2 < x_2$?

Контрольный тест для проверки знаний, завершающий данную главу, содержит в себе сразу три задания с параметром (№№15-17).

Тема «Решение квадратных неравенств» в блоке задач повышенной сложности также содержит в себе задания с параметром (№№422-423 на повторение, №№435-438 по новой теме). Также в теме «Системы уравнений с двумя переменными» в раздел сложных задач включены задания с параметрами №№470-471 и в разделе наиболее трудных – №№472-473.

№437. Для каждого значения a решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \le 0, \\ x < a. \end{cases}$

№470. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$

1) имеет одно решение;

2) имеет два решения;

3) не имеет решений?

№472. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$

Контрольный тест для проверки знаний, завершающий данную главу, содержит в себе целых пять заданий с параметром (№№14-18).

Глава **III** «Элементы прикладной математики» и глава **IV** «Числовые последовательности» в каждом блоке повторения содержат номера (№№572, 813 и 925) на решение квадратных уравнений с параметром, а так же на поиск неизвестного коэффициента, при котором графики некоторых функций пересекаются в одной точке, имеющей определенные координаты.

В конце учебника в разделе повторения всего курса 9 класса учащимся так же предлагается решить ряд ранее разобранных видов и типов задач с параметрами (№№954-958, 966, 968-973, 981-982, 987).

Таким образом, в данном учебнике количество задач увеличилось по сравнению с материалом 7 и 8 классов. Понятие параметра не вводится, подробная теория по теме не представлена, пропедевтические задания практически не встречаются (№221). Однако качественный набор предлагаемых заданий достаточно разнообразен, содержится некоторое число упражнений, точная формулировка которых встречается в №12 и №23 в ОГЭ. Тестовый контроль по-прежнему в качестве обязательного компонента включает в себя несколько заданий на поиск параметров.

Вывод:

<u>Анализ теоретической составляющей серии учебников:</u> материал данного комплекта учебников не содержит в себе отдельных глав или параграфов, посвященных параметрам, основные понятия по теме также не представлены.

<u>Анализ упражнений:</u> упражнения, предлагаемые авторами учебника, достаточно разнообразны, представлены несколькими уровнями сложности: от самых легких до труднейших и олимпиадных. В материалах каждого класса основной школы встречаются задания из ОГЭ, а также задачи на

применение как аналитического, так и графического метода решения задач с параметрами. Пропедевтический компонент практически не представлен.

1.2.7. Дорофеев Г. В. и др. «Алгебра 7 класс»

В данном учебнике задачи с параметрами составляют меньше 1% от всего числа упражнений: лишь в 10 из 989 номеров встречается параметр, причем большинство из них носит пропедевтический характер (№148-150, 380, 674-675). Такие задачи лишь подготавливают учащихся к теме, закрепляя навыки выражать необходимую переменную через остальные.

№380. Выразите из равенства каждую переменную через другие:

а) $a + 2b - c = 0$;

б) $m + n - 2c = 1$;

в) $\frac{1}{3}(a + b + c) = 1$;

г) $2(x + y) = z$.

С параметрами же в чистом виде учащиеся впервые сталкиваются в главе **II** «Прямая и обратная пропорциональность». Однако, вводя определение и формулы прямой и обратной пропорциональности, автор не дает самого понятие «параметр», активно его при этом используя, заменив словом «коэффициент» или «постоянная»: «Формулу $y = kx$ $\left(k = \frac{y}{x}\right)$ называют формулой прямой пропорциональности, а число $k -$ коэффициентом пропорциональности», «Обратно пропорциональная зависимость может быть описана формулой $xy = k$ $\left(y = \frac{k}{x}\right)$, где $x, y -$ переменные, $k -$ постоянная».

Аналогично и в главе **IV** «Уравнения» автор, вводя понятие линейного уравнения вида $ax = b$, где a и $b -$ числа, а $x -$ переменная, также не вводит понятия параметр. Соответствующие заявленной теме задания на закрепление включают задачи №№378-379 с параметром, отнесенные к уровню Б.

№379. Решите уравнение относительно x:

а) $x - a = 2$; б) $1 - x = c + 2$;

в) $x + b = 0$; е) $2x - a = b + x$;

г) $a - x = b$; ж) $4x + a = x + c$;

д) $3x + m = 0$; з) $c - 3x = 4 - 5x$.

Далее задание с параметром встречается только в главе **VII** «Многочлены» в теме «Формулы квадрата суммы и квадрата разности» (№734), а также в главе **VIII** «Разложение многочленов на множители» после темы «Решение уравнений с помощью разложения на множители» (№912 – уровень сложности Б).

№734. Подберите такое k , чтобы трехчлен был равен квадрату двучлена:

а) $a^2 - 2a + k$; в) $m^2 + km + 16$; д) $k - 6n + n^2$;

б) $x^2 + 6x + k$; г) $y^2 + ky + 25$; е) $k + 8ab + b^2$.

№912. Решите уравнение относительно x:

а) $x^2 - m^2 = 0$; в) $(x + 4 - a)(x + 4 + a) = 0$;

б) $a^2 - x^2 = 0$; г) $25 - (x - b)^2 = 0$.

Таким образом, учебник Дорофеева содержит в себе крайне незначительное число задач с параметром, причем большая часть из них носит пропедевтический характер. Само понятие параметра не вводится. Почти все задачи с параметром отнесены к задачам повышенного уровня сложности.

1.2.8. Дорофеев Г. В. и др. «Алгебра 8 класс»

Данный учебник включает в себя всего 910 задач, из которых около 36 содержат параметр, что составляет 4% от всего количества упражнений по алгебре в 8 классе. Достаточно большое число этих упражнений имеет пропедевтический характер, где необходимо выразить одну переменную через другие: №№ 10, 17-18, 98, 104, 212, 264-265, 270, 299-300, 395-396, 398, 408-409, 575, 649.

№10. а) Из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$, где $v_0 -$ начальная скорость, $a -$ ускорение, $t -$ время движения, выразите a и t.

б) Из формулы пути равномерного движения $s = s_0 + vt$, где $s_0 -$ начальное расстояние, $v -$ скорость, $t -$ время движения, выразите v и t.

В главе **III** «Квадратные уравнения» при изучении определения квадратного уравнения автор использует слово «коэффициент»: «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c -$ произвольные числа, причем $a \neq 0$. Числа a, b, c называются коэффициентами». После отработки введенного понятия учащимся предложено лишь одно задание (№434) с параметром, которое относится к уровню Б.

№434. Покажите, что

а) числа m и n являются корнями уравнения $x^2 - (m + n)x + mn = 0$;

б) числа $m + n$ и $m - n$ являются корнями уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$. Составьте уравнения такого вида, подставив вместо m и n конкретные числа, и укажите корни каждого составленного уравнения.

Однако после изучения тем «Формула корней квадратного уравнения» и «Неполное квадратное уравнение» учащимся предлагаются следующие задания, включающие параметр: №443 – уровня А; №№507-509 – уровня Б.

№443. Подберите какое-нибудь значение c, при котором уравнение имеет корни, и значение c, при котором оно не имеет корней:

а) $x^2 - 3x + c = 0$; б) $5x^2 - 2x + c = 0$.

№507. Решите неполное квадратное уравнение:

а) $ax^2 + ax = 0$; б) $ax^2 - x = 0$.

№508. Имеет ли решение неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, если:

а) $a > 0, c > 0$; в) $a < 0, c > 0$;

б) $a > 0, c < 0$; г) $a < 0, c < 0$.

Каждый пример проиллюстрируйте конкретным примером.

Наиболее обширный блок задач (№№523-526, 529) включает в себя задания на применение теоремы Виета, все они отнесены к уровню Б. Причем автор сначала самостоятельно разбирает способ решения №525, а затем предлагает учащимся ряд аналогичных задач.

№523. а) Один из корней уравнения $x^2 + px - 20 = 0$ равен -5. Определите другой корень и коэффициент p.

б) Один из корней уравнения $3x^2 + px + 4 = 0$ равен -2. Определите другой корень и коэффициент p.

№525. Найдем все целые значения p, при которых уравнение $x^2 + px + 15 = 0$ имеет целые корни.

Решение: Найдем все пары целых чисел, произведение которых будет равно 15:

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = (-1) \cdot (-15) = (-3) \cdot (-5).$$

Соответствующие значения p равны $-16, -8, 16, 8$.

Ответ: $p = -16, -8, 16, 8$.

Найдите все целые значения p, при которых данное уравнение имеет целые корни:

а) $x^2 + px + 15 = 0$;

б) $x^2 + px - 15 = 0$;

в) $x^2 + px + 12 = 0$ и т.д.

Задачи с параметром уровня Б встречаются в теме «Разложение квадратного трехчлена на множители» (№№542-543). В них необходимо найти значения параметра, при котором разложение определенного трехчлена на множители будет обладать определенными условиями.

№542. Найдите все целые значения m, при которых квадратный трехчлен можно разложить на линейные двучлены с целыми коэффициентами:

а) $c^2 + mc + 10$; б) $z^2 + mz + 3$;

в) $x^2 + mx - 21$; г) $y^2 + my - 12$.

№543. Найдите значение k, при котором:

а) разложение на множители трехчлена $2x^2 + 5x + k$ содержит множитель $(x + 3)$;

б) разложение на множители трехчлена $3x^2 - 8x + k$ содержит множитель $(x - 2)$.

Глава **IV** «Системы уравнений» включает в себя следующие задания с параметрами:

№602. а) Известно, что прямая $ax + 3y = 5$ проходит через точку $(10; -5)$. Найдите коэффициент a и постройте эту прямую.

б) Известно, что прямая $5x + by = 2$ проходит через точку $(-2; 4)$. Найдите коэффициент b и постройте эту прямую.

№648. 4) Существует ли такое значение a, при котором система уравнений $\begin{cases} ax + 3y = 6, \\ 2x + y = 18 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений? Не имеет решений? Если существует, то укажите его.

В главе **V** «Функции» при знакомстве учащихся с линейной функцией и обратной пропорциональностью авторы учебника не используют понятие параметр, заменяя словом «число»: «Функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + l$, где k и $l-$ некоторые числа, называется линейной», «Функция, которая задана формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k -$ число, отличное от нуля, называют обратной пропорциональностью». Предложенные далее задачи на закрепление включают в себя как теоретические упражнения (№818), так и практические (№№823, 827), принадлежащие по сложности к уровню Б. Кроме того, №827 представляет собой задание из №23 из ОГЭ.

№818. Какое из следующих утверждений верно?

При $k > 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен:

1) в первой и третьей координатной четвертях;

2) во второй и четвертой координатных четвертях;

3) в первой и второй координатных четвертях.

№823. Известно, что точка $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ принадлежит графику функции $y=\frac{k}{x}$. Найдите значение k. Принадлежит ли этому графику точка $\left(\sqrt{2};\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$? $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$? $\left(2\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

№827. 1. Постройте график функции $y=f(x)$ и определите, при каких значениях a прямая $y=a$ имеет с графиком одну общую точку, если

$$f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ при } x\leq 2, \\ \dfrac{8}{x} \text{ при } x>2. \end{cases}$$

2. Постройте график функции $y=f(x)$ и определите, при каких значениях a прямая $y=a$ имеет с графиком две общие точки, если

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 \text{ при } x\leq 2, \\ -\dfrac{6}{x} \text{ при } x>2. \end{cases}$$

Раздел дополнительных задач, расположенный в конце учебника, включает в себя лишь одно задание на повторение по исследованию расположения графика функции.

№852. При каком значении a график функции $y=\frac{a}{x}$ не пересекает график функции $y=\sqrt{x}$: $a=1, a=100, a=-0{,}1$?

Таким образом, данный учебник включает в себя крайне мало задач с параметром (хоть по сравнению с 7 классов количество задач увеличилось), которые в большей мере отнесены к уровню сложности – Б. Широко представлены пропедевтические упражнения, а также уже в материалах 8 класса встречаются точные формулировки задания из ОГЭ. Понятие параметра по-прежнему не вводится, есть лишь одно упражнение, разобранное автором.

1.2.9. Дорофеев Г. В. и др. «Алгебра 9 класс»

Данный учебник включает в себя всего 801 задачу, из которых около 43 содержат параметр, что составляет 5,4% от всего количества упражнений.

В главе **I** «Неравенства» после изучения темы «Решение линейных неравенств» учащимся предлагается к решению блок задач (№№98-102), которые представляют собой задания на повторение материала предыдущих лет.

№98. При каких значениях a корень уравнения является числом положительным:

а) $3x = a + 12$;

б) $6(x + 1) - 2a + 5$;

в) $ax - 4 - x + 8$?

№100. При каких значениях a уравнение имеет два корня:

а) $ax^2 + 2x + 6 = 0$; б) $ax^2 - 3x - 4 = 0$?

После изучения темы «Решение систем линейных неравенств» учащимся предлагается решить следующую задачу, которая представляет собой усложненный вариант задания №23 из ОГЭ. Однако в самих контрольно-измерительных материалах такие формулировки не встречаются.

№119. При каких значениях c система неравенств $\begin{cases} 2x - 17 \geq 0, \\ x - c \leq 0 \end{cases}$

а) имеет решения; б) не имеет решений; в) имеет только одно решение?

Раздел дополнительных задач так же включает в себя задания с параметром (№№188,191), где необходимо исследовать предложенные неравенства.

№188. Дано неравенство $3x - 7 > 5x - a$, где $x -$ переменная, $a -$ некоторое число. При каком a множеством решений неравенства является:

а) множество всех отрицательных чисел;

б) множество чисел, меньших 1;

в) множество чисел, меньших -10?

Завершающий главу блок задач «Проверь себя» также включает задание для повторения на исследование системы неравенств с параметром (№16).

В главе **II** «Квадратичная функция» при введении основного понятия, автор также не использует термин «параметр», заменяя его словом «число»: «Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c -$ некоторые числа, причем $a \neq 0$».

Далее задания с параметром (уровня Б) встречаются в теме «Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат» (№224, 243, 255), а также «График функции $y = ax^2 + bx + c$» (№№280-283, 288). В данных задачах необходимо найти параметры (коэффициенты в уравнении параболы) в зависимости от заданных условий (положение вершины, ось симметрии) или же по графику функции определить знаки коэффициентов (аналог задания №12 из ОГЭ).

№255. При каких значениях коэффициента имеет хотя бы один нуль функция:

а) $y = ax^2 + 7$; б) $y = 10x^2 + q$?

№281. Найдите коэффициент b, если известно, что осью симметрии графика функции $y = x^2 + bx + 5$ является прямая:

а) $x = 1$; б) $x = -2$.

После темы «Квадратные неравенства» предложен ряд задач (№№310-314), в которых уравнения с параметром сводятся к решению квадратных уравнений. То есть, по сути, это задания на повторение и закрепление пройденных ранее задач.

№310. При каких значениях b уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$ имеет два корня? Имеет ли уравнение корни $b = -25{,}5; 1{,}5; 5{,}36$?

В теме «График дробно-линейной функции», расположенной в разделе «Для тех, кому интересно», при знакомстве с основными понятиями автор, не используя термин «параметр», его активно использует, заменяя словами «число» или «коэффициент». Далее учащимся предложено решить ряд задач (№№317-318) на выяснение расположения графика функции в зависимости от значений параметра.

№317. 2) Покажите с помощью схематического рисунка, как расположена в координатной плоскости гипербола, заданная формулой $y = \frac{k}{x} + q$, если:

а) $k > 0, q > 0$; в) $k < 0, q > 0$;

б) $k > 0, q < 0$; г) $k < 0, q < 0$.

После данной темы также встречается несколько заданий-аналогов №23 из ОГЭ, однако все они расположены в разделе дополнительных задач (№№332-333, 338).

№332. Постройте график функции и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком три общие точки; две общие точки; одну общую точку:

а) $y = \begin{cases} 4 - x^2, \text{если } x \leq 2, \\ x - 2, \text{если } x > 2; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x, \text{если } x \leq -1, \\ x^2, \text{если } x > -1. \end{cases}$

Блок «Проверь себя» также содержит в себе задание (№7), которое является аналогом задачи №23 из ОГЭ, где необходимо установить соответствие между графиками функций и знаками их коэффициентов.

Глава **III** «Уравнения и системы уравнений» после изучения темы «Системы уравнений с двумя переменными» помимо заданий на повторение (№№464-465) содержит следующее задание-исследование с параметром.

№466. 1) Система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + b, \end{cases}$ где $b -$ произвольное число, может иметь одно, два, три или четыре решения, а также может не иметь решений. Проиллюстрируйте каждый случай с помощью схематического рисунка. Подберите конкретную систему, соответствующую каждому случаю.

2) Сколько решений может иметь указанная система, если известно, что число:

а) $b -$ произвольное положительное число;

б) $b -$ произвольное отрицательное число?

Явным преимуществом данного учебника является включение в его содержание отдельной темы «Уравнения с параметром» в разделе «Для тех, кому интересно». В ней в теоретической части автор учебника по-новому интерпретирует неизвестные буквенные коэффициенты и дает им название «параметр». Автор говорит о том, что «подставляя в уравнения вместо параметрами различные значения, мы получаем целое семейство различных уравнений». Далее, проведя исследование квадратного уравнения $x^2 - bx + 1 = 0$ и выяснив количество его корней, он дает графическую интерпретацию получившихся результатов. Особое внимание обращено на то, что при исследовании уравнений с параметрами, важно не только «не потерять» какие-либо случи, но и точно ответить на поставленный в задаче вопрос. После этого в данной теме рассмотрены подробно три примера: линейное уравнение, квадратное уравнение и система уравнений с параметром. На самом же деле, учащиеся уже сталкивались с похожими заданиями, но сейчас решение данных задач идет в новых для ребят понятиях и терминах. После этого автор снова дает графичекую трактовку полученных результатов.

Последующий блок задач (№№499-507) направлен на закрепление и отработку навыка учащихся решать уравнения с параметрами.

№499. Решите уравнение с переменной x:

а) $(m-1)x = m^2 - 1$;   в) $(2-a)x = a^2 - 4$;

б) $(c-2)x = c+2$;   г) $(b^2-1)x = b+1$.

№500. Выясните, при каких значениях a уравнение имеет два корня:

а) $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$;   б) $ax^2 - (a^2+4)x + 4a = 0$.

Задания №503-504 предполагают овладение учащимися графическим методом решения уравнений и систем уравнений с параметром.

№503. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение (a — параметр):

а) $|x| = ax - 1$; б) $|x| = ax + 2$.

Раздел дополнительных задач в конце учебника включает в себя задания с параметрами (№№556-558), предназначенные для повторения изученного ранее материала.

Таким образом, в данном учебнике количество задач незначительно увеличилось по сравнению с 7 и 8 классом. Предлагается больше упражнений-аналогов к заданиям из ОГЭ. Кроме того, автор выделяет и рассматривает в отдельной теме понятие параметр, методы решения задач с параметром и соответствующую всему этому процессу геометрическую интерпретацию. Особое место уделено также решению неравенств, содержащих параметр. Пропедевтических задач в данном учебнике практически нет.

Вывод:

Анализ теоретической составляющей серии учебников: в содержание проанализированной серии учебников Дорофеева включена отдельная тема, посвященная понятию параметр. Однако так как он расположен в разделе «Для тех, кому интересно», то вероятно, данный материал легко может отойти на второй план.

Анализ упражнений: Линия предлагаемых авторами упражнений включает разнообразные задачи с параметрами, которые соответствуют изучаемым темам, а также содержат формулировки задач из ОГЭ. Однако почти все эти задания отнесены к заданиям повышенной сложности и расположены в блоке дополнительных задач.

Общий вывод: Во всех трех комплектах рассмотренных учебников Ю.Н. Макарычева, А. Г. Мерзляка и Г. В. Дорофеева из курса алгебры 7-9 класса, так или иначе, встречаются задания с параметрами.

Сравнительный анализ данных учебников позволяет сделать вывод о том, что в количественном плане (Таблица 1) наиболее полно задачи с параметром представлены в учебниках А. Г. Мерзляка. Качественный разбор упражнений также выделяет этот учебник среди остальных, так как среди содержащихся в нем заданий с параметром встречаются не только линейные (квадратные) уравнения, но и системы уравнений и неравенств, а также есть задания с квадратным корнем, на доказательство, на исследование по графику и так далее. Однако в представленном комплекте автор не вводит понятие параметра, а в конце 9 класса учащимся не предлагается материал для обобщающего повторения всего курса.

Наименьшее же число задач с параметрами содержится в учебниках Г. В. Дорофеева. Учебник Ю. Н. Макарычева занимает среднее положение по числу заданий заявленной темы. Однако стоит отметить, что именно в учебниках Ю. Н. Макарычева наиболее конкретно и подробно на всех уровнях прорабатываются линейные и квадратные уравнения с параметром.

Таблица 1 – сравнительный анализ учебников алгебры

№	Линии сравнения	Авторы		
		Макарычев Ю.Н.	Мерзляк А.Г.	Дорофеев Г.В.
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	***7 класс***			
2	Кол-во задач с параметром/ из них пропедевтических/ %	32 8 2,6%	82 3 6,6%	10 6 1%
3	Выделение в отдельную тему	-	- (В теории некоторых тем разобрано решение задач с параметрами)	-
4	Использование понятия «параметр»	-	-	-
5	Наличие задач с графическим методом решения	-	-	-

Продолжение таблицы 1

6	Наличие заданий из ОГЭ	-	+ (№889)	-
7	***8 класс***			
8	Кол-во задач с параметром/ из них пропедевтических/ %	87 8 7,5%	72 1 7,7%	36 18 4%
9	Выделение в отдельную тему	+ (§«Уравнения с параметром»)	- (В теории некоторых тем разобрано решение задач с параметрами)	- (Лишь одно задание разобрано автором)
10	Использование понятия «параметр»	-	-	-
11	Наличие задач с графическим методом решения	+ (№№188, 475, 612)	-	-
12	Наличие заданий из ОГЭ	+ (№№1070-1071)	+ (№885)	+ (№827)
13	***9 класс***			
14	Кол-во задач с параметром/ из них пропедевтических/ %	55 - 5%	110 1 10,5%	43 - 5,4%
15	Выделение в отдельную тему	-	-	+ (§ «Уравнения с параметром»)
16	Использование понятия «параметр»	-	-	-
17	Наличие задач с графическим методом решения	+ (№№208, 232, 238, 248,357)	+ (№№280, 388-389, 472-473)	+ (№№466, 503-504, 556, 558)
18	Наличие заданий из ОГЭ	+ (№№130, 1043)	+ (№№388-389, 376-387)	+ (№№283, 332-333, 338)

В целом же, общим для всех проанализированных учебников является не только недостаточное внимание, уделяемое содержательно-методической линии данной темы, но и отсутствие четкой теоретической базы, а также наличие не до конца продуманной системы задач.

Анализ также показывает, что ни один из учебников не предоставляет возможности учащимся систематизировать и обобщить знания по данной теме. Только учебник Ю. Н. Макарычева за 9 класс содержит в конце раздел для повторения всего курса алгебры 7-9 классов, однако предлагаемые упражнения не составляют комплекс последовательных задач, расположенных по степени сложности, а всего лишь повторяют некоторые более сложные варианты рассмотренных ранее заданий.

Такое положение дел определяет значительный недостаток школьного обучения. Ведь задания с параметром необходимо не просто хаотично включать в материал учебников, но и предоставлять учащимся возможность повторять, обобщать и систематизировать знания по данной теме. Это важно не только с точки зрения необходимости логического развития школьников, но и с целью подготовки к решению аналогичных задач на ОГЭ. Кроме того, материал 7-9 классов представляет собой некую основу для решения более сложных заданий с параметром, с которыми обучающиеся столкнутся в старших классах, в частности при подготовке к ЕГЭ. Отсюда возникает необходимость в осуществлении более качественного и продуманного обобщающего повторения темы «Решение задач с параметрами» в основной школе.

1.3. Понятие и цель обобщающего повторения по теме «Решение задач с параметрами»

В процессе всего обучения математике особое место отводится организации повторения изученного ранее материала. Необходимость его осуществления обусловлена:

1. Задачами обучения, которые требуют от ученика прочного и сознательного овладения знаниями.
2. Самой структурой программы учебного курса математики, устроенной таким образом, что, изучение большинства вопросов курса осуществляется постепенно, а развитие основных идей продолжается в течение всего периода

обучения в школе. В связи с этим, не повторяя предыдущего материала, обучающимся становится трудно понять и овладеть новым.

В своей работе Ф. Д. Дмитриев определяет повторение как «особый вид учебной деятельности, заключающейся в периодическом возвращении к пройденному с целью закрепления и совершенствования ранее приобретенных знаний, умений и навыков, а также создания условий, для более глубокого и прочного усвоения нового материала» [34].

Главная цель обобщающего заключительного повторения (как одного из типов повторения) заключается в строгой систематизации полученных обучающимися знаний, выделении общих методов и приемов решения математических задач по определенной теме; демонстрации техники решения как простых, так и относительно сложных задач.

Как было отмечено в предыдущем параграфе, анализ учебников алгебры 7-9 классов показал отсутствие обобщающе-систематизирующего заключительного повторения в курсе основной школы по теме «Решение задач с параметрами». Вследствие этого учащиеся не обладают качественной и упорядоченной системой знаний по данной теме. В результате выпускники не только не приступают к выполнению задач с параметром на ОГЭ, но и сталкиваются с огромными трудностями при решении задач с параметром в старшей школе (в частности при подготовке к ЕГЭ). В связи с тем, что программой школьного курса не предусмотрены отдельные часы по теме «Параметры», возникает необходимость в разработке и внедрении в процесс обучения различных дополнительных урочных и внеурочных занятий, элективных и факультативных курсов как просто по решению задач данной темы, так и по ее общению.

Таким образом, целью обобщающего повторения по теме «Решение задач с параметрами» является более полная и глубокая систематизация знаний учащихся, обеспечивающая закрепление понятий и навыков решения основных видов задач, содержащих параметр. Это необходимо как для развития математической культуры и успешной сдачи ОГЭ, так и для формирования преемственности между основной и старшей школой.

Выводы по главе I:

1. На сегодняшний день понятие параметра и решение задач, содержащих параметр, вызывают у обучающихся наибольшие трудности. Это обусловлено многими факторами, среди которых можно отметить низкий уровень математической культуры школьников и недостаточное освещение данной темы в рамках образовательной программы.

2. Анализ действующих учебников по математике курса 7-9 классов показал, что задачи с параметром встречаются достаточно редко, причем в большинстве своем все они обладают повышенной сложностью и расположены в разделах дополнительных упражнений. Кроме того, во всех рассмотренных учебниках отсутствует материал, способствующий систематизации и обобщению темы «Решение задач с параметрами».

ГЛАВА II. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

2.1. Общий подход к введению основных понятий и решению задач с параметрами

Стоит отметить, что в основном первое знакомство учащихся с параметрами начинается в 7-м классе при изучении линейных уравнений с той целью, чтобы ученики привыкли к понятию «параметр» и не испытывали затруднений при изучении этой темы в старших классах. Однако, как уже было упомянуто в §1.2., не только многие учителя, но и авторы большинства учебников и учебных пособий «избегают» введения нового понятия. Именно поэтому учащиеся зачастую не понимают отличия параметра от переменной и весь последующий материал по теме, базирующийся на главном определении, остается «белым пятном». И сталкиваясь с «параметром» в старших классах, выпускники испытывают дискомфорт, подсознательное отторжение и боязнь таких задач. Поэтому рекомендовано как можно раньше начать употреблять данный термин, постепенно исключая психологический барьер со стороны учеников.

Вообще перед тем, как ввести понятие «параметр» необходимо провести тщательную пропедевтическую работу. Например, важно напомнить учащимся роль буквы в алгебре и обратить их внимание на то, что за буквой всегда скрывается какое-то число. После этого нужно предложить ребятам задания, в которых требуется выразить одну переменную через другую, причем к заданиям такого типа необходимо возвращаться постоянно. Например: выразите одну переменную через другую $3x + 2y = 7$. (Как отмечалось в §1.2., такой способ пропедевтики хорошо представлен в учебниках Г. В. Дорофеева).

Так же на ранних этапах при непосредственным знакомстве с понятием параметра и задачами, содержащими параметр, полезно донести до учащихся, что рассмотрение параметров – это всегда выбор. А перед выбором, как известно, мы стоим в различных жизненных ситуациях. Чтобы создать эту ассоциативную и понятную для обучающихся связь, целесообразно, например, вспомнить какую-нибудь сказку или рассказ. В частности, «Сказка об Иване-царевиче, Жар-птице и Сером Волке» достаточно четко определяет взаимосвязь параметра и выбора: «В чистом поле стоит столб, а на столбе написаны слова: «Кто поедет от столба сего прямо, тот будет голоден и холоден; кто поедет в правую сторону, тот будет здрав и жив, а конь его будет мертв; а кто поедет в левую сторону, тот сам будет убит, а конь его жив и здрав останется!». Иван-царевич прочел эту надпись и поехал в правую сторону, держа на уме: хоть конь его и убит будет, зато сам жив останется и со временем сможет достать себе другого коня» [15]. Ознакомив учащихся с данным отрывком, далее полезно подвести учащихся к тому, что выбор главного героя предопределил его судьбу. Но это был выбор в сказке, а что же собой представляет параметр в математике? Какую роль он играет при решении уравнений? Какими методами решаются уравнения с параметрами?

Существует и другой способ, предложенный В. В. Мирошиным, который перед определением параметра вводит и описывает вспомогательный термин: «управляемость» решением задачи [20]. То есть, необходимо показать учащимся, что каждый раз мы должны «подчиняться» данной переменной и каждый раз указывать ответ в зависимости от значения этой переменной.

На данном этапе, например, возможно применение следующих пропедевтических задач:

1. Найти значения выражения:

   1) $3x$, если $x = -3,5; 2$; 2) $-5y$, если $y = -0,3; 2$.

2. Из чисел $-4; 0; 2$ выберите такое значение y, при котором значение выражения $2y - 8$ равно -4.

3. При каком значении p выражение $3p + 1$ равно 10?

Эти примеры позволяют не только понаблюдать за различными значениями одного выражения, но и представляют возможность провести простейший анализ и отбор. Кроме того, задания выстроены от частных случаев к более общим.

Важно обратить внимание на то, что основным моментом, который нужно усвоить при знакомстве с параметром, является необходимость осторожного обращения с неизвестным, но фиксированным числом. Для этого можно использовать задачи следующего типа:

1. Сравнить: $-a$ и $2a$.

Решение: Естественно нужно рассмотреть три случая: если $a > 0$, то $-a < 2a$; если $a = 0$, то $-a = 2a$; если $a < 0$, то $-a > 2a$.

Ответ: при $a > 0$, $-a < 2a$; при $a = 0$, то $-a = 2a$; при $a < 0$, $-a > 2a$.

Кроме того, необходимо потребовать от учащихся понимания того, что значение «параметра» иногда может быть ограниченным и в зависимости от этого уравнение может иметь или не иметь смысла. На данном этапе важно сформировать у учащихся умение рассуждать. Например, можно предложить учащимся следующее задание:

2. Найдите все значения a, при которых дробь $\frac{a-1}{a^2+4}$ не имеет смысла.

В процессе работы необходимо также помнить, что при знакомстве с параметром у школьников возникает некий внутренний барьер, обусловленный противоречивыми характеристиками параметра, так как с одной стороны, параметр – это фиксированная величина, значение которой принимается как известное; с другой стороны, он может принимать абсолютно разные значения. Для обучающихся такие свойства «известной неизвестной», принимающей «постоянное переменное» значение, определяют значительные сложности, работе над которыми также необходимо уделить особое внимание.

Далее, на следующем этапе, после пропедевтики, можно приступать к решению простейших линейных уравнений:

1. Решите следующие уравнения при $a = 0$:

   а) $ax = 8$; б) $ax - 3 = 4x$; в) $x - a = 10$; г) $a - x = 5$.

2. Найдите такие значения a, при которых уравнение $4ax - 3 = 12x$:

   а) не имеет корней; б) имеет корень, равный -1; в) имеет корень, равный 0.

Не стоит забывать и о графическом методе решения задач параметром. В целях ознакомления с ним учащихся, можно предложить им следующие упражнения:

1. Постройте график функции $y = ax + 3$ при $a = 2; -1; 0$. Выберите то значение a, при котором график параллелен оси абсцисс.
2. Коэффициент k для функции $y = kx + b$ выбирают из чисел $-1; 2; -7; 4$. Укажите те значения, при которых функция является убывающей.

На этапе подготовки учащихся к ОГЭ при обобщении материала следует учитывать степень ознакомления выпускников с понятиями «параметр», «задание с параметром» и с тем, что значит решить уравнение с параметром.

Так, если ученики уверенно владеют основными теоретическими знаниями по данной теме, то можно смело приступать к разбору задания повышенной сложности под №23. При этом целесообразно рассмотреть классификацию всех типов задач.

Если же учащиеся на первом этапе повторения и обобщения испытывают затруднения с формулировкой основных понятий данной темы, то требуется уделить особое внимание разбору элементарных заданий, содержащих параметр. Причем решение таких заданий должно быть организовано по принципу – от простого к сложному, а материал должен излагаться максимально доступно для обучающихся [27]. Таким образом, рассматривая задания по степени возрастания их сложности, шаг за шагом мы постепенно приходим к рассмотрению задания №23 из ОГЭ.

Учитывая сложность заданий, содержащих параметры, целесообразно применять при обучении решению задач с параметром различные программы, позволяющих увеличить наглядность и улучшающих представление ребят о динамике «движущихся» прямых. Одной из таких программ является GeoGebra, которую удобно применять, например, когда учащиеся уже построили график функции, как для проверки правильности его выполнения, так и для рассмотрения всевозможных положений прямой, относительно которой задается вопрос в задаче.

Стоит также отметить, что обобщающее решение задач с параметрами при подготовке к ОГЭ должно проводиться в комплексе с повторением других ключевых тем, таких как «Функции и их графики», «Решение квадратных уравнений», «Метод выделения полного квадрата», а также с повторением работы с модулями. Кроме того, рекомендуется регулярно рассматривать задачи, содержащие параметр, как в процессе основного обучения, так и на факультативных занятиях.

2.2. Анализ и решение задач ОГЭ, содержащих параметр

В связи с тем, что одной из главных задач обобщающего повторения темы «Решение задач с параметрами» в основной школе (§1.2.) является подготовка учащихся к ОГЭ, проанализируем и классифицируем задания, с которыми могут встретиться выпускники на экзамене.

Анализ открытого банка заданий ОГЭ по математике позволяет сделать вывод о том, что выпускники могут столкнуться с параметрами в задачах №11 из первой части и №23 из второй части. Причем, если с заданиями на соответствие графиков функций и задающих их формул большинство обучающихся справляется, то к заданию №23 многие из них даже не приступают.

Классифицируем и рассмотрим основные типы задач №23, содержащих параметр. В **первую группу** объединим задания, в которых параметр включен как дополнительный элемент: то есть учащийся должен сначала правильно построить график некоторой функции, а затем исследовать расположение полученного графика с графиком прямой, заданной параметрически, то есть найти значения параметра при определенных условиях *(«Постройте график функции* (дробно-рациональной, кусочно-заданной, с модулем и т.д.) *и определите, при каких значениях параметра заданная прямая имеет с графиком одну (две, три) общую точку или не имеет общих точек*).

Рекомендовано ознакомить учащихся с критериями оценивания данного задания. Ученик получает один балл в том случае, если график построен верно, но искомые значения параметра не найдены или найдены неверно. Два балла ученик получает в случае верно построенного графика и нахождения всех искомых значений параметра. Если решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев, то ученик получает нуль баллов.

1 тип: Дробно-рациональные функции

Пример 1. Постройте график функции $y = \frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение и пояснения: Первое, с чем сталкивается ученик, – это громоздкое выражение и желание построить данный график по точкам. Делать это нецелесообразно, поэтому необходимо обратить внимание учащихся на то, что в данном случае можно значительно упростить решение задачи, однако, не забыв при этом выписать ОДЗ.

Раскладывая числитель дроби на множители путем решения биквадратного уравнения, получаем следующее. Пусть $t = x^2$, тогда числитель принимает вид $t^2 - 13t + 36$. Находим корни уравнения $t^2 - 13t + 36 = 0$. Получаем, $t_1 = 4$ и $t_2 = 9$. Тогда, по формуле разложения на множители, $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем: $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$

Сократим дробь при условии, что $x \neq -2$ и $x \neq 3$, тогда функция принимает вид: $y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

Графиком данной функции является парабола с выколотыми точками $(-2; -4)$ и $(3; 6)$. Путем выделения полного квадрата, либо с помощью формулы координат вершины параболы, находим контрольные точки и строим график функции (рисунок 1).

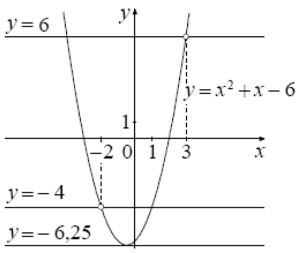


Рисунок 1

Прямая $y = c$ – прямая (семейство, пучок прямых), параллельная прямой Ox, которая имеет с графиком ровно одну общую точку тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых – выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0{,}5; -6{,}25)$, ординаты выколотых точек $y(-2) = -4$ и $y(3) = 6$. Поэтому $c = -6{,}25.,c = -4$ или $c = 6$.

Ответ: $c = -6{,}25.,c = -4$ или $c = 6$.

Ко **второй** группе отнесем задания, в которых требуется сначала найти значения параметра, а затем построить график.

Пример 1. При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.

Решение и пояснения: Запишем условие общей точки: $-2x + p = x^2 + 2x$ или $x^2 + 4x - p = 0$.

Функция $y = x^2 + 2x$ представляет собой параболу, следовательно, с прямой $y = -2x + p$ парабола имеет только одну общую точку, если дискриминант квадратного уравнения равен 0.

$$D = 16 + 4p,$$

$$16 + 4p = 0 \Rightarrow p = -4.$$

Подставим найденное значение параметра в уравнение, получаем следующее:

$$x^2 + 4x + 4 = 0,$$

$$(x + 2)^2 = 0,$$

$$(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, \text{тогда } y = 0.$$

То есть, координата общей точки $(-2; 0)$.

Построим графики функций $y = x^2 + 2x$ и $y = -2x - 4$ (рисунок 2).

Чтобы построить график параболы, выделим полный квадрат: $y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$.

Следовательно, искомая парабола получается сдвигом графика функции $y = x^2$ на 1 единицу влево вдоль оси Ox и 1 единицу вниз вдоль оси Oy.

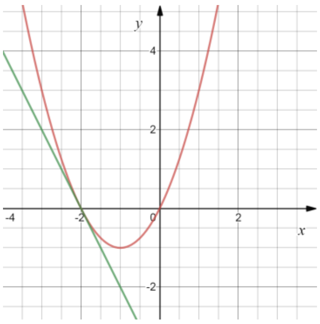


Рисунок 2

Ответ: $p = -4$, координаты общей точки $(-2; 0)$.

И к **третьей группе** отнесем задания на выяснение расположения вершин парабол в зависимости от параметра.

Пример 1. При каких значениях p вершины парабол $y = -x^2 + 2px + 3$ и $y = x^2 - 6px + p$ расположены по разные стороны от оси x?

Решение и пояснения:

Заметим, что ветви первой параболы $y = -x^2 + 2px + 3$ (1) направлены вниз (т.к. коэффициент при x^2 равен -1), а ветви второй параболы $y = x^2 - 6px + p$ (2) направлены вверх (т.к. коэффициент при x^2 равен 1).

Следовательно вершины этих парабол будут находиться по разные стороны от оси абсцисс в следующих случаях (рисунок 3):

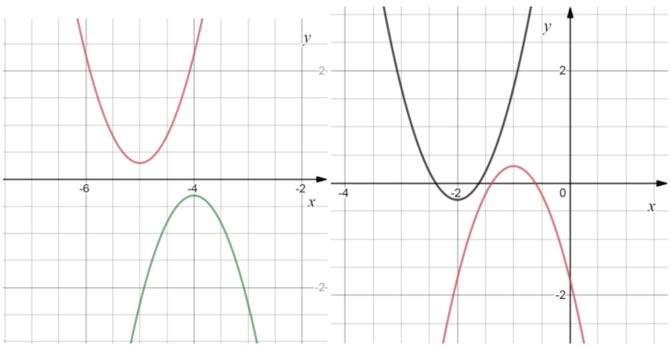


Рисунок 3

Рассмотрим каждый из них.

В первом случае эти две параболы одновременно не имеют корней, следовательно это условие можно записать в виде системы:

$\begin{cases} D_1 < 0; \\ D_2 < 0, \end{cases}$ где D_i – дискриминанты уравнений (1) и (2) соответственно.

Во стором случае эти две параболы одновременно имеют по два корня, это условие можно записать в виде системы:

$\begin{cases} D_1 > 0; \\ D_2 > 0, \end{cases}$ где D_i – дискриминанты уравнений (1) и (2) соответственно.

Заметим, что если хотя бы один из дискриминантов будет равен нулю, то вершина попадет на ось Ox, и этот случай не удовлетворяет условию.

Эти две системы можно заменить на одно неравенство: $D_1 D_2 > 0$.

Для удобства заметим, что в каждой параболе коэффициенты при первой степени переменной x четные, следовательно полученное неравенство можно записать в следующем виде:

$$\frac{D_1}{4}\frac{D_2}{4} > 0.$$

Тогда

$$(p^2 - (-1) \cdot 3)((-3p)^2 - p) > 0,$$

$$(p^2 + 3)(9p^2 - p) > 0.$$

Заметим, что первый множитель в правой части неравенства всегда положиельный, следовательно, на него можно поделить обе части данного неравенства.

Получим, $9p^2 - p > 0$ или $p(9p - 1) > 0$.

Применяем метод интервалов (рисунок 4):

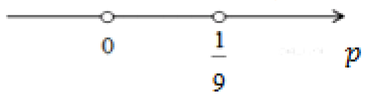


Рисунок 4

Следовательно в ответ необходимо записать объединение двух промежутков.

Ответ: $p \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

Данный перечень заданий не является исчерпывающим, однако прочно усвоив понятие параметра и уверенно оперируя математически знаниями по другим разделам математики, учащийся будет способен справиться с предлагаемыми задачами.

В целом, все задания, с которыми ученик может столкнуться при выполнении №23, достаточно стандартные, главное в них – это построить график и ответить на поставленный в задаче вопрос, который как раз таки и связан с параметром. Требования к математической подготовке, проверяемые при решении данного задания: умение выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, знать правила преобразования графиков, строить и исследовать простейшие математические модели в зависимости от соответствующих параметров [9].

Среди ошибок, наиболее часто встречающихся при решении задания №23, стоит отметить следующие:

1. На координатной плоскости построены графики указанных в условии функций на всей числовой прямой, вместо заданных для них промежутков.

2. Вместо конкретных значений параметра указываются промежутки, концами которых являются искомые значения параметра.

3. Неверное построение графиков функций, заданных на указанных промежутках.

Таким образом, проведенный анализ задач с параметрами, предлагаемых в ОГЭ, а также подробный разбор их решения в совокупности с выявлением наиболее часто допускаемыми учениками ошибками предопределяет ключевые моменты, на которые необходимо обратить внимание при осуществлении обобщающего повторения в основной школе.

2.3. Факультативный курс по алгебре на тему «Решение задач с параметрами в основной школе»

2.3.1. Пояснительная записка к факультативу

Как уже было отмечено ранее, умение решать задачи с параметрами, проводить исследования математических моделей необходимо каждому ученику, ставящему перед собой цель хорошо подготовиться и успешно сдать основной государственный экзамен, а также проявить себя на математических конкурсах и олимпиадах различного уровня. Однако перечисленные задачи являются наиболее трудными, так как они требуют развития логической культуры, которой не хватает большинству школьников.

Предлагаемый факультативный курс для учащихся 9-тых классов по алгебре на тему «Решение задач с параметрами в основной школе» был разработан исходя из анализа действующей учебной литературы. Оказалось, что рассмотрению линии задач с параметрами в курсе средней школы отводится крайне мало времени и внимания. Однако выпускной экзамен содержит в себе задания по данной теме. Именно поэтому возникает необходимость осуществления дополнительного изучения темы «Решение задач с параметрами».

Программа факультатива включает в себя решение линейных и квадратных уравнений с параметрами, а также решение задач с параметрами из открытого банка заданий для проведения ОГЭ.

2.3.2. Программа факультативного курса

Программа ориентирована на учащихся 9-тых классов. В идеале факультатив рассчитан на 12 часов и предполагает как изложение теории по данной теме, так и решение типовых задач. Но также возможно проведение более сжатого курса данного факультатива.

Основные формы занятий: лекция, объяснение учителя и практическая работа.

Каждое занятие состоит из двух взаимосвязанных частей:

1. Задачи, решаемые и разбираемые вместе с учителем.
2. Задачи для самостоятельного (в частности, домашнего) решения.

Цели курса:

Целью данного факультативного курса является формирование у обучающихся умения рассуждать, анализировать и интерпретировать полученные результаты; развитие логического мышления и интуиции, а также познавательного интереса школьников к изучению математики.

Задачи курса:

1. Восполнение и овладение системой знаний об уравнениях с параметром как о семействе уравнений.
2. Овладение основными способами решения задач с параметром.
3. Подготовка обучающихся к дальнейшему углублению знаний по данной теме и к успешной сдаче ОГЭ.

Планируемые результаты курса:

Содержание программы определяет следующие результаты факультативного курса:

1. Решать линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр.
2. Использовать графическую интерпретацию при решении задач.
3. Применять полученные знания в нестандартных ситуациях.

Рекомендовано перед началом факультативных занятий повторить с учащимися построение графиков элементарных функций, с которыми они познакомились в курсе 7-9 классов.

Содержание курса:

Входной контроль по теме (1 час)

Проведение контрольного среза на проверку остаточных знаний учащихся

Линейные уравнения с параметрами (2 часа)

Линейное уравнение, решение линейного уравнения, исследование линейного уравнения с параметром

Квадратные уравнения с параметрами *(3 часа)*

Квадратное уравнение, решение квадратного уравнения с параметром, разложение квадратного трехчлена на множители, графическая интерпретация

Соотношения между корнями квадратного уравнения (2 часа)

Теорема Виета, теорема, обратная теореме Виета. Решение задач с параметром на применение теоремы Виета, соотношения между корнями квадратного уравнения

Задачи с параметром на основном государственном экзамене (3 часа)

Рассмотрение и решение основных типов задач №23 основного государственного экзамена, предлагаемых в открытом банке заданий

Итоговая контрольная работа (1 час)

Проведение итоговой контрольной работы по теме «Задачи с параметрами»

Критерии оценивания входной и итоговой работы:

Каждое задание №№1-4 оценивается в 1 балл, задание №5 оценивается в 2 балла.

Оценка «5» - работа выполнена верно и полно, не более одного недочета;

Оценка «4» - работа выполнена полностью, есть одна ошибка или 2-3 недочета;

Оценка «3» - в работе допущено более одной ошибки или более трех недочетов, без недочетов выполнено не менее половины работы;

Оценка «2» - правильно выполнено менее половины работы.

Учебно-методический план:

Учебно-методический план факультативного курса представлен в Таблице 2:

Таблица 2 – учебно-методический план факультативного курса

№	Наименование тем курса	Всего часов
1.	Входной контроль по теме	1
2.	Линейные уравнения с параметрами	2
3.	Квадратные уравнения с параметрами	3
4.	Соотношения между корнями квадратного уравнения	2
5.	Задачи с параметром на основном государственном экзамене	3
6	Итоговая контрольная работа	1
Итого:		12

2.3.3. Комплекс заданий по теме «Решение задач с параметрами в основной школе»

Занятие №1. Тема: «Входной контроль по теме»

Задания входного контроля:

Пример 1. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения $(a-2)x=3$.

Решение: При $a=2$ уравнение примет вид $0x=3$ и не будет иметь корней.

При $a \neq 2$ уравнение имеет единственный корень: $x=\frac{3}{a-2}$.

Ответ: если $a=2$, то решений нет; если $a \neq 2$, то $x=\frac{3}{a-2}$.

Пример 2. Решите относительно x уравнение $x^2-ax=0$.

Решение: Рассмотрим уравнение: $x^2-ax=0$.

Вынесем общий множитель за скобки: $x(x-a)=0$ и проанализируем результат:

1) если $a=0$, тогда $x=0$;
2) если $a \neq 0$, тогда $x=0, x=a$.

Ответ: если $a=0$, то $x=0$; если $a \neq 0$, то $x=0, x=a$.

Пример 3*. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y=kx$ имеет с графиком функции $y=-x^2-1$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение: Найдем общую точку данных графиков:

$$-x^2-1=kx,$$

$$x^2+kx+1=0,$$

$$D=k^2-4.$$

Для того чтобы точка была единственной, необходимо, чтобы $D = 0$, т.е. $k^2 - 4 = 0$. Получаем: $k = \pm 2$.

1. Построим по точкам (Таблица 3) график функции $y = -x^2 - 1$ – это парабола (рисунок 5), ветви которой направлены вниз, с вершиной в точке $(0; -1)$.

Таблица 3 – построение параболы по точкам

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	-10	-5	-2	2	5	10

2. Построим графики функций $y = 2x$ и $y = -2x$ – прямые, проходящие через начало координат (рисунок 5):

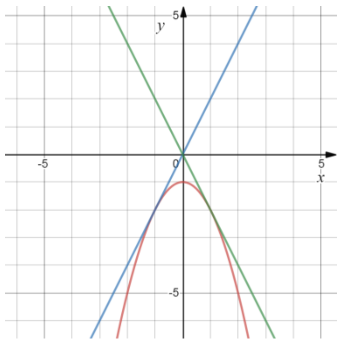


Рисунок 5

Ответ: $k = \pm 2$.

Пример 4*. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2x + 1, \text{если } x < 0, \\ -1{,}5x + 1, \text{если } 0 \leq x < 2, \\ x - 4, \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: Построим график заданной функции, состоящий из трех частей и представляющий собой ломаную (рисунок 6).

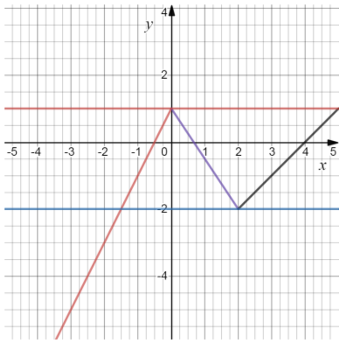


Рисунок 6

Построим прямую $y = c$, которая задает на плоскости пучок прямых, параллельных оси абсцисс. На рисунке видно, что прямая имеет с графиком функции ровно две общие точки при $c = -2$ и $c = 1$.

Ответ: при $c = -2$ и $c = 1$ прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Занятие №2. Тема: «Линейные уравнения с параметрами»

Теория: Уравнение вида $ax = b$, где a и b – некоторые числа, называется линейным относительно неизвестного x. В данном случае a и b – параметры, от которых зависит решение линейного уравнения.

Возможны три случая:

1. $a \neq 0$, b – любое действительное число. Тогда уравнение имеет единственное решение: $x = \frac{b}{a}$.

2. $a = 0, b = 0$. Уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$ и решением уравнения является любое действительное число.

3. $a = 0, b \neq 0$. Уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$ и не имеет решений.

Решить уравнение с параметром – это значит:

1. Указать, при каких допустимых значениях параметра уравнение имеет решение, указать эти решения в зависимости от значения параметра.

2. Указать, при каких допустимых значениях параметра уравнение имеет бесконечное множество решений.

3. Указать, при каких допустимых значениях параметра уравнение не имеет решений [20].

Пример 1. При каком значении параметра a уравнение $2ax + 5 = 3x$ имеет корень, равный -2?

Решение: Подставим $x = -2$ в уравнение, получим

$$2a \cdot (-2) + 5 = 3 \cdot (-2),$$

$$-4a = -6 - 5,$$

$$a = \frac{11}{4} = 2{,}75.$$

Ответ: при $a = 2{,}75$ данное уравнение имеет корень, равный -2.

Пример 2. Решите уравнение $ax = 3$ при всех значениях параметра a.

Решение:

1. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{3}{a}$.
2. Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 3$, решений нет.

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{3}{a}$; при $a = 0$, решений нет.

Пример 3. Решить уравнение $ax + a^2 = 4 - 2x$.

Решение: Для начала выполним равносильные преобразования:

$$ax + 2x = 4 - a^2,$$

$$x(a + 2) = (2 - a)(2 + a).$$

Если $a + 2 \neq 0$, т.е. $a \neq -2$, то уравнение имеет единственное решение: $a = \frac{(2-a)(2+a)}{a+2} = 2 - a$.

Если $a = -2$, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$, которому удовлетворяет любое действительное число.

Ответ: при $a \neq -2, x = 2 - a;$ при $a = -2, x$ – любое число.

Пример 4. При каком значении параметра a, уравнение $ax = x + 1$ не имеет решения?

Решение: Для начала выполним равносильные преобразования:

$$ax - x = 1,$$

$$x(a - 1) = 1.$$

Полученное уравнение не имеет решения, если $a - 1 = 0$, т.е. $a = 1$.

Ответ: при $a = 1$ уравнение не имеет решения.

Пример 5. При каких значениях параметра a уравнение $3(x - 2a) = 4(1 - x)$ имеет отрицательное решение?

Решение: Выполним равносильные преобразования:

$$3(x - 2a) = 4(1 - x),$$

$$3x - 6a = 4 - 4x,$$

$$7x = 4 + 6a,$$

$$x = \frac{4 + 6a}{7}.$$

Требуется, чтобы корень был отрицательный, значит:

$$\frac{4 + 6a}{7} < 0,$$

$$a < -\frac{2}{3}.$$

Ответ: при $a < -\frac{2}{3}$ данное уравнение имеет отрицательные значения.

Пример 6. Найти все значения параметра a, для каждого из которых решение уравнения $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$ больше 2.

Решение: Выполним преобразования:

$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a,$$

$$10x + 5ax = 15a + 13 + 2a,$$

$$5x(2 + a) = 13 + 17a.$$

Если $a = -2$, то решений нет. Если $a \neq -2$, то $x = \frac{13+17a}{5(2+a)}$.

Исходя из этого, решим неравенство:

$$\frac{13 + 17a}{5(2 + a)} > 2,$$

$$\frac{13 + 17a - 20 - 10a}{5(2 + a)} > 0,$$

$$\frac{7(a - 1)}{5(2 + a)} > 0.$$

Получим $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ уравнение имеет корень больше 2.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решите уравнения:

а) $ax - 7 = 2x + 10$;

б) $ax - a = x - 1$;

в) $ax + 1 = x + a$;

г) $2x - 4a = ax - 1$.

Ответ:

а) при $a \neq 2, x = \frac{17}{a-2}$; при $a = 2$, решений нет;

б) при $a \neq 1, x = 1$; при $a = 1$, x – любое число;

в) при $a \neq 1, x = 1$; при $a = 1$, x – любое число;

г) при $a \neq 2, x = \frac{1-4a}{a-2}$; при $a = 2$, решений нет.

2. При каких значениях параметра a уравнения

а) $6(ax - 1) - a = 2(a + x) - 7$;

б) $0{,}5(5x - 1) = 4{,}5 - 2a(x - 2)$ имеют бесконечно много решений?

Ответ: а) при $a = \frac{1}{3}$; б) при $a = -\frac{5}{4}$.

3. При каких значениях параметра a уравнения

а) $2(a-2x)=ax+3$;

б) $a^2x=a(x+2)-2$ не имеют решений?

Ответ: а) при $a=-4$; б) при $a=0$.

4. При каком значении параметра a уравнение $2ax+4=3a+5x$ имеет корень, равный 3?

Ответ: при $a=3\frac{2}{3}$.

5. Решить уравнение: $ax+1=a^2+x$.

Ответ: при $a\neq 1, x=a+1$; при $a=1$, x – любое число.

6. При каких значениях параметра a уравнение $a(x-3)=2x+1$ имеет решение: а) меньше 3; б) неотрицательное решение?

Ответ: а) при $a<2$; б) при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup(2;+\infty)$.

Занятие №3. Тема: «Квадратные уравнения с параметрами»

Теория: Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a,b,c – некоторые числа, причем $a\neq 0$ называется квадратным уравнением.

Решение квадратного уравнения через дискриминант: $D=b^2-4ac$.

1) если $D<0$, то уравнение не имеет корней;

2) если $D=0$, то уравнение имеет один (два совпавших) корень: $x=-\frac{b}{2a}$;

3) если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня: $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Алгоритм решения уравнения с параметром:

1. Привести уравнение к стандартному виду и проверить зависимость коэффициента при старшем члене от параметра. В случае существования зависимости рассмотреть случай, когда коэффициент равен нулю.

2. Решить уравнение при условии, что коэффициент при старшем члене не обращается в нуль.

3. Записать ответ, аккуратно объединив все полученные результаты.

Формула разложения квадратного трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_{2)}$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x - a = 0$.

Решение: Уравнение при любом a является квадратным.
Найдем дискриминант: $D = 5^2 + 8a$.

1) если $D < 0$, т.е. $25 + 8a < 0, a < -3\frac{1}{8}$, то уравнение не имеет корней;

2) если $D = 0$, т.е. $25 + 8a = 0, a = -3\frac{1}{8}$, то уравнение имеет один корень $x = \frac{5}{4} = 1{,}25$;

3) если $D > 0$, т.е. $25 + 8a > 0, a > -3\frac{1}{8}$, то уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8a}}{4}$.

Ответ: при $a < -3\frac{1}{8}$, корней нет; при $a = -3\frac{1}{8}$, $x = 1{,}25$; при $a > -3\frac{1}{8}$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8a}}{4}$.

Пример 2. Решите уравнение $(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$.

Решение: Коэффициент при x^2 зависит от параметра, поэтому рассмотрим два случая:

1) если $a = -1$, то уравнение примет вид $-2x + 2 = 0, x = 1$;
2) если $a \neq -1$, то уравнение является квадратным.

Дискриминант $D = 2^2 - 4(a + 1)(1 - a) = 4 - 4 + 4a^2 = 4a^2$.
Заметим, что при всех $a \neq -1, 4a^2 \geq 0$.

Если $a = 0$, уравнение имеет один корень $x = 1$.

Если $a \neq 0$ и $a \neq -1$, то уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{2-2a}{2(a+1)} = \frac{1-a}{1+a}, x_2 = \frac{2+2a}{2(a+1)} = 1$.

Ответ: если $a = -1$, то $x = 1$; если $a = 0$, то $x = 1$; если $a \neq 0$ и $a \neq -1$, то $x_1 = \frac{1-a}{1+a}$, $x_2 = 1$.

Пример 3. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^2 + (2a+3)x + a^2 - a + 5 = 0$ имеет два различных корня.

Решение: Уравнение имеет два различных корня, если дискриминант уравнения положительный:

$$D = (2a+3)^2 - 4(a^2 - a + 5) = 4a^2 + 12a - 9 - 4a^2 + 4a - 20 =$$
$$= 16a - 11,$$

Решаем неравенство: $16a - 11 > 0$. Получаем: $a > \frac{11}{16}$. Тогда наименьшее целое значение a, удовлетворяющее неравенству равно 1.

Ответ: $a = 1$.

Пример 4. Найдите все значения параметра, при каждом из которых уравнению $x^2 + a(a-1)x + 36 = 0$ удовлетворяет единственное значение переменной.

Решение: Уравнение имеет единственное решение, если дискриминант уравнения равен нулю: $D = a^2(a-1)^2 - 144 = (a(a-1) - 12)(a(a-1) + 12) = (a^2 - a - 12)(a^2 + 12) = 0$.

Откуда $\left[\begin{array}{l} a^2 - a - 12 = 0, \\ a^2 - a + 12 = 0, \end{array}\right.$ получаем $\left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -3 \end{array}\right.$.

Ответ: $a = -3$ или $a = 4$.

Пример 5. Найти все значения параметра, при которых уравнение

$(a+1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$ не имеет решений.

Решение:

1) если $a = -1$, то уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 3$. Получаем, что данное уравнение не имеет решений;

2) если $a \neq -1$, то уравнение не имеет решений, если $D < 0$.

$D = 4(a+1)^2 - 4(a+1)(a-2) = 4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 + 8a - 4a + 8 = 12a + 12$.

Решаем неравенство: $12a + 12 < 0$. Получаем: $a < -1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1]$.

Пример 6. Квадратный трёхчлен разложен на множители:

$x^2 + 6x - 27 = (x+9)(x-a)$. Найдите значение a.

Решение: **1 способ:** Решим квадратное уравнение:

$$x^2 + 6x - 27 = 0,$$

$$D = 144, x_1 = -9, x^2 = 3.$$

Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители, получаем: $x^2 + 6x - 27 = (x+9)(x-3)$, откуда $a = 3$.

2 способ: $x^2 + 6x - 27 = x^2 + 9x - ax - 9a = x^2 + x(9-a) - 9a$.

Так как многочлены равны, то $\begin{cases} 9 - a = 6 \\ 9a = 27 \end{cases}$, откуда $a = 3$.

Ответ: $a = 3$.

Пример 7. Известно, что графики функций $y = x^2 + p$ и $y = 2x - 5$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики данных функций.

Решение: Графики функций имеют одну общую точку, если уравнение $x^2 + p = 2x - 5$ имеет одно решение. Уравнение $x^2 - 2x + p + 5 = 0$ имеет одно решение, если дискриминант равен нулю: $D = -4p - 16 = 0, p = -4$. Координаты точки пересечения: $x = 1, y = -3$.

Построим графики функций (рисунок 7). График функции $y = x^2 - 4$ – парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы имеет координаты $(0; -4)$, точки пересечения с осью абсцисс: $x^2 - 4 = 0, x = \pm 2$.

График функции $y = 2x - 5$ – прямая, проходящая через точки с координатами $(1; -3)$ и $(0; -5)$.

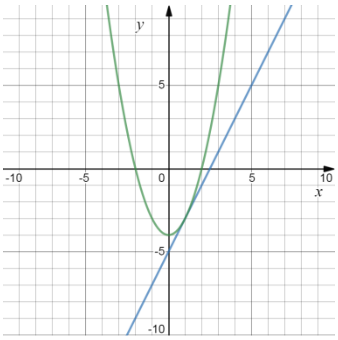


Рисунок 7

Ответ: координаты общей точки $(1; -3)$.

Пример 8. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = -2x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: Графики функций имеют одну общую точку, если уравнение $x^2 + p = -2x$ имеет одно решение. Уравнение $x^2 + 2x + p = 0$ имеет одно решение, если $D = 0$. Решив квадратное уравнение и приравняв дискриминант к нулю, получаем, что $p = 1$. Координаты точки пересечения: $x = -1, y = 2$.

Построим графики функций (рисунок 8). График функции $y = -2x$ – прямая, проходящая через точки с координатами $(1; -2)$ и $(0; 0)$.

График функции $y = x^2 + 1$ – парабола с вершиной в точке $(0; 1)$.

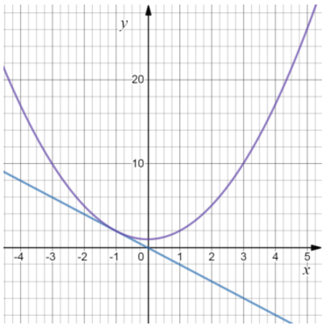


Рисунок 8

Ответ: $p = 1$.

Задания для самостоятельного решения

1. При каком значении параметра a уравнению $x^2 + ax + 1 = 0$ удовлетворяет единственное значение переменной?

Ответ: при $a = -2; 2$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = 0$ имеет два различных корня.

Ответ: $a \in (-\infty; 0{,}5)$.

3. При каких значениях параметра a уравнение:

а) $(a - 3)x^2 - 2ax + (3a - 6) = 0$; б) $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет: 1) единственное решение; 2) два различных корня?

Ответ: а) 1. при $a = 1{,}5, a = 3, a = 6$; 2. при $a \in (1{,}5; 3) \cup (3; 6)$; б) 1. при $a = 0, a = \frac{4}{3}$; 2. при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right)$.

4. Квадратный трёхчлен разложен на множители: $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - a)$. Найдите a.

Ответ: $a = 9$.

5. При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 + 3x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

Ответ: $k = -1$, общая точка имеет координаты $(-2; -2)$.

6. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = 4x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $p = 0$.

7. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = -6x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $p = 9$.

Занятие №4. Тема: «Соотношения между корнями квадратного уравнения»

Теория: Теорема Виета

Если квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Сама по себе теорема Виета не утверждает существования корней квадратного уравнения, поэтому обязательно необходимо проверять неотрицательность дискриминанта.

Теорема, обратная теореме Виета.

Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Теорема Виета применяется для исследования знаков корней квадратного уравнения (квадратного трехчлена):

1. Для того чтобы корни квадратного уравнения имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнения следующих соотношений: $D \geq 0$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$. При этом оба корня будут положительны, если дополнительно выполняется условие $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ и оба корня отрицательны, если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$.

2. Для того, чтобы корни квадратного уравнения имели различные знаки, необходимо и достаточно выполнения соотношения $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$.

Пример 1. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, равные -6; 4. Найдите q и p.

Решение: Так как -6 и 4 корни квадратного уравнения, то $x_1 \cdot x_2 = -24 = q$, $x_1 + x_2 = -2, p = 2$.

Ответ: $p = 2, q = -24$.

Пример 2. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 9x + a = 0$ равна 21?

Решение: Выясним, при каких значениях a уравнение имеет решение: $D = 81 - 4a$, $81 - 4a \geq 0, a \leq 20\frac{1}{4}$.

Если x_1 и x_2 – корни уравнения, то по теореме Виета: $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 \cdot x_2 = a$, тогда $x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 81 - 2a$. Получим: $81 - 2a = 21, a = 30$. Но $30 \notin \left(-\infty; 20\frac{1}{4}\right]$. Значит, нет таких a, при которых сумма квадратов корней равна 21.

Ответ: таких значений a не существует.

Пример 3. При каких a сумма корней уравнения $x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + (a^2 - 6a + 1) = 0$ равна нулю?

Решение: По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -(a^2 - 4a - 5)$, по условию: $-(a^2 - 4a - 5) = 0$, откуда получаем: $a_1 = -1, a_2 = 5$.

Проверим, удовлетворяют ли найденные числа заданному условию:

1) $a_1 = -1, x^2 + 8 = 0$, уравнение решений не имеет;

2) $a_2 = 5, x^2 - 4 = 0$, уравнение имеет корни -2 и 2, сумма которых равна нулю.

Ответ: $a = 5$.

Пример 4. При каких a оба корня уравнения $(2+a)x^2 - 2ax + 3a = 0$ положительны?

Решение: Согласно утверждению (1) необходимо выполнение условий: $D \geq 0$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$.

Получаем систему неравенств: $\begin{cases} 4a^2 - 12(2+a) \geq 0, \\ \frac{3a}{2+a} > 0, \\ \frac{2a}{2+a} > 0. \end{cases}$

Решив систему, получим $a \in [-3; -2)$.

Ответ: при $a \in [-3; -2)$.

Пример 5. При каких значениях a уравнение $x^2 - 2(a-1)x - 2a - 3 = 0$ имеет корни разных знаков?

Решение: Согласно утверждению (2) необходимо выполнение условия: $x_1 \cdot x_2 < 0$, т.е. $-2a - 3 < 0$, откуда $a > -1{,}5$.

Ответ: при $a \in (-1{,}5; +\infty)$.

Пример 6. При каких a корни уравнения $x^2 + (3-2a)x - 2a + 2 = 0$ различны и отрицательны?

Решение: Согласно утверждению (1) необходимо выполнение следующих условий: $D \geq 0$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, x_1 + x_2 < 0$,

$\begin{cases} (3-a)^2 + 4(3a-2) > 0, \\ 2a - 3 < 0, \\ -3a < 0 \end{cases}$. Решая систему, получим: $\begin{cases} 4a^2 + 1 > 0, \\ a < 1{,}5, \\ a > \frac{2}{3}. \end{cases}$

Откуда $a \in \left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right)$.

Ответ: при $a \in \left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right)$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни $-3;\ 8$. Найдите q.

Ответ: $q=-24$.

2. При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $x^2+(2-a-a^2)x-a^2+3=0$ равна нулю?

Ответ: при $a=-2$.

3. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+3x+2a=0$ равна 1?

Ответ: таких значений a не существует.

4. При каких a разность корней уравнения $x^2-ax+2=0$ равна 1?

Ответ: при $a=-3; a=3$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней уравнения $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ равна нулю.

Ответ: $a=-1; a=2$.

6. При каких a уравнение $x^2-2ax+a^2-a-6=0$ имеет два разных отрицательных корня.

Ответ: при $a\in(-6;-2)$.

Занятие №5. Тема: «Задания с параметрами на ОГЭ»

Пример 1. Постройте график функции $y=\frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: Найдем область определения функции: $x^2+5x+4\neq 0$. Тогда $x\neq-1, x\neq-4$. Разложим на множители квадратные трехчлены $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$ и $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. Преобразуем дробь: $\frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}=\frac{(x+3)(x+4)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+4)}=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$.

Построим графики функций (рисунок 9). Построим график функции $y = x^2 + x - 6$ при всех $x \neq -1, x \neq -4$. График этой функции – парабола, ветви которой направлены вверх, у которой есть две выколотые точки: $(-1;\ -6)$ и $(-4;\ 6)$. Вершина параболы: $x_\text{в} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$; $y_\text{в} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -6\frac{1}{4}$. Точки пересечения с осью абсцисс: $x = -3, x = 2$.

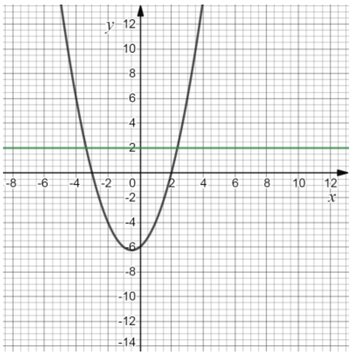


Рисунок 9

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку, если $m = -6{,}25;\ m = -6$ и $m = 6$.

Ответ: $m = -6{,}25;\ m = -6, m = 6$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+x-12)(x^2-3x+2)}{x^2-4x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: при $m = -9;\ -5;\ 7$.

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+3x-10)(x^2-1)}{x^2-x-2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: при $m = -9;\ -8;\ 7$.

Пример 2. Постройте график функции $y = \frac{3x+5}{3x^2+5x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: Найдем область определения функции $y = \frac{3x+5}{3x^2+5x}$: $3x^2 + 5x \neq 0, x \neq 0, x \neq -1\frac{2}{3}$.

Преобразуем дробь: $\frac{3x+5}{3x^2+5x} = \frac{3x+5}{x(3x+5)} = \frac{1}{x}$. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ при всех $x \neq 0, x \neq -1\frac{2}{3}$ (рисунок 9). График функции – гипербола с выколотой точкой $\left(-1\frac{2}{3}; -\frac{3}{5}\right)$.

График функции $y = kx$ – прямая (пучок прямых), проходящая через начало координат (рисунок 10).

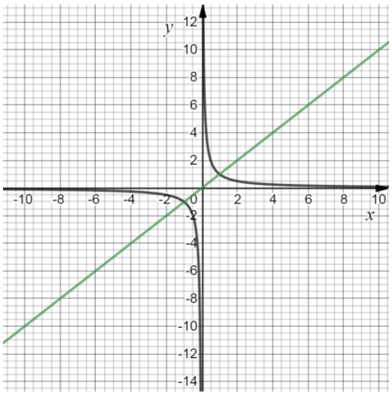


Рисунок 10

По рисунку видно, что прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции только одну общую точку, если прямая проходит через точку с координатами $\left(-1\frac{2}{3}; -\frac{3}{5}\right)$. Найдем соответствующее значение k: $-\frac{3}{5} = -\frac{5}{3} \cdot k, k = -\frac{3}{5} : \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{25}$.

Ответ: $k = \frac{9}{25}$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = \frac{9x+5}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k = 81$.

2. Постройте график функции $y = \frac{x-3}{x^2-3x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k = \frac{1}{9}$.

Пример 3. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 6, \text{если } x \geq 2, \\ x - 4, \text{если } x < 2. \end{cases}$ Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: График функции $x^2 - 6x + 6$ – часть параболы, расположенной на промежутке $x \in [2; +\infty)$. Вершина параболы $(3; -3), y(2) = -2$ (рисунок 11).

График функции $y = x - 4$ – открытый луч с началом в точке $(2;\ -2)$ и проходящий через точку $(0; -4)$ (рисунок 11).

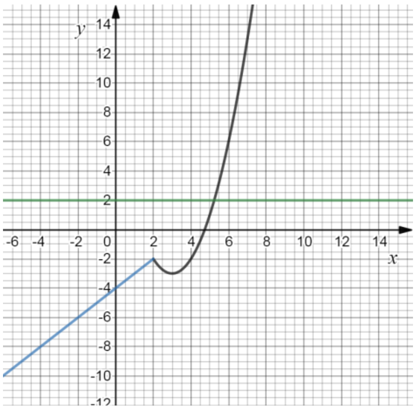


Рисунок 11

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $m = -3$ и $m = -2$.

Ответ: $m = -3, m = -2$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 10x + 25, \text{если } x \geq 4, \\ x - 3, \text{если } x < 4. \end{cases}$ Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m = 0, m = 1$.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14, \text{если } x \geq 3, \\ x - 4, \text{если } x < 3. \end{cases}$ Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m = -2, m = -1$.

Пример 4. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, \text{если } x \geq -3, \\ -\frac{3}{x}, \text{если } x < -3. \end{cases}$ Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение: График функции $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ – часть параболы, расположенной на промежутке $x \in [-3; +\infty)$. Вершина параболы $(-2; 0)$, $y(-3) = 1$. Ветви параболы направлены вверх (рисунок 12).

График функции $y = -\frac{3}{x}$ при $x \in (-\infty; -3)$ – часть гиперболы, расположенная во второй четверти, тогда $y(-3) = 1$ (рисунок 12).

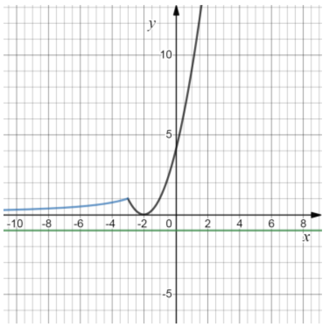


Рисунок 12

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. Прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции одну или две общие точки, если $m = 0$ и $1 \leq m < +\infty$.

Ответ: $m \in \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, \text{если } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x}, \text{если } x < -4. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $m \in \{0\} \cup [4; +\infty)$.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{если } x < -2. \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $m \in \{0\} \cup [9; +\infty)$.

Пример 5. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение: Найдем область определения функции: $1 - x \neq 0, x \neq 1$.

Упростим выражение $\frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x} = -x^2 - 2,25$.

Построим график функции $y = -x^2 - 2,25$ для $x \neq 1$, при $y(1) = 1 - 2,25 = -3,25$.

График функции – парабола, ветви которой направлены вниз, на графике выколота точка $(1; -3,25)$. Вершина параболы $(0; -2,25)$ (рисунок 13).

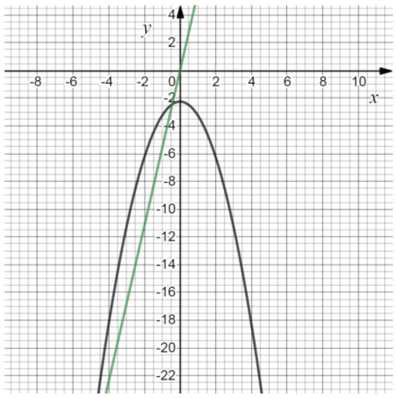


Рисунок 13

Прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x}$ ровно одну общую точку, если:

1) прямая проходит через точку $(1; -3,25)$, т.е. $3,25 = k \cdot 1, k = -3,25$;

2) если прямая является касательной к графику функции, т.е. уравнение $-x^2 - 2,2 = kx$ имеет одно решение: $x^2 + kx + 2,25 = 0, D = k^2 - 9 = 0, k = \pm 3$.

Ответ: $k = -3,25, k = \pm 3$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+4)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k = -5;\ \pm 4$.

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k = 5;\ \pm 4$.

Пример 6. Постройте график функции $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение: Найдем область определения данной функции: $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}, x \neq 0, x \neq -1$.

Преобразуем выражение $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x} = -4 - \frac{x+1}{x(x+1)} = -4 - \frac{1}{x}$.

Построим график функции $y = -4 - \frac{1}{x}$ для всех $x \neq 0, x \neq -1, y(-1) = -3$ (рисунок 14).

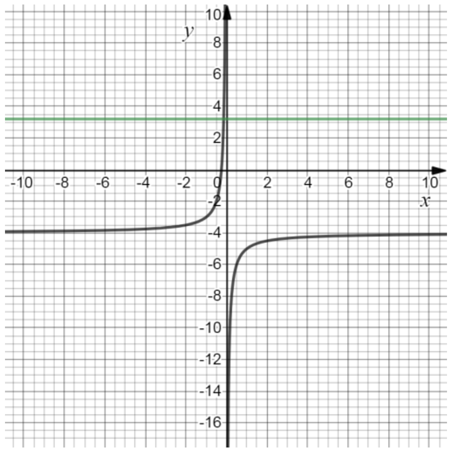


Рисунок 14

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. Прямая $y = m$ не имеет с графиком функции $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$ ни одной общей точки при $m = -4, m = -3$.

Ответ: $m = -4, m = -3$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = 5 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Ответ: $m = 5, m = 5{,}2$.

2. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Ответ: $m = -2, m = -1{,}75$.

Пример 7. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4-x^3}{x^2-x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: Найдем область определения функции $y = -2 - \frac{x^4-x^3}{x^2-x}$, получим $x \neq 0;\ x \neq 1$.

Преобразуем выражение $y = -2 - \frac{x^4-x^3}{x^2-x} = -2 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -2 - x^2$.

Построим график функции $y = -2 - x^2$ для всех $x \neq 0; x \neq 1, y(1) = -3, y(0) = -2$ (рисунок 15).

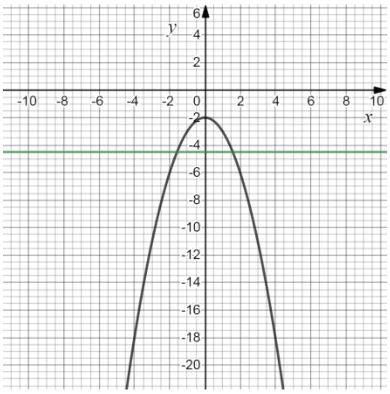


Рисунок 15

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. Прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = -2 - \frac{x^4-x^3}{x^2-x}$ ровно две общие точки при $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2)$.

Ответ: $m \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2)$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = -5 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m \in (-\infty; -6) \cup (-6; -5)$.

2. Постройте график функции $y = 4 - \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$.

Пример 8. Постройте график функции $y = \begin{cases} x - 3, \text{если } x < 3, \\ -1{,}5x + 4{,}5, \text{если } 3 \leq x \leq 4, \\ 1{,}5x - 7{,}5, \text{если } x > 4 \end{cases}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: График функции $y = x - 3$, если $x < 3$ – открытый луч с началом в точке $(3;\ 0)$ и проходящий через точку $(0;\ -3)$.

График функции $y = -1{,}5x + 4{,}5$, если $3 \leq x \leq 4$ – отрезок с концами в точках $(3;\ 0)$ и $(4;\ -1{,}5)$ (рисунок 16).

График функции $y = 1{,}5x - 7{,}5$, если $x > 4$ – открытый луч с началом в точке $(4;\ -1{,}5)$ и проходящий через точку $(5;\ 0)$ (рисунок 16).

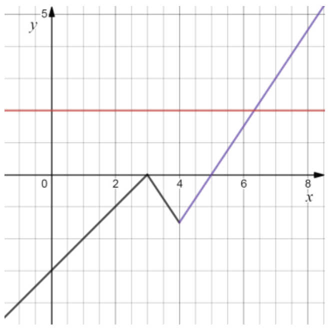


Рисунок 16

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. По рисунку имеем, что прямая $y = m$ имеет с графиком заданной функции ровно две общие точки при $m = -1{,}5$ и $m = 0$.

Ответ: $m = -1,5, m = 0$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} 1,5x - 3, \text{если } x < 2, \\ -1,5x + 3, \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ 3x - 10,5, \text{если } x > 3 \end{cases}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m = -1,5, m = 0$.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} 2,5x - 1, \text{если } x < 1, \\ -2,5x + 4, \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 1,5x - 8, \text{если } x > 3 \end{cases}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m = -3,5, m = 1,5$.

Пример 9. Постройте график функции $y = x^2 - 5x - 5|x - 2| + 6$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение: Раскроем модуль и рассмотрим два случая:

1. При $x \geq 2$ имеем: $y = x^2 - 5x - 5(x - 2) + 6 = x^2 - 10x + 16$.

Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх (рисунок 16). Абсцисса вершины: $x_{\text{в}} = -\frac{b}{a} = 5$, тогда ордината вершины $y_0 = y(5) = -9$. Точка пересечения графика с осью ординат: $y(0) = 16$. Точки пересечения графика с осью абсцисс найдем из уравнения $x^2 - 10x + 16 = 0$. Получим $x = 2, x = 8$;

2. При $x < 2$ имеем: $y = x^2 - 5x - 5(-x + 2) + 6 = x^2 - 4$.

Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх (рисунок 17). Абсцисса вершины: $x_{\text{в}} = -\frac{b}{a} = 0$, тогда ордината вершины $y_0 = y(0) = -4$. Точка пересечения графика с осью ординат: $y(0) = -4$. Точки пересечения графика с осью абсцисс найдем из уравнения $x^2 - 4 = 0$. Получим $x = \pm 2$.

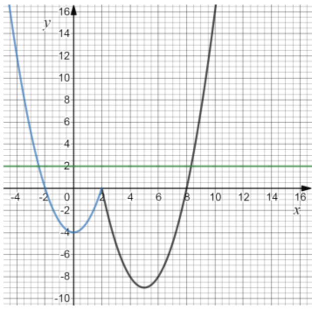


Рисунок 17

Прямая $y = m$ задает пучок прямых, параллельных оси абсцисс. Данная прямая имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $m = 0$ и $m = -4$.

Ответ: $m = 0$ и $m = -4$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Постройте график функции $y = x^2 + 14x - 3|x + 8| + 48$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = 0$ и $m = -\frac{1}{4}$.

2. Постройте график функции $y = x^2 - 9x - 2|x - 4| + 20$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = 0$ и $m = -\frac{1}{4}$.

Пример 10. При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 + 4mx + 2m$ и $y = -x^2 + 2mx + 4$ расположены по одну сторону от оси x?

Решение: Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$. Координата $y_в$ находится путем подстановки $x_в$ в уравнение параболы. Вершины параболы будут находиться по одну сторону от оси x в том случае, если координаты их вершин имеют одинаковые знаки. Зная, что два сомножителя имеют одинаковые знаки тогда (и только тогда), когда их произведение положительно, записываем:

$$x_{в_1} = -2m \text{ и } x_{в_2} = m,$$

$$(4m^2 - 8m^2 + 2m)(-m^2 + 2m^2 + 4) > 0,$$

$$(-4m^2 + 2m)(m^2 + 4) > 0.$$

Заметим, что второй множитель всегда больше нуля, поэтому на него можно сократить:

$$-4m\left(m - \frac{1}{2}\right) > 0 \text{ или } m\left(m - \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов, получаем (рисунок 18):

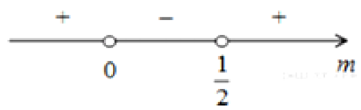


Рисунок 18

Ответ: $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Задания для самостоятельного решения:

1. При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 - 4mx + m$ и $y = -x^2 + 8mx + 4$ расположены по одну сторону от оси x?

Ответ: $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

2. При каких значениях p вершины парабол $y = x^2 - 2px - 1$ и $y = -x^2 + 4px + p$ расположены по разные стороны от оси x?

Ответ: $p \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup (0; +\infty)$.

Занятие №6. Тема: «Итоговая контрольная работа»

Задания итогового контроля:

Пример 1. Решите уравнение $a^2(x-1)+6x=(5x-2)a$.

Ответ: при $a=2$ $x-$любое; при $a=3$ решений нет; при $a\neq 2$ и $a\neq 3$ $x=\frac{a}{a-3}$.

Пример 2. При каких значениях параметра a ровно один из корней уравнения $x^2-4x+a=0$ принадлежит интервалу (1;4)?

Ответ: $a\in(0;3)$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых квадратное уравнение $ax^2+2ax+9=0$ имеет корни одного знака.

Ответ: $a\in[9;+\infty)$.

Пример 4. Постройте график функции $y=\begin{cases}-\frac{5}{x}, x\leq -1,\\ x^2-4x, x>-1\end{cases}$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ будет пересекать график в трех точках.

Ответ: $c\in(0;5)$.

2.4. Исследование результатов практического применения факультативного курса на тему «Решение задач с параметрами в основной школе»

Педагогический эксперимент по применению разработанного факультативного курса проходил апробацию в течение трех недель с 11.11.19 по 29.11.19 на базе МАОУ "СОШ №153 г. Челябинска". В исследовании принимали участие выпускники 9 «А» класса. В рамках данного эксперимента было проведено несколько внеурочных занятий, а также две самостоятельные работы.

Учащиеся, посещавшие этот факультатив, не подвергались специальному отбору. Однако классным руководителем (по совместительству их учителем математики) перед всем классом заранее была озвучена тема предстоящих внеурочных занятий, и последовало особое приглашение тех ребят, которые планируют сдать ОГЭ на высший балл и перейти в физико-математический класс. В результате, на первое занятие из 25 учеников класса пришло 17 ребят. В процессе работы некоторые ученики, естественно, отсеялись, не выдержав дополнительной нагрузки и достаточно высокого уровня сложности рассматриваемых задач. Поэтому к концу курса факультатив посещали 14 учеников.

На первом занятии учащиеся выполняли задания входного контроля (п. 2.3.3). Им было предложено решить четыре задачи, из которых первые две были взяты из изученного ими материала 7-8 классов, где нужно было исследовать простейшее линейное и квадратное уравнение с параметром на количество решений; третье и четвертое задания были взяты из открытого банка ОГЭ и представляли собой наиболее простые варианты задачи №23, которые могли бы попасться им на экзамене. Однако получив карточки, учащиеся пришли в недоумение от того, что от них требовалось. Оказалось, что задания такого типа им были незнакомы, так как не были детально рассмотрены на уроках алгебры. Те ребята, которые все-таки справились с некоторыми из задач, в свою очередь признались, что разбирали их с репетитором. Поэтому уже на этом занятии мне пришлось объяснить ребятам понятие «Параметр» и рассмотреть с ними похожие задания, после которых они вновь приступили к самостоятельной работе. Такое положение дел лишь подтвердило существование проблемы обучения решению задач с параметром и подчеркнуло ее актуальность. К концу занятия ученики сдали работы, а результаты самостоятельной работы были внесены в специальную таблицу (Таблица 4).

Анализ работ входного контроля (рисунок 19) показал низкий уровень знаний учащихся по данной теме. Так, к заданию №1 приступили все ребята, однако, несмотря на разобранный ранее аналогичный пример, справились с ним лишь 8 человек (57%).

Ко второму заданию приступило 12 человек, из которых правильно или с небольшими недочетами справились лишь 5 человек (36%).

Из 13 учеников, приступивших к заданию №3, верно с ним справились 5 человек (36%).

К заданию №4 приступили лишь 9 человек, из которых 1 ученик (7%) справился с заданием на «Отлично». Еще один ученик получил верный ответ, однако график был выполнен некорректно – не были учтены указанные в тексте промежутки.

Рисунок 19 – Результаты выполнения самостоятельной работы

Учитывая результаты самостоятельной работы и возможности учащихся, я начала следующее занятие с подробного разбора понятия «Параметр» и того, как необходимо оформлять ответ при решении таких задач. Обучающиеся с интересом слушали мини-лекцию и задавали уточняющие вопросы. Затем мы перешли к решению задач и разбору тех ошибок, которые они допустили на входном контроле.

Каждое последующее занятие основного блока проходило по одинаковой схеме: сначала мы совместно разбирали задания разного типа (с разъяснением ошибок, которые они допускали), а затем учащиеся самостоятельно выполняли аналогичные задачи.

Так как в мою факультативную группу входили наиболее сильные ученики, то нам удалось не только выполнить все предложенные задания, но и больше времени уделить именно заданиям из ОГЭ.

На последнем же занятии была проведена итоговая контрольная работа. Полученные результаты также были внесены в специальную таблицу (Таблица 4).

В этот раз анализ полученных данных (рисунок 20) показал, что ко всем четырем заданиям с уверенностью приступали все ученики. С заданием №1 верно справились все выпускники (100%). Задания №2 и №3 правильно выполнили 11 учеников (79%). При выполнении задания №4 лишь 1 ученик допустил грубую ошибку.

Рисунок 20 – Результаты выполнения самостоятельной работы

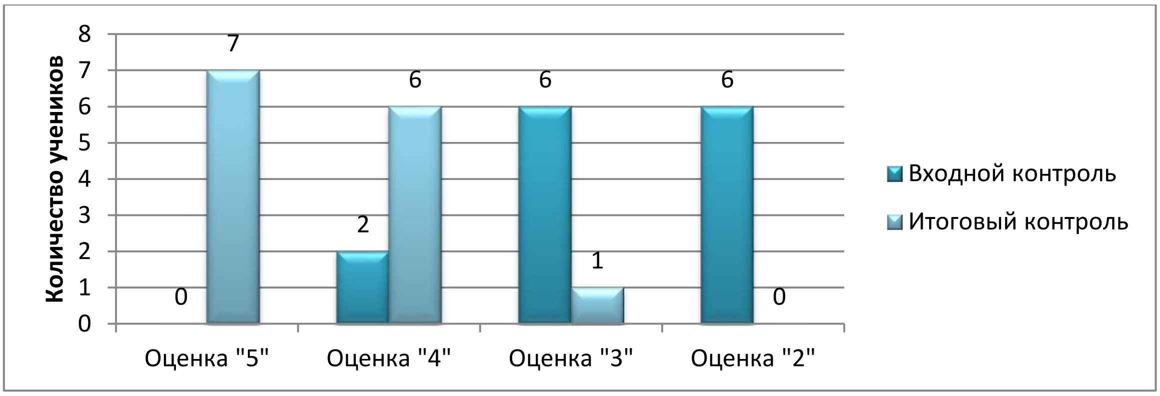
Таблица 4 – С

№		Входной контроль	Итоговый контроль
1	*2*	*3*	*4*
1	Количество учащихся	14	
2	Оценка «5»	0	7
3	Оценка «4»	2	6
4	Оценка «3»	6	1
5	Оценка «2»	6	0

6	Качество знаний	14,29%	92, 86%
7	Успеваемость	57, 14%	100%

Таблица результатов показывает, что в процессе прохождения факультативного курса учащиеся улучшили свои результаты. Кроме того, ученики, которые получили за итоговую контрольную работу, не испытывали трудностей с параметром, их подвел недостаточный уровень умения правильно строить графики функций.

Табличные данные можно представить в сравнении в виде следующих диаграмм (рисунок 21):



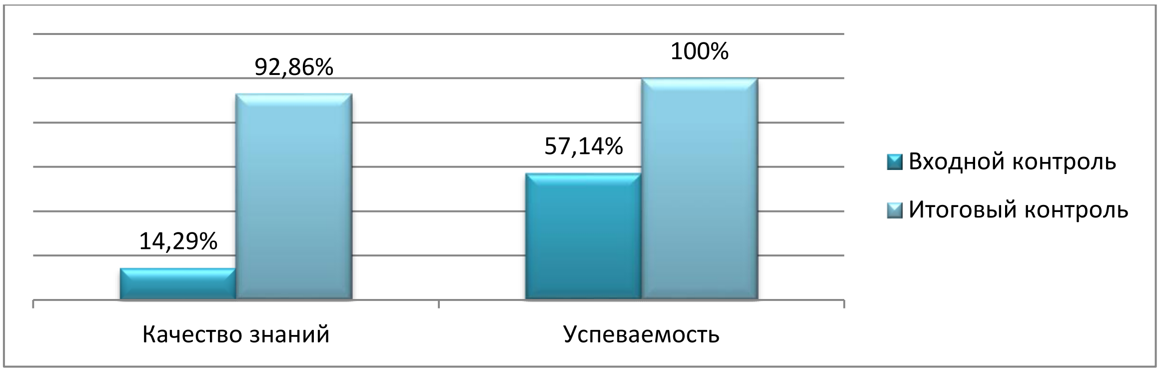


Рисунок 21 – Сравнение результатов входного и итогового контроля

Как видно из сравнительных диаграмм, успеваемость и качество знаний у учащихся значительно возросли. Сами же ученики отметили, что при последующей подготовке к ОГЭ они не испытывали трудностей при решении этого задания.

По окончании факультативного курса можно сделать вывод, что благодаря дополнительным занятиям у учеников не только повысился уровень знаний по данной теме и укрепились навыки исследования, но и вырос интерес к математике и той творческой деятельности, которая с ней связана.

Выводы по главе II:

1. В данной главе представлены общие методические рекомендации по введению понятия параметра, а также предложен один из вариантов реализации методики обучения решению задач с параметрами в рамках обобщающего повторения курса основной школы. Программа разработанного факультативного курса была составлена исходя из анализа основных тем, анализа учебников и структуры предлагаемых заданий в ОГЭ, а также возможностей обучающихся.

2. Проведение эксперимента и апробация факультатива показали, что благодаря предлагаемой разработке у учащихся не только улучшились такие показатели как успеваемость и качество знаний, но и возрос интерес к проведению исследовательской деятельности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задания с параметрами – это прекрасный материал для настоящей исследовательской работы учеников. Развивающий характер этих задач обусловлен присущей им способностью активизировать у обучающихся разнообразные виды мыслительной деятельности. Среди последних можно выделить следующие: умение выражать одну переменную через другие, определять наличие и количество корней; повторение в ходе решения большого объема формул; выработка определенных алгоритмов мышления; знание определенных методов решения, а также широкое применение анализа, словесной и графической аргументации; развитие графической культуры учащихся. Все это определяет необходимость изучения задач с параметрами в школьном курсе математики. Однако, к сожалению, в большинстве школьных программ задачи с параметрами не предусмотрены в качестве отдельных тем, а времени на знакомство с ними в рамках других разделов отводится кране мало.

В ходе исследования были выполнены следующие задачи:

1. Проведен анализ научно-методической, математической и психолого-педагогической литературы по теме исследования.
2. Были рассмотрены основные понятие темы такие как параметр, задачи с параметром, методы решения задач с параметром.
3. Проведен анализ действующих учебников по алгебре за 7-9 класс на предмет представления в них данной темы.
4. Рассмотрены основные задачи с параметром, представленные в открытом банке заданий ОГЭ по математике.
5. Разработан и апробирован факультативный курс по алгебре «Решение задач с параметрами в основной школе».
6. Проведен анализ эффективности и практической значимости разработанного факультативного курса.

Анализ учебной литературы выявил следующие существенные недостатки в обучении решению задач с параметрами:

- в основном все задания, связанные с решением параметрических уравнений, носят повышенный уровень сложности, и данной теме, как правило, уделяется очень мало внимания, изучение очень поверхностное;
- в некоторых учебниках предполагается более глубокое изучение темы, но отсутствуют точные определения рассматриваемых объектов.

На основании изученной литературы и анализа заданий с параметрами, представленных в ОГЭ, был разработан факультативный курс по алгебре «Решение задач с параметрами в основной школе», который включает в себя повторение и систематизацию основного материала по теме, а также все типы задач с параметром, встречающиеся в выпускном экзамене. Апробация и исследование результатов его проведения показали наличие положительной динамики в освоении учащимися данного материала.

Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что данный курс доступен и эффективен при организации занятий, ориентированных на повторение материала и на подготовку к ГИА.

Данная методика может быть применена как для урочной, так и внеурочной деятельности обучающихся.

Таким образом, цель данного исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Говдырь А.И. Особенности и проблемы преподавания темы "Методы решений уравнений с параметром" в 9 классе [Текст] / А. И. Говдырь // Математическое и информационное моделирование: Сб. науч. тр. – Тюмень, 2017. – С. 133-138.

2. Гусев В. А. Математика. Справочные материалы: книга для учащихся / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович – М.: Просвещение, 1990. – С. 416.

3. Гущин Д. Д. Сдам ГИА: Решу ОГЭ и ЕГЭ: Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://math-oge.sdamgia.ru/ (дата обращения 02. 03. 2020). — Текст: электронный.

4. Дорофеев Г. В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2014. – С. 287.

5. Дорофеев Г. В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2016. – С. 320.

6. Дорофеев Г. В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2016. – С. 336.

7. Захаров Н. А. Использование комбинации функций при решении задач ОГЭ [Текст] / Н. А. Захаров // Сельские территории: проблемы и перспективы устойчивого развития: материалы международной научно-практической конференции. – 2017. – С. 192-196.

8. Керимов Р.Ф. Методические рекомендации. Линейные уравнения и системы линейных уравнений с параметрами / Р. Ф Керимов – М.: Просвещение, 2011. – С. 32.

9. Колягин Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб. пособие для студентов физ. – мат. факультетов пед. вузов / Ю. М. Колягин – М.: Просвещение, 1995. – С. 462.

10. Коннова Е. Г. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром / Е. Г. Коннова – Ростов-на-Дону: Легион, 2014. – С. 64.

11. Кочагина М. Н. ГИА по математике: 9 класс: Подготовка учащихся к итоговой аттестации / М. Н. Кочагина, В. В. Кочагин. – М.: Эксмо, 2009. – С. 192.

12. Кузнецова Л. В. Алгебра: сб. заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе [Текст] / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2010. – С. 191.

13. Кузнецова Л. В. ОГЭ. Математика. Справочник с комментариями ведущих экспертов: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Л. В. Кузнецова – М.: Просвещение, 2019. – С. 190.

14. Лаппо Л. Д. ОГЭ 2020. Экзаменационный тренажер. 20 экзаменационных вариантов. Математика / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов – М.: Экзамен, 2019. – С. 119.

15. Левина О. А. Методические рекомендации по подготовке к ОГЭ по математике: метод. материалы / О. А. Левина – Смоленск: ГАУ ДПО СОИРО, 2019. – С. 88.

16. Лукконен Е.В. Обучение учащихся 7-9-х классов решению задач с параметрами [Текст] / Е. В. Лукконен // Вопросы математики, ее истории и методики преподавания в учебно-исследовательских работах: матер. Всеросс. науч. – практ. конф. студентов матем. фак-тов / ред. кол.: И. В. Косолапова; А. Ю. Скорнякова, под общ. ред. А. Ю. Скорняковой; Перм. гос. гуманит. – пед. ун-т. – Пермь, 2018. – С. 49-50.

17. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков. – М.: Просвещение. 2013. – С. 256.

18. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков. – М.: Просвещение. 2013. – С. 287.

19. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков. – М.: Просвещение. 2014. – С. 271.

20. Мерзляк А. Г. Алгебра: 7 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2018. – С. 272.

21. Мерзляк А. Г. Алгебра: 8 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2019. – С. 256.

22. Мерзляк А. Г. Алгебра: 9 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2018. – С. 304.

23. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин – М.: Экзамен, 2009. – С. 288.

24. Народные русские сказки А.Н. Афанасьева в 3 томах. Том 1. — Лит. памятники. — М.: Наука, 1984—1985. – С. 960.

25. Открытый банк заданий ОГЭ ФИПИ: Демоверсия 2017. – URL: http://opengia.ru/subjects/mathematics-9/topics/1. (дата обращения 02. 03. 2020). — Текст: электронный.

26. Потапов М. К. Алгебра. 7 класс. Методические рекомендации [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. организаций / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – С. 143.

27. Радионова О. А. Методические аспекты и способы решения задач с параметрами из ЕГЭ [Текст] / О. А. Радионова // Диагностика результатов обучения естественно-математическим дисциплинам в условиях реализации федеральных государственных образовательных стандартов: сб. матер. Всеросс. науч. – практ. конф. 26–27 апреля. – Челябинск: Изд-во Забродина Дмитрия Александровича, 2019. – С. 48-52.

28. Решоткина Н. А. Решение задач с параметрами [Текст] / Н. А. Решоткина // Образовательная среда сегодня: теория и практика: материалы VII Междунар. науч. – практ. конф. (Чебоксары, 2 нояб. 2018 г.) / редкол.: О.Н. Широков [и др.] – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2018. – С 92-98.

29. Семенов А. В. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации / А. В. Семенов, А. С. Трещалин. – М.: Интеллект-Центр, 2019. – С. 272.

30. Современный толковый словарь. – URL: http://www.baldatop.ru/dictionary/modernbse. (дата обращения 04. 02. 2020). — Текст: электронный.

31. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (редакция от 27.12.2019) – Доступ из СПС «КонсультантПлюс». – Текст: электронный.

32. Храмова Н. Н. Теория и практика повторения в обучении математике учащихся основной школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Храмова Наталья Николаевна; науч. рук. Г. И. Саранцев; ПГПУ им. В. Г. Белинского. – Пенза, 2004. – С. 170.

33. Ястребинецкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: пособие для учителей / Г. А. Ястребинецкий – М.: Просвещение, 1977. – С. 128.

34. Ященко И. В. ГИА. Математика: типовые варианты: 20 вариантов / И. В. Ященко – М.: Национальное образование, 2019. – С. 112.

35. Ященко И. В. ОГЭ 2020. Математика. Типовые варианты заданий. 50 вариантов / И. В. Ященко – М.: Интеллект-Центр, 2019. – С. 280.

36. Ященко И. В. ОГЭ 2020. Математика. Типовые варианты экзаменационных заданий. 38 вариантов / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий. – М.: Экзамен, 2019. – С. 215.

37. Ященко И. В. Я сдам ОГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки. Ключи и ответы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / И. В. Ященко, С. А. Шестаков. – М.: Просвещение, 2017. – С. 143.