

Н.А. ДЕГТЯРЕВА

**МОДЕЛИ АНАЛИЗА И
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

МОНОГРАФИЯ

Челябинск, 2018

УДК 330.115:519.27

ББК 65В641:22.172.8

Д 26

Дегтярева, Н.А. Модели анализа и прогнозирования на основе временных рядов: монография / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера, 2018. – 160 с.

ISBN 978-5-93162-080-0

В данном исследовании представлены наиболее актуальные проблемы экономико-математического моделирования на основе временных рядов; приведена теоретическая и методологическая основа экономико-математических исследований; приведены исследования в области применения различных моделей для анализа и прогнозирования социально-экономических явлений и процессов в обществе

Рецензенты:

В.Н. Павленко, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет».

И.Д. Колмакова, доктор экономических наук, заведующая кафедрой «Государственное и муниципальное управление» ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет».

ISBN 978-5-93162-080-0

Дегтярева Н.А, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	8
1.1. Понятие и классификация временных рядов.	8
1.2. Предварительный анализ и сглаживание временных рядов.	14
1.3. Расчет показателей динамики развития экономических процессов.....	26
1.4. Тренд - сезонные экономические процессы и их анализ.....	35
ГЛАВА II. ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.	43
2.1. Оценка адекватности модели.	43
2.2. Оценка точности модели.	46
2.3. Точечный и интервальный прогнозы.	47
2.4. Прогнозирование экономической динамики трендовых моделей.....	50
ГЛАВА III. АДАПТИВНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ.....	61
3.1. Сущность адаптивных методов и моделей прогнозирования.	61
3.2. Модели Хольта и Брауна.....	71
3.3. Виды моделей, учитывающих сезонную компоненту.	76
3.3.1. Модель Хольта-Уинтерса.	76
3.3.2. Модель Тейла-Вейджа.	78
3.3.3. Тренд-сезонная модель.	79
ГЛАВА IV. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО - ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	82
4.1. Применение методов и моделей анализа и прогнозирования экономических процессов.....	82
4.2. Применение адаптивной модели Брауна для прогнозирования финансово-экономических процессов.....	97
4.3. Применение трендовой модели и аддитивной модели Брауна для прогнозирования курса доллара.....	104
4.4. Применение адаптивных моделей для анализа и прогнозирования процессов, испытывающих на себе влияние сезонности ...	111
4.5. Применение мультипликативных адаптивных моделей для анализа и прогнозирования объема продаж компьютеров и их комплектующих.....	124
4.6. Применение моделей, учитывающих сезонную компоненту для анализа и прогнозирования объема продаж продукции предприятия.....	134
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	151
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	153

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование в научных и техниках стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию, общественные науки и др.

Основная задача моделирования различного рода процессов и систем с целью исследования объектов, прогнозирования их поведения или поиска наилучших условий функционирования сводится к расчету анализируемых показателей по математической модели при тех или иных значениях (или функциях) входных величин.

Экономико-математическое моделирование - это описание знаковыми математическими средствами социально-экономических систем.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются: анализ экономических объектов и процессов; экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов; выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов в человеко-машинных системах планирования и управления экономическими системами.

Сейчас, когда предприятия вынуждены работать по рыночным законам, менеджеры хотят знать перспективы развития своего предприятия, или, иначе говоря, взглянуть в будущее, оценить возможные пути развития, предугадать последствия тех или иных решений. Именно этим занимается прогнозирование.

В основе прогнозирования лежит предположение, что зависимость в потреблении, существующая в прошлом, сохранится в будущем.

Прогнозирование, в широком понимании этого слова, определяется как опережающее отражение будущего. Прогноз - научно обоснованное описание возможных состояний системы в будущем и сроков достижения этих состояний. Прогнозы используются для оперативного управления, контроля и оценки результатов управленческих решений. Задачи прогнозирования решаются в самых разнообразных областях человеческой деятельности, таких как наука, экономика, производство и множество других сфер. Прогнозирование является важным элементом организации управления, как отдельными хозяйствующими субъектами, так и экономики в целом. Развитие методов прогнозирования непосредственно связано с развитием информационных технологий, в частности, с ростом объема хранимых данных и усложнением методов и алгоритмов прогнозирования. Задача прогнозирования считается одной из наиболее сложных задач, она требует тщательного исследования исходного набора данных и методов, подходящих для анализа.

В современных условиях в силу динамичности процессов и возрастания неопределенностей информации наиболее актуальным делом становится краткосрочное прогнозирование. При краткосрочном прогнозировании наиболее важными являются последние данные исследуемого процесса, а не тенденция, сложившаяся на всем периоде предыстории. В настоящее время существует множество методов прогнозирования, каждый из которых имеет свою отличительную особенность. Одним из наиболее перспективных методов прогнозирования одномерных временных рядов, которые характеризуют историческую информацию, хранящуюся в базе данных, считаются адаптивные методы. Адаптивные методы учитывают неравноценность уровней временного ряда, степень «устаревания» данных. Важнейшее достоинство таких методов – построение самокорректирующихся моделей, способных учитывать результат прогноза, сделанного на предыдущем шаге.

Прогнозирование методом экстраполяции на основе кривых роста в какой-то мере тоже содержит элемент адаптации, поскольку с получением «свежих» фактических данных параметры кривых пересчитываются заново. Поступление новых данных может привести и к замене выбранной ранее кривой на другую модель. Однако, степень адаптации в данном случае весьма незначительна, кроме того, она падает с ростом длины временного ряда, т.к. при этом уменьшается «весомость» каждой новой точки. В адаптивных методах различную ценность уровней, в зависимости от их «возраста», можно учесть с помощью системы весов, придаваемых этим уровням.

В монографии рассмотрены прикладные аспекты анализа временных рядов, которые полезны при решении практических задач в экономике, финансах. Одной из важнейших задач дисциплины эконометрики, дисциплины экономико-математические методы и модели является изучение анализируемых показателей во времени, что решается при помощи анализа временных рядов. Учет временной структуры данных, о реальных экономических процессах, позволяет адекватно отразить их в математических и эконометрических моделях. Осознание этого факта привело как к ревизии многих макроэкономических теорий и построений, так и к бурному развитию специфических методов анализа таких данных. Знание этих методов и способов применения их к анализу конкретных экономических процессов, является в настоящее время актуальным.

Основной упор при исследовании делается на методы подбора математической модели для описания временного ряда и прогнозирования его поведения.

При анализе временных рядов будут рассмотрены различные методы, наиболее распространенными из которых являются:

1) корреляционный анализ, используемый для выявления характерных особенностей ряда (периодичностей, тенденций и т. д.);

2) спектральный анализ, позволяющий находить периодические составляющие временного ряда;

3) методы сглаживания и фильтрации, предназначенные для преобразования временных рядов с целью удаления высокочастотных и сезонных колебаний;

4) модели авторегрессии и скользящего среднего для исследования случайной составляющей временного ряда;

5) методы прогнозирования.

В теоретических и прикладных исследованиях рассматривают широкий спектр моделей временных рядов. В монографии рассмотрены стационарные модели. В них совместные функции распределения $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ для любого числа моментов времени k , а потому и все характеристики временного ряда не меняются со временем. В частности, математическое ожидание и дисперсия являются постоянными величинами, автокорреляционная функция зависит только от разности $t - s$.

ГЛАВА I. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. Понятие и классификация временных рядов

Динамические процессы, происходящие в экономических системах, чаще всего проявляются в виде ряда последовательно расположенных в хронологическом порядке значений того или иного показателя, который в своих изменениях отражает ход развития изучаемого явления в экономике. Эти значения могут служить для обоснования (или отрицания) различных моделей социально-экономических систем [4].

Последовательность наблюдений одного показателя (признака), упорядоченных в зависимости от последовательно возрастающих или убывающих значений другого показателя (признака), называется динамическим рядом, или рядом динамики. Если в качестве признака, в зависимости от которого происходит упорядочение, берется время, то такой динамический ряд называется временным рядом [3].

Сведения о развитии социально-экономических процессов или явлений мы получаем на основе информации, имеющейся во временных рядах, в которых важны не только сами наблюдаемые значения случайных величин, но и порядок их следования друг за другом. Главной особенностью этой информации является то, что она зависит от множества различных факторов, а время как бы аккумулирует их влияние [6]. Чаще всего упорядоченность обусловлена тем, что экспериментальные данные представляют собой серию наблюдений одной и той же случайной величины в последовательные моменты времени. Тип распределения наблюдаемой случайной величины остается одним и тем же, но параметры его меняются в зависимости от времени.

Каждый временной ряд содержит два элемента:

- значения времени за который, или по состоянию на который, приводятся числовые значения;
- соответствующие им значения уровней ряда числовых значений того или иного показателя.

Под длиной временного ряда понимается время, прошедшее от начального момента наблюдения до конечного или количество уровней, входящих во временной ряд.

В качестве показателя времени в рядах динамики указываются определенные моменты времени (даты), отдельные периоды (сутки, месяцы, кварталы, полугодия, годы) и т.д. В зависимости от характера временного параметра ряды делятся на моментные и интервальные. В моментных рядах динамики уровни характеризуют значения показателя по состоянию на определенные моменты времени. В интервальных рядах уровни характеризуют значение показателя за определенные интервалы (периоды) времени [7].

Временной ряд может быть образован как из абсолютных значений экономических показателей, так и из средних или относительных величин – это производные ряды.

Уровни ряда могут иметь детерминированные или случайные значения. Ряд последовательных данных о количестве дней в месяце, квартале или году является примером рядов с детерминированными значениями.

При статистическом исследовании финансово-экономических показателей в ходе анализа вычисляют характеристики динамики их развития, выявляют закономерности прошлого развития и оценивают возможность их перенесения на будущее. Основной формой представления статистической информации является временной ряд наблюдений. Для этого необходимо [53]:

1. иметь достаточный для проявления статистических закономерностей объем данных (для годовых наблюдений – не менее 5 уровней, для сезонных компонент – не менее трех периодов сезонности);
2. обеспечить методологическую сопоставимость данных;
3. на основе содержательного анализа исследуемого показателя обосновать возможность переноса закономерностей прошлого на выбранный период прогнозирования;
4. получить адекватную математическую модель и на ее основе построить точечный и интервальный прогнозы.

Основной чертой, выделяющей анализ временных рядов среди других видов статистического анализа, является существенность порядка, в котором производится наблюдение. Отличие временных экономических рядов от простых статистических совокупностей (пространственных выборок) заключается в том, что, во-первых, уровни временного ряда не являются статистически независимыми, а во-вторых, члены временного ряда не являются одинаково распределенными.

Прогнозированию подвергаются ряды со случайными значениями уровней.

Важным условием правильного отражения временным рядом реального процесса развития является то, что его уровни обязательно должны быть сопоставимыми, однородными и устойчивыми, а их число должно быть достаточно велико.

Сопоставимость достигается в результате одинаково подхода к наблюдениям на разных этапах формирования ряда. Уровни во временных рядах должны иметь одинаковые единицы измерения, шаг наблюдений, интервал времени, методику расчета и т.д. Однородность данных означает отсутствие сильных изломов тенденций, а также аномальных наблюдений, которые проявляются в виде сильного изменения уровня – скачка или

спада – с последующим приблизительным восстановлением предыдущего уровня.

Устойчивость характеризуется преобладанием закономерности над случайностью в изменении уровней ряда.

Требование полноты данных обуславливается тем, что закономерность не может обнаружиться лишь при наличии минимально допустимого объема наблюдений.

Существуют две основные цели анализа временных рядов: определение природы ряда; прогнозирование (предсказание будущих значений временного ряда по настоящим и прошлым значениям). Обе эти цели требуют, чтобы модель ряда была идентифицирована и, более или менее, формально описана.

Как только модель определена, то с ее помощью можно интерпретировать рассматриваемые данные (например, использовать для понимания сезонного изменения цен на товары в экономике). Не обращая внимания на глубину понимания и справедливость теории, можно экстраполировать затем ряд на основе найденной модели, т.е. предсказать его будущие значения.

Временные ряды классифицируются по следующим признакам [43]:

- по форме представления уровней: ряды абсолютных показателей; относительных показателей; средних величин.
- по количеству показателей, для которых определяются уровни в каждый момент времени: одномерные и многомерные временные ряды;
- по характеру временного параметра: моментные и интервальные временные ряды. В моментных временных рядах уровни характеризуют значения показателя по состоянию на определенные моменты времени. В интервальных рядах уровни характеризуют значение показателя за определенные периоды времени. Важная особенность интервальных временных рядов абсолютных величин заключается в

возможности суммирования их уровней. Отдельные же уровни моментного ряда абсолютных величин содержат элементы повторного счёта. Это делает бессмысленным суммирование уровней моментных рядов;

- по расстоянию между датами и интервалами времени выделяют равноотстоящие — когда даты регистрации или окончания периодов следуют друг за другом с равными интервалами и неполные (неравноотстоящие) — когда принцип равных интервалов не соблюдается;

- по наличию пропущенных значений: полные и неполные временные ряды;

- временные ряды бывают детерминированными и случайными: первые получают на основе значений некоторой неслучайной функции (ряд последовательных данных о количестве дней в месяцах); вторые есть результат реализации некоторой случайной величины.

- в зависимости от наличия основной тенденции выделяют стационарные ряды, в которых среднее значение и дисперсия постоянны, и нестационарные, содержащие основную тенденцию развития.

Анализ временных рядов предполагает, что данные содержат систематическую составляющую (обычно включающую несколько компонент) и случайный шум (ошибку), который затрудняет обнаружение регулярных компонент.

Большинство регулярных составляющих временных рядов принадлежит к двум классам: они являются либо трендом, либо сезонной составляющей. Тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени. Сезонная составляющая - это периодически повторяющаяся компонента. Оба эти вида регулярных компонент часто присутствуют в ряде одновременно.

В общем случае временной ряд можно представить в виде суммы трех аддитивных компонент [51]:

$$X = T + S + E$$

или в мультипликативной форме:

$$X = T \cdot S \cdot E$$

где T – тренд, представляющий собой устойчивое изменение показателя в течение длительного времени, является детерминированной компонентой; выражает аналитическую функцию, на которой формируются прогнозные оценки.

S – сезонная компонента, характеризующая устойчивые внутригодовые колебания уровней, представленная квартальными или месячными данными (наличие устойчивых колебаний в суточных или недельных данных может рассматриваться как циклическое явление и отображаться сезонной компонентой).

E – случайная компонента, представляющая собой составную часть временного ряда, оставшуюся после выделения из него регулярных компонент. Она является обязательной частью ряда, т.к. случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому экономическому явлению [2].

Трендом (или тенденцией) называют неслучайную медленно меняющуюся составляющую временного ряда, на которую могут накладываться случайные колебания или сезонные эффекты. Это не вполне строгое понятие лежит в основе нескольких моделей и методов анализа временных рядов, так или иначе разлагающих временной ряд на несколько компонент, одна из которых является в том или ином смысле достаточно гладкой, а остальные компоненты характеризуют воздействие случайных факторов.

Тренд, сезонная и циклическая компоненты являются регулярными, или систематическими компонентами временного ряда. Составная часть временного ряда, остающаяся после выделения из него регулярных компонент, представляет собой случайную нерегулярную компоненту. Она является обязательной составной частью любого временного ряда в

экономике, так как случайные отклонения сопутствуют любому экономическому явлению. Если систематические компоненты временного ряда определены правильно, то остающаяся после выделения из временного ряда этих компонент остаточная последовательность будет случайной компонентой ряда, то есть будет обладать следующими свойствами:

- 1) случайностью колебаний уровней остаточной последовательности;
- 2) соответствием распределения случайной компоненты нормальному закону распределения;
- 3) равенством математического ожидания случайной компоненты нулю;
- 4) независимостью значений уровней случайной последовательности, то есть отсутствием существенной автокорреляции.

Проверка адекватности трендовых моделей основана на проверке выполняемости у остаточной последовательности указанных четырех свойств. Если не выполняется хотя бы одно из них, модель признается неадекватной; при выполнении всех четырех свойств модель адекватна.

1.2. Предварительный анализ временных рядов

Анализ временных рядов позволяет изучить показатели во времени. Подобные данные распространены в самых разных сферах человеческой деятельности: ежедневные цены акций, курсов валют, ежеквартальные, годовые объемы продаж, производства и т.д. [23, 24].

Успешность статистического анализа развития процессов во времени во многом зависит от правильного построения временных рядов [10]. Большое значение для дальнейшего исследования процесса имеет выбор интервалов между соседними уровнями ряда. При этом если выбрать

слишком большой интервал времени, можно упустить существенные закономерности в динамике показателя. Во временных рядах также не должны содержаться пропущенные уровни. Пропуски могут объясняться как недостатками при сборе информации, так и происшедшими изменениями в системе отчетности, в системе фиксирования данных. Решение об исключении какого-то показателя может быть отменено через некоторое время, в связи с тем, что становится очевидной его важность для аналитических исследований. В этом случае для использования этого временного ряда в дальнейшем анализе необходимо восстановить пропущенные уровни. Если же в систему показателей включен новый признак, учет которого не проводился ранее, то необходимо подождать, пока ряд достигнет требуемой длины или попытаться восстановить прежние значения косвенными методами (через другие показатели), если такой путь представляется возможным. Информация может оказаться слишком «короткой» для использования некоторых методов анализа и прогнозирования динамики, предъявляющих «жесткие» требования к длине рядов. Слишком малые интервалы между наблюдениями увеличивают объем вычислений, а также могут приводить к появлению ненужных деталей в динамике процесса, засоряющих общую тенденцию. Вопрос о выборе интервала времени между уровнями ряда должен решаться, исходя из целей каждого конкретного исследования.

Рассмотрим методы анализа данных, представленных в виде временных рядов [1,2,11,15], т.е. в виде последовательностей измерений, упорядоченных в неслучайные моменты времени. В отличие от анализа случайных выборок, анализ временных рядов основывается на предположении, что последовательные значения в файле данных наблюдаются через равные промежутки времени.

Отмечают следующие основные этапы анализа временных рядов [25,27]:

- графическое представление и описание поведения ряда;
- выделение и удаление закономерных (неслучайных) составляющих временного ряда (тренда, сезонных и циклических компонент);
- сглаживание и фильтрация (удаление низко- или высокочастотных составляющих);
- исследование случайных компонент, построение и проверка адекватности математической модели для ее описания;
- прогнозирование развития изучаемого процесса на основе имеющегося ряда.

Анализ временных рядов - совокупность математико-статистических методов анализа, предназначенных для выявления структуры временных рядов и для их прогнозирования. Выявление структуры временного ряда необходимо для того, чтобы построить математическую модель того явления, которое является источником анализируемого временного ряда. Прогноз будущих значений временного ряда используется для эффективного принятия решений.

Существуют две основные цели анализа временных рядов: определение природы ряда и прогнозирование (предсказание будущих значений временного ряда по настоящим и прошлым значениям [29,30]).

На этапе предварительного анализа временных рядов производится:

- выявление и устранение аномальных наблюдений;
- проверка наличия тренда в развитии экономических показателей;
- сглаживание временных рядов;
- определение наличия автокорреляции во временном ряду.

Под аномальным наблюдением понимается отдельное значение уровня, которое не отвечает потенциальным возможностям исследуемой системы и которое, оставаясь в качестве уровня ряда, оказывает

существенное влияние на значение основных характеристик временного ряда, в том числе на соответствующую модель.

Под аномальным наблюдением понимается резкий скачок или спад данных с последующим возвращением почти к предшествующему уровню.

Наличие аномальных явлений искажает результат моделирования, поэтому полученные данные нужно подправить, чтобы они отвечали рассмотренным выше условиям (требованиям).

Прежде всего, нужно выявить причины аномальных наблюдений. Они могут быть трех видов:

1. технические ошибки (ошибки первого рода): ошибки при агрегировании и дезагрегировании показателей, при передаче информации и др. Ошибки первого рода подлежат выявлению и устранению.

2. изменения в методике подсчета (когда нарушается требование сопоставимости данных). Более старые данные должны быть пересчитаны по новой методике, индексированы (цены, основные фонды и др.);

3. реальные изменения в протекающих экономических процессах - ошибки второго рода. Аномальные уровни во временных рядах могут возникать из-за воздействия факторов, имеющих объективный характер, но проявляющихся эпизодически (катастрофы, стихийные бедствия, «черный четверг»). Они устранению не подлежат.

Для обнаружения аномальных наблюдений используются следующие методы [39]:

А) визуальный метод (по графику): если точно установлено, что аномальные наблюдения вызваны ошибками первого рода, то они устраняются аномальное явление либо удаляется, либо заменяется средним арифметическим значением двух соседних уровней, либо аномальное значение заменяют соответствующим значением по аппроксимирующей кривой – кривой роста.

Б) метод статистических критериев, например, критерий Ирвина:

Для всех или только для подозреваемых в аномальности наблюдений вычисляется величина λ_t :

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{S_y}$$

где $S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n-1}}$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$.

Если рассчитанная величина λ_t превышает табличный уровень, то уровень y_t считается аномальным. Аномальные наблюдения необходимо исключить из временного ряда и заменить их расчетными значениями либо заменой простой средней арифметической двух соседних уровней ряда, либо заменой соответствующими значениями по кривой, аппроксимирующей данный временной ряд.

Следующий этап предварительного анализа данных – выявление наличия тенденции в развитии исследуемого показателя. Тенденция прослеживается не только в увеличении или уменьшении среднего текущего значения, но она присуща и другим его характеристикам: дисперсии, автокорреляции, корреляции с другими показателями и т.д. Тенденцию среднего визуально можно определить из графика исходных данных, а более точно – с помощью метода Фостера-Стьюарта, метода проверки существенности разности средних, критерия «восходящих и нисходящих» серий и т.п. [48,49]. Согласно критерию «восходящих и нисходящих» серий тенденция определяется по следующему алгоритму:

1. Для исследуемого временного ряда определяется последовательность знаков, исходя из условий:

$$\delta_i = \begin{cases} +, & \text{если } y_{t+1} - y_t > 0 \\ -, & \text{если } y_{t+1} - y_t < 0 \end{cases}$$

При этом если последующее наблюдение равно предыдущему, то учитывается только одно наблюдение.

2. Подсчитывается число серий $v(n)$. Под серией понимается последовательность подряд расположенных плюсов и минусов, причем один плюс или один минус считается серией.

3. Определяется протяженность самой длинной серии $l_{max}(n)$.

4. По соответствующей таблице находится значение $l(n)$.

5. Если нарушается хотя бы одно из следующих неравенств, то гипотеза об отсутствии тренда отвергается с доверительной вероятностью 0,95:

$$\begin{cases} v(n) > \left[\frac{2n-1}{3} - 1.96\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right] \\ l_{max}(n) \leq l(n) \end{cases}$$

Метод Фостера-Стьюарта для временного ряда: $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ применяется следующим образом.

На первом этапе производится сравнение каждого уровня исходного ряда, начиная со второго, со всеми предыдущими, при этом определяются две последовательности:

$$u(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } Y_t \text{ больше всех предыдущих уровней} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$
$$v(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } Y_t \text{ меньше всех предыдущих уровней} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

На втором этапе вычисляются величины s и d :

$$s = \sum (u(t) + v(t)) \quad d = \sum (u(t) - v(t))$$

Третий этап заключается в проверке гипотез: можно ли считать случайным:

1) отклонение величины s от величины μ - математического ожидания величины s для ряда, в котором уровни расположены случайным образом;

2) отклонение величины d от нуля.

$$t_s = \frac{|s - \mu|}{\sigma_1}, \quad \sigma_1 = \sqrt{2 \ln n - 3,4253} \quad \text{и} \quad t_d = \frac{|d - 0|}{\sigma_2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2 \ln n - 0,8456}$$

где μ - математическое ожидание величины

σ_1 - среднеквадратическое отклонение для величины s ;

σ_2 - среднеквадратическое отклонение для величины d ;

Значения σ_s ; σ_d ; μ - табулированы для различной длины временных рядов:

n	μ	σ_s	σ_d
10	3,858	1,288	1,964
15	4,636	1,521	2,153

На четвертом этапе расчетные значения t_s и t_d сравниваются с табличным значением t-критерия Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы, где α - заданный уровень значимости:

$k = n - 2$	7	8	9
$t_{\alpha} = 0,05$	1,90	1,86	1,83
$t_{\alpha} = 0,3$	1,05	0,99	0,91

Если расчетное значение меньше табличного, то гипотеза об отсутствии тренда принимается; в противном случае тренд есть.

Если t_s больше табличного t_{α} , а t_d меньше t_{α} , то для данного временного ряда есть тренд в среднем, а тренда дисперсии уровней ряда нет.

Иначе, если $|t_s| > t(\alpha)$ и $|t_d| > t(\alpha)$, то гипотеза об отсутствии тренда отвергается (тренд есть). Если $|t_s| < t(\alpha)$ и $|t_d| < t(\alpha)$, то тренда нет.

Не существует "автоматического" способа обнаружения тренда во временном ряде. Однако если тренд является монотонным (устойчиво возрастает или устойчиво убывает), то анализировать такой ряд обычно нетрудно. Если временные ряды содержат значительную ошибку, то первым шагом выделения тренда является сглаживание.

Очень часто уровни экономических рядов колеблются, при этом тенденция развития экономического явления во времени скрыта случайными отклонениями уровней в ту или иную сторону. С целью более четко выявить тенденцию развития исследуемого процесса, в том числе для дальнейшего применения методов прогнозирования, производят сглаживание (выравнивание) ряда. Достаточно простым методом выявления тенденции развития является сглаживание временного ряда, т.е. замена фактических уровней расчетными, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Сглаживание включает некоторый способ локального усреднения данных, при котором несистематические компоненты взаимно погашают друг друга. Соответствующее преобразование называется фильтрованием.

Методы сглаживания рядов делятся на две основные группы [50,53]:

- аналитическое выравнивание с использованием кривой, проведенной между конкретными уровнями ряда так, чтобы она отображала тенденцию, присущую ряду, и одновременно освобождала его от незначительных колебаний;
- механическое выравнивание отдельных уровней временного ряда с использованием фактических значений соседних уровней.

Аналитическое сглаживание заключается в выборе модели кривой роста, которая наилучшим образом аппроксимирует исходный временной ряд и дальнейшее ее использование для прогнозирования.

К методам механического сглаживания относят метод скользящей средней, метод взвешенной скользящей средней. Суть методов механического выравнивания заключается в следующем. Этот метод может применяться для целей краткосрочного прогнозирования. Необходимость применения скользящей средней вызывается следующими обстоятельствами. Бывают случаи, когда имеющиеся данные динамического ряда не позволяют обнаруживать какую-либо тенденцию

развития (тренд) того или иного процесса (из-за случайных и периодических колебаний исходных данных). В таких случаях для лучшего выявления тенденции прибегают к методу скользящей средней. Метод скользящей средней состоит в замене фактических уровней динамического ряда расчетными, имеющими значительно меньшую колеблемость, чем исходные данные. При этом средняя рассчитывается по группам данных за определенный интервал времени, причем каждая последующая группа образуется со сдвигом на один год (месяц). В результате подобной операции первоначальные колебания динамического ряда сглаживаются, поэтому и операция называется сглаживанием ряда. Метод скользящей средней называется так потому, что при вычислении средние как бы скользят от одного периода к другому; с каждым новым шагом средняя как бы обновляется, впитывая в себя новую информацию о фактически реализуемом процессе. Берется несколько первых уровней ряда, образующих интервал сглаживания. Для них подбирается полином, степень которого должна быть меньше числа уровней, входящих в интервал сглаживания; с помощью полинома определяются новые, выровненные значения уровней в середине интервала. Далее этот интервал сдвигается на один уровень вправо, вычисляются следующие сглаженные значения и т.д.

В методе простой скользящей средней сначала определяется интервал сглаживания. Для первых нескольких уровней временного ряда вычисляется их среднее арифметическое значение, это будет сглаженное значение уровня ряда. Затем интервал сдвигается на один уровень вправо, повторяется вычисление среднего арифметического и т.д. В результате такой процедуры получаем ряд сглаженных значений, но при этом первые и последние уровни теряются [5]. Так, для $m = 3$ сглаживание производится по формуле:

$$y_t' = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3},$$

т.е. каждый уровень ряда, начиная со второго, заменяется новым средним значением:

$$\text{если } m = 3, \text{ то } \bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3} \quad \text{и т.д.}$$

$$\text{если } m = 5, \text{ то } \bar{y}_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} \quad \bar{y}_4 = \frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{5} \quad \text{и т.д.}$$

Вместо среднего можно использовать медиану значений, попавших в этот интервал. Основное преимущество медианного сглаживания, по сравнению со сглаживанием скользящим средним, состоит в том, что результаты становятся более устойчивыми к выбросам. Таким образом, если в данных имеются выбросы (связанные, например, с ошибками измерений), то сглаживание медианой обычно приводит к более гладким или, по крайней мере, более «надежным» кривым. Основным недостатком медианного сглаживания в том, что при отсутствии явных выбросов, он приводит к более «зубчатым» кривым (чем сглаживание скользящей средней) и не позволяет использовать веса.

Одним из простейших приемов сглаживания динамического ряда с учетом «устаревания» является расчет специальных показателей, получивших название экспоненциальных средних, которые широко применяются в краткосрочном прогнозировании. Основная идея Метода состоит в использовании в качестве прогноза линейной комбинации прошлых и текущих наблюдений. Экспоненциальная средняя является примером асимметричной скользящей средней, в которой учитывается степень старения данных - чем старше информация, тем с меньшим весом входит она в формулу для расчета сглаженного значения уровня ряда

Особенность метода экспоненциального сглаживания заключается в том, что в процедуре нахождения сглаженного уровня используются

значения только предшествующих уровней ряда, взятые с определенным весом, причем вес наблюдения уменьшается по мере удаления его от момента времени, для которого определяется сглаженное значение уровня. Другими словами, здесь более старым наблюдениям приписываются экспоненциально убывающие веса, при этом, в отличие от скользящего среднего, учитываются все предшествующие наблюдения ряда, а не те, что попали в определенный интервал.

Если для исходного временного ряда $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ соответствующие сглаженные значения уровней обозначить через $S_t, t = \overline{1, n}$, то экспоненциальное сглаживание осуществляется по формуле:

$$S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S_{t-1}$$

где α – параметр сглаживания ($0 < \alpha < 1$);

S_t – сглаженное значение уровня ряда;

S_{t-1} – сглаженный предыдущий уровень.

Когда эта формула применяется рекурсивно, то каждое новое сглаженное значение вычисляется как взвешенное среднее текущего наблюдения и сглаженного ряда. Результат сглаживания зависит от параметра « α ». Если $\alpha = 1$, то предыдущие наблюдения полностью игнорируются. Если $\alpha = 0$, то игнорируются текущие наблюдения. Значение « α » между 0 и 1 дают промежуточные результаты. На практике рекомендуется брать $\alpha < 0,3$; но также этот параметр часто ищется с поиском на сетке. Возможные значения параметра разбиваются сеткой с определенным шагом. Например, рассматривается сетка значений от $\alpha = 0,1$ до $\alpha = 0,9$ с шагом 0,1. Затем выбирается « α », для которого сумма квадратов (или средних квадратов) остатков (наблюдаемые значения минус прогнозы на шаг вперед) является минимальной.

Кроме параметра сглаживания, также необходимо иметь начальное значение S_0 для вычисления первого сглаженного значения. В зависимости

от выбора «α» начальное значение сглаженного процесса может оказать существенное воздействие на прогноз для многих последующих наблюдений. С другой стороны, влияние выбора уменьшается с длиной ряда и становится не критичным при большом числе наблюдений. В качестве начального условия берут не первое значение y_1 , а среднее нескольких уровней или среднее всего ряда [9]. За начальный уровень S_0 можно взять из исходного ряда значение y_1 или $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

В данной группе методов экспоненциальному сглаживанию подвергаются оценки коэффициентов адаптивных моделей (Хольта, Брауна, Тейла-Вейджа и др.).

Применение скользящей и экспоненциальных средних в качестве основы для прогностической оценки имеет смысл лишь при относительно небольшой колеблемости уровней. Данные методы прогнозирования относятся к числу наиболее распространенных методов экстраполяции трендов.

Для определения наличия автокорреляции во временном ряду применяют статистические методы.

Под автокорреляцией понимается корреляция между членами одного и того же ряда. Высокая автокорреляция говорит о слишком тесной зависимости. При отсутствии автокорреляции считают, что уровни ряда независимы.

Наличие автокорреляции устанавливается с помощью статистических критериев. Рассмотрим один из них, который называется критерий Дарвина – Уотсона [5,8,35]:

1) Вычисляют статистику:
$$d = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n y_t^2}.$$

2) Расчетное значение d сравнивают с двумя уровнями этого критерия (верхним и нижним: d_1 и d_2).

Для линейной модели при девяти наблюдениях можно взять табличные значения: $d_1 = 1,08$ и $d_2 = 1,36$

а) если $d_2 < d < 2$, то гипотеза H об отсутствии автокорреляции принимается – нет автокорреляции – уровни ряда независимы;

б) если $d < d_1$, то гипотеза H отвергается – есть автокорреляция.

с) если $d_1 < d < d_2$, то критерий ответа не дает, то находят первый

коэффициент автокорреляции: $r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n E(t)E(t-1)}{\sum_{t=2}^n E(t)^2}$ и сравнивают его с

табличным $r_1 = 0,36$.

Если $r_1 < 0,36$, то автокорреляция несущественна, уровни ряда независимы.

На практике автокорреляция отсутствует, если значение $d = 2$.

Если же $d > 2$, то необходимо перейти к модифицированному критерию *Дарвина – Уотсона*: для этого вычисляют величину $d' = 4 - d$ и для этого значения применяют тот же критерий проверки.

1.3. Расчет показателей динамики развития экономических процессов

Для характеристики и анализа социально-экономических явлений за некоторый период применяют показатели и методы, характеризующие эти процессы во времени (динамике) [22,26].

Динамика финансово-экономических показателей отражается динамическими и временными рядами.

Динамический ряд представляет собой хронологическую последовательность числовых значений статистических показателей.

Виды рядов динамики [41]:

- моментные (моментальные) ряды динамики;
- интервальные ряды динамики;
- ряды динамики с нарастающими итогами;
- производные ряды динамики.

Моментные ряды динамики отображают состояние изучаемых явлений на определенные даты (моменты) времени. Особенностью моментного ряда динамики является то, что в его уровни могут входить одни и те же единицы изучаемой совокупности.

Интервальные ряды динамики отображают итоги развития (функционирования) изучаемых явлений за отдельные периоды (интервалы) времени. Каждый уровень интервального ряда складывается из данных за более короткие интервалы.

Статистическое отображение развития изучаемого явления во времени может быть представлено рядами динамики с нарастающими итогами. Их применение обусловлено потребностями в результатах развития изучаемых показателей не только за данный отчетный период, но и с учетом предшествующих периодов. При составлении таких рядов производится последовательное суммирование смежных уровней. Этим достигается суммарное обобщение результата развития изучаемого показателя с начала отчетного периода (месяца, квартала, года и т.д.).

Производные ряды – ряды, уровни которых представляют собой не непосредственно наблюдаемые значения, а производные величины: средние или относительные.

Основные направления изучения закономерностей развития социально-экономических явлений с помощью рядов динамики:

- характеристика уровней развития изучаемых явлений во времени;
- измерение динамики изучаемых явлений посредством системы статистических показателей;

- выявление и количественная оценка основной тенденции развития (тренда);
- изучение периодических колебаний;
- экстраполяция и прогнозирование.

Расчет показателей динамики проводится на основе статистического анализа одномерных временных рядов экономической динамики. Для статистического анализа одномерных временных рядов экономических показателей вида: y_1, y_2, \dots, y_n абсолютные уровни моментных и интервальных рядов, а также уровни из средних величин должны быть преобразованы в относительные величины. Их можно получить, соотношением уровней ряда с одним и тем же уровнем, взятым за базу (за базу сравнения чаще всего принимают начальный (первый) уровень временного ряда y_1 , либо последовательными сопоставлениями с предыдущим уровнем. В первом случае получают базисные показатели, во втором — цепные.

Временной ряд тогда правильно отражает объективный процесс развития экономического явления, когда уровни этого ряда состоят из однородных, сопоставимых величин. Для несопоставимых величин вести расчет рассматриваемых ниже статистических показателей динамики неправомерно. Причины несопоставимости уровней временного ряда могут быть различными. В экономике чаще всего такими причинами является несопоставимость:

- по территории ввиду изменения границ региона, по которому собираются статистические данные;
- по кругу охватываемых объектов по подчинению или форме собственности ввиду перехода, например, части предприятий данного объединения в другое объединение;

- по временным периодам, когда, например, данные за различные годы приведены по состоянию на разные даты;
- уровней, вычисленных в различном масштабе измерения;
- уровней ряда из-за различий в структуре совокупности, для которой они вычислены.

Возможны и другие причины несопоставимости.

При анализе временных рядов для определения изменений, происходящих в данном явлении, прежде всего, вычисляют скорость развития этого явления во времени. Показателем скорости служит абсолютный прирост, вычисляемый по формуле:

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}$$

где y_i — i -й уровень временного ряда ($i = 2, 3, \dots, n$);

Индекс $k = 1, 2, \dots, n-1$ определяет начальный уровень и может быть выбран любым в зависимости от целей исследования: при $k = 1$ получаются цепные показатели, при $k = i - 1$ получаются базисные показатели с начальным уровнем ряда в качестве базисного и т.д.

Абсолютные приросты бывают цепные и базисные. Цепные и базисные показатели вычисляются для характеристики изменения уровней динамического ряда и различаются между собой базами сравнения: цепные рассчитываются по отношению к предыдущему уровню (переменная база сравнения), базисные — к уровню, принятому за базу сравнения (постоянная база сравнения).

Абсолютный прирост выражает величину изменения показателя за интервал времени между сравниваемыми периодами. Если подходить более строго, то скоростью называют прирост в единицу времени; эта величина носит название среднего абсолютного прироста:

$$\overline{\Delta y_i} = \frac{y_i - y_{i-k}}{k}$$

В частности, средний абсолютный прирост за весь период наблюдения для данного временного ряда равен:

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$$

и характеризует среднюю скорость изменения временного ряда и дает возможность определить, насколько в среднем за единицу времени должен увеличиваться (уменьшаться) уровень ряда, чтобы, отправляясь от начала уровня за данное число периодов, можно было достичь конечного уровня.

Для определения относительной скорости изменения изучаемого явления в единицу времени используют относительные показатели: коэффициенты роста и прироста (если эти показатели выражены в процентах, то их называют соответственно темпами роста и прироста). Заметим, что во всех последующих формулах индекс начального уровня, по отношению к которому осуществляется сопоставление, определяется точно так же с помощью индекса k , как и ранее для показателя абсолютного прироста.

Коэффициент роста для i -го периода вычисляется по формуле:

$$K_{i(p)} = \frac{y_i}{y_{i-k}}$$

$K_{i(p)} > 1$, если уровень повышается; $K_{i(p)} < 1$, если уровень понижается; при $K_{i(p)} = 1$ уровень не меняется.

Между цепными и базисными темпами роста существуют взаимосвязи:

1) произведение всех цепных коэффициентов роста равно конечному базисному коэффициенту роста;

2) отношение последующего базисного коэффициента роста к предыдущему базисному коэффициенту роста равно промежуточному цепному коэффициенту роста.

Такие взаимосвязи проявляются только в случае, если темпы роста (цепные и базисные) выражены в коэффициентах.

Коэффициент прироста равен:

$$K_{i(np)} = K_{i(p)} - 1 \text{ или } K_{i(np)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}}.$$

На практике чаще применяют показатели темпа роста и темпа прироста:

$$T_{i(p)} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \cdot 100\%,$$

где $T_{i(p)}$ - темп прироста для i -го периода;

$$T_{i(np)} = T_{i(p)} - 100\%, \text{ или } T_{i(np)} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \cdot 100\%,$$

где $T_{i(np)}$ - темп прироста для i -го периода.

Темп прироста показывает, на сколько процентов уровень одного периода увеличился (уменьшился) по сравнению с уровнем другого периода, т.е. этот показатель выражает относительную величину прироста в процентах. Сравнение абсолютного прироста и темпа прироста за одни и те же промежутки времени показывает, что в реальных экономических процессах замедление темпа прироста часто не сопровождается уменьшением абсолютных приростов.

Абсолютное значение одного процента прироста определяется как отношение абсолютного прироста Δy_i к темпу прироста в процентах $T_{i(np)}$ или как сотая часть от предыдущего уровня ряда.

Среднюю скорость изменения изучаемого явления за рассматриваемый период характеризует также средний темп роста. Обычно он рассчитывается по формуле средней геометрической:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{T_{1(p)} \cdot T_{2(p)} \cdot \dots \cdot T_{n(p)}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%,$$

где $T_{1(p)}, \dots, T_{n(p)}$ - средние темпы роста за отдельные интервалы времени.

Средний темп роста показывает, во сколько раз в среднем за единицу времени изменился уровень динамического ряда.

Соответственно средний темп прироста определяется как

$$T_{(np)} = \bar{T}_{(np)} - 100\% .$$

Показатель среднего темпа роста, рассчитываемый по приведенной выше формуле средней геометрической, имеет существенные недостатки, так как основан на сопоставлении конечного и начального уровней временного ряда, промежуточные уровни во внимание не принимаются. В случае сильной колеблемости уровней использование для статистического анализа среднего геометрического темпа роста может привести к серьезным просчетам в результате искажения реальной тенденции временного ряда.

В настоящее время предложены другие способы расчета среднего темпа роста, в той или иной мере лишенные недостатков средней геометрической. Например, предлагается использовать для расчета среднего темпа роста формулу:

$$\bar{T}_{(p)} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}},$$

где y_1 и y_n - сглаженные по уравнению тренда (уравнению кривой роста) начальный и конечный уровни временного ряда.

Трендовая модель учитывает колеблемость промежуточных уровней временного ряда, поэтому вычисленные по ней значения y_1 и y_n , а следовательно, и средний темп роста, вычисляемый по последней формуле, будут более точно характеризовать изменения изучаемого экономического явления за рассматриваемый интервал времени.

Важной характеристикой временного ряда является также средний уровень ряда. В интервальном ряду динамики с равноотстоящими во времени уровнями расчет среднего уровня ряда производится по формуле

простой средней арифметической (здесь и далее суммирование ведется по всем периодам наблюдения):

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n}.$$

Если интервальный ряд имеет неравноотстоящие во времени уровни, то средний уровень ряда (так называемая средняя хронологическая) вычисляется по формуле взвешенной арифметической средней, где роль весов играет продолжительность времени (например, количество лет), в течение которого уровень постоянен:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t t}{\sum t},$$

где t - число периодов времени, при которых значение уровня y_t не изменяется.

Для моментного ряда с равноотстоящими уровнями средняя хронологическая рассчитывается по формуле:

$$\bar{y} = \frac{1/2 y_1 + y_2 + y_{n-1} + 1/2 y_n}{n-1},$$

где n - число уровней ряда.

Средняя хронологическая для моментного временного ряда с равноотстоящими во времени уровнями вычисляется по формуле:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2\sum t}.$$

Здесь n - число уровней ряда, а t_i - период времени, отделяющий i -й уровень ряда от $(i+1)$ -го уровня.

При статистическом анализе временных рядов часто возникает необходимость, кроме определения основных характеристик ряда, оценить зависимость изучаемого показателя y_t от его значений, рассматриваемых с некоторым запаздыванием во времени. Зависимость значений уровней временного ряда от предыдущих (сдвиг на 1), предпредыдущих (сдвиг на

2) и так далее уровней того же временного ряда называется *автокорреляцией* во временном ряду. Для получения числовой характеристики такой внутренней зависимости вычисляют взаимную корреляционную функцию между исходным рядом y_t и этим же рядом, сдвинутым во времени на величину τ . Такая функция называется *автокорреляционной*, она характеризует внутреннюю структуру временного ряда и состоит из множества коэффициентов автокорреляции (нециклических), рассчитываемых по формуле:

$$r_\tau = \frac{(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{\left[(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \right)^2 \right] \left[(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau} \right)^2 \right]}}$$

Задавая различные значения $\tau = 1, 2, 3, \dots$ получаем последовательность значений r_1, r_2, r_3, \dots . На практике рекомендуется вычислять такие коэффициенты в количестве от $n/4$ до $n/3$.

График автокорреляционной функции называется *коррелограммом* и показывает величину запаздывания, с которым изменение показателя указывается на его последующих значениях. Величина сдвига τ , которому соответствует наибольший коэффициент автокорреляции, называется *временным лагом*.

В ряде случаев используется упрощенная формула для вычисления коэффициента автокорреляции:

$$r_\tau = \frac{\frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2},$$

где \bar{y} - средний уровень ряда.

1.4. Тренд - сезонные экономические процессы и их анализ

При анализе рядов динамики важное значение имеет выявление периодических колебаний. Временные ряды с интервалом меньше года (месяц, квартал) очень часто содержат эффект сезонности. Под сезонностью понимают влияние внешних факторов, действующих циклически с заранее известной периодичностью. Типичными примерами являются эффекты, связанные с астрономическими либо календарными причинами. Так, в ряду ежемесячных данных естественно ожидать наличие сезонных эффектов с периодом 12, в квартальных рядах - с периодом 4. В свою очередь, в информации, собираемой с интервалом 1 час, вполне могут возникнуть сезонные эффекты с периодом 24.

Под сезонностью понимают также и систематически повторяющиеся колебания показателей, обусловленные особенностями производственных условий в определенный период. При изучении периодических колебаний необходимо иметь информацию не менее чем за три полных периода колебания. Использование же более тонкого статистического аппарата для исследования периодичности требует большей длины информации – не менее пяти полных периодов колебаний.

Если периодические колебания происходят благодаря природно-климатическим факторам, связанными со сменой времен года и имеют выраженную годовую периодичность, то такие колебания называют сезонными. Сезонность связывается со сменой природно-климатических условий в рамках ограниченного промежутка времени - годового периода. Для того, чтобы можно было целенаправленно влиять на сезонность, необходимо уметь измерять и анализировать сезонность, уметь предвидеть развитие процессов, подверженных сезонным колебаниям.

Иногда причины сезонных колебаний имеют социальный характер [4,32].

Применительно к задачам краткосрочного управления и прогнозирования сезонная составляющая зачастую не является информативной, т.е. при прогнозе основная проблема сводится к оценке тенденции, после чего эта оценка корректируется на сезонность. Таким образом, при анализе прогноза временных рядов мы два раза сталкиваемся с необходимостью учета влияния сезонности. Во-первых, при оценке тенденции, которая представляет собой ряд, очищенный от случайной составляющей и сезонности. Сезонная составляющая в таких случаях лишь затрудняет идентификацию тех составляющих динамики, которые являются информативными. Во-вторых, с сезонностью сталкиваемся при корректировке прогнозных значений.

Сезонные эффекты, несмотря на то, что время их проявления и характер из года в год могут несколько изменяться, имеют достаточно регулярный характер. Размах и форма сезонных колебаний могут также демонстрировать эволюцию с течением времени. Однако регулярность сезонных колебаний позволяет проводить их идентификацию, что в свою очередь обеспечивает возможность сезонной корректировки временных рядов.

Не во всех случаях сезонность является следствием действия неуправляемых или почти неуправляемых факторов. Чаще всего они поддаются регулированию. Для того чтобы можно было целенаправленно влиять на сезонность, необходимо уметь измерять и анализировать сезонность, уметь предвидеть развитие процессов, подверженных сезонным колебаниям. Сезонная деятельность, несмотря на свою естественность, имеет более высокую затратную составляющую функционирования, чем деятельность, не зависящая от сезонных факторов. Производители сезонных товаров испытывают большие колебания спроса на свою продукцию. Во время сезонного спада деятельность предприятий приходится поддерживать с помощью внутренних или внешних источников.

Если экономический процесс подвержен периодическим колебаниям, имеющим определенный и постоянный период, равный годовому промежутку, то такой ряд является тренд - сезонным временным рядом (сезонным временным рядом) [53].

Решение задачи по анализу тренд - сезонных временных рядов начинается с построения графика исследуемого показателя, тем более что современные программные средства предоставляют пользователю большие возможности для этого. Иногда уже на стадии графического анализа можно определить характер сезонных колебаний: аддитивный или мультипликативный (рис.1).

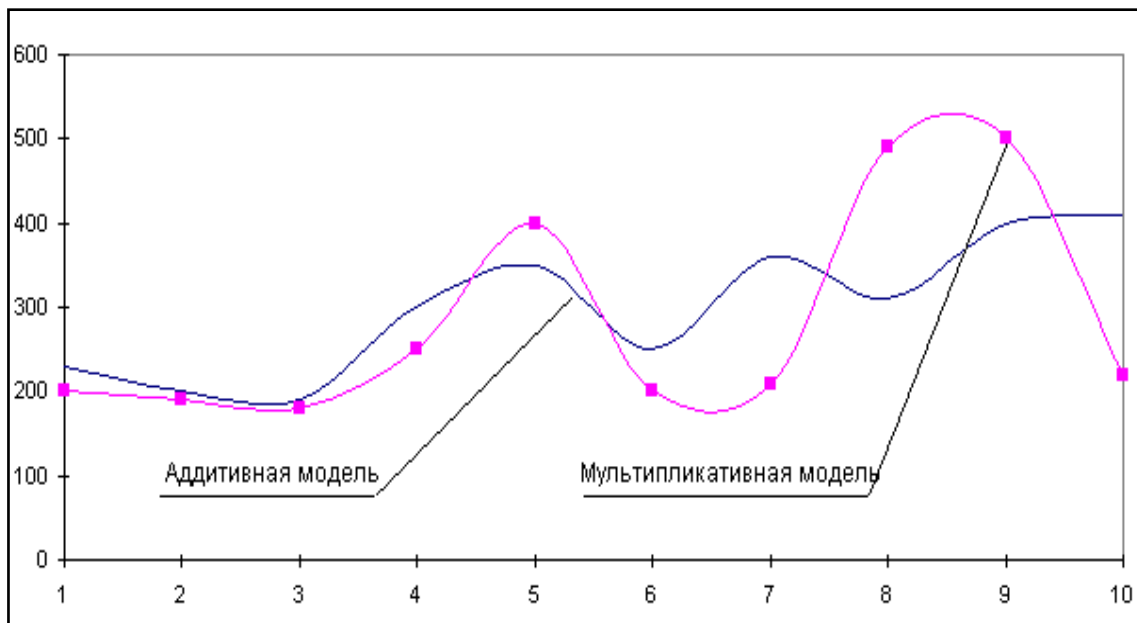


Рисунок 1 - Аддитивная и мультипликативная модели прогнозирования

Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, то это аддитивная модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, то это мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда

в зависимости от значений сезонной компоненты. Мультипликативная модель сводится к аддитивной путем логарифмирования ряда.

Аддитивная модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (U_t), сезонной (V_t) и случайной (ε_t) компонент:

$$Y_t = U_t + V_t + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}$$

где Y_t - прогнозируемое значение;

U_t - тренд;

V_t - сезонная компонента;

ε_t - случайная компонента;

T - число уровней наблюдения.

Общий вид мультипликативной модели выглядит следующим образом:

$$Y_t = U_t \cdot V_t \cdot \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}.$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой (U_t), сезонной (V_t) и случайной (ε_t) компонент [12].

Тренд U_t – плавно меняющаяся компонента, описывающая чистое влияние долговременных факторов, т.е. длительную («вековую») тенденцию изменения признака. Относительно U_t предполагается, что это некоторая гладкая функция, степень гладкости которой заранее неизвестна.

Сезонная компонента V_t , отражающая повторяемость экономических процессов, в течение не очень длительного периода (года, месяца, недели и т.п., например, объем продаж товаров в различные времена года), представляет собой корректировку тренда.

Составная часть временного ряда, остающаяся после выделения из него регулярных компонент, представляет собой случайную, нерегулярную компоненту (ε_t), отражающую влияние не поддающихся учету и регистрации

случайных факторов. Она является обязательной составной частью любого временного ряда в экономике, так как случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому экономическому явлению и должна обладать следующими свойствами:

- случайностью колебаний уровней остаточной последовательности;
- соответствием распределения случайной компоненты нормальному закону распределения;
- равенством математического ожидания случайной компоненты нулю;
- независимостью значений уровней случайной последовательности, то есть отсутствием существенной автокорреляции.

Экономисты разделяют факторы, под действием которых формируется нерегулярная компонента, на два вида: факторы резкого, внезапного действия; текущие факторы.

Факторы первого вида вызывают значительные отклонения. Иногда такие отклонения называют катастрофическими колебаниями.

Факторы второго вида вызывают случайные колебания, являющиеся результатом действия большого числа побочных причин. Влияние каждого из текущих факторов незначительно, но ощущается их суммарное воздействие.

Для исследования сезонных колебаний вне связи с причинами, их порождающими, необходимо отфильтровать из временного ряда Y_t сезонную компоненту V_t , а затем уже анализировать ее динамику. Большинство методов фильтрации построено таким образом, что предварительно выделяется тренд, а затем уже сезонная компонента. Тренд в чистом виде необходим и для анализа динамики сезонной волны.

При исследовании сезонной волны V_t предполагается, что она не изменяется из года в год. Для сезонной волны характерно изменение со

временем как ее размаха, так и формы. В результате возникает необходимость в анализе и предсказании изменений сезонной волны.

Основными задачами, возникающими при исследовании сезонных временных рядов являются следующие:

- определение наличия во временном ряду тренда и определения степени его гладкости;
- выявление наличия во временном ряду сезонных колебаний;
- фильтрация компонент ряда;
- анализ динамики сезонной волны;
- исследование факторов, определяющих сезонные колебания;
- прогнозирование тренд - сезонных процессов.

Под степенью гладкости понимается минимальная степень полинома, адекватно сглаживающего компоненту U_t . Выявление наличия во временном ряду сезонных колебаний сводится к проверке на случайность остаточного ряда $l_t = Y_t - U_t$. Под фильтрацией компонент ряда понимается выделение из ряда Y_t его составляющих.

Анализ динамики сезонной волны рассматривается как процесс решения трех взаимосвязанных задач:

- 1) анализ динамики амплитуды сезонной волны в каждом месяце;
- 2) анализ динамики точек экстремума сезонной волны;
- 3) исследование изменений форм сезонной волны.

Для выделения компонент исходного временного ряда используются три основных направления фильтрации: регрессионные, спектральные и итерационные.

Рассматриваем и применяем итерационные методы фильтрации.

При выделении компонент временного ряда встает вопрос о степени близости оценок \bar{U}_t и \bar{V}_t к их истинным значениям U_t и V_t . Основная идея итерационных методов заключается в многократном применении скользящей средней:

$$Y_t = \frac{\frac{Y_{t-T_0/2}}{2} + Y_{t-T_0/2+1} + \dots + Y_t + Y_{t-T_0/2} + \frac{Y_{t+T_0/2}}{2}}{T_0}$$

и одновременной оценке сезонной компоненты в каждом цикле.

Итерационные методы фильтрации отличаются простотой и удовлетворительной чистотой фильтрации компонент ряда, поэтому они и использованы в работе.

Суть итерационного метода Четвертикова заключается в следующем [28,49]:

1) эмпирический ряд Y_t выравняется скользящей средней с периодом скольжения T_0 . Выпадающие $T_0 / 2$ членов ряда с обоих его концов либо восстанавливаются экстраполированием выравненного ряда, либо остаются в стороне при последующей стадии работ.

Получается предварительная оценка тренда $\bar{Y}_i = \bar{U}_i$ и отклонения эмпирического ряда от выравниваемого $l_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{ij}$, ($i = 1, m; j = 1, T_0$);

2) для каждого года i вычисляется σ_i – среднеквадратическое отклонение, на которое и делятся затем отдельные месячные отклонения

соответствующего года: $\bar{l}_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sigma_i}$, где $\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{T_0} l_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^{T_0} l_{ij}\right)^2 / T_0}{T_0 - 1}}$;

3) из нормированных таким путем отклонений вычисляется

предварительная сезонная волна: $V_j^1 = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{l}_{ij}}{m}$;

4) средняя предварительная сезонная волна умножается на среднеквадратическое отклонение каждого года и вычитается из эмпирического ряда:

$$U^{1ij} = Y_{ij} - V_j^1 \cdot \sigma_i;$$

5) получающийся таким образом ряд, лишенный предварительной сезонной волны, вновь сглаживается скользящей средней. В результате получается новая оценка тренда U_t^2 ;

6) отклонения эмпирического ряда Y_t от ряда U_t^2 , полученного в пункте 5: $l_t^2 = Y_t - U_t^2$, вновь подвергается обработке по пунктам 2 и 3 для выявления окончательной средней сезонной волны;

7) исключение окончательной сезонной волны производится после умножения средней сезонной волны на k_i - коэффициент напряженности сезонной волны:

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{T_0} l^{2ij} \cdot e_{ij}}{\sum_{j=1}^{T_0} e_{ij}^2},$$

где l^{2ij} - выравненные значения ряда, e_{ij} - случайная компонента:

$$e_{ij} = l^{2ij} - V_j^2.$$

ГЛАВА II. ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Оценка адекватности модели

Независимо от вида и способа построения экономико-математической модели вопрос о возможности ее применения в целях анализа и прогнозирования экономического явления может быть решен только после установления адекватности, то есть соответствия модели исследуемому процессу или объекту [9,16,19]. Полного соответствия модели реальному процессу или объекту быть не может, так как адекватность в какой-то мере условное понятие, поэтому при моделировании имеется в виду адекватность не вообще, а по тем свойствам модели, считаются существенными для исследователя.

Построенная модель конкретного временного ряда считается адекватной, если правильно отражает систематические компоненты временного ряда. Это требование эквивалентно требованию, чтобы остаточная компонента удовлетворяла свойствам случайной компоненты временного ряда: случайность колебаний уровней остаточной последовательности; распределение случайной компоненты по нормальному закону распределения; равенство математического ожидания случайной компоненты нулю; независимость значений уровней компоненты [52,53].

Проверка случайности колебаний уровней остаточной компоненты может осуществляться различными методами: методом серий знаков; поворотных точек (пиков) и др. Рассмотрим метод поворотных точек: в соответствии с ним каждый уровень ряда сравнивается с двумя рядом стоящими. Если он больше их ($E(t) > E(t - l)$ и $E(t) > E(t + l)$) или меньше их ($E(t) < E(t - l)$ и $E(t) < E(t + l)$), то эта точка является поворотной. Число таких точек P должно удовлетворять строгому неравенству:

$$P > \left[2 * \frac{(n-2)}{3} - 1.96 * \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right]$$

где $[\]$ - целая часть числа.

Единицей отмечается поворотная точка, нулем - не поворотная.

Проверка соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения может быть произведена с помощью ряда методов: метод Вестергарда, RS-критерий, метод исследования показателей асимметрии и эксцесса и т.п. Наиболее простым из них является RS-критерий. Этот критерий численно равен отношению размаха вариации случайной величины R к стандартному отклонению S:

$$RS = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{S_E},$$

где E_{\max} - максимальный уровень ряда остатков;

E_{\min} - минимальный уровень ряда остатков;

$S_E = \sqrt{\frac{\sum E(t)^2}{n-1}}$ - исправленное среднеквадратическое отклонение

(СКО).

Вычисленное значение RS-критерия сравнивается с табличными (критическими) верхней и нижней границами E_{\max} и E_{\min} для данного отношения, и если это значение не попадает в интервал между критическими границами, то с заданным уровнем значимости α гипотеза о нормальности распределения отвергается; в противном случае – принимается.

Проверка равенства математического ожидания случайной компоненты нулю, если она распределена по нормальному закону, осуществляется на основе t-критерия Стьюдента; для этого рассчитывается величина t-статистики:

$$t_{pac} = \frac{|\bar{E}|}{\sigma_E} \sqrt{n}$$

где $\bar{E} = \frac{\sum_{t=1}^n E(t)}{n}$ - среднее значение уровней ряда остатков;

σ_E - СКО уровней этого ряда, вычисленное, по формуле:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n E(t)^2 - \left(\sum_{t=1}^n E(t)\right)^2}{n(n-1)}}$$

Если $t_{pac} < t_\alpha$, где t_α – квантиль распределения Стьюдента с заданным уровнем значимости “ α ” и числом степеней свободы $(n - 1)$, то гипотеза о равенстве нулю математического ожидания случайной последовательности принимается; в противном случае – отвергается.

Проверка независимости значений уровней случайной компоненты, т.е. проверка отсутствия существенной автокорреляции в остаточной последовательности осуществляется с помощью d -критерия Дарбина-Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n [E(t) - E(t-1)]^2}{\sum_{t=1}^n E(t)^2}$$

Расчетное значение d -критерия сравнивается с верхним d_2 и нижним d_1 критическими значениями статистики Дарбина-Уотсона.

Если $d_2 < d < 2$, то гипотеза о независимости уровней ряда остатков принимается; если $d < d_1$, то гипотеза отвергается.

Если $d_1 < d < d_2$, то нет достаточных оснований делать тот или иной вывод, в этом случае вычисляется первый коэффициент

автокорреляции [8]:
$$r(1) = \frac{\sum_{t=2}^n E(t)E(t-1)}{\sum_{t=1}^n E(t)^2}$$

Если $|r(1)| < 0,36$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается; в противном случае – отвергается, т.е. уровни остаточного ряда зависимы.

Расчетное значение d в интервале от 2 до 4 свидетельствует об отрицательной связи. В этом случае его надо преобразовать по формуле: $d' = 4 - d$ и далее использовать значение d' .

Выполнение всех четырех свойств случайной компоненты временного ряда говорит об адекватности модели.

2.2. Оценка точности модели

Для адекватных моделей ставится задача оценки их точности. Точность модели характеризуется величиной отклонения выхода модели от реального значения моделируемой переменной (экономического показателя). Для показателя, представленного временным рядом, точность определяется как разность между значением фактического уровня ряда и его оценкой, полученной расчетным путем с использованием модели, при этом в качестве статистических показателей точности применяются следующие [48]:

- ✓ среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}$$

- ✓ средняя относительная ошибка аппроксимации:

$$\overline{E}_{\text{омн}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|E(t)|}{y(t)} * 100\%$$

✓ коэффициент сходимости:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - y_{cp})^2}$$

✓ коэффициент детерминации: $R^2 = 1 - \varphi^2$

где n - количество уровней ряда;

k - число параметров модели;

\hat{y}_t - оценка уровней ряда по модели;

y_{cp} - среднее арифметическое значение уровней.

На основании указанных показателей можно сделать выбор из нескольких адекватных моделей экономической динамики наиболее точную.

2.3. Точечный и интервальный прогнозы

После установления адекватности и точности построенной модели строится прогноз. Прогноз на основании качественных моделей содержит два элемента: точечный и интервальный прогнозы [47].

Точечный прогноз - это прогноз, которым называется единственное значение прогнозируемого показателя. Это значение определяется подстановкой в полученную адаптивную модель величины времени t , соответствующей периоду упреждения: $t = n + 1, t = n + 2, \dots, t = n + k$ ($k < n/3$). Такой прогноз называется точечным, т.к. на графике его можно изобразить в виде точки.

Так как, точное совпадение фактических данных в будущем и прогностических точечных оценок маловероятно, поэтому точечный прогноз должен сопровождаться двусторонними границами, т.е. указанием

интервала значений, в котором с достаточной долей уверенности можно ожидать появления прогнозируемой величины. Установление такого интервала называется интервальным прогнозом.

Интервальный прогноз осуществляется путем расчета доверительного интервала - такого интервала, в котором с определенной вероятностью можно ожидать появления фактического значения прогнозируемого показателя. Ширина такого интервала определяется по формуле [8]:

$$U(k) = S_{\hat{y}} t_{\alpha} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n+k-t_{cp})^2}{\sum_{t=1}^n (t-t_{cp})^2}}$$

где $S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n E(t)^2}{n-2}}$ - стандартная ошибка;

t_{α} – табличное значение t-статистики Стьюдента при заданном уровне значимости и числе наблюдений;

k – число шагов прогнозирования.

Доверительный интервал прогноза имеет следующие границы:

верхняя граница: $\hat{y}(n+k) + U(k)$; нижняя граница: $\hat{y}(n+k) - U(k)$.

При прогнозировании экономического показателя на основе моделей прогнозирования весьма важной является верификация прогноза. Верификация сводится к сопоставлению расчетных результатов по модели с соответствующими данными действительности. Верификация прогнозной модели представляет собой совокупность критериев, способов и процедур, позволяющих оценить качество получаемого прогноза.

О точности прогноза принято судить по величине ошибки прогноза – разности между фактическим значением исследуемого показателя и его прогнозным значением. Определить указанную разность можно лишь в двух случаях: либо если период упреждения уже окончился и известно фактическое значение прогнозируемого показателя (известна его

реализация), либо если прогнозирование осуществлялось для некоторого момента времени в прошлом, для которого известны фактические данные.

Абсолютная ошибка прогноза определяется по формуле:

$$\Delta_i = \hat{y}_i - y_i$$

где \hat{y}_i - прогнозное значение показателя;

y_i - фактическое значение.

Также используется относительная ошибка прогноза, выраженная в процентах относительно фактического значения показателя:

$$\delta_i = \frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}$$

Из формул видно, что если абсолютная и относительная ошибки больше нуля, то это свидетельствует о «завышенной» прогнозной оценке, если меньше нуля, то прогнозное значение было занижено.

Прогнозные оценки с помощью методов экстраполяции рассчитываются в несколько этапов [46]:

- проверка базовой линии прогноза;
- выявление закономерностей прошлого развития явления;
- оценка степени достоверности выявленной закономерности развития явления в прошлом (подбор трендовой функции);
- экстраполяция — перенос выявленных закономерностей на некоторый период будущего;
- корректировка полученного прогноза с учётом результатов содержательного анализа текущего состояния.

Для получения объективного прогноза развития изучаемого явления данные базовой линии должны соответствовать следующим требованиям:

- шаг по времени для всей базовой линии должен быть одинаков;

- наблюдения фиксируются в один и тот же момент каждого временного отрезка (например, на полдень каждого дня, первого числа каждого месяца);
- базовая линия должна быть полной, то есть пропуск данных не допускается.

Если в наблюдениях отсутствуют результаты за незначительный отрезок времени, то для обеспечения полноты базовой линии необходимо их восполнить приблизительными данными, например, использовать среднее значение соседних отрезков.

Корректировка полученного прогноза выполняется для уточнения полученных долгосрочных прогнозов с учётом влияния сезонности или скачкообразности развития изучаемого явления.

2.4. Прогнозирование экономической динамики трендовых моделей

При математическом прогнозировании чаще всего экономическое прогнозирование проводится на основе трендовых моделей, в которых динамика развития экономических явлений отражается через тренд основных показателей, характеризующих это явление (объём выпуска продукции, заработанная плата, процентной ставки в банках и т. д.) [18,38].

Рассмотрим трендовые модели на основе кривых роста, в которых экономический показатель рассматривается как функция одного аргумента времени: $\hat{y} = f(t)$.

Целью создания трендовых моделей экономической динамики является прогнозирование развития изучаемого процесса на предстоящий промежуток времени. Прогнозирование на основе временного ряда экономических показателей относится к одномерным методам прогнозирования, базирующимся на экстраполяции, то есть на продлении на будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом. Предполагается, что

прогнозируемый показатель формируется под воздействием большого количества факторов. В этом случае ход изменения данного показателя связывают не с факторами, а с течением времени, что проявляется в образовании одномерных временных рядов.

При экстраполяционном прогнозировании экономической динамики на основе временных рядов с использованием трендовых моделей выполняются следующие основные этапы:

- 1) предварительный анализ данных;
- 2) формирование модели;
- 3) численное оценивание параметров модели;
- 4) определение адекватности модели;
- 5) оценка точности адекватной модели;
- 6) получение точечного и интервального прогноза.

Использование метода экстраполяции на основе кривых роста для прогнозирования базируется на двух предположениях:

- временной ряд экономического показателя действительно имеет тренд, то есть преобладающую тенденцию;
- общие условия, определявшие развитие показателя в прошлом, останутся без существенных изменений в течении периода упреждения.

В настоящее время насчитывается большое количество типов кривых роста для экономических процессов. Чтобы правильно подобрать наилучшую кривую роста для моделирования и прогнозирования экономического явления, необходимо знать особенности каждого вида кривых. Наиболее часто используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные кривые роста.

В качестве кривых роста рассмотрим наиболее часто встречающиеся в практике.

Полиномиальные модели - функция, выраженная в виде полинома - многочлена 1, 2, ..., 5 степени.

Простейшие полиномиальные кривые роста имеют вид:

$y_t = a_0 + a_1 \cdot t$ - полином первой степени;

$y_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$ - полином второй степени;

$y_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$ - полином третьей степени и так далее.

Параметр a_1 является линейным приростом, параметр a_2 - ускорением роста, параметр a_3 - скоростью изменения ускорения роста.

От полинома высокого порядка можно путем расчета последовательных разностей перейти к полиному более низкого порядка. Значения приростов для полинома любого порядка не зависят от значений самой функции y_t .

Полиномиальные кривые роста можно использовать для аппроксимации и прогнозирования экономических процессов, в которых последующее развитие не зависит от достигнутого уровня.

В отличие от использования полиномиальных кривых использование экспоненциальных кривых роста предполагает, что дальнейшее развитие зависит от достигнутого уровня. Применяются два вида экспоненциальных кривых: простая экспонента и модифицированная экспонента.

Простая экспонента представляется в виде функции: $y_t = ab^t$, где a и b - положительные числа, при этом если b больше единицы, то функция возрастает с ростом времени t , если b меньше единицы- функция убывает.

Модифицированная экспонента имеет вид: $y_t = k + ab^t$, где постоянные величины: a меньше нуля, b положительна и меньше единицы, а константа k является асимптотой этой функции.

Среди S - образных кривых роста выделяют кривую Гомперца. Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение: $y_t = ka^{bt}$, где a и b -

положительные параметры, причем b меньше единицы; параметр k -асимптота функции.

Для выбора вида полиномиальной кривой роста используется универсальный метод характеристик прироста. Он основан на использовании отдельных характеристик свойств кривых. При этом методе исходный временной ряд предварительно сглаживается методом простой скользящей средней, причем чтобы не потерять первый и последний уровни, их сглаживают по формулам:

$$\bar{y}_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6}, \quad \bar{y}_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6},$$

затем вычисляются первые средние приросты:

$$\bar{u}_t = \frac{\bar{y}_{t+1} - \bar{y}_{t-1}}{2}, \quad t = 2, 3, \dots, n-1;$$

вторые средние приросты:

$$\bar{u}^2_t = \frac{\bar{u}_{t+1} - \bar{u}_{t-1}}{2},$$

а также ряд производных величин, связанных с вычисленными средними приростами и сглаженными уровнями ряда:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{y}_t}; \quad \log \bar{u}_t; \quad \log \frac{\bar{u}}{\bar{y}_t}; \quad \log \frac{\bar{u}}{\bar{y}_t}.$$

В соответствии с характером изменения средних приростов и производных показателей выбирается вид кривой роста исходного временного ряда, при этом необходимо использовать табл.1.

Параметры полиномиальных кривых оцениваются методом наименьших квадратов, суть которого заключается в том, чтобы сумма квадратов отклонений фактических уровней ряда от соответствующих выравненных по кривой роста значений была наименьшей. Этот метод приводит к системе нормальных уравнений для определения неизвестных параметров отобранных кривых.

Таблица 1

Показатель	Характер изменения показателя во времени	Вид кривой роста
Первый <u>средний</u> прирост \bar{u}_t	Примерно одинаковы	Полином первого порядка (прямая)
Первый <u>средний</u> прирост \bar{u}_t	Изменяются линейно	Полином второго порядка (парабола)
Второй <u>средний</u> прирост \bar{u}_t^2	Изменяются линейно	Полином третьего порядка (кубическая парабола)
$\frac{\bar{u}}{\bar{y}_t}$	Примерно одинаковы	Простая экспонента
$\log \frac{\bar{u}}{t}$;	Изменяются линейно	Модифицированная экспонента
$\log \frac{\bar{u}}{y_t}$;	Изменяются линейно	Кривая Гомперца
$\log \frac{\bar{u}}{y \cdot t}$	Изменяются линейно	Логистическая кривая

Для полинома первой степени: $y_t = a_0 + a_1 \cdot t$, система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum t = \sum y_t \\ a_0 \cdot \sum t + a_1 \cdot \sum t^2 = \sum y_t \cdot t \end{cases}$$

где знак суммирования распространяется на все моменты наблюдения исходного временного ряда.

Аналогичная система для полинома второй степени:

$y_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum t + a_2 \cdot \sum t^2 = \sum y_t \\ a_0 \cdot \sum t + a_1 \cdot \sum t^2 + a_2 \cdot \sum t^3 = \sum y_t \cdot t \\ a_0 \cdot \sum t^2 + a_1 \cdot \sum t^3 + a_2 \cdot \sum t^4 = \sum y_t \cdot t^2 \end{cases}$$

Для полинома третьей степени:

$y_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$, система нормальных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum t + a_2 \cdot \sum t^2 + a_3 \cdot \sum t^3 = \sum y_t \\ a_0 \cdot \sum t + a_1 \cdot \sum t^2 + a_2 \cdot \sum t^3 + a_3 \cdot \sum t^4 = \sum y_t \cdot t \\ a_0 \cdot \sum t^2 + a_1 \cdot \sum t^3 + a_2 \cdot \sum t^4 + a_3 \cdot \sum t^5 = \sum y_t \cdot t^2 \\ a_0 \cdot \sum t^3 + a_1 \cdot \sum t^4 + a_2 \cdot \sum t^5 + a_3 \cdot \sum t^6 = \sum y_t \cdot t^3 \end{cases}$$

Параметры экспоненциальных и S - образных кривых находятся более сложными методами. Для простой экспоненты: $y_t = ab^t$, предварительно логарифмируется выражение по некоторому основанию, то есть для логарифма функции получается линейное выражение, а затем для неизвестных параметров составляется на основе метода наименьших квадратов система нормальных уравнений, аналогичная системе для полинома первой степени. При решении этой системы находятся логарифмы параметров, а затем и сами параметры модели.

При определении параметров кривых роста, имеющих асимптоты, различается два случая. Если значение асимптоты k заранее известно, то путем модификации формулы и последующего логарифмирования определение параметров сводится к решению системы нормальных уравнений, неизвестными которой являются логарифмы параметров кривой.

Если значение асимптоты заранее неизвестно, то для нахождения параметров кривых роста используются приближенные методы: метод трех точек, метод трех сумм и другие.

При моделировании экономической динамики, заданной временным рядом, путем сглаживания исходного ряда, определения наличия тренда, отбора одной или нескольких кривых роста и определения

их параметров в случае наличия тренда получается одна или несколько трендовых моделей для исходного временного ряда. Необходимо решение вопроса о применении этих моделей для анализа и прогнозирования изучаемого экономического явления.

Экономическое прогнозирование рассматривается в узком и широком смысле. В первом случае прогнозирование связано с предсказанием будущих значений экономических параметров и показателей. Под прогнозом понимается научно обоснованное описание возможных состояний объектов в будущем, а также альтернативных путей и сроков достижения этого состояния. Во втором - экономическое прогнозирование позволяет провести анализ экономической ситуации в целом, с акцентом на закономерности процессов и явлений. То есть на первый план выдвигаются выявление и систематизация результатов стратегических или иных альтернатив, анализ последствий, связанных с реализацией каждой из них.

Прогнозирование экономических показателей основано на идее экстраполяции. Экстраполяцией называется распространение закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределы. В более широком смысле слова ее рассматривают как получение представлений о будущем на основе информации, относящейся к прошлому и настоящему.

В процессе построения прогнозных моделей в их структуру иногда закладываются элементы будущего предполагаемого состояния объекта или явления, но в целом эти модели отражают закономерности, наблюдаемые в прошлом и настоящем, поэтому достоверный прогноз возможен лишь относительно таких объектов и явлений, которые в значительной степени детерминируются прошлым и настоящим. Существуют две основные формы детерминации: внутренняя и внешняя. Внутренняя детерминация, или самодетерминация, более устойчива, ее

проще идентифицировать с использованием экономико-математических моделей. Внешняя детерминация определяется большим числом факторов, поэтому учесть их все практически невозможно. Если некоторые методы моделирования, например адаптивные, отражают общее совокупное влияние на экономическую систему внешних факторов, т.е. отражают внешнюю детерминацию, то методы, базирующиеся на использовании трендовых моделей экономических процессов, представленных одномерными временными рядами, отражают внутреннюю детерминацию объектов и явлений.

Прогноз моделей содержит два элемента: точечный и интервальный прогнозы. Точечный прогноз - это прогноз, которым называется единственное значение прогнозируемого показателя. Это значение определяется подстановкой в уравнение величины времени t , соответствующей периоду упреждения: $t = n + 1$; $t = n + 2$ и т. д. Такой прогноз называется точечным, так как на графике его можно изобразить в виде точки. Очевидно, что точное совпадение фактических данных в будущем и прогностических точечных оценок маловероятно. Поэтому точечный прогноз должен сопровождаться двусторонними границами, т.е. указанием интервала значений, в котором с достаточной долей уверенности можно ожидать появления прогнозируемой величины. Установление такого интервала называется интервальным прогнозом.

Интервальный прогноз на базе трендовых моделей осуществляется путем расчета доверительного интервала, в котором с определенной вероятностью можно ожидать появления фактического значения прогнозируемого экономического показателя. Расчет доверительных интервалов при прогнозировании с использованием кривых роста опирается на выводы и формулы теории регрессий.

Методы, разработанные для статистических совокупностей, позволяют определить доверительный интервал, зависящий от

стандартной ошибки оценки прогнозируемого показателя от времени упреждения прогноза, от количества уровней во временном ряду и от уровня значимости, и от ошибки прогноза (в данной дипломной работе мы взяли 5%-ный уровень значимости).

Стандартная (средняя квадратическая) ошибка оценки прогнозируемого показателя $S_{\hat{y}}$ определяется по формуле:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - k}},$$

где y_t – фактическое значение уровня временного ряда для времени t ;

\hat{y}_t – расчетная оценка соответствующего показателя по модели;

n – количество уровней в исходном ряду;

k – число параметров модели.

В случае прямолинейного тренда для расчета доверительного интервала можно использовать аналогичную формулу для парной регрессии, таким образом, доверительный интервал прогноза U_y в этом случае будет иметь вид:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_{\alpha} S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n + 2L - 1)^2}{n(n^2 - 1)}},$$

где L – период упреждения;

\hat{y}_{n+L} – точечный прогноз по модели на $(n+L)$ -й момент времени;

n – количество наблюдений во временном ряду;

$S_{\hat{y}}$ – стандартная ошибка оценки прогнозируемого показателя, рассчитанная по формуле для числа параметров модели, равного двум;

t_{α} – табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости α и для числа степеней свободы, равного $n - 2$.

Если выражение:

$$t_{\alpha} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$$

обозначить через K , то формула для доверительного интервала примет вид:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm S_y K.$$

Важной характеристикой является время (период) упреждения прогноза – отрезок времени от момента, для которого имеются последние статистические данные об изучаемом объекте, до момента, к которому относится прогноз. Значения величины K для оценки доверительных интервалов прогноза относительно линейного тренда табулированы. Фрагмент такой таблицы для уровня значимости $\alpha = 0,20$ представлен в таблице:

Число уровней в ряду (n)	Период упреждения L					
	1	2	3	4	5	6
7	1,932	2,106	2,300	2,510	2,733	2,965
10	1,692	1,774	1,865	1,964	2,069	2,180
13	1,581	1,629	1,682	1,738	1,799	1,863
15	1,536	1,572	1,611	1,653	1,697	1,745

Иногда для расчета доверительных интервалов прогноза относительно линейного тренда применяют приведенную выше формулу в несколько преобразованном виде:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_{\alpha} S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(t_L - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2}},$$

где t – порядковый номер уровня ряда ($t = 1, 2, \dots, n$);

$t_L = n + L$ – время, для которого делается прогноз;

\bar{t} – время, соответствующее середине периода наблюдений для исходного ряда.

Эта формула упрощается, если перенести начало отсчета времени на середину периода наблюдений ($\bar{t} = 0$):

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2}}.$$

Формула для расчета доверительных интервалов прогноза относительно тренда, имеющего вид полинома второго или третьего порядка, выглядит следующим образом:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2} + \frac{\sum t^4 - 2t_L^2 \sum t^2 + nt_L^4}{n \sum t^4 - (\sum t^2)^2}}.$$

Таким образом, формулы расчета доверительного интервала различны, но каждая из них отражает динамический аспект прогнозирования, т.е. увеличение неопределенности прогнозируемого процесса с ростом периода упреждения проявляется в постоянном расширении доверительного интервала.

Несмотря на громоздкость некоторых формул, расчет точечных и интервальных прогнозов технически является достаточно простой процедурой. Оптимальная длина периода упреждения определяется отдельно для каждого экономического явления с учетом статистической колеблемости изучаемых данных на основе содержательного суждения о стабильности явления. Эта длина не превышает для рядов годовых наблюдений одной трети объема данных, а для квартальных и месячных рядов - двух лет.

При экстраполяционном прогнозировании экономической динамики с использованием трендовых моделей весьма важным является заключительный этап - верификация прогноза. Верификация любых дескриптивных моделей, к которым относятся трендовые модели, сводится к сопоставлению расчетных результатов по модели с соответствующими данными действительности — массовыми фактами и закономерностями экономического развития. Верификация прогнозной модели представляет

собой совокупность критериев, способов и процедур, позволяющих на основе многостороннего анализа оценивать качество получаемого прогноза. Однако чаще всего на этапе верификации в большей степени осуществляется оценка метода прогнозирования, с помощью которого был получен результат, чем оценка качества самого результата. Это связано с тем, что до сих пор не найдено эффективного подхода к оценке качества прогноза до его реализации.

О точности прогноза принято судить по величине ошибки прогноза - разности между фактическим значением исследуемого показателя и его прогнозным значением. Проверка точности одного прогноза недостаточна для оценки качества прогнозирования, так как она может быть результатом случайного совпадения. Наиболее простой мерой качества прогнозов при условии, что имеются данные об их реализации, является отношение числа случаев, когда фактическая реализация охватывалась интервальным прогнозом, к общему числу прогнозов.

ГЛАВА III. АДАПТИВНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

3.1. Сущность адаптивных методов и моделей прогнозирования

В настоящее время существует множество методов прогнозирования, каждый из которых содержит множество приемов мышления, имеет свою отличительную особенность [21,36,37,45]. Более эффективными методами прогнозирования являются те, которые учитывают неравноценность уровней ряда. К таким методам относятся адаптивные методы, основанные на экстраполяции [13,38,45]. Экстраполяция – распространение установленных в прошлом факторов и тенденций на будущий период. При этом необходимо учитывать лишь те тенденции, которые еще не устарели и до сих пор оказывают влияние на изучаемый процесс.

Адаптивные методы имеют механизм автоматической настройки на изменение исследуемого показателя. Инструментом прогноза является модель, первоначальная оценка параметров которой производится по нескольким первым наблюдениям. На ее основе делается прогноз, который сравнивается с фактическими наблюдениями. Далее модель корректируется в соответствии с величиной ошибки прогноза и вновь используется для прогнозирования следующего уровня, вплоть до исчерпания всех моментов наблюдений. Таким образом, модель постоянно «впитывает» новую информацию, приспосабливается к ней и к концу периода наблюдения отображает тенденцию, сложившуюся на текущий момент [31]. На рис.1 приведена общая схема построения адаптивных моделей прогнозирования [50].

При оценке параметров адаптивных моделей наблюдениям присваиваются различные веса в зависимости от того, насколько сильным признается их влияние на текущий уровень. Это позволяет учитывать

изменения в тенденции, а также любые колебания, в которых прослеживается закономерность.

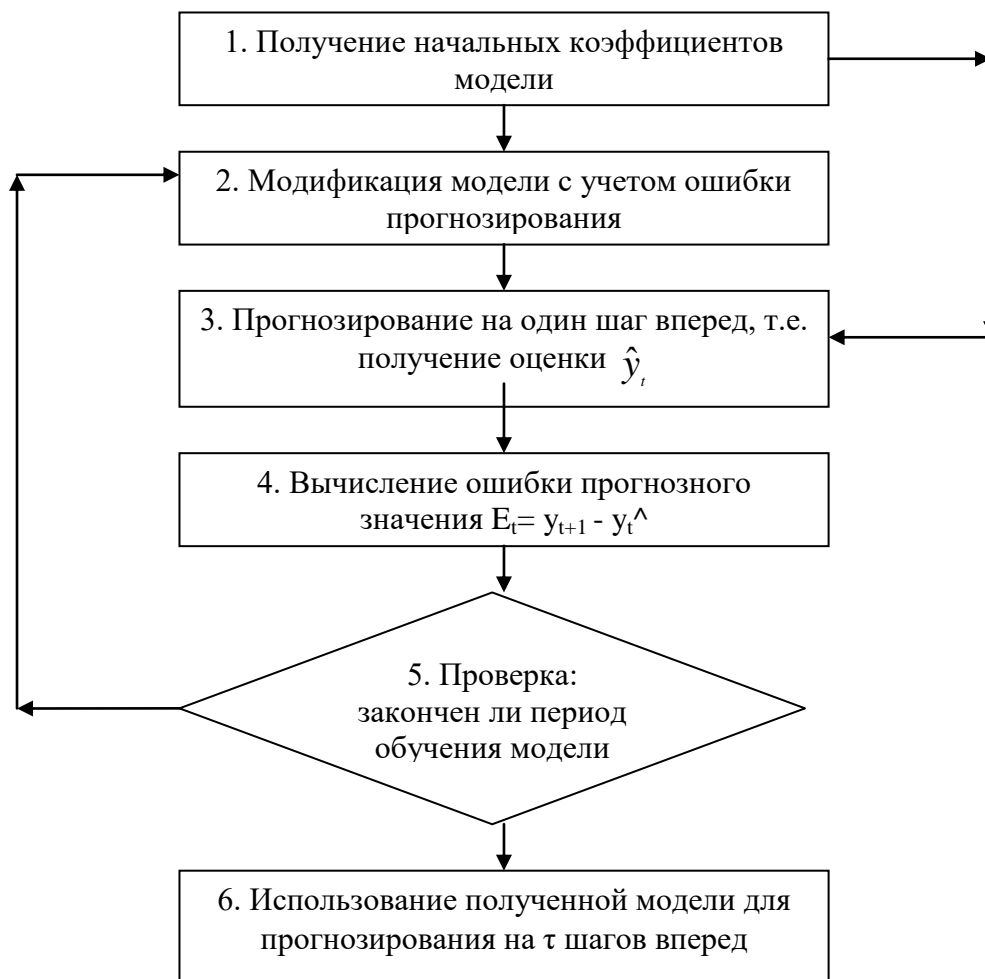


Рисунок 1 - Схема построения адаптивных моделей прогнозирования

Быстроту реакции модели на изменения в динамике процесса характеризует так называемый параметр адаптации. Этот параметр должен быть выбран таким образом, чтобы обеспечивалось адекватное отображение тенденции при одновременной фильтрации случайных отклонений. Значения параметра адаптации могут изменяться от 0 до 1. Высокое значение этих параметров (свыше 0,5) означает придание большего веса последним уровням ряда, а низкое (менее 0,5) – предшествующим наблюдениям. Первый случай соответствует

быстроизменяющимся динамичным процессам, второй – более стабильным. Эти значения могут быть определены на основе эмпирических данных, выведены аналитическим способом или получены на основе метода проб. В качестве критерия оптимальности при выборе параметра обычно принимают критерий минимума среднего квадрата ошибок прогнозирования [43].

Итак, адаптивными называются методы прогнозирования, позволяющие строить самокорректирующиеся (самонастраивающиеся) экономико-математические модели, которые способны оперативно реагировать на изменение условий путем учета результатов прогноза, сделанного на предыдущем шаге, и учета различной информационной ценности уровней ряда. Благодаря указанным свойствам адаптивные методы особенно удачно используются при краткосрочном прогнозировании (при прогнозировании на один или несколько шагов вперед).

Адаптивные модели прогнозирования относят к классу моделей временных рядов, к ним также относятся модели авторегрессии и скользящего среднего (ARIMA) и др. их общей чертой является то, что они объясняют поведение временного ряда, исходя только из его предыдущих значений. Итак, все адаптивные модели базируются на двух схемах: скользящего среднего и авторегрессии, различаясь между собой только способом числовой оценки параметров, определения параметров адаптации и компоновки [53].

Рассмотрим схему а) скользящей средней (СС – модели).

Согласно схеме скользящего среднего, оценкой текущего уровня является взвешенная средняя всех предшествующих уровней, причем веса при наблюдениях убывают по мере удаления от последнего уровня, то есть информационная ценность наблюдения признается тем большей, чем ближе они к концу интервала наблюдения.

Такие модели хорошо отражают изменения, происходящие в тенденции, но в чистом виде не позволяют отражать колебания.

Реакция на ошибку прогноза и дисконтирования уровней временного ряда в моделях, базирующихся на схеме СС, определяется с помощью параметров сглаживания (адаптация), значения которых могут изменяться от 0 до 1.

Высокое значение этих параметров (свыше 0,5) означает придание большего веса последним уровням ряда, а низкая (менее 0,5) – предшествующим наблюдениям.

Первый случай соответствует быстроизменяющимся динамическим процессам, а второй – более стабильным.

Для краткосрочного прогнозирования более эффективными оказываются методы, учитывающие не равноценность уровней временного ряда и быстро приспосабливающие свою структуру и параметры к изменяющимся условиям. Такие методы получили название адаптивных методов прогнозирования.

Адаптивные модели прогнозирования – это модели дисконтирования данных, способные быстро приспосабливать свою структуру и параметры к изменению условий. Инструментом прогноза в адаптивных моделях, как и в кривых роста, является математическая модель с единственным фактором – время.

Рассмотрим общую схему построения адаптивных моделей:

По нескольким первым уровням ряда оцениваются значения параметров модели.

По имеющейся модели строится прогноз на 1 шаг вперед, причем его отклонение от фактических уровней ряда расценивается как ошибка прогнозирования, которая учитывается в соответствии с принятой схемой корректировки модели.

Далее по модели со скорректированными параметрами рассчитывается прогнозная оценка и так далее.

Таким образом, модель постоянно впитывает новую информацию и отражает тенденцию развития процесса, существующего в данный момент.

В практике статистического прогнозирования наиболее часто используются две базовые СС – модели Брауна и Хольта.

Эти модели представляют процесс развития, как линейную тенденцию с постоянно изменяющимися параметрами.

Модель Брауна (модель экспоненциального сглаживания) может отображать развитие не только в виде линейной тенденции, но также в виде случайного процесса, не имеющего тенденции, а также в виде изменяющейся параболической тенденции.

Соответственно различают следующие модели Брауна:

1. модель нулевого порядка, которая описывает процессы, не имеющие тенденции развития. Она имеет один параметр – a_0 (оценка текущего уровня).

Прогноз развития на k -шагов вперед осуществляется согласно формуле: $y(t + k) = a_0$. Такая модель также называется “наивной” (будет, как было).

2. модель первого порядка имеет вид: $y(t + k) = a_0 + a_1k$, где a_0 – значение, близкое к последнему уровню и представляет как бы закономерную составляющую этого уровня;

a_1 – определенный прирост, сформировавшийся в основном к концу периода наблюдений, но отражающий также скорость роста на более ранних этапах.

3. модель второго порядка отражает развитие в виде параболической тенденции с изменяющимися скоростью и ускорением. Прогноз осуществляется по формуле: $y(t + k) = a_0 + a_1k + a_2k^2$,

где a_2 – оценка текущего прироста, или ускорения.

Рассмотрим схему б) авторегрессии (АР – модели).

В авторегрессионной схеме оценкой текущего уровня служит сумма не всех, а нескольких предшествующих уровней; информационная ценность наблюдений определяется не их близостью к моделируемому уровню, а теснотой связи между ними.

В авторегрессионных (АР) моделях текущее значение процесса представляется как линейная комбинация предыдущих его значений и случайной компоненты.

Идентификация $AP(p)$ модели состоит в определении ее порядка p . Одной из предпосылок построения модели этого типа является применение их к стационарному процессу. Поэтому в более широком смысле идентификация модели включает также выбор способа трансформации исходного ряда наблюдений, как правило, имеющего некоторую тенденцию, в стационарный (или близкий к нему) ряд. Один из наиболее распространенных способов решения этой проблемы — последовательное взятие разностей, т.е. переход от исходного ряда к ряду первых, а затем и вторых разностей.

«Чистые» авторегрессионные процессы имеют плавно затухающую автокорреляционную функцию (АКФ). В этом случае в качестве порядка модели выбирается лаг, после которого все частные автокорреляционные функции (ЧАКФ) имеют незначительную величину. Однако на практике редко встречаются процессы, которые легко было бы идентифицировать. Поэтому порядок модели обычно определяется методом проб из нескольких альтернатив. В число кандидатов включаются модели, у которых порядок соответствует ЧАКФ, превышающей стандартное отклонение $1/N$. При обработке разностных рядов иногда ориентируются на АКФ, выбирая модели, у которых порядок соответствует максимальному ее значению, при условии, что оно превышает стандартное отклонение.

Ряды без тенденции, как правило, не, представляют интереса для экономистов. АР-модели вообще не предназначены для описания процессов с тенденцией, однако они хорошо описывают колебания, что весьма важно для отображения развития неустойчивых показателей.

Чтобы сделать возможным применение АР - моделей к процессам с тенденцией, на первом этапе формируют стационарный ряд, т.е. исключают тенденцию путем перехода от исходного временного ряда к ряду $Z(t)$ ($t=1,2,\dots,N-d$) первых и вторых разностей ($d=1$ или 2).

$$\begin{aligned} Z(t) &= Y(t), & t &= 1, 2, \dots, N \text{ при } d=0; \\ Z(t) &= Y(t+1) - Y(t), & t &= 1, 2, \dots, N-1, \quad d=1; \\ Z(t) &= Z(t+1) - Z(t), & t &= 1, 2, \dots, N-2, \quad d=2. \end{aligned}$$

Например, ряд первых разностей формируется как ряд приростов, т.е. последовательным вычитанием двух соседних уровней. С учетом этого АР(p) - модель порядка p имеет вид:

$$Z(t) = A_0 + A_1 \cdot Z(t-1) + A_2 \cdot Z(t-2) + \dots + A_p \cdot Z(t-p).$$

Параметры этой модели вычисляются по МНК с учетом сложности модели либо методом адаптивной фильтрации (МАФ). В обоих случаях необходимо предварительно идентифицировать модель, т.е. правильно определить порядок разностного ряда d и порядок модели p .

Простейшим способом определения наиболее подходящего разностного ряда является вычисление для каждого ряда ($d = 0, 1, 2$) его дисперсии, т.е. усредненной суммы квадратов расхождений его уровней со средним значением Z_{cp} . Для дальнейшей обработки выбирается ряд, у которого величина этого показателя минимальна.

Для идентификации порядка модели обычно используется автокорреляционная функция, значения которой определяются по формуле:

$$r(m) = \frac{\sum_{t=1}^{n-m} \{(Z(t) - Z_{cp})(Z(t-m) - Z_{cp})\}}{\sum_{t=1}^n (Z(t) - Z_{cp})^2}$$

где n - количество уровней стационарного ряда ($n = N - d$);

m - номер коэффициента автокорреляции ($m < n/3$).

В качестве порядка модели принимается номер коэффициента автокорреляции $r(m)$, имеющего максимальную величину. Следовательно, в модели используются p уровней, которые оказывают на текущий уровень наибольшее влияние. В соответствии с МНК формируется система из p уравнений, которая в компактной форме имеет вид:

$$\sum_{t=p+1}^n Z(t-j) \left(z(t) - \sum_{j=1}^p A_j Z(t-j) \right) = 0.$$

Например, для $p = 2$ система принимает вид:

$$\begin{aligned} A_1 \sum Z(t-1)^2 + A_2 \sum Z(t-1)Z(t-2) &= \sum Z(t-1)Z(t), \\ A_1 \sum Z(t-1)Z(t-2) + A_2 \sum Z(t-2)^2 &= \sum Z(t-2)Z(t). \end{aligned}$$

В ней суммирование проводится по t в пределах от 3 до $n = N - d$. Решив эту систему уравнений, получают числовое значение A_1, A_2, \dots, A_p . Оценка свободного члена получается из соотношения:

$$A_0 = Z_{cp} \left[1 - (A_1 + A_2 + \dots + A_p) \right].$$

На основе построенной модели вычисляют прогнозное значение разностного ряда $Z(n + k)$ на k шагов вперед, а от него переходят к прогнозной оценке исходного ряда.

Так, для $d = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} Y(N+1) &= Y(N) + Z(n+1) \quad \text{при } k=1, \\ Y(N+2) &= Y(N+1) + Z(n+2) \quad \text{при } k=2. \end{aligned}$$

Следовательно, прогнозные оценки базируются как на фактических, так и на полученных прогнозных уровнях ряда. Доверительный интервал прогноза рассчитывается на основе точечного прогноза:

$$\begin{aligned} \text{верхняя граница прогноза} &= Z(N + k) + U(k), \\ \text{нижняя граница прогноза} &= Z(N + k) - U(k). \end{aligned}$$

Величина $U(k)$ рассчитывается по формуле:

$$U(k) = S_{\hat{y}} \cdot t_{\alpha} \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} C(j)^2},$$

где $S_{\hat{y}}$ — СКО, вычисленное с учетом сложности $AP(p)$ - модели;

t_{α} - коэффициент, соответствующий табличному значению статистики Стьюдента с выбранным уровнем значимости α ; коэффициент под квадратным корнем рассчитывается рекуррентно, причем при $j = 0$ величина $C(0) = 1$, а при $j > 0$ $C(j) = \sqrt{A_1 C(j-1) + A_2 C(j-2) + \dots + A_p (j-p)}$.

В методе адаптивной фильтрации используется $AP(p)$ - модель без свободного члена. Ее параметры корректируются на j -й итерации в каждый момент времени t следующим образом:

$$A(t, i) = A(t-1, i) - 2we(t)Z(t-i),$$

где $A(t, i)$ и $A(t-1, i)$ - векторы новых и старых значений параметров (весов) модели;

w - константа обучения, определяющая скорость адаптации параметров модели ($w > 0$);

$e(t)$ - ошибка прогнозирования уровня $Y(t)$.

Алгоритм построения модели прогнозирования состоит в следующем. На первой итерации ($j = 1$) на основе начального набора весов и первых p уровней ряда вычисляется $Z_p(t)$ и его расхождение с фактическим уровнем, т.е. $e(t) = Z(t) - Z_p(t)$, $t = p + 1$. Подставляя величину ошибки в уравнение корректировки весов, получают новый набор весов для следующего момента времени $t = p + 2$. Далее эта процедура повторяется для следующих p -наборов $Z(t-i)$ ($i=1, \dots, p; t=p+2, \dots, n$), каждый из которых образован из предыдущего исключением первого и добавлением одного нового уровня ряда. Если на итерации j оптимальные веса не получены, то

на следующей итерации надо вернуться к первому набору уровней ряда $Z(p+1-i)$ ($i=1, \dots, p$), но уже с новыми начальными весами, взятыми от предыдущей итерации.

Определение начальных весов осуществляется путем решения уравнения Юла - Уокера, составленного на основе коэффициентов автокорреляции. Процедура корректировки параметров заканчивается, когда среднеквадратическая ошибка перестает существенно убывать или при достижении заданного максимального количества итераций.

3.2. Модели Хольта и Брауна

Одним из способов использования экспоненциального сглаживания является вычисление коэффициентов в модели линейного роста предполагающем, что прогноз может быть получен по формуле:

$$y_p(t+\tau) = a_t + b_t\tau$$

где τ – период упреждения прогноза,

a_t, b_t – текущие оценки коэффициентов адаптивной модели.

В модели Хольта оценки этих коэффициентов производятся по следующим формулам [37,53]:

$$a_t = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \alpha_2(a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2)b_{t-1}$$

где α_1, α_2 – параметры экспоненциального сглаживания, а начальные значения коэффициентов равны средним значениям ряда.

Частным случаем этой модели является модель Брауна, которая отображает развитие не только в виде линейной тенденции, но также в виде случайного процесса, не имеющего тенденции,

или в виде изменяющейся параболической тенденции. Соответственно различают модель Брауна:

✓ нулевого порядка, которая описывает процессы, не имеющие тенденции развития. Она имеет один параметр "а" (оценка текущего уровня). Прогноз развития на τ шагов вперед осуществляется согласно формуле $y(t + \tau) = a$;

✓ первого порядка [$y(t + \tau) = a + b*\tau$]. Коэффициент "а" - значение, близкое к последнему уровню, представляет как бы закономерную его составляющую. Коэффициент "b" определяет прирост, сформировавшийся в основном к концу периода наблюдений, но отражающий также скорость роста на более ранних этапах.

✓ второго порядка, отражающую развитие в виде параболической тенденции с изменяющимися «скоростью» и «ускорением». Она имеет три параметра ("с"- оценка текущего прироста или «ускорение»). Прогноз осуществляется по формуле: $y(t+\tau)=a + bt + c\tau^2$

Порядок модели обычно определяют либо априорно на основе визуального анализа графика процесса (есть ли тренд и близок ли он к линейной функции), знаний законов развития характера изменения исследуемого явления, либо методом проб, сравнивая статистические характеристики моделей различного порядка на участке ретроспективного прогнозирования [6].

Этапы построения линейной адаптивной модели Брауна:

1 этап: По первым пяти точкам временного ряда оценивают начальные значения "а" и "b" параметров модели с помощью МНК для линейной аппроксимации:

$$y_p(t) = a + bt, t = \overline{1,5}$$

2 этап: С использованием параметров "а" и "b" по модели Брауна находят прогноз на один шаг вперед ($\tau = 1$):

$$y_p(t, \tau) = a(t) + b(t)\tau$$

3 этап: Расчетное значение $y_p(t, \tau)$ экономического показателя сравнивают с фактическим $y(t)$ и вычисляют величину их расхождения (ошибки). При $\tau = 1$ имеем:

$$E(t+1) = y(t+1) - y_p(t, 1)$$

4 этап: В соответствии с этой величиной корректируются параметры модели.

В модели Брауна модификация осуществляется следующим образом:

$$a(t) = a(t-1) + b(t-1) + (1 - \beta^2)E(t)$$

$$b(t) = b(t-1) + (1 - \beta)^2 E(t)$$

где β - коэффициент дисконтирования данных, изменяющийся в пределах от 0 до 1 ($\alpha + \beta = 1$), характеризующий обесценение данных за единицу времени и отражающий степень доверия к более поздним наблюдениям.

Оптимальное значение β находится итеративным путем, т.е. многократным построением модели при разных β и выбором наилучшей, или по формуле:

$$\beta = N - 3/N - 1$$

где N - длина временного ряда;

α - параметр адаптации;

$E(t)$ – ошибка прогнозирования уровня $y(t)$, вычисленная в момент времени $(t-1)$ на один шаг вперед.

5 этап: По модели со скорректированными параметрами “а” и “b” находят прогноз на следующий момент времени. Возвращаются на 3 этап, если $t < N$. Если же $t = N$, то построенную модель можно использовать для прогнозирования на будущее.

6 этап: Интервальный прогноз строится как для линейной модели кривой роста.

Рассмотрим виды моделей, учитывающих сезонную компоненту.

Во временных рядах экономических процессов могут иметь место более или менее регулярные колебания. Если они строго периодические или имеют близкий к нему характер, а также завершаются в течение одного года, то их называют сезонными колебаниями. Эти колебания формируются под влиянием не только природно-климатических факторов, но и различных экономических процессов.

Предполагается, что невозможно установить полностью объективное правило, позволяющее точно определять сезонность. Однако те или иные методы позволяют приближенно оценить сезонные колебания. Одними из таких методов являются метод сезонных индексов и метод гармонического анализа.

Индексы сезонности показывают во сколько раз фактический уровень ряда в момент или интервал времени t больше среднего уровня либо уровня, вычисленного по уравнению тенденции. При анализе сезонности уровни временного ряда показывают развитие явления по месяцам (кварталам) одного или нескольких лет. Суть метода заключается в вычислении разности между средним по всем одноименным месяцам (кварталам) и средним по всем данным:

$$i_t = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{h-1} y_{t+l,j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad t = \overline{1, l} \quad \text{где } h = \frac{n}{l}$$

где l – период сезонности;

y_t – уровень временного ряда.

Другим методом изучения сезонности является гармонический анализ, при котором временной ряд представляется как совокупность гармонических колебательных процессов. Для каждой точки этого ряда справедливо следующее выражение:

$$y_t = f(t) + \sum_{n=1}^T [a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}], \quad t = \overline{1, T}$$

где y_t – фактический уровень ряда,

$f(t)$ – выровненные значения уровня ряда по тренду,

a_n, b_n – параметры колебательного процесса (гармоники), в совокупности оценивающие размах (амплитуду) отклонения от общей тенденции и сдвиг колебаний относительно начальной точки.

Общее число колебательных процессов, которые можно выделить из ряда, состоящего из T уровней, равно $T/2$. обычно ограничиваются меньшим числом наиболее важных гармоник.

Таким образом, в процессе подготовки данных для прогнозирования необходимо определить обладает ли ряд свойством сезонности. С точки зрения выработки правильного решения включение сезонных колебаний в экономико-математическую модель может повысить эффективность прогноза и позволит предсказывать ожидаемые высокие и низкие значения прогнозируемых величин.

Одним из подходов для описания сезонных моделей основан на предварительном сглаживании данных и выделении тенденции при помощи скользящей средней (на нем базируются статистические критерии сезонности: дисперсионный, автокорреляционный, гармонический и др.). Достоинство таких моделей состоит в том, что они обеспечивают стабильность прогноза даже в точках цикла с наименьшими значениями прогнозируемого показателя. Для прогнозирования сезонных процессов используются модели трех типов: СС-модели (скользящего среднего), АР-модели и АРИСС-модели (смешанные модели интегрированного скользящего среднего). В практике массовых статистических расчетов обычно используются модели первых двух классов.

В зависимости от характера сезонных колебаний их часто делят на мультипликативные и аддитивные. Мультипликативные модели имеют вид: $Y_t = (a_t + b_t\tau)F_t$, а аддитивные: $Y_t = a_t + b_t\tau + g_t$

где a_t, b_t – характеристики тенденции развития,

g_t – аддитивный сезонный фактор,

F_t – мультипликативный сезонный фактор.

При относительном постоянстве амплитуды, ее неизменности во времени, сезонной волны целесообразно использовать аддитивную модель, при ее изменении в соответствии с тенденцией среднего уровня – мультипликативную. Необходимо отметить, что модели смешанного типа иногда дают более точный результат, но содержательно плохо интерпретируемы. Практика показывает, что в случае, когда сезонные колебания исследуемого процесса велики и не очень стабильны, мультипликативная модель дает плохие результаты.

Адаптивными моделями, предназначенными для прогнозирования сезонных процессов, являются модель Хольта-Уинтерса, модель Тейла-Вейджа, адаптивные полиномиальные модели и др. [34].

3.3. Виды моделей, учитывающих сезонную компоненту

3.3.1. Модель Хольта-Уинтерса

Модель Хольта-Уинтерса является развитием модели Хольта и предполагает мультипликативное объединение линейного тренда и сезонной составляющей во временном ряду. Данная модель отличается от модели Хольта наличием L сезонных коэффициентов F . Прогноз по такой модели на τ шагов вперед определяется следующим выражением:

$$y_t(t) = (a_t + b_t\tau)F_{t-l+\tau}$$

где l – количество фаз в полном сезонном цикле ($l = 12$ при месячных данных, $l = 4$ при квартальных данных),

$F_{t-l+\tau}$ – оценка мультипликативной сезонности.

А модификация параметров производится по соотношениям:

$$a_t = \alpha_1 \frac{y_t}{F_{t-1}} + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1}),$$

$$F_t = \alpha_2 \frac{y_t}{a_t} + (1 - \alpha_2)F_{t-1},$$

$$b_t = \alpha_3(a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_3)b_{t-1}.$$

Оптимальные значения параметров адаптации α_1 , α_2 , α_3 П.Уинтерс предлагает находить экспериментальным путем, перебирая возможные комбинации этих параметров на сетке значений. Очевидно, что параметр α принимает значения между 0 и 1. Если он равен нулю, то сезонная составляющая на следующем цикле та же, что и на предыдущем. Если $\alpha=1$, то сезонность «максимально» меняется на каждом шаге из-за соответствующей ошибки.

В качестве a_0 и b_0 на практике берут МНК-оценки коэффициентов линейного тренда $y_t = a + bt$, определяемые по исходному временному ряду или его части. А последующие оценки формируются на основе двух взвешенных в соответствии со значениями параметра сглаживания компонент – очищенного от сезонных колебаний фактического уровня и его значения в предыдущий период.

Начальные значения сезонного коэффициента для мультипликативной модели определяют усреднением частного от деления фактических уровней на расчетные для каждой фазы цикла:

$$F_t^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{y_t}{y_p(t)} + \frac{y_{t+l}}{y_p(t+l)} \right]$$

При определении последующих коэффициентов берется их последняя оценка, полученная для аналогичной фазы цикла, и новая оценка, учитывающая скорректированную величину среднего уровня.

3.3.2. Модель Тейла-Вейджа

В качестве другого подхода – с аддитивной сезонностью – служит модель сезонных явлений с линейным ростом, предложенная Г. Тейлом и С. Вейджем. Практическая значимость этой модели объясняется не только тем, что в экономических временных рядах довольно часто встречается этот тип динамики развития. Динамика многих экономических показателей может быть описана с помощью модели, сочетающей в себе экспоненциальную тенденцию с мультипликативным сезонным эффектом. Прологарифмировав исходный временной ряд, преобразуют экспоненциальную тенденцию в линейную и одновременно мультипликативный сезонный эффект в аддитивный. Таким образом, динамику преобразованного показателя можно моделировать и прогнозировать с помощью модели Г. Тейла и С. Вейджа.

Прогноз по этой модели на τ шагов вперед определяется выражением:

$$y_t(t) = a_t + b_t\tau + g_{t-l+\tau}$$

Обновление коэффициентов осуществляется следующим образом:

$$a_t = \alpha_1(y_t - g_{t-l}) + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1});$$

$$g_t = \alpha_2(y_t - a_t) + (1 - \alpha_2)g_{t-l};$$

$$b_t = \alpha_3(a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_3)b_{t-1}$$

где $g_{t-l+\tau}$ – оценка аддитивной сезонности.

Прогнозные оценки получаются экстраполяцией тенденции линейного роста на основе последних значений коэффициентов a_t и b_t , а также добавлением самой свежей оценки сезонного эффекта для этой фазы цикла. В качестве начальных значений a и b также берут МНК-оценки коэффициентов линейного тренда. Начальное значение сезонного фактора

для аддитивной модели определяют путем усреднения отклонений фактических уровней от расчетных для каждой фазы цикла:

$$g_l^0 = \frac{1}{2} [(y_t - y_p(t)) + (y_{t+l} - y_p(t+l))]$$

Влияние начальных условий на прогнозную оценку зависит от весов и длины временного ряда. Причем, влияние начальных значений сезонного фактора уменьшается медленнее, чем влияние начальных значений коэффициентов a_0 и b_0 . Это объясняется тем, что значения последних корректируются на каждом шаге процедуры, а оценки сезонности для каждой фазы пересматриваются лишь один раз за цикл.

3.3.3. Тренд - сезонная модель

В настоящее время при описании и прогнозировании сезонных процессов используются подходы, связанные с применением индексов сезонности в сочетании с кривыми роста. Процедура расчета сезонной составляющей зависит от принятой модели временного ряда, содержащего сезонность в аддитивной или мультипликативной форме, при этом для аддитивной модели характеристики сезонности будут измеряться в абсолютных величинах, а для мультипликативной – в относительных.

Алгоритм расчета сезонной составляющей:

1) Для описания тенденции используется процедура скользящей средней при четной длине интервала сглаживания. Тогда для временного ряда квартальной динамики развития скользящая средняя при $l = 4$ будет определяться выражением:

$$y_t' = \frac{\frac{1}{2} y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2} y_{t+2}}{4}$$

2) Рассчитываются отклонения фактических значений от уровней сглаженного ряда:

$$\text{для аддитивной сезонности: } x_t = y_t - \bar{y}_t;$$

$$\text{для мультипликативной: } x_t = \frac{y_t}{\bar{y}_t}$$

Уровни вновь полученного ряда отражают эффект сезонности и случайности.

3) Для элиминирования влияния случайных факторов определяются предварительные значения сезонной составляющей как средние значения из уровней x_t для одноименных кварталов (месяцев).

4) Проводится корректировка первоначальных значений сезонности, вызванная тем, что ее суммарное воздействие на динамику развития процесса предполагается нейтральным. Для аддитивного случая сумма значений сезонной составляющей для полного сезонного цикла должна быть равна нулю; в случае мультипликативной сезонности сумма должна быть равна количеству сезонов в году, т.е. четырем. Поэтому окончательные, скорректированные оценки сезонной компоненты определяются с помощью следующего выражения:

$$\text{аддитивная сезонность: } S_i = \bar{x}_i - \bar{x}, \quad \text{где } \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i;$$

$$\text{мультипликативная сезонность: } S_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}}, \quad \text{где } \bar{x} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i}, \quad i = \overline{1, m}$$

где m – число фаз в полном сезонном цикле ($m = 12$ для рядов с месячной динамикой, $m = 4$ для квартальных данных);

\bar{x}_i - среднее значение уровней ряда x_t для одноименных кварталов (месяцев).

Процедура построения тренд - сезонной модели описывается в виде следующей последовательности шагов:

1. Оценивание сезонной составляющей по описанной выше схеме с учетом характера сезонности (аддитивной или мультипликативной);
2. Сезонная корректировка исходных данных;
3. Расчет параметров тренда на основе временного ряда, полученного на втором шаге;
4. Моделирование динамики исходного ряда с учетом тренда и сезонной составляющей;
5. Оценка точности и адекватности полученной модели;
6. Использование построенной модели для прогнозирования.

ГЛАВА IV. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО - ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Применение методов и моделей анализа и прогнозирования экономических процессов

I. На основе данного временного ряда:

<i>t</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Y(t)</i>	33	35	40	41	45	47	45	51	53

Провести анализ первичных данных. Построить линейную модель $Y(t) = a_0 + a_1 t$, параметры которой оценить с помощью МНК. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования остаточной компоненты. Построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед

Проведем первичный анализ временного ряда.

Сгладим временной ряд $Y(t)$ методом простой скользящей средней.

Метод простой скользящей средней заключается в следующем: каждый уровень ряда, начиная со второго, при $m=3$ заменяется новым

средним значением:

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \text{ и т.д.}$$

$$\bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}$$

<i>t</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Y_{\text{сгл}}(t)$	-	36	38.7	42	44.3	45.7	47.7	49.7	-

Определи величину тренда $Y(t)$ тренд методом Фостера-Стьюарта:

I этап: Ставим две последовательности:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Y(t) \text{ больше всех предыдущих уровней} \\ 0, & \text{если } Y(t) \text{ меньше всех предыдущих уровней} \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Y(t) \text{ меньше всех предыдущих уровней} \\ 0, & \text{если } Y(t) \text{ больше всех предыдущих уровней} \end{cases}$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u(t)	1	1	1	1	1	1	0	1	1
v(t)	0	0	0	0	0	0	0	0	0

II этап: Вычислим величины: $s = \sum_{t=1}^n (u(t) + v(t))$; $d = \sum_{t=1}^n (u(t) - v(t))$.

$$s = (1+0) + (1+0) + \dots + (1+0) = 8; \quad d = (1-0) + (1-0) + \dots + (1-0) = 8.$$

III этап: Вычислим два значения:

$$t_s = \frac{s - \mu}{\sigma_s}, \quad t_d = \frac{d}{\sigma_d},$$

где μ - математическое ожидание;

σ_s, σ_d - среднее квадратичное отклонение.

Значения μ, σ_s, σ_d затабулированы для различной длины временных рядов.

$$n=9, \quad t_s = \frac{8 - 3.858}{1.288} = 3.216, \quad t_d = \frac{8}{1.964} = 4.073.$$

IV этап: Найденные значения t_s и t_d сравнивают с табличными значениями t_α - Стьюдента с $k = n - 2$ - степенями свободы, α - уровень значимости, $k = n - 2 = 9 - 2 = 7$.

$$\text{Сравним } |t_s| = 3.216 > t_{\alpha=0.05} = 1.90 \quad \text{и} \quad |t_d| = 4.073 > t_{\alpha=0.05} = 1.90.$$

Так как $|t_s| > t_\alpha$ и $|t_d| > t_\alpha$, то тренд есть.

Построим линейную модель $Y(t) = a_0 + a_1 t$, параметры которой оценим с помощью МНК.

Для полинома первой степени $\hat{y} = a_0 + a_1 t$ параметры вычислим по формулам:

$$a_1 = \frac{\sum (y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum (t - \bar{t})^2}; \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t},$$

$$\text{где } \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}, \quad \bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^n t}{n} - \text{выборочные средние.}$$

Таблица промежуточных расчетов:

t	$Y(t)$	$t - \bar{t}$	$(t - \bar{t})^2$	$y_t - \bar{y}$	$(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})$	Расчет $Y_p(t)$	Отклонение $E(t)$
1	33	-4	16	-10,3	41,2	33,7	-0,7
2	35	-3	9	-8,3	24,9	36,1	-1,1
3	40	-2	4	-3,3	6,6	38,5	1,5
4	41	-1	1	-2,3	2,3	40,9	0,1
5	45	0	0	1,7	0	43,3	1,7
6	47	1	1	3,7	3,7	45,7	1,3
7	45	2	4	1,7	3,4	48,1	-3,1
8	51	3	9	7,7	23,1	50,5	0,5
9	53	4	16	9,7	38,8	52,9	0,1
Σ_{45}	390	0	60	0,3	144	389,7	0,3

Итак, $a_1 = \frac{144}{60} = 2,4$; $a_0 = 43,3 - 2,4 \cdot 5 = 31,3$.

Таким образом, линейная модель примет вид: $\hat{y} = 31,3 + 2,4t$.

Последовательно подставляя в модель вместо t его значения от 1 до n , получаем расчетные значения уровней $Y_p(t)$:

$$t = 1 \quad Y_p(1) = 31,3 + 2,4 \cdot 1 = 33,7$$

$$t = 2 \quad Y_p(2) = 31,3 + 2,4 \cdot 2 = 36,1 \quad \text{и т.д.}$$

Вычислим отклонения расчетных значений от фактических наблюдений: $E(t) = Y(t) - Y_p(t), t = \overline{1, n}$.

Оценим адекватность построенной модели на основе исследования:

- случайности остаточной компоненты по критерию пиков;
- независимости уровней ряда остатков по d -критерию (в качестве критических используйте уровни $d_1=1,08$ и $d_2=1,36$) или по первому коэффициенту корреляции, критический уровень которого $r(1)=0,36$;
- нормальности распределения остаточной компоненты по R/S -критерию с критическими уровнями 2,7 – 3,7.
- для оценки точности модели используйте среднеквадратическое отклонение и среднюю по модулю ошибку.

Результаты исследования адекватности модели отразим в следующей таблице:

t	$Y(t)$	$E(t)$	Точка поворота	$E(t)^2$	$E(t) - E(t-1)$	$(E(t) - E(t-1))^2$	$\frac{ E(t) }{y(t)} \cdot 100\%$
1	33	-0,7	-	0,49	-	-	2,1
2	35	-1,1	1	1,21	-0,4	0,16	3,1
3	40	1,5	1	2,25	2,6	6,76	3,8
4	41	0,1	1	0,01	-1,4	1,96	0,2
5	45	1,7	1	2,89	1,6	2,56	3,8
6	47	1,3	0	1,69	-0,4	0,16	2,8
7	45	-3,1	1	9,61	-4,4	19,36	6,9
8	51	0,5	1	0,25	3,6	12,96	1
9	53	0,1	-	0,01	-0,4	0,16	0,2
Σ_{45}	390	0,3	6	18,41	-	44,08	23,9

Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю: вычислим \bar{E} - среднее значение уровней остаточного ряда:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{t=1}^n E(t)}{n} = \frac{0,3}{9} = 0,03.$$

Так как $|\bar{E}| = |0,03| < 0,5$, следовательно, критерий Стьюдента выполняется автоматически. Следовательно, $M(E) \approx 0$, $P = 70\%$.

Таким образом, гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда нулю выполняется.

Проверку случайности уровней ряда остатков проведем на основе критерия поворотных точек. Цифрой «1» обозначим поворотные точки, а цифрой «0» - неповоротные точки.

Число поворотных точек p должно удовлетворять строгому неравенству: при $n = 9$ имеем:

$$p > \left[\frac{2(9-2)}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{16 \cdot 9 - 29}{90}} \right] = [4,67 - 2,23] = [2,44] = 2.$$

Так как неравенство $p = 6 > 2$ выполняется, то свойство случайности выполняется.

При проверке независимости (отсутствия автокорреляции) определяется отсутствие в ряду остатков систематической составляющей.

Вычислим коэффициент d -Дарбина-Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (E(t) - E(t-1))^2}{\sum_{t=1}^n E(t)^2}.$$

Полученное значение d сравним с двумя критическими табличными уровнями (нижним d_1 , и верхним d_2).

Для линейной модели при $n \leq 10$ возьмем в качестве критических табличных уровней величины $d_1=1,08$ и $d_2=1,36$, тогда $d = 44,08 \div 18,41 = 2,4$.

Расчетное значение d превышает 2, то это свидетельствует об отрицательности корреляции и поэтому его величину надо преобразовать: $d = 4 - d = 4 - 2,39 = 1,61$. Наше значение попадает в интервал от d_2 до 2 ($1,36 < 1,61 < 2$), то уровни ряда являются независимыми (автокорреляции нет).

Наличие нормального закона распределения в остаточном ряду линейной функции установим с помощью R/S - критерия:

$$PS = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{S_E}.$$

$$E_{\max} = 1,7 \text{ и } E_{\min} = -3,1$$

$$S_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n E(t)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{18,41}{8}} \approx 1,5.$$

$$RS = (2,3 - (-3,1)) \div 1,5 = 3,6$$

Так как $RS = 3,6 \in [2,7; 3,7]$, т.е. значение RS-критерия попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается.

Таким образом, все четыре условия выполняются, а это значит что остаточный ряд является случайной компонентой, а модель адекватна.

Для оценки точности нашей модели воспользуемся средней относительной ошибкой аппроксимации:

$$\bar{E}_{\text{оми}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|E(t)|}{y(t)} \cdot 100\%,$$

$$\bar{E}_{\text{оми}} = \frac{1}{9} \cdot 23.9 = 2.6\%.$$

Так как $\bar{E}_{\text{оми}} = 2.6\% < 5\%$, то модель точная.

Построим точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед (при вероятности $P = 70\%$ используем коэффициент $t_\alpha = 1.05$) по модели $y = 31.3 + 2.4t$.

Точечные прогнозы получим, подставляя, в уравнение модели значения $t = 10$ и $t = 11$:

$$\hat{y}_{10} = 31.3 + 2.4 \cdot 10 = 55.3$$

$$\hat{y}_{11} = 31.3 + 2.4 \cdot 11 = 57.7$$

Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

$$\text{верхняя граница прогноза: } \hat{y}(n+k) + U(k),$$

$$\text{нижняя граница прогноза: } \hat{y}(n+k) - U(k),$$

$$\text{где } U(k) = \bar{S}_E \cdot t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n+k-t_{cp})^2}{\sum_{t=1}^n (t-t_{cp})^2}},$$

\bar{S}_E - среднее квадратическое отклонение от линии тренда:

$$\bar{S}_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n E(t)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{18.41}{7}} = 1.6$$

Следовательно:

Если $k = 1$ ($t = 10$)

$$U(1) = 1.6 \cdot 1.05 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9+1-5)^2}{60}} = 1.68 \cdot \sqrt{1.1 + 0.42} = 1.68 \cdot \sqrt{1.52} = 1.68 \cdot 1.23 = 2.1.$$

Если $k = 2$ ($t = 11$)

$$U(2) = 1.6 \cdot 1.05 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9+2-5)^2}{60}} = 1.68 \cdot \sqrt{1.1 + 0.6} = 1.68 \cdot \sqrt{1.7} = 1.68 \cdot 1.30 = 2.2.$$

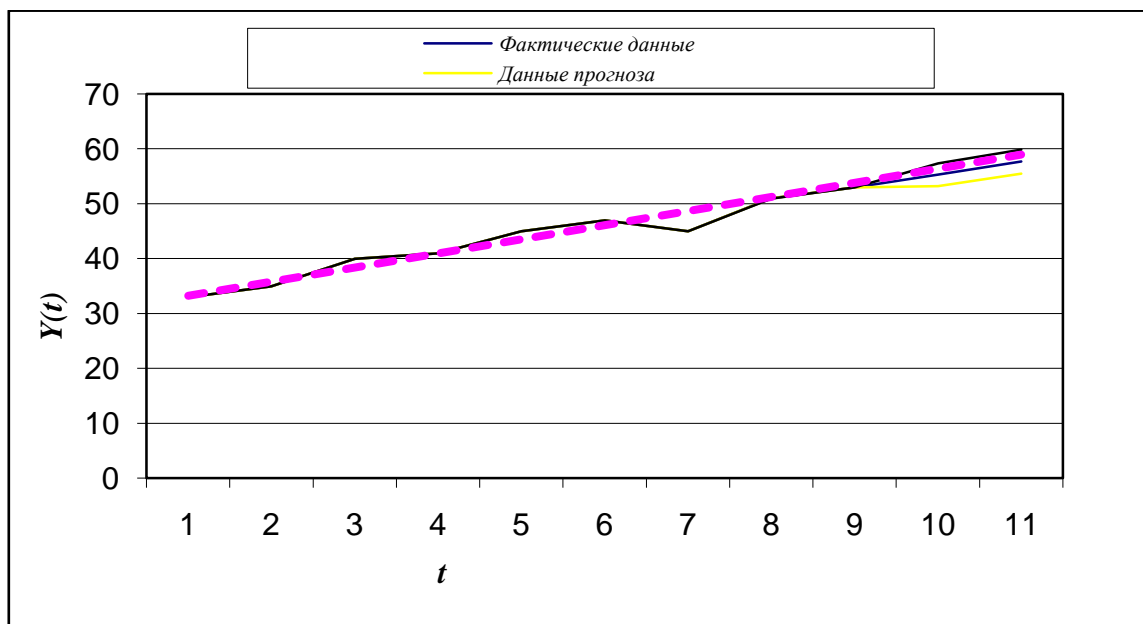
В таблицу сведем результаты расчетов прогнозных оценок по линейной модели по формуле:

$$Y_p(9+1) \pm U(1) = Y_p(10) \pm U(1) = 55.3 \pm 2.1;$$

$$Y_p(9+2) \pm U(2) = Y_p(11) \pm U(2) = 57.7 \pm 2.2.$$

Время t	Шаг k	Прогноз $Y_p(t)$	Нижняя граница	Верхняя граница
10	1	55,3	53,2	57,4
11	2	57,7	55,5	59,9

Отообразим на графике фактические данные, результаты аппроксимации и прогнозирования по модели: $\hat{y} = 31.3 + 2.4t$.



II. По предприятиям легкой промышленности региона получена информация - временные ряды, характеризующие зависимость объема выпуска продукции (Y , млн. руб.) от объема капиталовложений (X , млн. руб.):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Y(t)$	30	28	33	38	40	42	44	49	47
$X(t)$	5	7	10	12	15	18	20	23	24

Для характеристики зависимости Y от X рассчитать а) параметры линейной однопараметрической модели регрессии $y(t) = a_0 + a_1x(t)$.

б) параметры показательной $\hat{y} = a \cdot b^x$ парной регрессии. Рассчитать прогнозное значение результата. Определить доверительный интервал прогноза для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

Случай а) уравнение вида: $\hat{y} = a_0 + a_1x_1$ - линейное уравнение регрессии [40].

Коэффициенты найдём по формулам:

$$a_1 = \frac{\sum (y - \bar{y})(x_1 - \bar{x}_1)}{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} = \frac{397}{376,8} \approx 1,1$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x}_1 = 39,0 - 1,1 \cdot 14,9 = 22,6$$

Линейная однопараметрическая модель регрессии для выбранного x_1 примет вид: $\hat{y} = 22,6 + 1,1x_1$

Оценим качество построенной модели, исследовав её на адекватность и точность.

Для этого в следующей таблице приведём промежуточные вычисления и результаты использования линейной модели.

$$\hat{y} = 22,6 + 1,1x_1 \quad \hat{y}_p(1) = 22,6 + 1,1 \cdot 5 = 28,1 \quad \hat{y}_p(2) = 22,6 + 1,1 \cdot 7 = 30,3 \quad \text{и т.д.}$$

$$E(t) = y_t - \hat{y}_p(t) \quad E(1) = 30 - 28,1 = 1,9 \quad E(2) = 28 - 30,3 = -2,3 \quad \text{и т.д.}$$

t	y_t	x_1	\hat{y}_p	$E(t)$	Поворотная точка	$E(t)^2$	$E(t)-E(t-1)$	$(E(t)-E(t-1))^2$	$(E(t) /y_t)100\%$
1	30	5	28,1	1,9	–	3,61	–	–	6,3
2	28	7	30,3	-2,3	1	5,29	-4,2	17,6	8,2
3	33	10	33,6	-0,6	0	0,36	1,7	2,9	1,8
4	38	12	35,8	2,2	1	4,84	2,8	7,6	5,8
5	40	15	39,1	0,9	0	0,81	-1,3	1,7	2,3
6	42	18	42,4	-0,4	0	0,16	-1,3	1,7	1,0
7	44	20	44,6	-0,6	1	0,36	-0,2	0,04	1,4
8	49	23	47,9	1,1	1	1,21	1,7	2,9	2,3
9	47	24	49,0	-2,0	–	4,0	-3,1	9,6	4,3
Σ	351	134		0,2	4	20,6		44,24	33,4

Проверим модель на адекватность:

1. Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю осуществим с использованием t- критерия Стьюдента:

$$M(E) = \bar{E} = \frac{\sum E(t)}{n} = \frac{0,2}{9} = 0,02$$

Если $|\bar{E}| = 0,02 < 0,5$, то $t_p < t_\alpha$ –критерий Стьюдента выполняется, то есть $M(E) \approx 0$.

2. Проверку случайности уровней ряда остатков проведём на основе критерия поворотных точек:

$$P > \left[2 \cdot \frac{(n-2)}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right] = \left[\frac{2 \cdot (9-2)}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{16 \cdot 9 - 29}{90}} \right] = [2,4] = 2$$

Так как $P = 4 > 2$, то свойство случайности выполняется.

3. Независимость (отсутствие автокорреляции) проверим с помощью d–критерия Дарбина–Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (E(t) - E(t-1))^2}{\sum_{t=1}^n E(t)^2} = \frac{44,24}{20,6} \approx 2,15$$

Так как $d = 2,15$ не попадает в интервал от d_2 до 2, то есть в $[1,36;2]$, то найдем $d' = 4 - 2,15 = 1,85 \in [1,36;2]$, то есть уровни ряда являются независимыми (автокорреляции нет).

3. Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения определим при помощи RS-критерия:

$$RS = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{S_E}, \text{ где } S_E = \sqrt{\frac{\sum E(t)^2}{n-1}}, S_E - \text{СКО.}$$

$$\text{Вычислим } S_E = \sqrt{\frac{20,6}{8}} = \sqrt{2,58} \approx 1,6, \text{ тогда } RS = \frac{2,2 - (-2,3)}{1,6} = 2,8$$

Так как $2,8 \in [2,7;3,7]$, то есть значение RS – критерия попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности (для $n \leq 10$, $p = 70\%$), то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается, что позволяет строить доверительный интервал прогноза.

Так как все четыре условия выполняются, то модель адекватна.

Проверим модель на точность: Для характеристики точности воспользуемся средней относительной ошибкой:

$$\overline{E_{\text{отн}}} = \frac{1}{n} \sum \frac{|E(t)|}{y_t} \cdot 100\%$$

Так как $\overline{E_{\text{отн}}} = \frac{33,4}{9} = 3,7\% < 5\%$, что свидетельствует о "хорошей" точности модели.

Оценку качества построенной модели дает коэффициент детерминации: $R^2 = 1 - \frac{S_E^2}{S_y^2} = 1 - \frac{\sum E(t)^2}{\sum (y - \hat{y})^2}$, $R^2 = 1 - \frac{20,6}{438} \approx 0,95$

Коэффициент R^2 показывает, что более 95% вариации зависимой переменной (y) учтено в модели и происходит под влиянием фактора,

включённого в модель, а остальные 5% приходится на другие факторы, не включённые в модель.

Так как $R = \sqrt{0,95} = 0,98$, то есть $R \approx 1$, то модель качественная.

4. Для модели регрессии рассчитать коэффициент эластичности и бета-коэффициент.

Вычислим коэффициент эластичности модели: $\mathcal{E}_{yx_1}^{\wedge} = a_1 \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}}$,

В нашем исследовании: $a_1 = 1,1$, $\bar{x}_1 = 14,9$, $\bar{y} = 39$, поэтому

$\mathcal{E}_{yx_1}^{\wedge} = \frac{1,1 \cdot 14,9}{39} \approx 0,42$ - он показывает, что при увеличении x_1 на 1% результативный признак y в среднем увеличивается на 0,42%.

Вычислим β -коэффициент по формуле:

$$\beta_{yx_1}^{\wedge} = a_1 \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} = 1,1 \sqrt{\frac{376,8}{438}} = 1,1 \sqrt{0,96} = 1,1 \cdot 0,93 \approx 1,02$$

5. Построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперёд по модели регрессии (для вероятности $P = 70\%$ используйте коэффициент $t_{\alpha} = 1,05$) (прогнозные оценки фактора $x(t)$ на два шага вперёд получить на основе среднего прироста от фактически достигнутого уровня).

Вычислим САП и получим прогнозные оценки фактора на основе величины его среднего прироста: $x(n+k) = x(n) + \text{САП} \cdot k$,

где $\text{САП} = (x_n - x_1) / (n - 1)$:

$$\text{САП} = (24 - 5) / (9 - 1) = 19/8 \approx 2,4$$

$$k = 1 \quad x(9+1) = x(10) = x(9) + 2,4 \cdot 1 = 24 + 2,4 = 26,4$$

$$k = 2 \quad x(9+2) = x(11) = x(9) + 2,4 \cdot 2 = 24 + 4,8 = 28,8$$

Для получения прогнозных (точечных) оценок зависимой переменной по модели: $\hat{y}(n+k) = a_0 + a_1x(n+k)$, подставим в неё найденные прогнозные значения фактора: $\hat{y}(10) = 22,6 + 1,1 \cdot 26,4 = 51,6$;

$$\hat{y}(11) = 22,6 + 1,1 \cdot 28,8 = 54,3$$

Доверительный интервал прогноза имеет следующие границы:

при $k = 1$

$$\text{Верхняя граница прогноза: } y_p(9+1) + U(1) = 51,6 + 3,7 = 55,3$$

$$\text{Нижняя граница прогноза: } y_p(9+1) - U(1) = 51,6 - 3,7 = 47,9$$

Величина $U(k)$ для найденной модели регрессии имеет вид:

$$k = 1 \quad U(1) = 1,05 \cdot 2,9 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(26,4 - 14,9)^2}{376,8}} = 3,04 \cdot 1,2 \approx 3,7$$

Доверительный интервал прогноза имеет следующие границы:

при $k = 2$

$$\text{Верхняя граница прогноза: } y_p(9+4) + U(2) = 54,3 + 3,9 = 58,2$$

$$\text{Нижняя граница прогноза: } y_p(9+2) - U(2) = 54,3 - 3,9 = 50,4$$

$$k = 2 \quad U(2) = 1,05 \cdot 2,9 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(28,8 - 14,9)^2}{376,8}} = 3,04 \cdot 1,3 \approx 3,9$$

$$\text{где } \overline{S_E} = \sqrt{\frac{20,6}{9-1-1}} = \sqrt{7,34} \approx 2,9$$

Результаты прогноза покажем в таблице:

k	$x(n+k)$	$\hat{y}(n+k)$	Нижняя граница	Верхняя граница
1	26,4	51,6	47,9	55,3
2	28,8	54,3	50,4	58,2

С вероятностью 0,7 можно гарантировать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития прогнозируемая величина y в следующем году примет значение из интервала (47,9;55,3), а ещё через год-(50,4;58,2).

Случай б) Нелинейную модель регрессии $\hat{y} = a \cdot b^x$ приведём к линейной. Для этого прологарифмируем обе части равенства по основанию 10: $\lg y = \lg a + x \lg b$.

Обозначим: $\lg y = Y$, $\lg a = A$, $\lg b = B$

Запишем предыдущее равенство в виде: $Y = A + B \cdot x$, таким образом получили линейное уравнение регрессии, где $B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$, $A = \bar{y} - B \cdot \bar{x}$

Для вычисления коэффициентов А и В, составим таблицу, в которой приведем промежуточные вычисления:

t	y _t	x	y = lgy	xy	x ²	y - \bar{y}	(y - \bar{y}) ²
1	30	5	1,4771	7,3855	25	-0,1054	0,0111
2	28	7	1,4472	10,1304	49	-0,1353	0,0183
3	33	10	1,5185	15,185	100	-0,064	0,0041
4	38	12	1,5682	18,8184	144	-0,143	0,0002
5	40	15	1,6021	24,0315	225	0,0196	0,0004
6	42	18	1,6232	29,218	324	0,0407	0,0017
7	44	20	1,6435	32,87	400	0,061	0,0037
8	49	23	1,6902	38,875	529	0,1077	0,0116
9	47	24	1,6721	40,1304	576	0,0896	0,0080
	351	134	14,2421	216,64	2372		0,0591

$$\overline{x \cdot y} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{216,64}{9} = 24,07$$

$$\overline{x^2} = 2372:9 = 263,6$$

$$\bar{x} = 134:9 = 14,9$$

$$\bar{y} = 14,2421:9 = 1,5825$$

$$\text{Вычислим } B = \frac{24,07 - 14,9 \cdot 1,5825}{263,66 - 14,9^2} = \frac{0,491}{41,65} = 0,012, \quad A = 1,5825 - 0,012 \cdot 14,9 = 1,401$$

Так как $A = \lg a = m$, то $a = 10^m$; $B = \lg b = p$, то $b = 10^p$

Отсюда, $\hat{y}(t) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^x$ - модель.

Проверим качество этой модели, с помощью коэффициента детерминации: $R^2 = 1 - \frac{\sum E(t)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$

Промежуточные вычисления:

$$\hat{y}(t) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^x; \quad E(1) = 30 - 28,9 = 1,1$$

$$\hat{y}_p(1) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^5 = 10^{1,401} \cdot 10^{0,06} = 10^{1,461} = 28,9; \quad E(2) = 28 - 30,5 = -2,5$$

$$\hat{y}_p(2) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^7 = 10^{1,485} = 30,5 \quad E(3) = 33 - 33,2 = -0,2$$

$$\hat{y}_p(3) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{10} = 10^{1,521} = 33,2 \quad E(4) = 38 - 35,1 = 2,9$$

$$\hat{y}_p(4) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{12} = 10^{1,545} = 35,1 \quad E(5) = 40 - 38,1 = 1,9$$

$$\hat{y}_p(5) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{15} = 10^{1,581} = 38,1 \quad E(6) = 42 - 41,4 = 0,6$$

$$\hat{y}_p(6) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{18} = 10^{1,617} = 41,4 \quad E(7) = 44 - 43,7 = 0,3$$

$$\hat{y}_p(7) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{20} = 10^{1,641} = 43,7 \quad E(8) = 49 - 47,5 = 1,5$$

$$\hat{y}_p(8) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{23} = 10^{1,677} = 47,5 \quad E(9) = 47 - 51,4 = -4,4$$

$$\hat{y}_p(9) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{24} = 10^{1,689} = 48,9$$

Составим таблицу промежуточных вычислений:

t	y_t	x_t	\hat{y}_p	$E(t)$	$E(t)^2$	$ E(t) /y_t \cdot 100\%$
1	30	5	28,9	1,1	1,21	3,7
2	28	7	30,5	-2,5	6,25	8,9
3	33	10	33,2	-0,2	0,04	0,6
4	38	12	35,1	2,9	8,41	7,6
5	40	15	38,1	1,9	3,61	4,8
6	42	18	41,4	0,6	0,36	1,4
7	44	20	43,7	0,3	0,09	0,7
8	49	23	47,5	1,5	2,25	3,1
9	47	24	51,4	-4,4	19,36	9,4
Σ	351	134			41,58	40,2

$$R^2 = 1 - \frac{36,78}{438} = 0,92 \quad \text{Так как} \quad R = \sqrt{0,92} = 0,96 \approx 1, \quad \text{то модель}$$

качественная.

Вычислим $\bar{E}_{\text{отн}}$: $\overline{E_{\text{отн}}} = \frac{1}{n} \sum \frac{|E(t)|}{y_t} \cdot 100\%$, $\overline{E_{\text{отн}}} = \frac{1}{9} \cdot 40,2 = 4,47\% < 5\%$, что

свидетельствует о "хорошей" точности модели; по ней можно строить прогноз.

Проверим значимость модели регрессии с использованием F-критерия Фишера:

$$F_p = \frac{R^2 / m}{(1 - R^2) / (n - m - 1)} = \frac{0,92 / 1}{(1 - 0,92) / (9 - 1 - 1)} = \frac{0,92}{0,08 : 7} = 80,5$$

Если $F_p > F_{\text{табл}}$, то уравнение значимое ($F_{\text{табл.}} = 5,59$). Так как $80,5 > 5,59$, то модель признаётся значимой.

Для построения точечного прогноза, сначала получим прогнозные оценки фактора на основе величины: $x_{\text{прогн}} = 110\% \cdot x_n$ с помощью формулы: $x(n+k) = 1,1 \cdot x(n)$

$$k = 1; \quad x(9+1) = x(10) = 1,1 \cdot x(9) = 1,1 \cdot 24 = 26,4$$

$$k = 2; \quad x(9+2) = x(11) = 1,1 \cdot x(10) = 1,1 \cdot 26,4 = 29,1.$$

Для получения прогнозных оценок зависимой переменной по модели, подставим в неё найденные прогнозные значения фактора.

$$\hat{y}(n+k) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{x(n+k)}$$

$$\hat{y}(10) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{26,4} = 10^{1,401} \cdot 10^{0,3168} = 10^{1,7178} = 52,2,$$

$$\hat{y}(11) = 10^{1,401} \cdot (10^{0,012})^{29,1} = 10^{1,401} \cdot 10^{0,3492} = 10^{1,7502} = 56,3.$$

Доверительный интервал прогноза имеет следующие границы:

$$\text{Верхняя граница: } \hat{y}_p(n+k) + U(k)$$

$$\text{Нижняя граница: } \hat{y}_p(n+k) - U(k)$$

$$\text{Найдём } U(1) = 1,05 \cdot 2,43 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(26,4 - 14,9)^2}{376,8}} = 2,55 \cdot 1,21 = 3,1$$

$$(\overline{S}_E = \sqrt{\frac{\sum E(t)^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{41,58}{9-1-1}} \approx 2,43)$$

$$U(2) = 1,05 \cdot 2,43 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(29,1-14,9)^2}{376,8}} = 2,55 \cdot 1,28 \approx 3,3$$

Сведем результаты прогнозирования в таблицу:

k	$x(n+k)$	$\hat{y}(n+k)$	Нижняя граница	Верхняя граница
1	26,4	52,2	59,1	55,2
2	29,1	56,3	53	59,6

С вероятностью 0,7 можно гарантировать, что в следующем году примет значение из интервала (50,9;57,1), а ещё через год-(53,7;60,3).

4.2. Применение адаптивной модели Брауна для прогнозирования финансово-экономических процессов

На основе данного временного ряда:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Y(t)$	33	35	40	41	45	47	45	51	53

Построить адаптивную модель Брауна $Y(k) = a_0 + a_1 \cdot k$ с параметром сглаживания $\alpha = 0.4$ и $\alpha = 0.7$; выбрать лучшее значение. Оценить адекватность построенной модели на основе исследования остаточной компоненты. Построить точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед.

Построим адаптивную модель Брауна $Y(k) = a_0 + a_1 \cdot k$ с параметром сглаживания $\alpha = 0.4$ и $\alpha = 0.7$;

По первым пяти точкам временного ряда оценим начальные значения a_0 и a_1 параметров модели при помощи МНК.

Отообразим расчеты параметров модели Брауна в следующей расчетной таблице:

t	$Y(t)$	$t - \bar{t}$	$(t - \bar{t})^2$	$y_t - \bar{y}$	$(y_t - \bar{y})(t - \bar{t})$
1	33	-2	4	-5,8	11,6
2	35	-1	1	-3,8	3,8
3	40	0	0	1,2	0
4	41	1	1	2,2	2,2
5	45	2	4	6,2	12,4
$\Sigma 15$	194	0	10	0	30

Итак, $a_1 = \frac{30}{10} = 3$; $a_0 = 38.8 - 3 \cdot 3 = 29.8$.

Модель Брауна: $Y(k) = 29.8 + 3 \cdot k$ - линейная модель.

Расчетное значение в момент времени t получается по формуле:

$$Y_p(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1)k,$$

где k – количество шагов прогнозирования ($k = 1$).

Это значение сравнивается с фактическим уровнем и полученная ошибка прогноза: $E(t) = Y(t) - Y_p(t), t = \overline{1, n}$. используется для корректировки модели.

Корректировка параметров осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} a_0(t) &= a_1(t-1) + a_0(t-1) + E(t)(1 - \beta^2) \\ a_1(t) &= a_1(t-1) + E(t)(1 - \beta)^2 \end{aligned}$$

где β – коэффициент дисконтирования данных, отражающий большую степень доверия к более поздним данным, $0 < \beta < 1$.

Если α параметр сглаживания, то $\alpha = 1 - \beta$; $\beta = 1 - \alpha$.

Для $\alpha = 0.4$:

Возьмем $k = 1$, а параметр сглаживания $\alpha = 0.4 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha = 1 - 0.4 = 0.6$.

$$(1 - \beta)^2 = (1 - 0.6)^2 = 0.16, \quad 1 - \beta^2 = 1 - 0.6^2 = 1 - 0.36 = 0.64.$$

Тогда расчетные значения будут иметь следующий вид:

t	$Y(t)$	$a_0(t)$	$a_1(t)$	$Y_p(t)$	$E(t)$
0	-	29.8	3	-	-
1	33	32.9	3	32.8	0.2
2	35	34.7	2.8	35.9	-0.9
3	40	39.2	3.2	37.5	2.5
4	41	41.5	3	42.4	-1.4
5	45	44.8	3.1	44.5	0.5
6	47	47.3	3	47.9	-0.9
7	45	46.9	2.2	50.3	-5.3
8	51	50.3	2.5	49.1	1.9
9	53	52.9	2.5	52.8	0.2

Таким образом, на последнем шаге получена модель $Y_p(n+k) = 52.9 + 2.5k$ со скорректированными параметрами a_0 и a_1 ($\alpha = 0.4$).

Для $\alpha = 0.7$:

Возьмем $k = 1$, а параметр сглаживания $\alpha = 0.7 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha = 1 - 0.7 = 0.3$.

$$(1 - \beta)^2 = (1 - 0.3)^2 = 0.49, \quad 1 - \beta^2 = 1 - 0.3^2 = 1 - 0.09 = 0.91.$$

t	$Y(t)$	$a_0(t)$	$a_1(t)$	$Y_p(t)$	$E(t)$
0	-	29,8	3	-	-
1	33	33	3,2	32,8	0,2
2	35	35,1	2,6	36,2	-1,2
3	40	39,8	3,7	37,7	2,3
4	41	41,2	2,5	43,5	-2,5
5	45	44,9	3,1	43,7	1,3
6	47	47,1	2,6	48	-1
7	45	45,4	0,3	49,7	-4,7
8	51	50,5	2,9	45,7	5,3
9	53	53	2,5	53,4	-0,4

Таким образом, на последнем шаге получена модель: $Y_p(n+k) = 53 + 2.5k$ со скорректированными параметрами a_0 и a_1 ($\alpha = 0.4$).

Оценим адекватность построенной модели на основе исследования:

- случайности остаточной компоненты по критерию пиков;
- независимости уровней ряда остатков по d - критерию (в качестве критических используйте уровни $d_1 = 1,08$ и $d_2 = 1,36$) или по

первому коэффициенту корреляции, критический уровень которого $r(1) = 0,36$;

- нормальности распределения остаточной компоненты по R/S -критерию с критическими уровнями 2,7 – 3,7.

- для оценки точности модели используйте среднеквадратическое отклонение и среднюю по модулю ошибку.

Оценим качество модели Брауна ($\beta = 0.6$) при $\alpha = 0.4$ на основе остаточной компоненты $E(t)$.

Результаты адекватности модели ($\alpha = 0.4$) Брауна приведены в расчетной таблице:

t	$E(t)$	Точка поворота	$E(t)^2$	$E(t) - E(t-1)$	$(E(t) - E(t-1))^2$	$\frac{ E(t) }{y(t)} \cdot 100\%$
1	0,2	-	0,04	-	-	0,6
2	-0,9	1	0,81	-1,1	1,21	2,6
3	2,5	1	6,25	3,4	11,56	6,2
4	-1,4	1	1,96	-3,9	15,21	3,4
5	0,5	1	0,25	1,9	3,61	1,1
6	-0,9	0	0,81	-1,4	1,96	1,9
7	-5,3	1	28,09	-4,4	19,36	11,8
8	1,9	1	3,61	7,2	51,84	3,7
9	0,2	-	0,04	-1,7	2,89	0,4
$\Sigma 45$	-3,2	6	41,86	-	107,64	31,7

Проверим на адекватность модель Брауна ($\alpha = 0.4$):

$$1. \quad \bar{E} = \frac{-3.2}{9} = -0.36 \quad |\bar{E}| = 0.36 < 0.5, \text{ то критерий Стьюдента}$$

выполняется.

$$\Rightarrow M(E) \approx 0.$$

$$2. \quad p > \left[\frac{2(9-2)}{3} - 1.96 \sqrt{\frac{16 \cdot 9 - 29}{90}} \right] = [4.67 - 2.23] = [2.44] = 2.$$

Так как неравенство $p = 6 > 2$ выполняется, следовательно, свойство случайности выполняется.

$$3. \quad d = \frac{\sum_{t=2}^n (E(t) - E(t-1))^2}{\sum_{t=1}^n E(t)^2} = \frac{107.64}{41.86} = 2.6$$

Расчетное значение d превышает 2, то это свидетельствует об отрицательности корреляции и поэтому его величину надо преобразовать: $d = 4 - d = 4 - 2.6 = 1.4$. Наше значение попадает в интервал от d_2 до 2 ($1.36 < 1.4 < 2$), то уровни ряда являются независимыми (автокорреляции нет).

$$4. \quad RS = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{S_E}$$

$$E_{\max} = 2.5 \text{ и } E_{\min} = -5.3$$

$$S_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n E(t)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{41.86}{8}} = 2.3.$$

$$RS = (2.5 - (-5.3)) \div 1.5 = 3.4$$

Так как, $RS = 3.4 \in [2.7; 3.7]$, т.е. значение RS -критерия попадает между табулированными границами с заданным уровнем вероятности, то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается.

Таким образом, все четыре условия выполняются, то остаточный ряд является случайной компонентой, а модель адекватна.

Для оценки точности модели воспользуемся средней относительной ошибкой аппроксимации:

$$\bar{E}_{\text{оми}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|E(t)|}{y(t)} \cdot 100\%,$$

$$\bar{E}_{\text{оми}} = \frac{1}{9} \cdot 31.7 = 3.5\%.$$

Так как $\bar{E}_{\text{оми}} = 3.5\% < 5\%$, то модель точная.

Оценим качество модели Брауна ($\beta = 0.6$) при $\alpha = 0.7$ на основе остаточной компоненты $E(t)$.

Результаты адекватности модели ($\alpha = 0.7$) Брауна приведены в расчетной таблице:

t	$E(t)$	Точка поворота	$E(t)^2$	$E(t) - E(t-1)$	$(E(t) - E(t-1))^2$
1	0,2	-	0,04	-	-
2	-1,2	1	1,44	-1,3	1,69
3	2,3	1	5,29	3,5	12,25
4	-2,5	1	6,25	-4,8	23,04
5	1,3	1	1,69	3,8	14,44
6	-1	0	1	-2,3	5,29
7	-4,7	1	22,09	-3,7	13,69
8	5,3	1	28,09	10	100
9	-0,4	-	0,16	-5,9	34,81
$\Sigma 45$	-0,7	6	66,05	-	205,21

Проверим на адекватность модель Брауна ($\alpha = 0.4$):

$$5. \quad \bar{E} = \frac{-0,7}{9} = -0,08 \quad |\bar{E}| = 0,08 < 0,5, \text{ то критерий Стьюдента}$$

выполняется. $\Rightarrow M(E) \approx 0$.

$$6. \quad p > \left[\frac{2(9-2)}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{16 \cdot 9 - 29}{90}} \right] = [4,67 - 2,23] = [2,44] = 2.$$

Так как неравенство $p = 6 > 2$ выполняется, следовательно, свойство случайности выполняется.

$$7. \quad d = \frac{\sum_{t=2}^n (E(t) - E(t-1))^2}{\sum_{t=1}^n E(t)^2} = \frac{205,21}{66,05} = 3,1$$

Расчетное значение d превышает 2, то это свидетельствует об отрицательности корреляции и поэтому его величину надо преобразовать: $d = 4 - d = 4 - 3,1 = 0,9$. Наше значение не попадает в интервал от d_2 до 2 ($1,36 < 0,9 < 2$), то уровни ряда являются зависимыми (автокорреляция есть).

Следовательно, модель не является адекватной данному временному ряду, т.е. ее нельзя использовать для прогнозирования.

Построим точечный и интервальный прогнозы на два шага вперед (при вероятности $P = 70\%$ используя коэффициент $t_\alpha = 1.05$) по модели $Y(n+k) = 29.8 + 3 \cdot k$.

Точечные прогнозы получаются путем подстановки в нее значения $k = 1$ и $k = 2$

$$Y_p(9+1) = Y_p(10) = 29.8 + 3 \cdot 10 = 59.8$$

$$Y_p(9+2) = Y_p(11) = 29.8 + 3 \cdot 11 = 62.8$$

Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

Подсчитаем $U(1)$ и $U(2)$:

$$S_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n E(t)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{41.86}{8}} = 2.3.$$

$$U(1) = 2.3 \cdot 1.05 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9+1-3)^2}{10}} = 2.3 \cdot 1.05 \sqrt{1.1 + 4.9} = 2.4 \cdot \sqrt{6} = 2.4 \cdot 2.4 = 5.8.$$

$$U(2) = 2.3 \cdot 1.05 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9+2-3)^2}{10}} = 2.3 \cdot 1.05 \sqrt{1.1 + 6.4} = 2.4 \cdot \sqrt{7.5} = 2.4 \cdot 2.7 = 6.5.$$

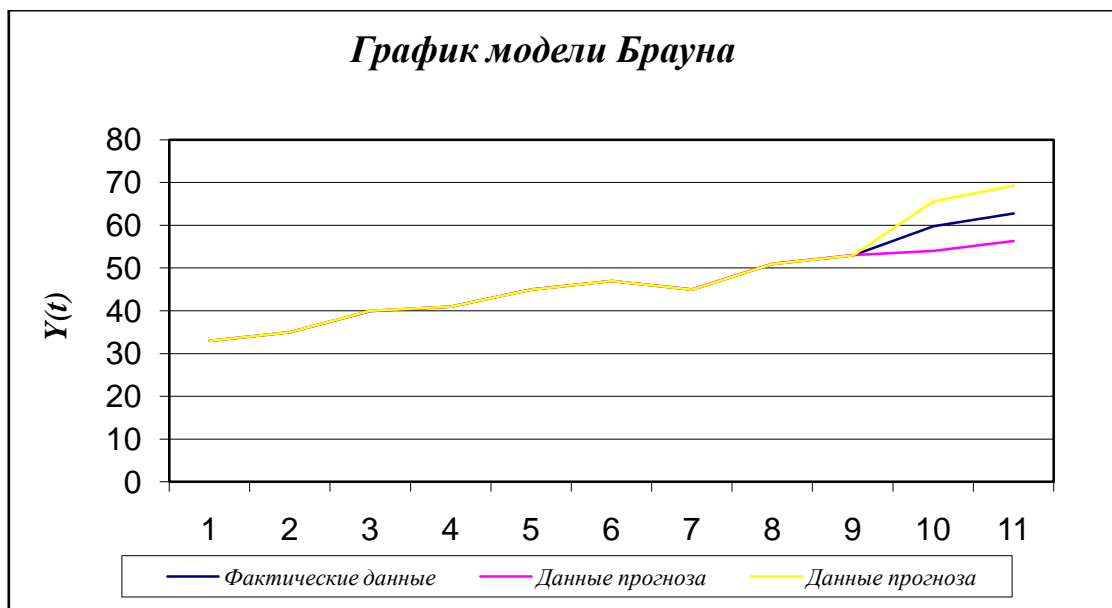
В таблицу сведем результаты расчетов прогнозных оценок по линейной модели по формуле:

$$Y_p(9+1) \pm U(1) = Y_p(10) \pm U(1) = 59.8 \pm 5.8;$$

$$Y_p(9+2) \pm U(2) = Y_p(11) \pm U(2) = 62.8 \pm 6.5.$$

Время t	Шаг k	Прогноз $Y_p(t)$	Нижняя граница	Верхняя граница
10	1	59,8	54	65,6
11	2	62,8	56,3	69,3

Отобразим на графике фактические данные, результаты аппроксимации и прогнозирования по модели Брауна: $Y(n+k) = 29.8 + 3 \cdot k$.



4.3. Применение трендовой модели и модели Брауна для прогнозирования курса доллара

В сбербанке России Троицкого отделения № 210 проведена выборка ежедневных данных курса доллара за период с 15 марта по 5 мая N года. Используя линейную трендовую модель или модель Брауна необходимо спрогнозировать величину курса доллара на 6 и 7 мая N года.

Исходные статистические данные представим в виде таблицы:

Время	Показатель	Время	Показатель	Время	Показатель	Время	Показатель
1	26,1491	14	26,0180	27	25,9846	40	25,7632
2	26,1300	15	25,9956	28	25,9210	41	25,7617
3	26,0476	16	26,0204	29	25,9181	42	25,7760
4	26,0476	17	26,0113	30	25,8647	43	25,6948
5	26,0476	18	26,0113	31	25,8286	44	25,6934
6	26,0419	19	26,0113	32	25,8286	45	25,7446
7	26,0414	20	25,9947	33	25,8286	46	25,7446
8	26,0335	21	25,9839	34	25,7966	47	25,7446
9	25,9709	22	26,0094	35	25,7994	48	25,7564
10	26,0109	23	25,9871	36	25,7469	49	25,7691
11	26,0109	24	25,9252	37	25,7657	50	25,7351
12	26,0109	25	25,9252	38	25,7632		
13	26,0770	26	25,9252	39	25,7632		

Исходный временной ряд содержит 50 уровней наблюдения данного показателя.

На следующем рисунке покажем динамику развития курса доллара:



Решение задачи проведем поэтапно.

Этап 1: Предварительный анализ данных.

Для выявления аномальных уровней используем метод Ирвина. С помощью формул вычисляются значения λ_2, λ_3 и т.д. Затем эти значения сравниваем с табличным критерием значения Ирвина λ_α , который для уровня значимости $\alpha=0,05$, т.е. с 5% ошибкой равен 1,1. В результате данного исследования аномальные значения уровней ряда не были выявлены.

Этап 2: Определение наличие тренда в исходном временном ряде.

С помощью метода Фостера – Стьюарта определим наличие тренда.

- по формулам определим две числовые последовательности $u(t)$ и $v(t)$;
- по формулам вычислим величины s и d ;
- с использованием расчетных значений t_s и t_d (10) t – критерия Стьюдента проводится проверка для средней и дисперсии;

г) при сравнении расчетных значений $t_s=8,6506$ и $t_d=-7,6375$ с табличным значением t – критерия Стьюдента определили, что имеет место тренд.

Этап 3: Решение проблемы спецификации модели.

При анализе графика ряда, в качестве модели прогноза была выбрана линейная трендовая модель $y_t = a_0 + a_1 t$.

Этап 4: Оценка параметров модели.

Параметры кривой роста оценим с помощью МНК:

$$F = \sum (y_t - a_0 - a_1 t) \rightarrow \min .$$

Для нахождения коэффициентов a_0, a_1 используем формулы

$$a_1 = \frac{\sum_{t=1}^n (t - t_{cp})(y_t - y_{cp})}{\sum_{t=1}^n (t - t_{cp})^2}, t = 1, 2, \dots, 50, a_0 = y - a_1 t$$

При подстановке значений получаем $a_0 = 26,1237$, $a_1 = -0,0084$ в уравнение получим модель $Y_p(t) = 26.1237 - 0.0084t$.

Этап 5: Оценка адекватности и точности модели:

Проверку случайности колебаний уровней остаточной последовательности проведем по методу поворотных точек. Число поворотных точек должно удовлетворять строгому неравенству

$$P > \left[2 * \frac{(n-2)}{3} - 1,96 * \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right] = \left[2 * \frac{50-2}{3} - 1,96 * \sqrt{\frac{16*50-29}{90}} \right] = 26.$$

Так как $p = 22 < 26$, следовательно, свойство случайности не выполняется. Модель по этому критерию не адекватна.

Проверку соответствия случайной компоненты нормальному закону распределения проведем с помощью RS- критерия.

Размах вариации $R = e_{\max} - e_{\min} = 0.0886 - (-0.0769) = 0,1656$, а среднеквадратическое отклонение $Se = \sqrt{\frac{\sum e(t)^2}{n-1}} = 0.0400$. Найдем расчетное

значение $RS = \frac{R}{S_e} = 4.1355$, которое попадает в интервал между двумя критическими: нижней – 3,47 и верхней – 4,89 границами. Следовательно, выполняется свойство нормального распределения случайной компоненты.

Проверку равенства математического ожидания случайной компоненты нулю проведем с помощью критерия Стьюдента. Расчетное

значение этого критерия определили по формулам $Se = \sqrt{\frac{\sum e(t)^2}{n-1}} = 0.0400$,

$\bar{e} = \frac{\sum_{t=1}^n e(t)}{n} = 0$, $t_p = \frac{|\bar{e}|}{Se} * \sqrt{n} = 0$. При сравнении с критическим $t_\alpha = 1,7$ со степенью свободы $\alpha = 0,05$ гипотеза подтверждается, т.е. $M(e) \approx 0$

Проверку отсутствия автокорреляции остатков осуществим с помощью критерия Дарбина – Уотсона. Расчетное значение:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e(t) - e(t-1))^2}{\sum_{t=1}^n e(t)^2} = \frac{0.0505}{0.0785} = 0,6425$$

не попадает в интервал между

нижней и верхней границами табличных значений данного критерия [1.4; 1.59], значит автокорреляция есть, следовательно модель по этому критерию неадекватна.

Модель считается неадекватной и по ней нельзя строить прогноз.

Исследуем данный временной ряд на основе адаптивной модели Брауна.

1) по первым пяти точкам оценим начальные значения a_0 и a_1 параметров модели с помощью МНК для линейной аппроксимации: $Y_p(t) = a_0 + a_1 t$ ($t = 1, 2, \dots, 5$).

2) с использованием параметров a_0 и a_1 по модели Брауна находим прогноз на один шаг: $Y_p(t, k) = a_0(t) + a_1(t)k$.

3) Расчетное значение $Y_p(t, k)$ экономического показателя сравнивают с фактическим $Y_p(t)$ и вычисляется величина их расхождения (ошибки).

При $k = 1$ имеем: $e(t+1) = Y(t+1) - Y_p(t, 1)$ -ошибка прогноза.

4) В соответствии с этой величиной корректируются параметры модели $a_0(t), a_1(t), e(t)$:

t	Y_t	$t - t_{cp}$	$(t - t_{cp})^2$	$Y_t - Y_{cp}$	$(Y_t - Y_{cp}) * (t - t_{cp})$
1	26,1491	-2	4	0,0647	-0,1294
2	26,1300	-1	1	0,0456	-0,0456
3	26,0476	0	0	-0,0368	0,0000
4	26,0476	1	1	-0,0368	-0,0368
5	26,0476	2	4	-0,0368	-0,0736
$\Sigma 15$	130,4219	0	10	-0,0001	-0,2854

5) по модели со скорректированными параметрами a_0 и a_1 находят прогноз на следующий момент времени.

Таким образом, на последнем шаге получена модель:

$$Y_p(n+k) = 25.7474 + 0.0001 * k.$$

Проверим на адекватность модель Брауна при $\alpha = 0,4$.

Проверку случайности колебаний уровней остаточной последовательности проведем по методу поворотных точек. Число поворотных точек должно удовлетворять строгому неравенству:

$$P > \left[2 * \frac{(n-2)}{3} - 1,96 * \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right] = \left[2 * \frac{50-2}{3} - 1,96 * \sqrt{\frac{16 * 50 - 29}{90}} \right] = 26$$

Так как $p = 29 > 26$, следовательно, свойство случайности выполняется. Модель по этому критерию адекватна.

Проверку соответствия случайной компоненты нормальному закону распределения проведем с помощью RS- критерия:

$$\text{Размах вариации } R = e_{\max} - e_{\min} = 0.0775 - (-0,0723) = 0,1498, \text{ а}$$

$$\text{среднеквадратическое отклонение } S_e = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n e(t)^2}{n-1}} = 0.0331. \text{ Найдем}$$

расчетное значение $RS = \frac{R}{S_E} = 4.5316$, которое попадает в интервал между двумя критическими: нижней – 3,47 и верхней – 4,89 границами. Следовательно, выполняется свойство о нормальном законе распределения.

Проверку равенства математического ожидания случайной компоненты нулю проведем с помощью критерия Стьюдента. Расчетное

значение этого критерия определили по формулам: $S_e = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n e(t)^2}{n-1}} = 0.0331$,

$\bar{e} = \frac{\sum_{t=1}^n e(t)}{n} = 0.0036$, $t_p = \frac{|\bar{e}|}{S_e} * \sqrt{n} = 0.7661$. При сравнении с критическим

$t_\alpha = 1,7$ со степенью свободы $\alpha = 0,05$ гипотеза подтверждается, т.е. $M(e) \approx 0$

Проверку отсутствия автокорреляции остатков осуществим с помощью критерия Дарбина – Уотсона. Расчетное значение $d=1.8953$ попадает в интервал между нижней и верхней границами табличных значений данного критерия [1.59; 2], значит автокорреляции нет, Следовательно, модель по этому критерию адекватна.

Так как все четыре свойства выполняются, то остаточный ряд является случайной компонентой, а модель адекватна.

Оценка точности модели: так как $\frac{e_{\text{оми}}}{n} = \frac{1}{n} \sum \frac{|e(t)|}{y_t} * 100\% =$

$\frac{1}{50} * 5.0359 = 0.1024 < 5\%$, то модель точная.

Осуществим прогнозирование курса доллара на два дня вперед на основе модели Брауна: $Y_p(n+k) = 25.7474 + 0.0001*k$.

Точечные прогнозы получаются путем подстановки в модель значений $k = 1$ и $k = 2$: $Y_p(50+1) = Y_p(51) = 25.7474 + 0.0001*1 = 25.7475$;

$$Y_p(50+2) = Y_p(52) = 25.7474 + 0.0001*2 = 25.7477.$$

Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

Посчитаем U(1) и U(2):

$$U(1) = 0,0334*1,676*\sqrt{1+\frac{1}{50}+\frac{(50+1-3)^2}{10}} = 0,8512, \quad \bar{s}_e = 0,0334$$

$$U(2) = 0,0334*1,676*\sqrt{1+\frac{1}{50}+\frac{(50+2-3)^2}{10}} = 0,8689.$$

$$Y_p(50+1) + U(1) = 26,5987 \qquad Y_p(50+1) - U(1) = 24,8963$$

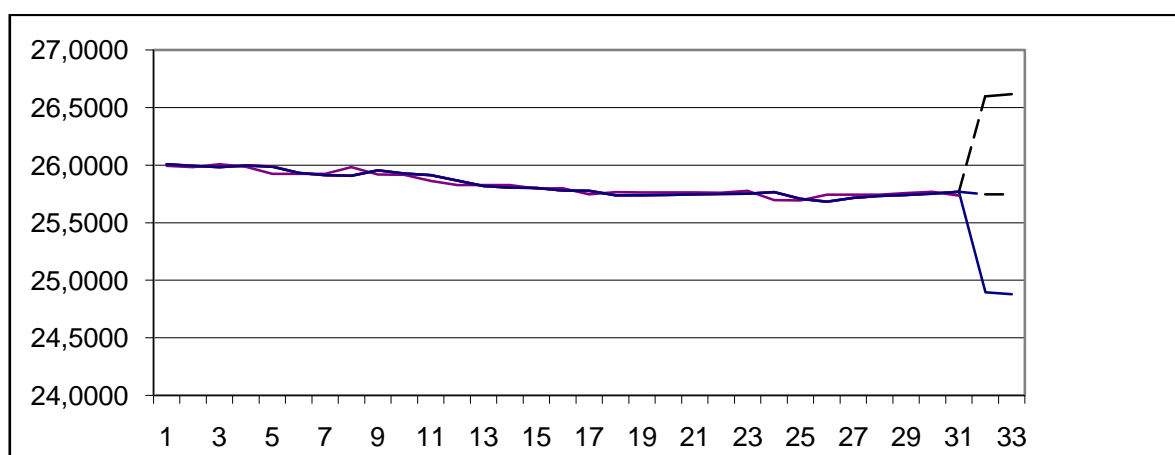
$$Y_p(50+2) + U(2) = 26,6164 \qquad Y_p(50+2) - U(2) = 24,8787$$

Результаты прогнозирования сведем в таблицу:

Время t	Шаг k	Прогноз y_t	Нижняя граница прогноза	Верхняя граница прогноза
51	1	25,7475	24,8963	25,5987
52	2	25,7477	24,8787	26,6164

Отообразим на графике фактические данные, результаты аппроксимации и прогнозирования по полученной модели Брауна:

$$Y_p(n+k) = 25.7474 + 0.0001*k.$$



С доверительной вероятностью 95% можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития показателя, область возможных значений курса доллара составит (24,8963;26,6987) и (24,8787;26,6164) соответственно на 6 и 7 мая.

4.4. Применение адаптивных моделей для анализа и прогнозирования процессов, испытывающих на себе влияние сезонности

Большинство прогнозируемых процессов в той или иной мере испытывают на себе влияние сезонности. При анализе сезонных колебаний используются адаптивные методы, являющиеся наиболее эффективными и полезными, где основной информацией для прогноза являются временные ряды.

Рассмотрим разработку прогнозной модели с многоуровневой структурой адаптивного механизма, адекватно отражающую процесс объема продаж продукции; обоснование научных положений способа управления, способствующего разработке системы мероприятий по совершенствованию процесса принятия эффективных управленческих решений по оценке экономической эффективности предприятия.

Большинство прогнозируемых процессов в той или иной мере испытывают на себе влияние сезонности. Для того чтобы можно было целенаправленно влиять на сезонность, необходимо уметь измерять и анализировать сезонность, уметь предвидеть развитие процессов, подверженных сезонным колебаниям. Сезонная деятельность, несмотря на свою естественность, имеет более высокую затратную составляющую функционирования, чем деятельность, не зависящая от сезонных факторов. Производители сезонных товаров испытывают большие колебания спроса на свою продукцию. Во время сезонного спада деятельность предприятий приходится поддерживать с помощью внутренних или внешних источников.

При анализе сезонных колебаний использование адаптивных методов, является наиболее эффективными и полезными, где основной информацией для прогноза являются временные ряды [1,53].

На основе квартальных статистических данных объема продаж продукции, приведенных в таблице, одного их коммерческих предприятий

города, рассмотрим разработку адаптивных моделей прогнозирования и дадим оценку эффективности работы предприятия.

Год	Квартал			
	1	2	3	4
2010	390	490	550	510
2011	430	580	690	610
2012	510	692	780	690
2013	580	798	890	840
2014	670	896	1040	970

Решение поставленной задачи по анализу временных рядов начинается с построения графика исследуемого показателя [14]. Исходный временной ряд y_t : 390; 490; 550; 510; 430; 580; 690; 610; 510; 692; 780; 690; 580; 798; 890; 840; 670; 896; 1040; 970 изобразим на рис. 1.

Графический анализ временного ряда свидетельствует о наличии устойчивой тенденции роста объемов продаж в течение последних пяти лет. Также отчетливо видны сезонные колебания, т.к. форма кривой, повторяется через определенные промежутки времени.

Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, то это аддитивная модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, то это мультипликативная модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

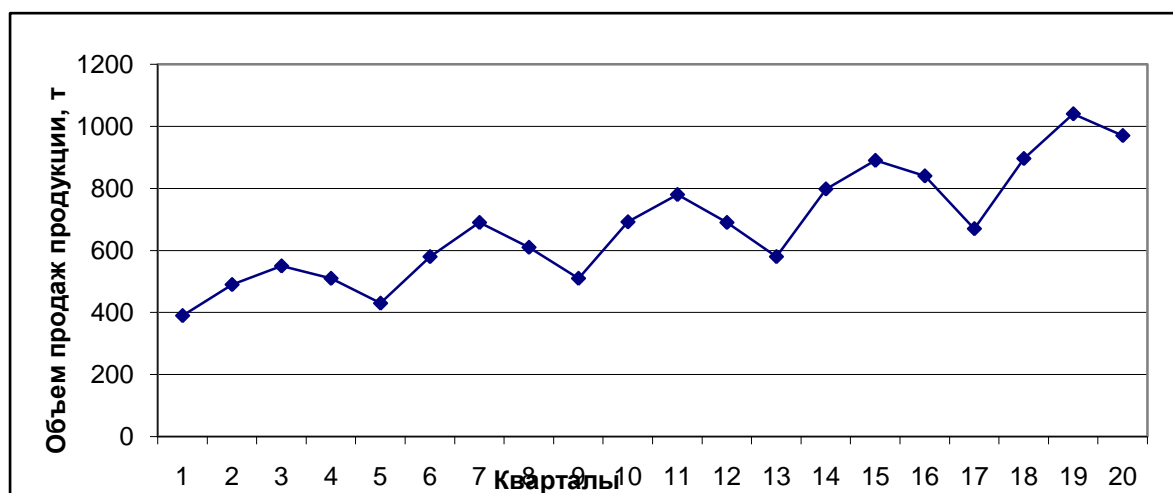


Рисунок 1- Квартальная динамика объема продаж продукции

Поэтому временной ряд может быть разложен на компоненты – главная тенденция (тренд), сезонные колебания и случайная составляющая:

$$Y_t = U_t + V_t + \varepsilon_t \quad \text{или} \quad Y_t = U_t \cdot V_t \cdot \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}.$$

где Y_t - прогнозируемое значение; U_t - тренд; V_t - сезонная компонента; ε_t - случайная компонента; T - число уровней наблюдения.

Анализ исходной информации выполнен на основе статистических методов и информационных технологий [14,17]. Рассмотрим последовательность его выполнения.

Для выявления аномальных уровней временного ряда был использован метод Ирвина: $\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}$,

$$\text{где } \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{636722,20}{20-1}} = 183,06$$

Он предполагает сравнение расчетных значений статистики λ_t с критическим значением $\lambda_\alpha = 1,3$.

Приведем расчетную таблицу выявления наличия аномальных уровней:

t	y_t	$ y_t - y_{t-1} $	$(y_t - \bar{y})$	$(y_t - \bar{y})^2$	λ_t
1	390	-	-290,3	84274,09	-
2	490	100	-190,3	36214,09	0,55
3	550	60	-130,3	16978,09	0,33
4	510	40	-170,3	29002,09	0,22
...
17	670	170	-10,3	106,09	0,93
18	896	226	215,7	46526,49	1,23
19	1040	144	359,7	129384,1	0,79
20	970	70	289,7	83926,09	0,38

По результатам расчетов во временном ряду определили, что нет аномальных наблюдений, расчетные величины λ_t которых превышали бы табличные значения критерия Ирвина λ_α , при $n = 20$, $\lambda_\alpha = 1,3$.

Наличие тренда во временном ряду проверялось при помощи метода Фостера - Стьюарта. Реализация метода содержит четыре этапа[19].

На первом этапе производится сравнение каждого уровня исходного временного ряда, начиная со второго уровня, со всеми предыдущими, при этом определяются две числовые последовательности:

$$k_t = -,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0$$

$$l_t = -,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, \text{ где } t = 2, 3, \dots, n.$$

На втором этапе вычисляются величины s и d :

$$s = \sum_{i=2}^n (k_i + l_i) = 10 \quad \text{и} \quad d = \sum_{i=2}^n (k_i - l_i) = 10.$$

Третий этап проводится с использованием расчетных значений t -критерия Стьюдента для средней и для дисперсии:

$$t_s = \frac{|s - \mu|}{\sigma_1} = \frac{|10 - 5,195|}{1,677} = 2,865 \quad \text{и}$$

$$t_d = \frac{|d - 0|}{\sigma_2} = \frac{|10 - 0|}{2,279} = 4,387$$

На четвертом этапе расчетные значения t_s и t_d сравниваются с табличным значением t -критерия Стьюдента с заданным уровнем значимости t_α при $\alpha = 0,05$. ($t_{0,05}(20-2) = 1,73$).

Так как $|t_s| = |2,865| > 1,73$ и $|t_d| = |4,387| > 1,73$, то гипотеза об отсутствии тренда отвергается. Следовательно, тренд есть.

Метод Брауна является самым распространённым методом краткосрочного прогнозирования в экономике, общий вид которой:

$$\hat{y}(t) = \hat{a}_0(t) + \hat{a}_1(t) \cdot t.$$

С помощью метода наименьших квадратов (МНК) в нашем исследовании была построена модель Брауна с начальными значениями коэффициентов: $Y_p(t) = 444 + 10t$.

С использованием параметров a_0 и a_1 по модели Брауна находится прогноз на один шаг ($k = 1$) по формуле:

$$Y_p(t, 1) = a_0(t) + a_1(t).$$

Расчетное значение $Y_p(t, k)$ экономического показателя сравнивают с фактическим $Y(t)$, и вычисляется величина их расхождения (ошибки). При $k = 1$ имеем: $e(t + 1) = Y(t + 1) - Y_p(t, 1)$.

В соответствии с этой величиной корректируются параметры модели. В модели Брауна модификация осуществляется следующим образом:

$$a_0(t) = a_0(t - 1) + a_1(t - 1) + (1 - \beta^2)e(t);$$

$$a_1(t) = a_1(t - 1) + (1 - \beta)^2 e(t).$$

В результате была получена трендовая модель Брауна со скорректированными параметрами вида: $Y_p(t) = 985,71 + 36t$.

Адаптивная модель Хольта-Уинтерса представляет собой мультипликативное объединение линейного тренда и сезонной составляющей ряда и имеет вид:

$$Y_\tau(t) = (a_{1,t} + \tau a_{2,t}) s_{t+\tau-l}$$

где a_0 и a_1 , $s_{t+\tau+1}$ - коэффициенты сезонности, τ - период упреждения

Так как для построения этой модели необходимы начальные значения коэффициентов $a_{1,0}$, $a_{2,0}$ и $s_{t,0}$, то сначала была построена начальная линейная модель $Y(t) = a_{1,0} + a_{2,0}t$, параметры которой были оценены при помощи МНК:

$$Y(t) = 389,29 + 32,38t$$

Начальные коэффициенты сезонности вычисляются по формуле:

$$S_1^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{y_t}{y_p(t)} + \frac{y_{t+1}}{y_p(t+1)} \right], \quad 1=4.$$

Начальные параметры корректируются согласно формулам:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \alpha_1 y_t / S_{t-1} + (1-\alpha_1) (\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}) \\ S_t &= \alpha_2 y_t / \hat{a}_{1,t} + (1-\alpha_2) S_{t-1} \\ \hat{a}_{2,t} &= \alpha_3 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1-\alpha_3) \hat{a}_{2,t-1} \\ 0 &< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1. \end{aligned}$$

Оптимальные параметры адаптации равны: $\alpha_1 = 0,3$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,3$.

После корректировки начальных параметров при периоде упреждения равном 1 ($\tau = 1$), получили сезонную модель Хольта-Уинтерса со скорректированными параметрами:

$$Y_p(t) = (948,69 + 31,61t)s_{t-l+\tau},$$

где $s_1 = 0,79$; $s_2 = 1,03$; $s_3 = 1,14$; $s_4 = 1,01$.

Качество моделей оценивалось на основе проверки свойств остаточной последовательности [11,19].

Промежуточные расчеты по исследованию адекватности и точности для модели Брауна и для модели Хольта-Уинтерса показали, что обе модели являются неадекватными.

Модель Тейла-Вейджа - модель сезонных явлений с линейным ростом. Общий вид модели Тейла-Вейджа: $\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_0(t) + \tau \hat{a}_1(t) + s_{t+\tau-l}$.

Модель Тейла-Вейджа представляет собой аддитивное объединение линейного тренда и сезонности, поэтому чтобы использовать ее для прогнозирования временного ряда с мультипликативной сезонностью, исходный временной ряд необходимо прологарифмировать, а затем использовать его для построения модели. Начальная оценка параметров находится при помощи МНК:

$$a_1 = \frac{\sum_{t=1}^n (t-\bar{t})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (t-\bar{t})^2} = 0,06; \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{t} = 6,26 - 0,06 \cdot 4,5 = 5,99.$$

Таблица нахождения начальных значений коэффициентов:

	t	y_t	$(t-\bar{t})$	$(t-\bar{t})^2$	$(y-\bar{y})$	$(t-\bar{t})(y-\bar{y})$
	1	5,97	-3,50	-0,29	12,25	1,02
	2	6,19	-2,50	-0,07	6,25	0,17
	3	6,31	-1,50	0,05	2,25	-0,07
	4	6,23	-0,50	-0,03	0,25	0,01
	5	6,06	0,50	-0,20	0,25	-0,10
	6	6,36	1,50	0,10	2,25	0,17
	7	6,54	2,50	0,28	6,25	0,70
	8	6,41	3,50	0,15	12,25	0,53
Сумма	36	50,07			42,00	2,41
Среднее значение	4,5	6,26				

Модель Тейла-Вейджа начальными значениями коэффициентов приняла вид: $Y_p(t) = 5,99 + 0,06t$.

Начальные коэффициенты сезонности вычисляются по формуле:

$$s_t^0 = \frac{1}{2} [(y_t - \hat{y}(t)) + (y_{t+1} - \hat{y}(t+1))].$$

Промежуточные расчеты приведены в следующей таблице:

Расчет начальных коэффициентов сезонности приведем в таблице:

t	y_t	$\ln(y_t)$	y_p	s^0
1	390	5,97	6,05	-0,16
2	490	6,19	6,11	0,04
3	550	6,31	6,18	0,13
4	510	6,23	6,24	-0,03
5	430	6,06	6,30	
6	590	6,36	6,36	
7	690	6,54	6,42	
8	610	6,41	6,48	

Начальные параметры корректируются согласно формулам:

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_1(y_t - \hat{s}_{t-1}) + (1 - \alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1})\hat{s}_t = \alpha_3(y_t - \hat{a}_{1,t}) + (1 - \alpha_3)\hat{s}_{t-1}$$

$$\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}$$

Корректировку параметров модели Тейла – Вейджа приведем в таблице:

t	$\ln(y_t)$	$a_{1,t}$	$a_{2,t}$	s_t
0	-	5,99	0,06	-
1	5,97	6,07	-0,12	0,066
2	6,19	6,01	0,12	-0,102
3	6,31	6,14	0,15	0,123
4	6,23	6,28	-0,04	0,147
5	6,06	6,17	-0,04	-0,061
6	6,36	6,23	0,04	-0,010
7	6,54	6,31	0,19	0,052
8	6,41	6,43	0,05	0,169
9	6,23	6,42	-0,14	0,032
10	6,54	6,36	0,10	-0,116
11	6,66	6,50	0,12	0,112
12	6,54	6,55	0,06	0,099
13	6,36	6,53	-0,09	0,036
14	6,68	6,55	0,03	-0,057
15	6,79	6,61	0,15	0,039
16	6,73	6,72	0,05	0,138
17	6,51	6,68	-0,09	-0,117
18	6,80	6,67	0,06	0,004
19	6,95	6,78	0,12	0,075
20	6,88	6,85	0,07	-0,095

На последнем шаге получили модель Тейла - Вейджа:

$$\hat{Y}_\tau(t) = 6,85 + 0,07t + \hat{s}_{t-1+\tau},$$

где $s_1 = -0,117$; $s_2 = 0,004$; $s_3 = 0,075$; $s_4 = -0,095$.

Качество модели оценивалось на основе проверки свойств остаточной последовательности:

1. Условие независимости уровней ряда остатков проверялось с помощью критерия Дарбина - Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{20} [e(t) - e(t-1)]^2}{\sum_{t=1}^{20} e(t)^2} = \frac{0,75}{0,38} = 1,97.$$

где критические значения для $n = 20$ наблюдения равны $d_1 = 1,20$; $d_2 = 1,41$;

Так как $d = 1,97 > 1,41$, то свойство независимости уровней ряда выполняется.

2. Условие случайности колебаний уровней остаточной компоненты проверялось методом поворотных точек. Число поворотных точек P должно удовлетворять строгому неравенству:

$$P > \left[2 \cdot \frac{18}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{16 \cdot 20 - 29}{90}} \right] = [8,4] = 8.$$

В нашем случае число поворотных точек $P = 10$. Так как $P = 10 > 8$, то свойство случайности остаточной компоненты выполняется.

2. Наличие нормального закона распределения случайной компоненты устанавливалось с помощью RS-критерия:

$$R/S = \frac{e_{max} - e_{min}}{S_E} = \frac{0,216 - (-0,239)}{0,14} = 3,25$$

$$S_E = \sqrt{\sum_{t=1}^n e_t^2 / (n-1)} = 0,14.$$

Для $n = 20$, $\alpha = 0,05$ - интервал между критическими границами равен: $[3,18; 4,49]$. Значение критерия $R/S = 3,25$ попадает между табулированными границами с заданным уровнем значимости. Следовательно, гипотеза о нормальном законе распределения случайной величины выполняется.

4. Условие равенства математического ожидания случайной компоненты нулю проверим с помощью t-критерия Стьюдента. На практике вычисляют значение \bar{e} :

$$\bar{e} = M(e) = \frac{\sum_{t=1}^{20} e_t}{20} = \frac{-0,557}{20} = -0,03$$

Так как $|M(e)| < 0,5$, то критерий Стьюдента выполняется автоматически. Гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда выполняется.

Для оценки точности модели Тейла-Вейджа использовалась величина средней относительной ошибки аппроксимации:

$$\bar{E}_{\text{отн}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \cdot 100\% = \frac{35,38}{20} = 1,77\% < 5\%$$

Так как в среднем расчетные значения для модели отличаются от фактических значений на 1,77%, то следовательно, модель точная,

В следующей таблице приведены результаты исследования на адекватность и точность трех исследуемых моделей.

Таблица анализа адекватности и точности моделей

Проверяемое условие	Модель Хольта-Уинтерса	Модель Тейла-Вейджа	Модель Брауна
Проверка на адекватность			
1. Независимость значений уровней случайной компоненты.	$d=0,496 < 1,41$ ⇒ не выполняется	$d = 1,97 > 1,41$ ⇒ выполняется	$d = 2,10 > 1,41$ ⇒ выполняется
2. Случайность колебаний уровней остаточной последовательности	$P=13 > 8$ ⇒ выполняется	$P=10 > 8$ ⇒ выполняется	$P=9 > 8$ ⇒ выполняется
3. Соответствие распределения случайной компоненты нормальному закону распределения	$R/S=2,54 \notin [3,18; 4,49]$ ⇒ не выполняется	$R/S=3,25 \in [3,18; 4,49]$ ⇒ выполняется	$R/S=3,13 \notin [3,18; 4,49]$ ⇒ не выполняется
4. Равенство нулю математического ожидания случайной компоненты.	$M(e) = 27,44 > 0,5$ ⇒ не выполняется	$M(e) = 0,03 < 0,5$ ⇒ выполняется	$M(e) = 8,12 > 0,5$ ⇒ не выполняется
Проверка на точность			
Средняя относительная ошибка аппроксимации	$\bar{E}_{\text{отн}} = 4,85\% < 5\%$ ⇒ модель точная	$\bar{E}_{\text{отн}} = 1,77\% < 5\%$ ⇒ модель точная	$\bar{E}_{\text{отн}} = 18,15\% > 15\%$ ⇒ модель неточная

Из таблицы видно, что модель Тейла-Вейджа является адекватной и точной. Следовательно, ее можно использовать для прогнозирования.

В ходе исследования был построен точечный прогноз на основе модели Тейла-Вейджа:

$$\hat{y}(t+1) = 6,85 + 0,07 - 0,117 = 6,803 \text{ для 1-го квартала 2015г;}$$

$$\hat{y}(t+2) = 6,85 + 0,07 \cdot 2 + 0,004 = 6,994 \text{ для 2-го квартала 2015г;}$$

$$\hat{y}(t+3) = 6,85 + 0,07 \cdot 3 + 0,075 = 7,135 \text{ для 3-го квартала 2015г;}$$

$$\hat{y}(t+4) = 6,85 + 0,07 \cdot 4 - 0,095 = 7,035 \text{ для 4-го квартала 2015г.}$$

Точечный прогноз был дополнен интервальным прогнозом на основе модели Тейла - Вейджа. Ширина интервала:

$$U(1) = 1,05 \cdot 0,20 \sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(20+1-10,5)^2}{665}} = 0,232 \quad \text{при } k = 1;$$

$$U(2) = 1,05 \cdot 0,20 \sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(20+2-10,5)^2}{665}} = 0,234 \quad \text{при } k = 2;$$

$$U(3) = 1,05 \cdot 0,20 \sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(20+3-10,5)^2}{665}} = 0,238 \quad \text{при } k = 3;$$

$$U(4) = 1,05 \cdot 0,20 \sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(20+4-10,5)^2}{665}} = 0,242 \quad \text{при } k = 4.$$

Получили следующие интервалы прогноза для шага прогнозирования k : нижняя граница прогноза - $\hat{y}(t+k) - U(k)$, верхняя граница прогноза - $\hat{y}(t+k) + U(k)$

В таблице приведены результаты прогнозирования по модели Тейла-Вейджа:

Год	№ квартала	Точечный прогноз	Нижняя граница прогноза	Верхняя граница прогноза
2015	1	6,803	6,711	7,175
	2	6,994	6,690	7,158
	3	7,135	6,897	7,373
	4	7,035	6,993	7,477

Так как в процессе построения модели Тейла-Вейджа все данные были прологарифмированы, и по ним был построен прогноз, то теперь необходимо перейти к исходным данным путем взятия экспоненты от этих чисел, чтобы получить реальный прогноз на четыре квартала вперед:

Год	№ квартала	Точечный прогноз	Нижняя граница прогноза	Верхняя граница прогноза
2015	1	900,54	821,39	1306,36
	2	1090,07	804,32	1284,34
	3	1255,14	989,30	1592,40
	4	1135,69	1088,98	1766,93

Доверительный интервал прогноза для шага прогнозирования $k = 1, 2, 3, 4$ имеет следующий следующие границы:

$$\begin{aligned}
 (\hat{y}(t+1) - U(1); \hat{y}(t+1) + U(1)) &= (821,39; 1306,36); \\
 (\hat{y}(t+2) - U(2); \hat{y}(t+2) + U(2)) &= (804,32; 1284,34); \\
 (\hat{y}(t+3) - U(3); \hat{y}(t+3) + U(3)) &= (989,30; 1592,40); \\
 (\hat{y}(t+4) - U(4); \hat{y}(t+4) + U(4)) &= (1088,98; 1766,93).
 \end{aligned}$$

Таким образом, на основе адекватной адаптивной модели Тейла-Вейджа, были получены следующие результаты прогнозирования (рис. 2), при сохранении сложившихся закономерностей развития:

- на первый квартал 2015 г. Объем продаж составит 900,54 тонн, а область возможных значений этой величины составит (821,39; 1306,36) тонн;
- на второй квартал - 1090,07 тонн, а область значений составит (804,32; 1284,34) тонн;
- на третий квартал - 1255,14 тонн, а область значений (989,30; 1592,40) тонн

- на четвертый -1135,69 тонн, а область значений(1088,98; 1766,93)
ТОНН.

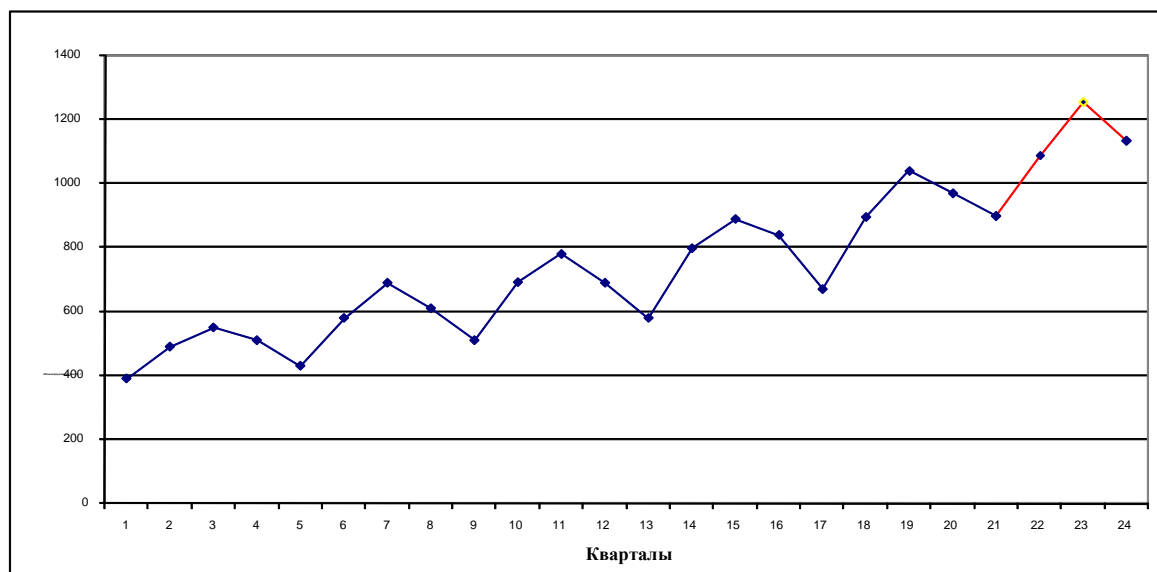


Рисунок 2 – Результаты прогнозирования по модели Тейла - Вейджа

Успешные результаты верификации свидетельствуют о работоспособности разработанного в исследовании аппарата адаптивного моделирования и анализа. Исследование показало, что полученный прогноз на основе адаптивной модели Тейла - Вейджа, уменьшается риск принятия неверных, необоснованных и субъективных управленческих решений. Учет нежелательных тенденций, выявленных при прогнозировании, позволит принять необходимые меры для их предупреждения, тем самым помешать осуществлению прогноза. Процесс прогнозирования предполагает выявление возможных альтернатив развития в перспективе для обоснованного их выбора и принятия оптимального управленческого решения в повышении эффективности предприятия [20,22].

4.5. Применение мультипликативных адаптивных моделей для анализа и прогнозирования объема продаж компьютеров и их комплектующих

При анализе сезонных колебаний использование мультипликативных методов, является наиболее эффективными и полезными, где основной информацией для прогноза являются временные ряды.

На основе квартальных статистических данных объема продаж компьютеров и их комплектующих за последние 5 лет (табл.), одного их коммерческих предприятий города, рассмотрим разработку адаптивных моделей прогнозирования и дадим оценку эффективности работы предприятия.

Таблица - Статистические данные - квартальные данные объема продаж

Год	Квартал			
	1	2	3	4
2010	1050,924	954,970	1204,643	2241,536
2011	1785,874	1654,341	2202,222	3701,194
2012	2810,065	2415,285	3248,593	5105,523
2013	3518,048	3112,349	3810,693	6390,892
2014	4339,430	3891,534	4493,763	7121,968

Решение поставленной задачи по анализу временных рядов начинается с построения графика исследуемого показателя. Исходный временной ряд y_t : 1050,924; 954,970; 1204,643; 2241,536; 1785,874; 1654,341; 2202,222; 3701,194; 2810,065; 2415,285; 3248,593; 5105,523; 3518,048; 3112,349; 810,693; 6390,892; 4339,430; 3891,534; 4493,763; 7121,968 изобразим на рис.1.

Графический анализ временного ряда свидетельствует о наличии устойчивой тенденции роста объемов продаж в течение последних пяти лет. Также отчетливо видны сезонные колебания, т.е. форма кривой повторяется через определенные промежутки времени. Наблюдается устойчиво повторяющееся увеличение объема продаж в 4-м квартале по сравнению с остальными. Так как амплитуда сезонных колебаний

увеличивается вместе с трендом, то для описания и прогнозирования динамики временного ряда предлагается мультипликативная модель.

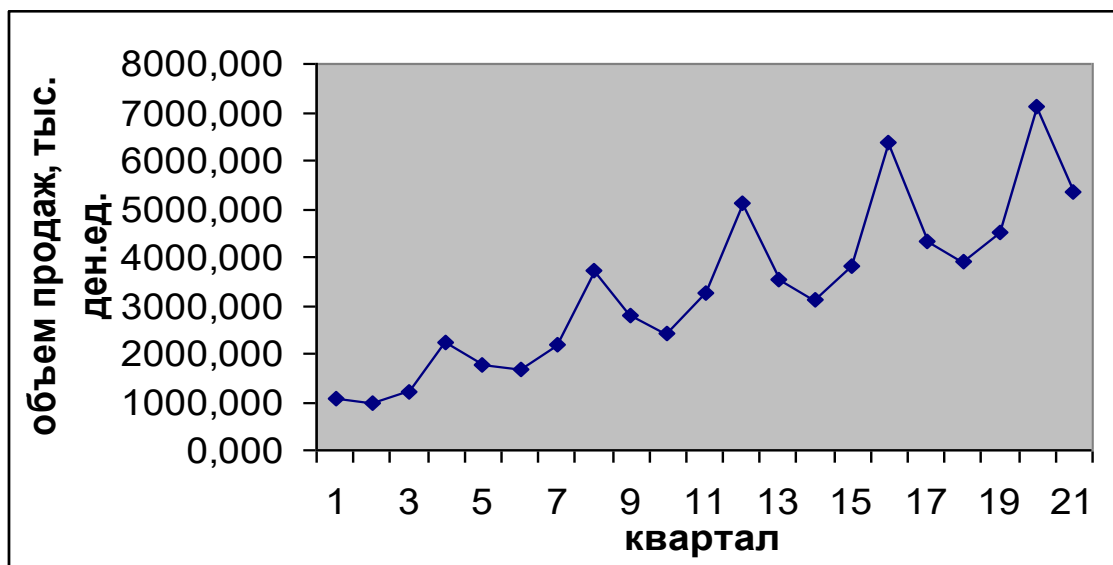


Рисунок 1 - Квартальная динамика объема продаж

В процессе исследования были построены модель Хольта - Уинтерса, модель Тейла - Вейджа и тренд - сезонная модель.

Построим адаптивную модель Хольта - Уинтерса, которая предполагает мультипликативное объединение линейного тренда и сезонной составляющей ряда, она имеет вид:

$$y(t) = (a_t + b_t t) F_{t,i}, \quad i = \overline{1,4}$$

Так как для построения этой модели необходимы начальные значения коэффициентов a_0 , b_0 и F_t^0 , то сначала построим начальную линейную модель $y(t) = a + bt$, параметры которой оценим при помощи МНК. Это было сделано с помощью надстройки EXCEL - Анализ данных [14]. Результаты приведены в таблице:

Переменные	Коэффициенты	Стандартная ошибка
a_0	720.948	390,957
b_0	239,289	31,136

$(t) = 720.948 + 239.289 * t$ – начальная модель. Параметры которой оценим с помощью метода наименьших квадратов:

$$b = \frac{\sum_{t=1}^n (t-t_{cp})(y_t - y_{cp})}{\sum_{t=1}^n (t-t_{cp})^2} = \frac{184252,540}{770} = 239,289;$$

$$a = y_{cp} - bt_{cp} = 3353,127 - 239,289 \cdot 11 = 720,948;$$

$$\text{где } y_{cp} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n} = 3323,127; \quad t_{cp} = \frac{\sum_{t=1}^n t}{n} = 11.$$

Промежуточные расчеты начальных параметров по МНК приведены в следующей таблице:

t	y_t	$t-t_{cp}$	$(t-t_{cp})^2$	$y_t - y_{cp}$	$(t-t_{cp})(y_t - y_{cp})$
1	1050,924	-10,000	100,000	-2302,203	23022,031
2	954,970	-9,000	81,000	-2398,157	21583,413
3	1204,643	-8,000	64,000	-2148,484	17187,873
4	2241,536	-7,000	49,000	-1111,591	7781,135
5	1785,874	-6,000	36,000	-1567,253	9403,518
6	1654,341	-5,000	25,000	-1698,786	8493,931
7	2202,222	-4,000	16,000	-1150,905	4603,622
8	3701,194	-3,000	9,000	348,067	-1044,201
9	2810,065	-2,000	4,000	-543,062	1086,123
10	2415,285	-1,000	1,000	-937,842	937,842
11	3248,593	0,000	0,000	-104,534	0,000
12	5105,523	1,000	1,000	1752,396	1752,396
13	3518,048	2,000	4,000	164,921	329,843
14	3112,349	3,000	9,000	-240,778	-722,335
15	3810,693	4,000	16,000	457,566	1830,263
16	6390,892	5,000	25,000	3037,765	15188,827
17	4339,430	6,000	36,000	986,303	5917,816
18	3891,534	7,000	49,000	538,407	3768,848
19	4493,763	8,000	64,000	1140,636	9125,092
20	7121,968	9,000	81,000	3768,841	33919,573
21	5361,820	10,000	100,000	2008,693	20086,930
Среднее: 11	3353,127				
Сумма			770,000		184252,540

Найдем начальные коэффициенты сезонности по формуле:

$$F_l^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{y_t}{y_p(t)} + \frac{y_{t+l}}{y_p(t+l)} \right], l = 4.$$

Расчет начальных коэффициентов сезонности:

t	y_t	\hat{y}_t	F^0
1	1050,924	960,237	1,013
2	954,97	1199,526	0,782
3	1204,643	1438,815	0,878
4	2241,536	1678,104	1,370
5	1785,874	1917,393	
6	1654,341	2156,682	
7	2202,222	2395,971	
8	3701,194	2635,260	

Далее начальные параметры корректируются согласно формулам:

$$a_t = \alpha_1 \frac{y_t}{F_{t-1}} + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1}), \quad F_t = \alpha_2 \frac{y_t}{a_t} + (1 - \alpha_2)F_{t-1},$$

$$b_t = \alpha_3(a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_3)b_{t-1}.$$

Оптимальные параметры адаптации равны: $\alpha_1 = 0,3$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,3$.

Проведем корректировку параметров модели Хольта – Уинтерса:

t	y_t	a_t	b_t	F_t
0	-	720,948	239,289	-
1	1050,924	1001,489	701,131	0,830
2	954,97	923,219	648,110	0,600
3	1204,643	989,781	615,284	0,694
4	2241,536	1028,101	581,297	1,200
5	1785,874	1010,482	560,211	0,709
6	1654,341	1005,468	428,100	0,453
7	2202,222	987,156	194,782	0,712
8	3701,194	956,111	294,761	1,199
9	2810,065	915,823	402,221	0,602
10	2415,285	893,119	359,471	0,399
11	3248,593	854,970	300,147	0,590
12	5105,523	808,257	299,460	1,102
13	3518,048	811,723	297,145	0,578
14	3112,349	799,210	301,990	0,389
15	3810,693	769,991	256,179	0,526
16	6390,892	700,489	303,129	1,078
17	4339,430	699,482	364,442	0,561
18	3891,534	701,299	397,489	0,372
19	4493,763	679,218	416,166	0,484
20	7121,968	654,289	451,209	1,059
21	5361,820	621,485	464,251	0,546

Таким образом, на последнем шаге получили сезонную модель Хольта-Уинтерса со скорректированными параметрами:

$$y_p(t) = (621,485 + 464,251t)F_i$$

где $F_1 = 0.546$; $F_2 = 0.372$; $F_3 = 0.484$; $F_4 = 1.059$.

Построим тренд - сезонную модель временного ряда. Для этого необходимо сгладить исходный временной ряд с помощью простой скользящей средней в соответствии с выражением.

После этого, разделив фактические уровни на значения сглаженного ряда, получим временной ряд $x_t = y_t/y'_t$, уровни которого отражают влияние случайных факторов и сезонности. Результаты расчетов приведены в таблице:

Таблица - Сглаживание исходного ряда

t	y_t	y'	$x_t=y_t/y'$
1	1050,924	-	-
2	954,97	-	-
3	1204,643	1511,845	0,797
4	2241,536	1650,619	1,358
5	1785,874	1777,811	1,005
6	1654,341	1966,079	0,841
7	2202,222	2575,323	0,855
8	3701,194	2736,421	1,353
9	2810,065	2808,824	1,000
10	2415,285	2987,209	0,809
11	3248,593	3681,799	0,882
12	5105,523	3709,708	1,376
13	3518,048	3729,098	0,943
14	3112,349	3724,800	0,836
15	3810,693	4567,101	0,834
16	6390,892	4566,726	1,399
17	4339,43	4618,242	0,940
18	3891,534	4541,764	0,857
19	4493,763	5309,491	0,846
20	7121,968	-	-
21	5361,82	-	-

Предварительную оценку сезонной компоненты получим усреднением уровней ряда x_t для одноименных кварталов. Так как

$\sum_{i=1}^4 \bar{x}_i = 4,233$ (отлична от четырех), то проведем корректировку значений

сезонной составляющей. Скорректированные оценки сезонности приведены в таблице:

Таблица 7 - Оценивание сезонной компоненты

№ квартала	Предварительная оценка сезонности, \bar{x}_i	Скорректированные значения сезонности, S_t
1	0,972	0,919
2	0,836	0,790
3	1,054	0,996
4	1,372	1,296
Сумма	4,233	4,000

Далее из исходного ряда удаляется сезонная составляющая, т.е. осуществляется десезонализация объема продаж. По нескольким первым наблюдениям полученного ряда оцениваем начальные параметры модели с помощью МНК, в результате получим модель: $\hat{y}_t = 787,843 + 230,224t$

На последнем этапе определяем расчетные уровни по мультипликативной модели, умножая значения полученных оценок трендовой и сезонной составляющих.

Модель Тейла - Вейджа представляет собой аддитивное объединение линейного тренда и сезонности, поэтому чтобы использовать ее для прогнозирования временного ряда с мультипликативной сезонностью, исходный временной ряд необходимо прологарифмировать, а затем использовать его для построения модели. Начальная оценка параметров находится также при помощи МНК:

$$y_p(t) = 7.067 + 0.083t$$

Расчет начальных коэффициентов сезонности приведен в таблице:

Таблица - Расчет начальных коэффициентов сезонности

t	y_t	$\ln(y_t)$	y_p	g^0
1	1050,924	6,957	7,150	-0,093
2	954,97	6,862	7,232	-0,261
3	1204,643	7,094	7,315	-0,085
4	2241,536	7,715	7,398	0,402
5	1785,874	7,488	7,481	
6	1654,341	7,411	7,563	
7	2202,222	7,697	7,646	
8	3701,194	8,216	7,729	

Скорректировав параметры, на последнем шаге получим модель Тейла-Вейджа: $\hat{y}_t = 8.650 + 0.047t + g_i$, где $g_1 = - 0.076$; $g_2 = - 0.264$; $g_3 = - 0.123$; $g_4 = 0.297$. Результаты расчетов приведены в таблице:

Таблица - Корректировка параметров модели Тейла-Вейджа

t	$\ln(y_t)$	a_t	b_t	g_t
0	-	7,067	0,083	-
1	6,957	7,092	0,065	-0,081
2	6,862	7,069	0,039	-0,124
3	7,094	7,103	0,038	-0,006
4	7,715	7,313	0,089	0,241
5	7,488	7,452	0,104	-0,011
6	7,411	7,550	0,102	-0,133
7	7,697	7,668	0,107	0,015
8	8,216	7,835	0,125	0,325
9	7,941	7,957	0,124	-0,014
10	7,790	8,034	0,110	-0,200
11	8,086	8,122	0,103	-0,015
12	8,538	8,221	0,102	0,320
13	8,166	8,281	0,089	-0,075
14	8,043	8,332	0,078	-0,253
15	8,246	8,365	0,064	-0,078
16	8,763	8,433	0,066	0,326
17	8,375	8,484	0,061	-0,095
18	8,267	8,538	0,059	-0,264
19	8,41	8,564	0,049	-0,123
20	8,871	8,593	0,043	0,297
21	8,587	8,65	0,047	-0,076

После того, как построены модели прогнозирования, необходимо исследовать их на адекватность.

Исследование моделей на адекватность проводилось проверкой выполнимости, следующих свойств:

4. Условие независимости уровней ряда остатков проверим с помощью критерия Дарбина-Уотсона:
$$d = \frac{\sum_{t=2}^{21} [E(t) - E(t-1)]^2}{\sum_{t=1}^{21} E(t)^2};$$

где критические значения для $n = 21$ наблюдения равны $d_1 = 1,22$; $d_2 = 1,42$;

2. Условие случайности колебаний уровней остаточной компоненты проверим методом поворотных точек:

$$\left[2 \frac{19}{3} - 1.96 \sqrt{\frac{16 * 21 - 29}{90}} \right] = [9] = 9;$$

3. Наличие нормального закона распределения случайной компоненты устанавливается RS-критерием:

$$R/S = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{S_E}, \quad \text{где} \quad S_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{21} E(t)^2}{20}};$$

для $n = 21$ наблюдения интервал между критическими границами равен: [3.18;4.49].

4. Условие равенства математического ожидания случайной компоненты нулю проверим с помощью t-критерия Стьюдента:

$$t_{pac} = \frac{\bar{E}}{\sigma_E} \sqrt{21}, \quad \text{где} \quad \sigma_E = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{21} E(t)^2 - \left[\sum_{t=1}^{20} E(t) \right]^2}{21 * 20}}$$

В следующей таблице приведены окончательные результаты исследования на адекватность для тренд-сезонной модели, для модели Хольта-Уинтерса, для модели Тейла-Вейджа.

Таблица - Результаты исследования моделей на адекватность

Проверяемое условие	Модель Хольта-Уинтерса	Тренд-сезонная модель	Модель Тейла-Вейджа
1	$d=1,88 > 1,42 \Rightarrow$ выполняется	$d=2,33 \in [2;4] \Rightarrow$ $d^2=4-2,33=$ $=1,67 > 1,42$ \Rightarrow выполняется	$d=0,081 < 1,22$ \Rightarrow не выполняется
2	$P=9=9 \Rightarrow$ выполняется	$P=9=9 \Rightarrow$ выполняется	$P=10 > 9 \Rightarrow$ выполняется
3	$R/S=3,76 \in [3,18;4,49]$ \Rightarrow выполняется	$R/S=4,52 \notin [3,18;4,49]$ \Rightarrow не выполняется	$R/S=0,61$ $\notin [3,18;4,49] \Rightarrow$ не выполняется
4	$t_{pac}=1,04 < t_{\alpha}=1,06$ $\Rightarrow M(E)=0$	$t_{pac}=1,36 > 1,06 \Rightarrow$ $M(E) \neq 0$	$t_{pac}=1,44 > 1,06 \Rightarrow$ $M(E) \neq 0$

Из таблицы видно, что построенная тренд-сезонная модели модель Тейла-Вейджа являются неадекватными, т.к. не выполняется условие соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения и отвергается гипотеза о равенстве математического ожидания значений остаточного ряда нулю у тренд-сезонной модели; и не выполняются все условия, кроме условия случайности колебаний уровней остаточной компоненты у модели Тейла-Вейджа. Следовательно, строить прогноз будем на основе модели Хольта-Уинтерса, которая является адекватной. Точность этой модели оценена, с помощью средней ошибки аппроксимации:

$$\overline{E_{отн}} = \frac{1}{21} \sum_{t=1}^{21} \frac{|E(t)|}{y_t} * 100\% = \frac{0,567}{21} * 100\% = 2,7\% < 5\%.$$

Построим точечный и интервальный прогнозы. Точечный прогноз получим путем подстановки в модель значения $\tau = 1$ и $\tau = 2$:

$\hat{y}(t+\tau) = \hat{y}(21+1) = (621,485 + 464,251*22)*0,372 = 4030,623$ для 2-го квартала 2007г;

$\hat{y}(t+\tau) = \hat{y}(21+2) = (621,485 + 464,251*23)*0,484 = 5468,841$ для 3-го квартала 2007г.

Доверительный интервал прогноза имеет следующий вид:

$$U(1) = 1047,842 * 1.063 \sqrt{1 + \frac{1}{21} + \frac{(21+1-11)^2}{770}} = 1222,207 \text{ при } k = 1;$$

$$U(2) = 1047,842 * 1.063 \sqrt{1 + \frac{1}{21} + \frac{(21+2-11)^2}{770}} = 1237,265 \text{ при } k = 2.$$

Верхняя граница имеет вид: $\hat{y}(t+k) + U(k)$; Нижняя граница: $\hat{y}(t+k) -$

$U(k)$. Результаты расчетов прогноза приведены в таблице:

Таблица - Результаты прогноза по модели Хольта-Уинтерса

Время, t	Шаг, k	Прогноз	Нижняя граница	Верхняя граница
22	1	4030,623	2808,416	5252,829
23	2	5468,841	4231,575	6706,106

На рис. 2. представлены результаты аппроксимации и прогнозирования по модели Хольта - Уинтерса, в котором ряд u_t соответствует фактическим данным, также указан прогноз на два квартала вперед, его верхняя и нижняя границы и расчетные значения по модели .

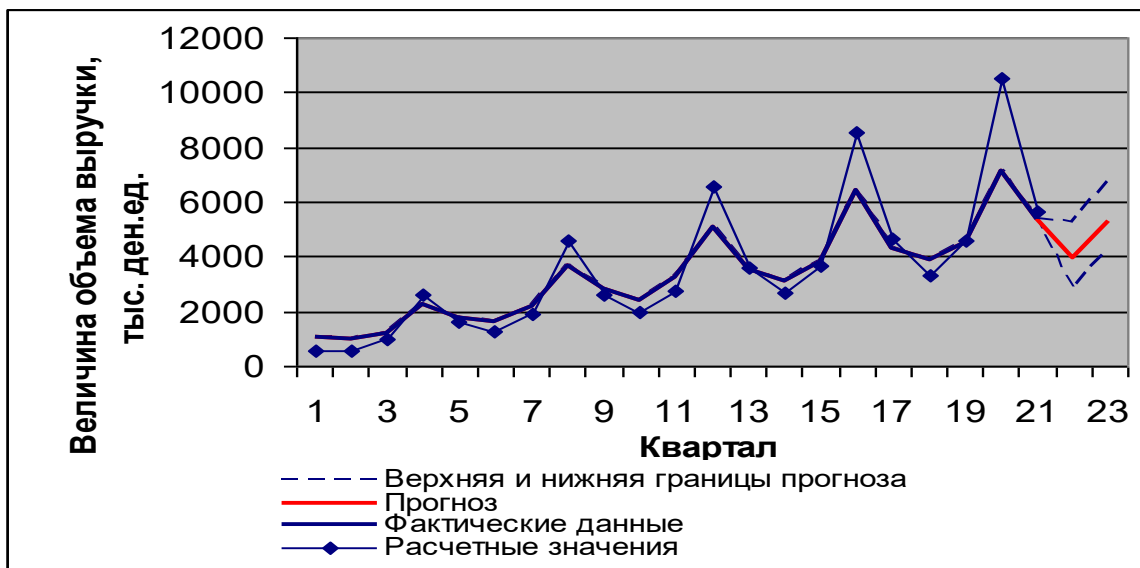


Рисунок 2 - Результаты аппроксимации и прогнозирования по модели Хольта - Уинтерса

4.6. Применение адаптивных моделей для анализа и прогнозирования объема продаж продукции предприятия

Имеется ряд, состоящий из количества вагонов с продукцией, проданной за месяц в течение последних 5 лет на предприятии.

Проведем предварительный анализ временных рядов и построим прогноз дохода от количества проданных вагонов с щебнем на последующие 15 месяцев.

Таблица – Исходные статистические данные

Год	Месяцы											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2002	710	712	725	730	735	750	752	760	740	734	726	715
2003	720	722	735	740	745	760	762	765	750	747	730	726
2004	735	750	754	766	770	774	780	784	780	766	759	748
2005	753	759	765	772	780	789	792	795	791	784	778	769
2006	772	775	777	784	788	797	800	805	798	792	786	779

Таким образом, получаем временной ряд, состоящий из количества вагонов с щебнем, проданных предприятием за месяц в течении 5-ти лет: 710,712,725,730,735,750,752,760,740,734,726,715,720,722,735,740,745,760,762,765,750,747,730,726,735,750,754,766,770,774,780,784,780,766,759,748,753,759,765,772,780,789,792,795,791,784,778,769,772,775,777,784,788,797,800,805,798,792,786,779.

На рис.1 отобразим ежемесячную продажу вагонов с щебнем за последние 5 лет.

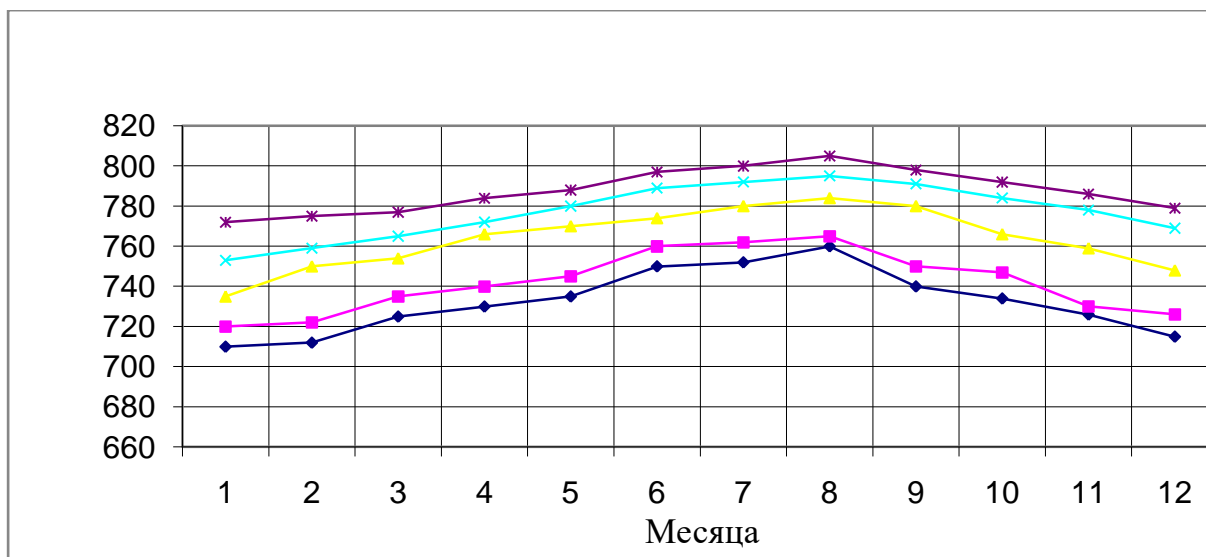


Рисунок 1 - Ежемесячная реализация вагонов с щебнем за 5 лет

Проведем предварительный анализ полученного временного ряда.

Выявим и устраним (если есть) аномальные уровни и определим наличие тренда во временном ряду.

Определим наличие аномальных уровней в данном временном ряду с помощью критерия Ирвина. Согласно данному критерию применим следующую формулу:

$$\lambda_{t'} = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}; t = 2, 3, \dots, n,$$

где среднеквадратическое отклонение $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n-1}}$; $\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}$.

$\sigma_y = \sqrt{\frac{37418,183}{60-1}} = 25,183$. Полученные значения λ_t сравним с табличным значением критерия Ирвина λ_α . Для данного временного ряда длины $n=60$ значение критерия Ирвина $\lambda_\alpha = 1,1$. Как видно из табл.3 имеем, что все полученные значения λ_t оказываются меньше значения критерия Ирвина. Это означает, что гипотеза о наличии аномальных уровней в данном

временном ряду отвергается на 5%-ном уровне значимости, то есть аномальные уровни отсутствуют.

Для определения наличия тренда во временном ряду используем метод Фостера - Стьюарта, так как данный метод обладает большими возможностями и дает более надежные результаты по сравнению с другими методами.

Вычислим величины s и d . Величина $s = 20$ и величина $d = 20$.

Вычислим среднеквадратические отклонения и величины t_s и t_d . Для расчета математического ожидания воспользуемся табличными значениями. Математическое ожидание для длины данного временного ряда $n = 60$ равно $M = 7$. Таким образом, получаем:

$$\sigma_1 = \sqrt{2 \cdot \ln 60 - 3,4253} = 2,182; t_s = \frac{|20 - 7|}{2,182} = 5,958;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{2 \cdot \ln 60 - 0,8456} = 2,71; t_d = \frac{|20 - 0|}{2,71} = 7,38.$$

Сравним расчетные значения t_s и t_d с табличным значением t -критерия Стьюдента с уровнем значимости $t_{0,05}$. Это значение равно $t_{0,05}(5-2) = t_{0,05}(3) = 3,182$. Так как $t_s = 5,958 > 3,182$ и $t_d = 7,38 > 3,182$, то гипотеза об отсутствии тенденции как в среднем текущем значении ряда, так в дисперсии отвергаются, то есть в данном временном ряду присутствует тренд и тенденции в дисперсии ряда.

Проведем сглаживание данного временного ряда методом простой скользящей средней. Интервал сглаживания возьмем равный 5.

Первые и последние 2 уровня временного ряда не сглаживаются и остаются в стороне при последующей стадии работ.

Определим наличие сезонности в исходном временном ряду. Визуально можно заметить, что исследуемому ряду присущ возрастающий тренд и повторяющиеся из года в год подъемы и спады

продаж щебня в одни и те же периоды года, то есть сезонные колебания (рис.1). Таким образом, процесс, характеризующийся этим временным рядом, относится к тренд - сезонным экономическим процессам. Для данного ряда $T_0 = 12$, $m = 5$, так что $T = m \cdot T_0 = 12 \cdot 5 = 60$.

Для фильтрации компонент исходного временного ряда воспользуемся методом Четверикова. На первом этапе сгладим исходный ряд простой скользящей средней. Вычислим отклонения $l_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{ij}$, ($i = 1, m; j = 1, T_0$) эмпирического ряда от выравниваемого и для каждого года вычислим среднеквадратическое отклонение σ_i , на которое и поделим затем отдельные месячные отклонения соответствующего года

Таблица - Значения величины σ_i :

Год	2002	2003	2004	2005	2006
σ_i	286,583	11,341	12,330	11,421	306,890

Делим отдельные значения каждого месяца на отклонения соответствующего года. В результате получаем нормированный остаточный ряд, в котором $\bar{l}_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sigma_i}$.

Предварительную среднюю сезонную волну V_j^1 умножаем на среднеквадратическое отклонение каждого года σ_i и вычитаем из исходного эмпирического ряда:

$$U^{1ij} = Y_{ij} - V_j^1 \cdot \sigma_i.$$

В результате получаем ряд U^{1ij} , лишенный предварительной сезонной волны.

Временной ряд, лишенный предварительной сезонной волны сглаживаем с использованием простой скользящей средней с интервалом сглаживания, равным пяти и получаем новую оценку тренда U^{2ij} :

Год	Месяц											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2002					718,7	706,0	701,6	696,6	713,6	750,8	763,9	768,3
2003	771,2	760,7	733,0	740,1	747,6	752,8	754,6	754,8	749,7	744,2	739,6	740,0
2004	741,3	748,1	755,7	762,5	767,9	773,1	775,6	774,6	772,6	768,1	763,3	759,5
2005	759,4	761,4	766,4	772,7	778,8	784,0	787,6	788,2	786,9	784,0	795,3	794,2
2006	791,9	790,9	795,7	776,4	768,1	752,6	748,6	744,2				

Вычисляем отклонения ряда U^2_{ij} от исходного эмпирического ряда

$$l_t^2 = Y_t - U_t^2:$$

Год	Месяц											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2003	-51,2	-38,7	1,9	-0,1	-2,6	7,2	7,4	10,2	0,3	2,8	-9,6	-14,0
2004	-6,5	1,9	-1,7	3,5	2,1	0,9	4,4	9,4	7,5	-2,1	-4,3	-11,5
2005	-6,4	-2,4	-1,4	-0,7	1,2	4,9	4,4	6,8	4,2	-0,0	-17,3	-25,2

Для первого и последнего годов вычисления не производим, так как после повторного сглаживания в них осталось по восемь наблюдений, и их использование искажает при расчетах средние характеристики всего ряда. Эти наблюдения оставим в стороне для построения экономико-математической модели исследуемого процесса и прогнозирования.

Вычисляем для каждого года (по строке) среднеквадратическое отклонение σ_i . Результаты расчетов отобразим в следующей таблице:

Год	2002	2003	2004
σ_i	19,112	5,903	9,574

Делим отдельные значения каждого месяца l_t^2 на отклонения соответствующего года. В результате получаем нормированный остаточный ряд $\overline{l^2_{ij}}$.

Год	Месяц											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2003	-2,7	-2,0	0,1	-0,0	-0,1	0,4	0,4	0,5	0,0	0,2	-0,5	-0,7
2004	-1,1	0,3	-0,3	0,6	0,4	0,2	0,7	1,6	1,3	-0,4	-0,7	-1,9
2005	-0,7	-0,5	-0,2	-0,1	0,1	0,5	0,5	0,7	0,4	-0,0	-1,8	-2,6
V_j^2	-1,5	-0,7	-0,1	0,2	0,1	0,5	0,5	0,9	0,6	-0,1	-1,0	-1,8

Производим вычисление коэффициента напряженности сезонной волны в следующем порядке: по формуле $e_{ij} = l^2_{ij} - V_j^2$ фактически получаем значения случайной компоненты:

Год	Месяц											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2003	-49,7	-38,1	2,1	-0,3	-2,7	6,8	6,9	9,3	-0,2	2,7	-8,6	-12,3
2004	-5,0	2,5	-1,6	3,3	1,9	0,6	3,8	8,4	6,9	-2,2	-3,3	-9,8
2005	-4,9	-1,7	-1,3	-0,9	1,1	4,6	3,9	5,9	3,6	-0,1	-16,3	-23,4

С использованием соотношения: $k_i = \frac{\sum_{j=1}^{T_0} l^2_{ij} \cdot e_{ij}}{\sum_{j=1}^{T_0} e^2_{ij}}$ определяем

величины коэффициента напряженности k_i каждого года, кроме первого и последнего. Значения коэффициента напряженности сезонной волны отобразим в таблице:

Год	2002	2003	2004
k_i	29,883	3,511	1,834

Используя значения коэффициента напряженности, вычисляем окончательные значения сезонной компоненты временного ряда:

$V_{ij} = V^2 j \cdot k_i$. Значения сезонной компоненты V_{ij} отобразим в таблице:

Год	Месяц											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2003	-44,3	-19,5	-3,2	5,1	3,3	10,4	15,8	28,2	17,1	-2,1	-30,3	-52,9
2004	-5,2	-2,9	-0,4	0,6	0,4	1,2	1,9	3,3	2,0	-0,3	-3,6	-6,2
2005	-2,7	-1,2	-0,2	0,3	0,2	0,6	0,9	1,7	1,1	-0,1	-1,9	-3,3

Таким образом, получили сезонную компоненту V_{ij} и теперь приступим к выбору кривой роста для построения адаптивной экономико-математической модели Хольта-Уинтерса.

Для выбора кривой роста воспользуемся универсальным методом характеристик прироста. Возьмем интервал сглаживания равный трем и сгладим исходный эмпирический ряд методом простой скользящей средней.

При этом, чтобы не потерять первый и последний уровни их сглаживают по формулам:

$$\bar{y}_1 = \frac{5 \cdot 710 + 2 \cdot 712 - 725}{6} = 708,167 \quad \bar{y}_{60} = \frac{-792 + 2 \cdot 786 + 5 \cdot 779}{6} = 779,167$$

Вычислим первые средние приросты:

Номер наблюдения, t	Исходный ряд y_t	Сглаженный ряд	Первые средние приросты \bar{u}_t
1	710	708,167	
2	712	715,667	14,167
3	725	722,333	14,333
4	730	730,000	16,000
5	735	738,333	15,667
6	750	745,667	15,667
7	752	754,000	5,000
8	760	750,667	-9,333
9	740	744,667	-17,333
10	734	733,333	-19,667
...
58	792	792,000	-12,667
59	786	785,667	-12,833
60	776	779,167	

Отообразим на рис.2 характер изменения показателя \bar{u}_t во времени:

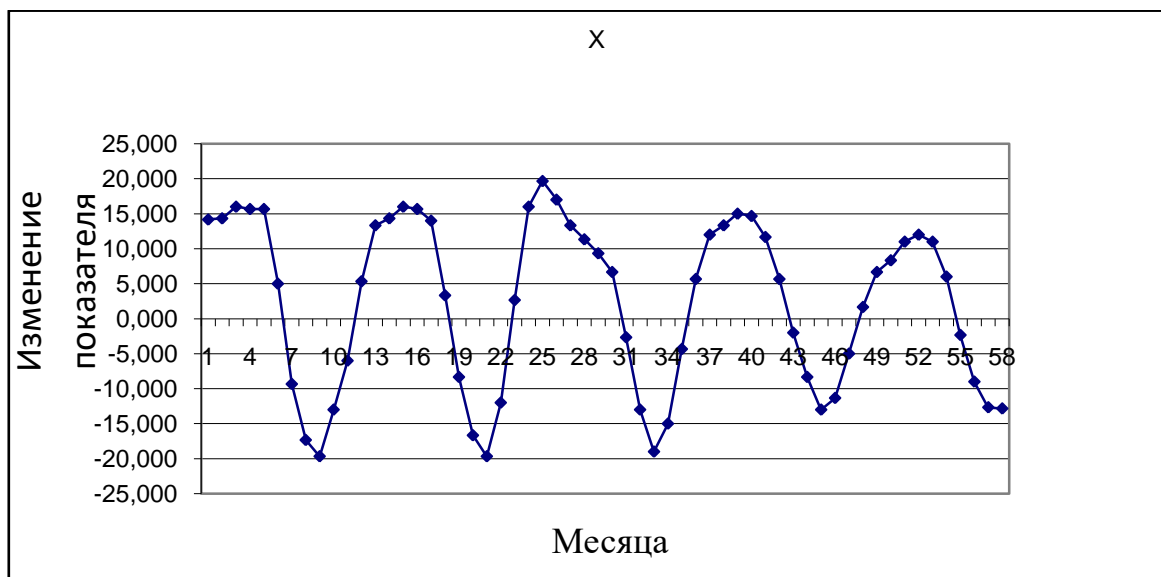


Рисунок 2 - Характер изменения показателя во времени

Как видно из рис. 2, первый средний прирост изменяется примерно одинаково в одинаковые промежутки времени. Это означает, что нужно выбрать в качестве кривой роста полином первого порядка.

Построим аддитивную модели Хольта-Уинтерса, которая имеет вид: $y_\tau(t) = a_{1,t} + a_{2,t} \cdot \tau + g_{t-s+\tau}$, а модификация параметров производится по соотношениям:

$$\begin{aligned} a_{1,t} &= \alpha_1 \cdot (y_t - g_{t-s}) + (1 - \alpha_1) \cdot (a_{1,t-1} + a_{2,t-1}) \\ a_{2,t} &= \alpha_3 \cdot (a_{1,t} - a_{1,t-1}) + (1 - \alpha_3) \cdot a_{2,t-1} \end{aligned}$$

где g - фактор сезонности; s - период сезонного цикла.

Модель Хольта-Уинтерса является адаптивной моделью прогнозирования, поэтому ее будем строить по нескольким первым наблюдениям. Возьмем первые пять наблюдений. Начальные параметры модели оценим при помощи метода наименьших квадратов. Для упрощения расчетов воспользуемся центрированием переменных относительно их среднего значения. Решением системы:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum t = \sum y_t \\ a_0 \cdot \sum t + a_1 \cdot \sum t^2 = \sum y_t \cdot t \end{cases}$$

будут являться значения, вычисляемые по формулам:

$$a_1 = \frac{\sum (y_t - \bar{y}) \cdot (t - \bar{t})}{\sum (t - \bar{t})^2}; \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{t},$$

где $\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n}$, $\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^n t}{n}$ - выборочные средние.

Результаты расчетов отобразим в таблице:

Номер наблюдения, t	Исходный ряд y_t	$t - t_{cp}$	$(t - t_{cp})^2$	$(t - t_{cp})(y_t - y_{cp})$
1	710	-2	4	24,8
2	712	-1	1	10,4
3	725	0	0	0
4	730	1	1	7,6
5	735	2	4	25,2
Σ 15		0	10	68
Среднее	722,4			

Вычислим коэффициенты $a_1 = \frac{68}{10} = 6,8$; $a_0 = 722,4 - 6,8 \cdot 3 = 702$.

Получаем линейную модель $y_p(t) = 702 + 6,8t$. Осуществим корректировку параметров модели, которая производится при помощи рекуррентных выражений:

$$\begin{aligned} a_{1,t} &= \alpha_1 \cdot (y_t - g_{t-s}) + (1 - \alpha_1) \cdot (a_{1,t-1} + a_{2,t-1}) \\ a_{2,t} &= \alpha_3 \cdot (a_{1,t} - a_{1,t-1}) + (1 - \alpha_3) \cdot a_{2,t-1} \end{aligned}$$

Возьмем $a_0 = a_{1,t}$ и $a_1 = a_{2,t}$; параметры сглаживания возьмем равными $\alpha_1 = 0,3$ и $\alpha_2 = 0,4$. и отобразим расчет параметров модели Хольта - Уинтерса на всех 60-ти шагах. На последнем шаге получена адаптивная модель Хольта - Уинтерса: $y_p(60) = 791,965 - 2,313 \cdot \tau$.

Сезонная компонента в построенной на последнем шаге модели отсутствует, так как при сглаживании последние 12 компонент временного ряда не подвергались сглаживанию и остались без изменения, в них сезонную компоненту мы не выделяли.

Адекватность модели оценим на основе остаточной компоненты с помощью четырех проверок: проверки равенства математического ожидания случайной компоненты нулю, проверки соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения, проверки независимости значений уровней остаточной последовательности и проверки случайности колебаний уровней остаточной последовательности.

Проверку случайности колебаний уровней остаточной последовательности произведем на основе критерия серий. Расположим ряд из остатков $e(t)$ в порядке возрастания их значений и найдем медиану

$$e(m): e(m) = \frac{0,68 + 1,2}{2} = 0,94.$$

Будем ставить знак плюс, если значения исходной последовательности превосходят медиану и знак минус, в противном случае; в случае равенства сравниваемых величин соответствующее значение $e(t)$ будем опускать.

Для наглядности изобразим на рис.3 график остаточной последовательности.

Как видно из рис.3 остаточная последовательность имеет случайный характер.



Рисунок 3 - Остаточная последовательность

Общее число серий равно: $v = 18$; протяженность самой длинной серии $K_{max} = 8$.

Проверим выполнение неравенства:
 $K_{max} = 8 < [3,3 \cdot (\lg 60 + 1)] = 16$

Это означает, что гипотеза о случайности колебаний уровней остаточной последовательности принимается.

Проверку равенства математического ожидания случайной компоненты нулю выполним при помощи t -критерия Стьюдента.

Вычислим стандартное среднеквадратическое отклонение для остаточной последовательности:

$$S_e = \sqrt{\frac{36857,96}{60 - 2}} = 25,209.$$

Найдем расчетное значение критерия Стьюдента:

$$t = \frac{2,059}{25,209} \cdot \sqrt{60} = 0,633.$$

Сравним полученное значение со значением статистики Стьюдента с 59 степенями свободы, то есть $t_{0,05}(59) = 2$. Заметим, что расчетное значение критерия Стьюдента меньше табличного, это означает, что гипотеза о случайности колебаний уровней остаточной последовательности принимается.

Проверку независимости уровней остаточной последовательности проведем при помощи критерия Дарбина - Уотсона. Вычислим коэффициент DW : $DW = \frac{36857,96}{23765,444} = 1,551$.

Заметим, что полученное значение находится в интервале (1,49;2). Это означает, что гипотеза о независимости уровней остаточной последовательности принимается.

Проверку соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения выполним на основе асимметрии и эксцесса. Вычислим выборочные характеристики асимметрии и эксцесса и их ошибки:

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{60} \cdot 156925,472}{9352980} = 0,0003; \quad \sigma_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{6 \cdot (60 - 2)}{(60 + 1) \cdot (60 + 3)}} = 0,3;$$

$$\gamma_2 = 3,368 - 3 = 0,368; \quad \sigma_{\gamma_2} = \sqrt{\frac{24 \cdot 60 \cdot (60 - 2) \cdot (60 - 3)}{(60 + 1)^2 \cdot (60 + 3) \cdot (60 + 5)}} = 0,559.$$

Проверим выполнение неравенств:

$$|0,0003| < 1,5 \cdot 0,3 = 0,45; \quad |0,368 + \frac{6}{60 + 1}| = 0,466 < 1,5 \cdot 0,559 = 0,839.$$

Неравенства выполняются, это означает, что гипотеза о соответствии случайной компоненты нормальному закону распределения принимается.

Так как все четыре условия выполняются, то построенную модель признаем адекватной исследуемому процессу.

Точность модели оценим на основе средней относительной ошибки аппроксимации, которая рассчитывается по формуле:

$$\bar{e}_{отн} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \left| \frac{y(t) - y_p(t)}{y(t)} \right| \cdot 100\%$$

Таким образом, $\bar{e}_{отн} = \frac{1}{60} \cdot 0,161 \cdot 100\% = 0,27\% < 5\%$ Это

означает, что построенная модель точная.

Построим точечный интервальный прогнозы продаж вагонов с щебнем на 15 шагов вперед на основе модели Хольта - Уинтерса и рассчитаем прогнозируемый доход от объема продаж щебня. Точечные прогнозы получаются путем подстановки в модель:

$$y_p(60) = 791,965 - 2,313 \cdot \tau \text{ значений } \tau = 1, 2, 3, \dots, 15.$$

$$y_p(60 + 1) = y_p(61) = 791,965 - 2,313 \cdot 1 = 789,652$$

$$y_p(60 + 2) = y_p(62) = 791,965 - 2,313 \cdot 2 = 787,339$$

$$y_p(60 + 3) = y_p(63) = 791,965 - 2,313 \cdot 3 = 785,026$$

$$y_p(60 + 4) = y_p(64) = 791,965 - 2,313 \cdot 4 = 782,713$$

$$y_p(60 + 5) = y_p(65) = 791,965 - 2,313 \cdot 5 = 780,4$$

$$y_p(60 + 6) = y_p(66) = 791,965 - 2,313 \cdot 6 = 778,087$$

$$y_p(60 + 7) = y_p(67) = 791,965 - 2,313 \cdot 7 = 775,774$$

$$y_p(60 + 8) = y_p(68) = 791,965 - 2,313 \cdot 8 = 773,461$$

$$y_p(60 + 9) = y_p(69) = 791,965 - 2,313 \cdot 9 = 771,148$$

$$y_p(60 + 10) = y_p(70) = 791,965 - 2,313 \cdot 10 = 768,835$$

$$y_p(60 + 11) = y_p(71) = 791,965 - 2,313 \cdot 11 = 766,522$$

$$y_p(60 + 12) = y_p(72) = 791,965 - 2,313 \cdot 12 = 764,209$$

$$y_p(60 + 13) = y_p(73) = 791,965 - 2,313 \cdot 13 = 761,896$$

$$y_p(60 + 14) = y_p(74) = 791,965 - 2,313 \cdot 14 = 759,583$$

$$y_p(60 + 15) = y_p(75) = 791,965 - 2,313 \cdot 15 = 757,27$$

Вычислим стандартное среднеквадратическое отклонение от линии тренда:

$$S_e = \sqrt{\frac{36857,956}{60 - 2}} = 25,209.$$

Доверительный интервал прогноза будет иметь следующие границы:

$$U(1) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 1 - 30,5)^2}{17995}} = 27,364$$

$$U(2) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 2 - 30,5)^2}{17995}} = 27,408$$

$$U(3) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 3 - 30,5)^2}{17995}} = 27,453$$

$$U(4) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 4 - 30,5)^2}{17995}} = 27,5$$

$$U(5) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 5 - 30,5)^2}{17995}} = 27,548$$

$$U(6) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 6 - 30,5)^2}{17995}} = 27,597$$

$$U(7) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 7 - 30,5)^2}{17995}} = 27,648$$

$$U(8) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 8 - 30,5)^2}{17995}} = 27,7$$

$$U(9) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 9 - 30,5)^2}{17995}} = 27,753$$

$$U(10) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 10 - 30,5)^2}{17995}} = 27,808$$

$$U(11) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 11 - 30,5)^2}{17995}} = 27,864$$

$$U(12) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 12 - 30,5)^2}{17995}} = 27,921$$

$$U(13) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 13 - 30,5)^2}{17995}} = 27,98$$

$$U(14) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 14 - 30,5)^2}{17995}} = 28,04$$

$$U(15) = 1,05 \cdot 25,209 \cdot \sqrt{1 + 0,017 + \frac{(60 + 15 - 30,5)^2}{17995}} = 28,101$$

В таблице приведем результаты прогнозных оценок по модели Хольта- Уинтерса:

Время, t	Шаг, τ	Прогноз, y_t	Нижняя граница	Верхняя граница
61	1	789,652	762,288	817,016
62	2	787,339	759,931	814,747
63	3	785,026	757,573	812,479
64	4	782,713	755,213	810,213
65	5	780,4	752,852	807,948
66	6	778,087	750,490	805,684
67	7	775,774	748,126	803,422
68	8	773,461	745,761	801,161
69	9	771,148	743,395	798,901
70	10	768,835	741,027	796,643
71	11	766,522	738,658	794,386
72	12	764,209	736,288	792,130
73	13	761,896	733,916	789,876
74	14	759,583	731,543	787,623
75	15	757,27	729,169	785,371

Рассчитаем прогноз дохода от продаж щебня на 15 месяцев следующим образом: 1 вагон имеет грузоподъемность 60 тонн, 1 тонна щебня стоит 1500 ден.ед. Рассчитаем, какой доход будет иметь предприятие в течение следующих 15-ти месяцев. Результаты расчетов отобразим в следующей таблице:

Номер наблюдения, t	Месяц	Доход от продаж щебня (млн. ден.ед)
61	1	71,069
62	2	70,861
63	3	70,652
64	4	70,444
65	5	70,236
66	6	70,028
67	7	69,820
68	8	69,611
69	9	69,403
70	10	69,195
71	11	68,987
72	12	68,779
73	13	68,571
74	14	68,362
75	15	68,154

Отообразим верхние и нижние границы прогноза дохода от продаж на 15 месяцев в следующей таблице:

Номер наблюдения, t	Месяц	Верхняя граница прогноза дохода (млн. ден.ед)	Нижняя граница прогноза (млн. ден.ед.)
61	1	73,531	68,606
62	2	73,327	68,394
63	3	73,123	68,182
64	4	72,919	67,969
65	5	72,715	67,757
66	6	72,512	67,544
67	7	72,308	67,331
68	8	72,104	67,118
69	9	71,901	66,906
70	10	71,698	66,692
71	11	71,495	66,479
72	12	71,292	66,266
73	13	71,089	66,052
74	14	70,886	65,839
75	15	70,683	65,625

Результаты аппроксимации и прогнозирования объема продаж щебня на основе модели: $y_p(60) = 791,965 - 2,313 \cdot \tau$. Предприятие получит

доход от объема продаж щебня (в млн. ден.ед), входящий в интервал:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1-й месяц (73,531; 68,606); | 2-й месяц (73,327; 68,394); |
| 3-й месяц (73,123; 68,182); | 4-й месяц (72,919; 67,969); |
| 5-й месяц (72,715; 67,757); | 6-й месяц (72,512; 67,544); |
| 7-й месяц (72,308; 67,331); | 8-й месяц (72,104; 67,118); |
| 9-й месяц (71,901; 66,906); | 10-й месяц (71,698; 66,692); |
| 11-й месяц (71,495; 66,479); | 12-й месяц (71,292; 66,266); |
| 13-й месяц (71,089; 66,052); | 14-й месяц (70,866; 65,839); |
| 15-й месяц (70,683; 65,625). | |

Отообразим на рисунке фактические данные, представленные временным рядом, результаты аппроксимации и прогнозирования объема продаж щебня на основе модели: $y_p(60) = 791,965 - 2,313 \cdot \tau$.

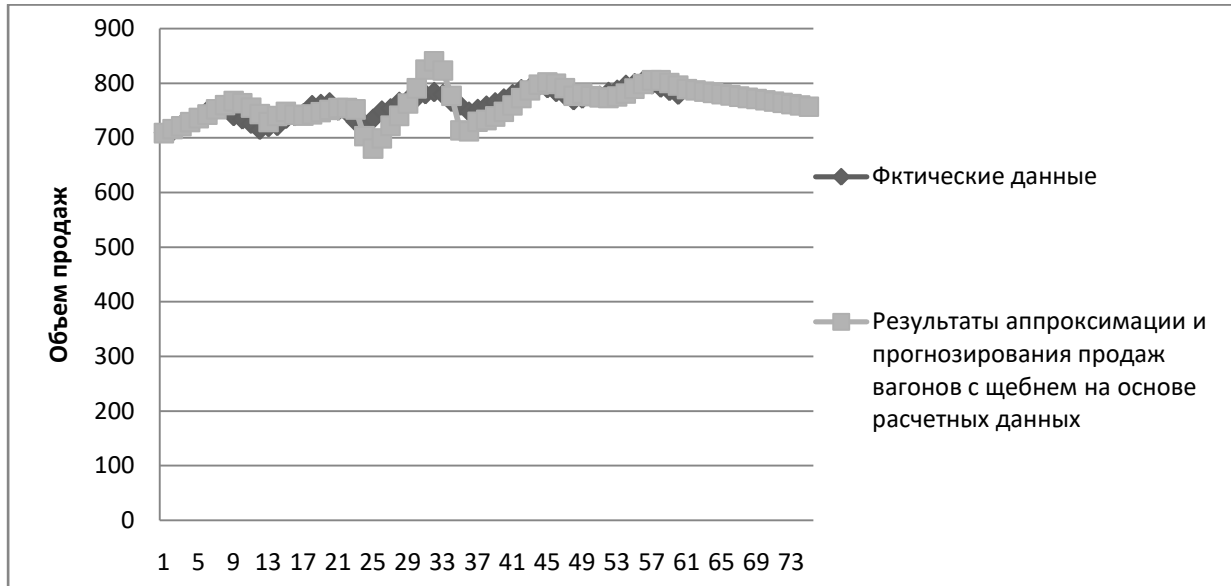


Рисунок 4 - Фактические данные, результаты аппроксимации и прогнозирования объема продаж щебня на основе расчетных данных.

Таким образом, построенную модель можно использовать в практических целях для принятия оптимальных решений по повышению эффективности функционирования различных предприятия [20,33].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование показало, что экономико-математическое исследование на основе моделей временных рядов состоит в модельном описании конкретных количественных взаимосвязей, обусловленных общими качественными закономерностями, в формировании знаний и навыков анализа, необходимых в исследовании различных процессов в области экономики, бизнеса, образования, социологии и др. [12,25]; в получении знаний по экономико-математическому моделированию и методам, необходимым для проверки предлагаемых и выявленных новых эмпирических зависимостей; в построении надежного прогноза в результате научно – исследовательских и др. работ [33]; в овладении практическими навыками в построении адаптивных и др. моделей при изучении экономических явлений и процессов, с использованием компьютерных технологий.

В монографии показано использование экономико-математических, адаптивных моделей в прогнозировании социально-экономических процессов в обществе. Приведены исследования на протяжении нескольких лет. Представлена методология применения адаптивных, трендовых моделей прогнозирования для анализа и прогнозирования. Рассмотрено применение этих моделей в процессе моделирования.

Особое внимание в работе уделено адаптивным методам анализа и прогнозирования. Практическая значимость адаптивных методов прогнозирования характеризуется тем, что, во-первых, в результате прогнозирования уменьшается риск принятия неверных, необоснованных и субъективных решений. Во-вторых, учет нежелательных тенденций, выявленных при прогнозировании, позволяет принять необходимые меры для их предупреждения, тем самым помешать осуществлению прогноза.

Выводы, содержащиеся в исследовании, могут быть использованы руководителями предприятий в принятии эффективных управленческих решений. На основе адекватной, точной модели они могут делать прогноз на будущее и определять значения факторов, которые можно изменять, имитируя различные сценарии социально - экономического развития анализируемого показателя [25].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. - М.: ЮНИТИ, 2010. - 656 с.
2. Айвазян, С.А. Программное обеспечение персональных ЭВМ по статистическому анализу данных // Компьютер и экономика: экономические проблемы компьютеризации общества. - М.:, 2005. - С. 91-107.
3. Афанасьев, В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование: учебник для вузов / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 228 с.
4. Балдин, К. В. Математические методы и модели в экономике. учебник / К. В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рокосуев. - М.: Флинта, 2011. - 328 с.
5. Белько, И.В. Эконометрика: практикум: учебное пособие / И.В. Белько, Е.А. Криштапович. - М.: Издательство Гревцова, 2011. - 224 с.
6. Берг Н.А. Построение прогнозной функции социально-экономической деятельности городов – миллионеров России / Н.А. Берг // Вестник Уральского института экономики, управления и права. – Челябинск. -2016. - № 1(34). – С. 11-14.
7. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учебное пособие / Е. В. Бережная, В.И. Бережной. - М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с.
8. Бородич, С. А. Эконометрика: практикум : учебное пособие : учебное пособие / С.А. Бородич. - М.: Инфра - М, 2016. - 336 с.
9. Булдык, Г.М. Статистическое моделирование и

прогнозирование: учебник / Г.М. Булдык. - Минск: НО ООО «БИП - С», - 2013.- 562 с.

10. Вуколов, Э.А. Основы статистического анализа: практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов Statistica и Excel / Э.А. Вуколов. - М.: ИНФРА - М, 2004. - 464 с.

11. Гладилин, А.В. Практикум по эконометрике: учебное пособие / А.В. Гладилин, А.Н. Герасимов, Е.И. Громов. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2011. - 336 с.

12. Гордеева, Д.С. Экономика образования: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева, Д.А. Гордеева. - Челябинск: «Цицеро», 2017. - 101 с.

13. Давнис, В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах /В.В Давнис, В.И. Тинякова. - Воронеж: Изд-во Воронеж.гос. ун-та, 2006.– 380 с.

14. Дайитбегов, Д. М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике / Д.М. Дайитбегов, М.: ИНФРА , 2008. - 578 с.

15. Дегтярева Н.А. Анализ социально-экономического развития регионов РФ на основе исследования уровня жизни населения / Н.А. Дегтярева, Д.С. Гордеева, Д.Н. Корнеев, И.И. Плужникова // Азимут научных исследований. Серия: Экономика и управление.

16. Дегтярева Н.А. Принятие эффективных управленческих решений на основе эконометрического прогнозирования. / Н.А. Дегтярева, Н.А. Берг// Вестник Челябинского государственного университета. Серия: «Экономические науки». - № 4 (414) 2018. вып. 61. – С. 176-183.

17. Дегтярева, Н.А. Использование информационных технологий в управлении / Н.А. Дегтярева, И.Д. Колмакова // Вестник факультета управления Челябинского государственного университета. Серия: «Управление». - 2016. - № 1. - С. 99 - 101.

18. Дегтярева, Н.А. Исследование зависимости количества безработных от социально-экономических факторов на основе модели множественной регрессии // *Фундаментальная и прикладная наука.* – Челябинск : Из-во Челяб. гос. пед. ун-та. - 2016. - № 2. - С. 13-16.

19. Дегтярева, Н.А. Модели принятия управленческих решений в сфере информатизации муниципальных образовательных учреждений / Н.А. Дегтярева, Е.М. Колмакова, И.Д. Колмакова, // *Вестник Челябинского государственного университета. Серия: «Экономические науки».* - № 5 (401) 2017. вып. 57. – С. 15-23.

20. Дегтярева, Н.А. Повышение экономической эффективности функционирования крестьянских (фермерских) хозяйств в условиях рынка: диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук / Дегтярева Н.А.; Челябинская государственная агроинженерная академия. - Челябинск, 2000. - 218 с.

21. Дегтярева, Н.А. Применение статистических методов исследования в сельском хозяйстве / Н.А. Дегтярева, Н.А.Берг // *Известия высших учебных заведений. Уральский регион.* – 2017. - № 1. – С.42-47.

22. Дегтярева, Н.А. Применение экономико-математических моделей для принятия управленческих решений / Н.А. Дегтярева // В сборнике: *Конкурентоспособность и развитие социально-экономических систем* Материалы Всероссийской научной конференции памяти академика А. И. Татаркина. Под ред. В. И. Бархатова, Д. А. Плетнёва. 2017. - С. 62-64.

23. Дегтярева, Н.А. Сборник задач по статистике: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Цицеро, 2017. - 90 с.

24. Дегтярева, Н.А. Сборник задач по экономико-математическим методам и моделям: учебное пособие для студентов /

Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Цицеро, 2017. - 77 с.

25. Дегтярева, Н.А. Эконометрические модели анализа и прогнозирования: монография / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Цицеро, 2017. - 170 с.

26. Дубина, И.Н. Математико-статистические методы в эмпирических социально-экономических исследованиях / И.Н. Дубина. - М.: Финансы и статистика, Инфра, 2010. - 416 с.

27. Дубров, А.М. Последовательный анализ в статистической обработке информации / А.М. Дубров. - М.: Статистика, 2004. - 160 с.

28. Дуброва, Т. А. Статистические методы прогнозирования: учебное пособие для вузов / Т. А. Дуброва. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 206 с.

29. Елисеева, И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др., под ред. И.И. Елисеевой - 2-е изд., перераб и доп. - М.: Финансы и статистика, 2009. - 576 с.

30. Елисеева, И. И. Статистика: учебник для бакалавров / И. И. Елисеева и др. - Москва: Юрайт, 2011. - 565 с.

31. Зеленина, Л.И. Адаптивные модели прогнозирования /Л.И.Зеленина, Я.В. Олар // Современные научные исследования и инновации. - 2015. - № 3.

32. Колмакова, И.Д. К вопросу о применении эконометрических методов исследования в социальных процессах / И.Д.Колмакова, Н.А. Дегтярева, Е.М. Колмакова // Вестник Челябинского государственного университета. Серия: «Экономика». - 2016. вып. 55. - С. 51-57.

33. Kolmakova, E. Effective Management Predictions on the Basis of the Regression Model / Kolmakova Ekaterina, Degtyareva Nina, Kolmakova Irina // *INSIGHTS AND POTENTIAL SOURCES OF NEW ENTREPRENEURIAL GROWTH: Proceedings of the International Roundtable*

on Entrepreneurship 4 december 2016, BELGRADE, SERBIA. - Filodiritto Publishe. - First Edition Vol. IV, No. 1, 2017. -pp.146 – 156.

34. Корхин, А.С. Многошаговые адаптивные алгоритмы идентификации экономических систем по временным рядам / А.С. Корхин // Методологические проблемы анализа и прогноза краткосрочных процессов. М.: Наука, 1979.

35. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник для студентов вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - М. : Издательство: Юрайт, Серия: Бакалавр. Базовый курс, 2013. - 544 с.

36. Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учебное пособие для студ. вузов, обучающихся по экон. спец. / Ю.П. Лукашин. - М.: Финансы и статистика, 2003. –413 с.

37. Методы прогнозирования. Метод Хольта [Электронный ресурс] / <http://ilogist.com.ua/oprognozah/60-metodholt.html>

38. Мхитарян, С.В. Прогнозирование продаж с помощью адаптивных статистических методов / С.В. Мхитарян, Л.А. Данченко // Фундаментальные исследования. - 2014. – № 94. - С. 818-822.

39. Наследов, А.Д. SPSS 15: профессиональный статистический анализ данных. - СПб.: Питер, 2008. - 416 с.

40. Орлов, А.И. Эконометрика: учебник для вузов / А.И. Орлов. - 3-е изд., перераб. и доп.- М.: Издательство «Экзамен», 2004. - 576 с.

41. Практикум по эконометрике: учебное пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др.; под ред. И.И. Елисеевой. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2007. - 344 с.

42. Социальная статистика: учебник / под ред. чл.-корр. РАН И. И. Елисеевой. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 416 с.

43. Тимофеев, В. С. Эконометрика : учебник для академического бакалавриата для студентов вузов, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям / В. С. Тимофеев, А. В. Фадеев, В. Ю. Щеколдин; Новосиб. гос. техн. ун-т. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2015. - 328 с.

44. Тинякова, В.И. Адаптивные процедуры обработки, анализа и прогнозирования данных в интернет-маркетинге // Электронный бизнес: опыт и перспективы / Материалы межрегиональной научно-практической конференции. — Воронеж, ВГУ, тип. эконом, ф-та, 2002. - С. 32-38.

45. Тинякова, В.И. Модели адаптивно-рационального прогнозирования экономических процессов – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2008. – 266 с.

46. Тихомиров, И.П. Методы эконометрики и многомерного статистического анализа / И.П. Тихомиров, Т.М. Тихомиров, О.С. Урмаев. - М.: Экономика, 2011. - 640 с.

47. Тихонов, Э.Е. Методы прогнозирования в условиях рынка: учебное пособие / Э. Е. Тихонов. – Невинномысск, 2006. – 221 с.

48. Федосеев, В. В. Математическое моделирование в экономике и социологии труда. Методы, модели, задачи. Учебное пособие / В. В. Федосеев. - М. : Юнити-Дана, 2011. - 168 с.

49. Шапкин А.С., Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. – 2-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2005. – 400 с.

50. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2000. – 367 с.

51. Шелобаев, С.И. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие для вузов / С.И. Шелобаев.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 367 с.

52. Эконометрика: учебник / В. С. Мхитарян, М. Ю. Архипова, В. А. Балаш, О. С. Балаш, Т. А. Дуброва, В. С. Сиротин. - М.: Проспект, 2010. - 384 с.

53. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие / В.В. Федосеев и др. - М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2012. - 304 с.

Научное издание

Нина Адамовна Дегтярева

**МОДЕЛИ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

Монография

Издательство ЗАО «Библиотека А.Миллера

454091, г. Челябинск, ул. Свободы, 159

Подписано к печати 11.11.2018

Формат 60x84 1/16 Объем 10,0 уч-изд.л.

Заказ № 537 Тираж 500 экз

Отпечатано на ризографе в типографии ФГБОУ ВО ЮУрГГПУ

454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69