МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности изучения элементов теории вероятностей и математической статистики в средней школе

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05
Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»

Форма обучения очная (дневная)

Проверка на объем заимствований:
74 % авторского текста
Работа рекомендован к защите
рекомендована,/не рекомендована
« 25 » мая 2020 г.
И. о. зав. кафедрой МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/204-5-1
Зорина Милена Олеговна

Научный руководитель:
доцент, кандидат физ.-мат. наук
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Необходимость во введении вероятностно-статистической линии в школьный курс математики очевидна. Речь о потребности изучения компонентов статистики и теории вероятностей обсуждается продолжительное время. Поскольку их понимание особенно необходимо в нашем информированном обществе.

В начале введения вероятностно-статистической линии в школьную программу встречались некоторые проблемы, одна из них, отсутствие общей методики преподавания.

Но за последние несколько лет произошли позитивные изменения в применении стохастической линии в рамках школьного образования. Соответствующий порядок содержания включен в утвержденный стандарт для базового и полного среднего образования.

В настоящее время концепция школьного образования нацелена на рассмотрение особенностей ученика, его заинтересованностей и предрасположенностей. Этот фактор вызвал сдвиг в требованиях учащихся к математическому образованию, возникла потребность ввода интерактивных методов обучения. Среди учащихся стала задача в развитии вероятностной интуиции и статистического мышления.

Федеральные Государственные Образовательные Стандарты среднего общего образования ориентированы на становление личностных характеристик выпускника, владеющего математическими рассуждениями, умениями решать задачи; применяющего математические знания в обиходе. Изучение учащимися алгебры, согласно ФГОС, должно отображать [18]:

1. Формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях.

2. Развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах и графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений.

3. Развитие представлений о вероятностно-статистических закономерностях в окружающем мире, развития логического мышления.

В теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики» есть задания, которые входят в итоговую аттестацию учащихся основной школы. В демонстрационных вариантах ЕГЭ 2020 года задания на проверку знаний элементов теории вероятностей могут встретиться под номером 10 для базового уровня и под номером 4 для профильного уровня, а также под номером 10 в варианте ОГЭ для 9 класса.

Труды и исследования знаменитых авторов в области математики: Е. А. Бунимовича [3], Ю. Н. Тюрина [17], И. Р. Высоцкого [5], И. В. Ященко [20], М. В. Ткачевой [16], С. В. Щербатых [19], посвящены методическим вопросам, связанных с обучением учащихся теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики» в курсе алгебры основной школы.

Всё вышеперечисленное является основой тематической актуальности.

Объект исследования. Процесс обучения математики в средней школе.

Предмет исследования. Методика преподавания элементов теории вероятностей и математической статистики в средней школе.

Гипотеза исследования. Проведение курса по выбору «Элементы теории вероятностей и математической статистики», с методической онлайн поддержкой, будет способствовать эффективному формированию умений решать задачи по теории вероятностей и математической статистике.

Цель работы. Изучить методику обучения элементам теории вероятностей и математической статистики в средней школе и содержательно представить курс по выбору «Элементы теории вероятностей и математической статистики» для обучающихся 10 класса.

Задачи исследовательской работы:

1. Рассмотреть исторические аспекты введения стохастической линии в школьный курс математики.
2. Проанализировать вопросы, изучающиеся в курсе математики по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики».
3. Изучить возрастные особенности при изучении данной темы в 10-11 классах.
4. Выполнить анализ учебной литературы, посвященной введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики.
5. Осуществить анализ материалов ЕГЭ и ОГЭ по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики».
6. Разработать курс по выбору для темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики».
7. В качестве программно-методической поддержки курса по выбору для темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» разработать онлайн-курс.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный цифровой образовательный ресурс для поддержки темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» может быть использована в практической деятельности учителей 10 классов.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 История введения вероятностной линии в школьный курс математики

С первой половины XIX века в России было предпринято несколько попыток ввести элементы теории вероятностей в школьный курс математики. Элементы стохастики периодически вводились на короткое время в школьный курс математики. Также были учебники, содержащие элементы теории вероятностей и статистики. В Санкт-Петербурге в 1846 году вышло первое в России учебное пособие по теории вероятностей «Основы математической теории вероятностей» В. Я. Буняковский [4]. В 1902 году для средних школ была издана программа теории вероятностей, составленная П. С. Фроловым, а в 1907 г. разработанная Брандтом.

Попытки ввести элементы статистики и теории вероятностей в школьную математику были предприняты в России после революции 1917 года, была создана единая трудовая школа с тремя ступенями образования, объединенных единой программой. Третий этап предполагалось разделить на три направления: гуманитарное, естественно-математическое и техническое [5]. В программе по техническому направлению были разделы основ теории вероятностей, в двух других областях тоже изучались основы теории вероятностей, но больше внимания уделялось статистической обработке данных.

К 1925 г. элементы теории вероятностей были включены в качестве эксперимента для школ второго этапа в учебник «Арифметика», но позднее, в течение длительного периода, в общеобразовательных школах изучались только элементы комбинаторики.

Попытка ввести элементы теории вероятностей в период реформ 60-

70 годов на формальном логическом уровне, также не увенчался успехом. Материал оказался трудным для восприятия учащимися, метод представления материала не был разработан и не способствовал развитию логического мышления, в том числе, и вероятностной интуиции учащихся.

Вследствие реформ школьного образования элементы теории вероятностей и статистики были включены в программы профильных классов в 80-е годы.

В 1990-х годах реализовывается внедрение элементов теории вероятностей в обязательный курс школьной математики и первые попытки ввести элементы вероятности в учебники для средней школы. Первый учебник, который целиком посвятили теории вероятностей, создали: Е. А. Бунимович и В. А. Булычев [3]. Однако изложение вероятностного и статистического материала в них не носило систематического характера.

Наконец в 2003 году было утверждено решение, чтобы включить элементы теории вероятностей и статистики в школьный курс математики средней школы. Документ, принятый Министерством образования в 2003 году предусматривал постепенное, поэтапное включение этих разделов в школьные курсы, позволяя педагогическому сообществу подготовиться к соответствующим изменениям [18, с. 65].

В 2007 году теория вероятностей стала незаменимым элементом в школах. В соответствии с государственными стандартами общего образования первого поколения с 2010 года задачи стохастической линейки включены в контрольно-измерительные материалы по математике.

В 2015 году решением Федерального учебно-методического объединения по общему образованию принята «Примерная основная образовательная программа основного общего образования» [15].

Теория вероятностей заняла очень важное место в научной и прикладной деятельности. Сегодня трудно предположить, что продуктивная деятельность людей невозможна в любой сфере общества без достаточно развитого понимания случайных событий и их вероятностей, без правильного понимания того, что явления и процессы, с которыми мы часто имеем дело, подчинены сложным законам теории вероятностей.

1.2 Вопросы, изучающиеся в базовом курсе математике по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Теория вероятностей – это раздел математики, который занимается изучением закономерностей случайных событий [7].

В результате поиска ответа на вопрос: «как часто происходит то или иное событие в большой серии тестов, которые происходят в одинаковых условиях со случайными исходами?», возникают истоки теории вероятностей.

Основные определения.

В теории вероятностей основными понятиями являются испытания и события. **Событие** – это любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Под событием понимают определенный набор условий, при которых наблюдается то или иное явление, тот или иной результат фиксируется [6].

При анализе случайного события нас в первую очередь интересует, как часто событие может происходить или не происходить в результате опыта. Для этого вводится особая характеристика – **вероятность события**.

Вероятность события – это числовая мера степени объективной вероятности события, произошедшего в результате нового опыта.

В теории вероятностей принято обозначать события прописными латинскими буквами A, B и т. д., а вероятности событий – соответственно $P(A)$, $P(B)$ и т.д.

Вероятность любого события (обозначим его A) лежит в диапазоне от нуля до единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$. Последнее соотношение часто называют **шкалой вероятностей**.

Существует три типа событий: достоверное, невозможное и случайное. Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно произойдет. Обозначение достоверного события: U. Вероятность достоверного события принимается равной единице:

$$P(U) = 1.$$

Событие называется **невозможным**, если в результате испытания оно никогда не произойдет. Обозначение: I (impossible) или $\emptyset$. Вероятность невозможного события принимается равной нулю:

$$P(\emptyset) = 0.$$

Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может произойти, а может и не произойти. Вероятность случайного события (обозначим его A) больше нуля и меньше единицы: $0 < P(A) < 1$. Обычно случайные события обозначают латинскими буквами: A, B, C и т.д. [6].

Определение. Несколько событий в эксперименте называются **равновозможными**, если нет основания, считать появление любого из них более предпочтительным по сравнению с любым другим.

Равновозможные события имеют равную степень объективной возможности произойти в результате опыта [13].

Определение. Полной группой событий называются несколько попарно несовместных событий таких, что в результате опыта одно из них непременно должно произойти.

Определение. Если исходы опыта образуют полную группу несовместных равновозможных событий, то они называются **случаями**.

Определение. Случай называется благоприятствующим событию, если его появление влечет за собой появление события.

Классическое определение вероятности. Отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания называют вероятностью события A при проведении некоторого испытания. Если $\boldsymbol{m}$ – количество случаев, которые благоприятствуют событию A, а $\boldsymbol{n}$ – общее количество случаев в данном опыте, то вероятность события A [12]. Вероятность события вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

События, появление одного из которых не исключает возможность появления другого, называются **совместными** событиями.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B).$$

События, появление одного из которых исключает возможность появления другого, называются **несовместными** событиями. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

События, появление одного из которых влияет на появление другого события, называются **зависимыми** событиями.

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого:

$$P(A \times B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \times P\left(\frac{A}{B}\right).$$

События, появление одного из которых не влияет на появление другого события, называются **независимыми** событиями.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B).$$

Событие, являющееся обратным по отношению к какому-либо событию, называется **противоположным** событием.

Вероятность противоположного события равна единице, минус вероятность этого события.

Статистика – раздел математики, посвящённый математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Математическая статистика – раздел математики, изучающий математические методы обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов [2].

Основными статистическими характеристиками являются среднее арифметическое, мода, размах, медиана.

Для обозначения **среднего арифметического** набора чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ следует использовать $\bar{x}$. Это соответствует общепринятой мировой практике. Записывать среднее арифметическое при вычислении лучше в виде дроби:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

где

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n -$ индивидуальные значения признака (варианты),

$n -$ число единиц совокупности (вариант).

Модой обычно называется число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто [7]. **Мода** – это величина признака (варианта), наиболее часто повторяющаяся в изучаемой совокупности.

Под **размахом** набора чисел понимается разность между самым большим и самым маленьким числом в этом наборе:

$$R = X_{max} - X_{min}.$$

Медиана ряда, состоящего из нечетного числа чисел, является номером данного ряда, который будет посередине, если этот ряд упорядочен. Если число чисел в строке четное, то медиана строки равна половине суммы двух чисел в середине строки, упорядоченных в порядке возрастания [9].

Дисперсию числового набора (набора чисел) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ принято обозначать S^2 (читается «эс-квадрат»; заметим, что это именно обозначение, а не степень). При этом в знаменателе дроби:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

стоит количество чисел в наборе n, а не $n - 1$. Говоря языком математической статистики, величина S^2 является смещенной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины X, если считать числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ независимыми наблюдениями значений этой случайной величины [13].

В старших классах наряду с дисперсией набора чисел рассматривается квадратный корень этой величины $S = \sqrt{S^2}$. Предпочтительно называть такую характеристику «**стандартным отклонением**». Часто вы можете найти другое название для этой величины: «**среднее квадратичное отклонение**».

Сумму произведений возможных результатов испытания на их вероятность называют **математическим ожиданием.** Формула нахождения математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Частота — это отношение числа наступлений события к общему числу наблюдений или, другими словами, доля события в наборе наблюдений.

К графическим способам представления статистических данных в школьном курсе, прежде всего, относятся диаграммы — **столбиковая** (рисунок 1)**, круговая** (рисунок 2) **и диаграмма рассеивания** (рисунок 3) [5].

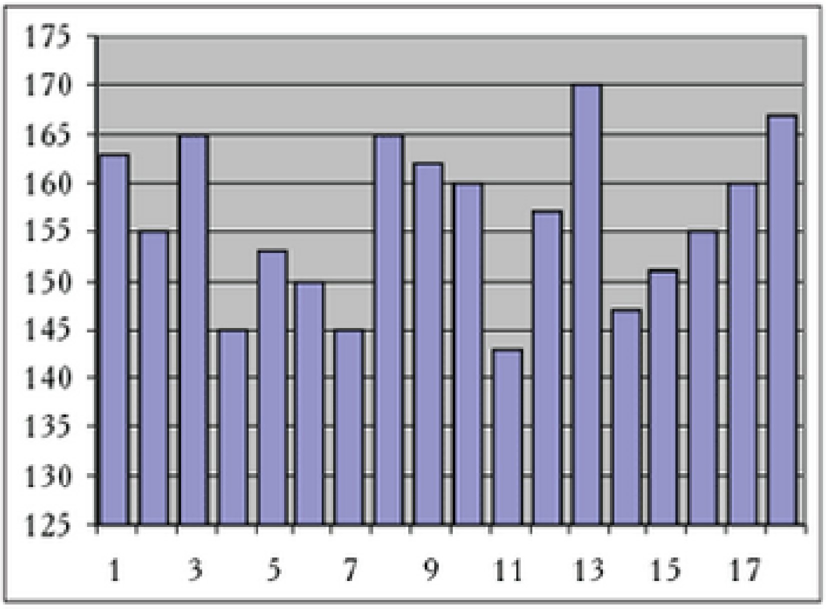


Рисунок 1 – Столбиковая диаграмма

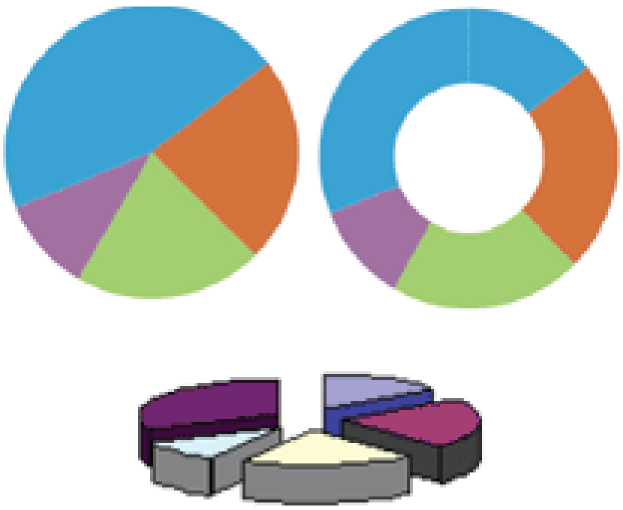


Рисунок 2 – Примеры круговых диаграмм, построенных с помощью Excel

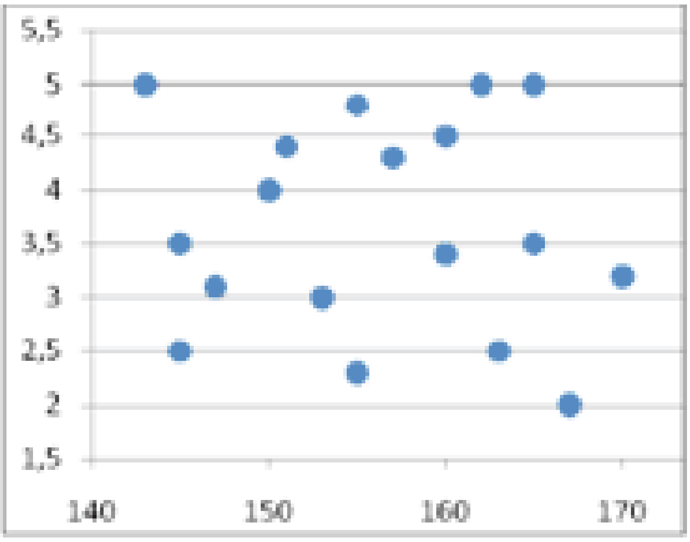


Рисунок 3 – Диаграмма рассеивания

Иногда столбиковую диаграмму часто путают с другим графиком — гистограммой (рисунок 4), отражающим совершенно другие характеристики набора чисел.

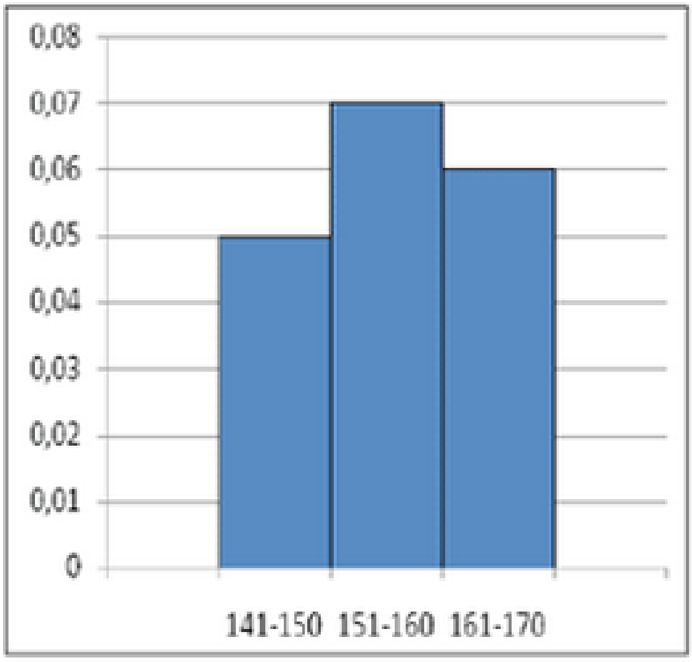


Рисунок 4 – Гистограмма

Гистограмма – это частный случай столбчатой диаграммы. Он построен особым образом для сгруппированных исходных наборов чисел.

При построении гистограммы ось абсцисс делится на интервалы. С каждым интервалом группировки данных мы связываем частоту чисел из указанного набора, попадающих в указанный интервал. Эта частота изображена на гистограмме вдоль оси ординат [17].

Для наглядного представления частоты наблюдений можно использовать график, называемый «полигоном частот» (рисунок 5). Он похож на гистограмму по своему методу построения, назначению и отображаемой информации. На рисунке 5, частотные полигоны построены для вышеприведенного примера.

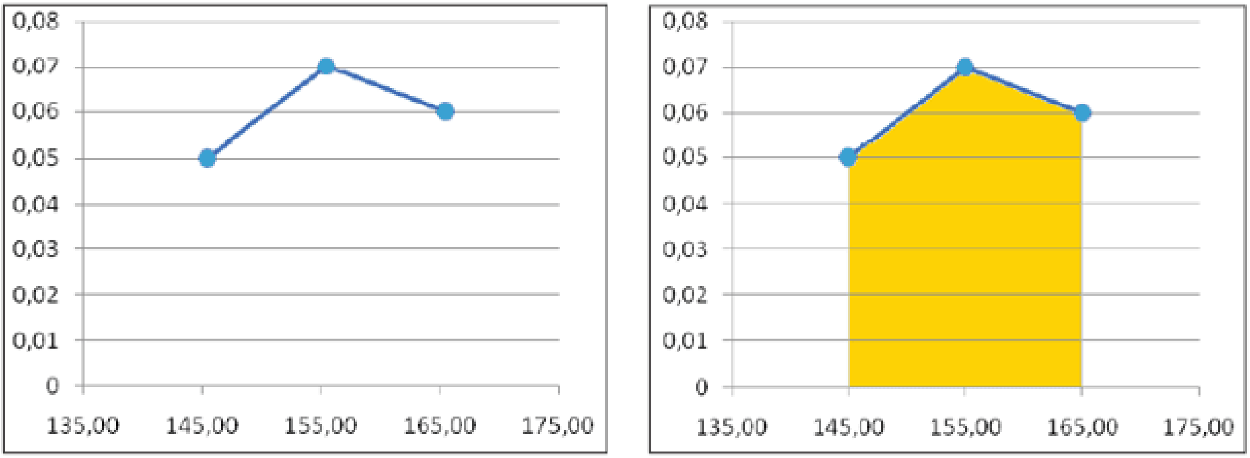


Рисунок 5 – Полигон частот

1.3 Возрастные особенности изучения темы в 10-11 классах

Проблема знания учителем личности ученика традиционно актуальна в практическом плане. Чтобы успешно проводить обучение, учитель должен представить основные характеристики ученика, его способность воспринимать материал, запоминать, обрабатывать, использовать его при решении различных задач.

В данном параграфе, мы изучим возрастные особенности учащихся 10-11 классов при изучении стохастической линии в школьном курсе математики.

Как показывают исследования известных психологов, человек изначально плохо приспособлен к вероятностной оценке, осознанию и правильной интерпретации вероятностной и статистической информации.

Тщательно изучая, как возраст влияет на восприятие вероятностно-статистической линии, рассмотрим эксперимент, проведенный Е. А. Бунимовичем в журнале «Математика в школе» [3].

В его экспериментальном исследовании приняли участие старшеклассники, которые начали углубленный курс математики, но еще не изучали вероятностные разделы. Из результатов исследования был сделан вывод о том, что даже хорошее знание и понимание других разделов математики само по себе не обеспечивает развития вероятностного мышления и даже не устраняет шаблонные вероятностные предрассудки и ошибки [3].

В то же время было установлено, что объяснять основы теории вероятностей в старшей школе было неэффективно. Стремление к быстрой формализации знаний, выработанной к этому возрасту, желание выучить определенный набор правил, алгоритмов и методы расчета заменяет формирование вероятностных представлений формальным изучением.

Психологи отмечают, что благоприятный возраст для формирования вероятностных представлений составляет 10-13 лет, что примерно соответствует 5-7 классам российской школы.

Элементы статистического мышления должны быть введены в школе по ряду предметов, а не только в курсе математики. Мы должны быть уверены, что на уроках биологии и физики, русского языка и истории время от времени в нужном месте делаются разумные замечания о случайности явлений, которые изучает эта научная дисциплина.

Дети получают свои первые представления о мире случайностей, наблюдая за ними в окружающей жизни. В то же время важные характеристики наблюдаемых явлений уточняются при сборе статистических данных и их визуальном представлении [5].

Способность регистрировать статистическую информацию и представлять ее в виде простых таблиц и диаграмм сама по себе характеризует наличие у школьника определенного статистического опыта. Эти навыки позволяют сформировать правильное представление не только о явлениях с ярко выраженной случайностью, но и о тех явлениях, случайность которых неочевидна, и скрыта многими факторами, мешающими восприятию.

Понимание природы изучаемого стохастического явления связано с умением выделить главное, увидеть особенности и тенденции при рассмотрении таблиц, диаграмм и графиков. Простейшие навыки «чтения» таблиц и графиков позволяют заметить некоторые закономерности наблюдаемых явлений, увидеть специфические свойства явлений с их внутренними особенностями и причинно-следственными связями, стоящими за формами представления статистических данных [6].

Типичные особенности изучаемых явлений и их общие тенденции можно выявить с помощью усредненных статистических характеристик. Понимание значения простых средних значений, таких как среднее арифметическое, необходимо для каждого учащегося.

Стохастическая природа окружающих явлений не может быть раскрыта без понимания степени их изменчивости. Поэтому возникает необходимость в количественной оценке разброса статистических данных, что способствует более глубокому пониманию природы явлений и процессов и позволяет сравнивать статистические агрегаты по степени их изменчивости.

Одним из важнейших компонентов стохастического мышления является понимание устойчивости в мире случайности, упорядочение случайных фактов [5]. Нельзя позволить ученикам воспринимать определенные аспекты случайных явлений, которые спонтанно воспринимаются в жизни, без каких-либо отношений. Центральное место занимают представления, связанные с различными экспериментальными представлениями закона больших чисел.

Простейшим и наиболее доступным способом является формирование представления вероятности в виде «теоретически ожидаемого» значения частоты с увеличением количества наблюдений. В то же время важную роль играет понимание того, что количественная оценка возможности наступления события может быть проведена еще до эксперимента, основываясь на некоторых теоретических соображениях. Таким образом, мы приходим к вычислению вероятностей по классической схеме.

Одной из важных задач изучения вероятностно-статистического материала в школе является развитие вероятностной интуиции, формирование адекватных представлений о свойствах случайных явлений [17]. Ведь в жизни вам очень часто приходится оценивать шансы, выдвигать гипотезы и предположения, прогнозировать развитие ситуации, рассказывать о возможностях подтверждения конкретной гипотезы.

Идея вероятности, которая усваивается в процессе организованного, систематического изучения, отличается от обычной тем, что она является носителем представлений о стабильности, закономерностях в мире случайности и позволяет вывести наиболее правильные выводы из имеющейся информации.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

2.1 Анализ учебного материала на предмет изложения темы «Элементы теория вероятностей и математической статистики»

В данном разделе был осуществлен анализ школьных учебников и методических пособий, используемых в современной российской школе в 9-11 классах авторами: Муравина Г. К., Никольского С. М. и Алимова Ш. А.

Данные учебники были проанализированы на предмет изложения темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» в школе. Анализ школьных учебников представлен в Таблице 1.

Таблица 1 – Анализ школьных учебников

Класс	Учебники		
	Муравин Г. К., Муравина О. В. (углубленный уровень)	Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и др. (базовый и профильный уровни)	Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В. и др. (базовый и углублённый уровни)
1	*2*	*3*	*4*
9	**Глава 5. Элементы теории вероятностей и комбинаторики.** §12. Вероятность суммы и произведения событий §13. Понятие о статистике	**Глава 5. Элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей.** §12. Описательная статистика 12.1. Способы представления числовых данных 12.2. Характеристики числовых данных §13. Комбинаторика 13.1. Задачи на перебор всех возможных вариантов 13.2. Комбинаторные правила 13.3. Перестановки 13.4. Размещения 13.5. Сочетания §14. Введение в теорию	**Глава V. Случайные события** §22. События §23. Вероятность события §24. Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики §25. Геометрическая вероятность §26. Относительная частота и закон больших чисел

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*
		вероятностей 14.1. Случайные события 14.2. Вероятность случайного события 14.3. Сумма, произведение и разность случайных событий 14.4.Несовместные события. Независимые события 14.5. Частота случайных событий	
10	**Глава 5. Элементы теории вероятностей и комбинаторики.** §27. Понятие о вероятности §28. Вычисление числа вариантов	**Глава III. Элементы теории вероятностей** §12. Вероятность события 12.1. Понятие вероятности события 12.2 Свойства вероятностей событий §13*. Частота. Условная вероятность 13.1*. Относительная частота события 13.2*. Условная вероятность. Независимые события §14*. Математическое ожидание. Закон больших чисел 14.1*. Математическое ожидание 14.2*. Сложный опыт 14.3*. Формула Бернулли. Закон больших чисел	**Глава XI. Комбинаторика** §60. Правило произведения §61.Перестановки §62. Сочетания и их свойства §64. Бином Ньютона **Глава XII. Элементы теории вероятностей** §65. События §66. Комбинации событий. Противоположное событие §67. Вероятность события §68. Сложение вероятностей §69. Независимые события. Умножения вероятностей §70. Статистическая вероятность **Глава XIII. Статистика** §71. Случайные величины §72.Центральные тенденции §73. Меры разброса
11	**Глава 6. Элементы теории вероятностей и статистики** §19. Сумма и произведение событий §20. Понятие о статистике		

Рассмотрим построение вероятностно-статистической линии в некоторых учебных комплектах и в учебных пособиях для базовой школы.

В учебнике Муравина Г. К. для 9 класса изучение темы «Элементы теории вероятности, математической статистики и комбинаторики» начинается с повторения изученной схемы при вычислении вероятностей [7]. Далее дается определение условной вероятности и замечается равенство $P(AB) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$. В следующем абзаце, говорится о сумме событий A и B. Рассматривается пример при помощи кругов Эйлера, также выводится формула вероятности суммы событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Потом выводится вероятность суммы несовместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, вероятность произведения независимых событий: $P(AB) = P(A) \times P(B)$. В следующем параграфе речь идет о статистике, о том, чем она занимается и где используется. Этот пункт знакомит учащихся с некоторыми основными характеристиками, которые используются при анализе статистической информации. Автор дает определения медиане ряда, моде ряда, размаху, математическому ожиданию и упоминает, что для повышения наглядности часто используют диаграммы: круговые и столбчатые.

В 10-й класс начинается с классического определения вероятности и определения достоверных и невозможных событий [8]. Далее автор вводит комбинаторную линию, начиная с правила произведения. Продолжает формулой числа перестановок из n элементов; формулой числа размещений; формулой числа сочетаний и заканчивается всё формулой бинома Ньютона.

В 11 классе в самом начале повторяется параграф, который был в 9 классе – §12. Вероятность суммы и произведения событий, новым для учащихся становится лишь схема Бернулли [9]. Далее автор повторяет параграф 9 класса – §13. Понятие о статистике, добавляя определение дисперсии ряда.

В учебнике Никольского С. М. для 9 класса изучение темы «Элементы теории вероятности, математической статистики и комбинаторики» начинается с понятия описательная статистика [11]. Далее речь идет о представлении числовых данных в виде таблиц и диаграмм. Рассматриваться определения мода, медианы ряда, размах, дисперсия. Потом автор выбирает комбинаторную линию и сразу же предлагает решить задачу: запишите все трехзначные числа, в записи которых используется цифры 1, 2 и 3 без повторения. Лишь потом переходит к правилу сложения и правилу умножения. Следующий блок формул на перестановку, размещение и сочетания элементов. И в заключительном параграфе вводится вероятностная линия с понятия случайные события. Затем определяются достоверные и невозможные события. Дается классическое определение вероятности. Так же рассматривается сумма, произведение и разность случайных событий при помощи кругов Эйлера. Заканчивается всё несовместными и независимыми событиями.

В 10 классе вводятся понятия единственно возможные, равновозможные, достоверные, невозможные и несовместные события [12]. После повторяется классическое определение вероятности и свойства вероятностей событий. Следом идет определение относительной частоты, статистической устойчивости относительных частот, условной вероятности и безусловной вероятности. Большой параграф выделен для изучения математического ожидания. Дается определение: математическим ожиданием случайной величины x называют число, обозначенное $M(x)$, равное сумме произведений значений случайной величины на вероятности этих значений, т.е. $M(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$. Затем рассматривается формула Бернулли и закон больших чисел.

В 11 классе данная тема у автора Никольского С. М не рассматривается [13].

В учебнике Алимова А. Ш. для 9 класса изучение темы «Элементы теории вероятности, математической статистики и комбинаторики» начинается с определений: невозможных, достоверных и случайных событий [1]. После понятия совместных и несовместных событий, равновозможных. Определение вероятности рассматривается на примере, четкой формулы не вводится. Лишь после примера рассматривается классическое определение вероятности: если в некотором испытании существует n равновозможных попарно несовместных исхода и m из них благоприятствуют событию $A,$ то вероятностью наступления события A называют отношение $\frac{m}{n}$ и записывают:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Далее автор предлагает рассмотреть решение вероятностных задач с помощью комбинаторики, напоминая, что правило произведения было сформулировано в VII классе. Следующий блок направлен на решение задач, в которых оценить вероятность случайного события можно из геометрических соображений. Предложено рассмотреть, что после раскручивания стрелка может остановиться в любой части круга рулетки. И следует вывод, что вероятность того, что стрелка остановится на интересующем нас секторе, естественно считать равной отношению площади этого сектора $S_{\text{сект}}$ к площади всего круга S:

$$P = \frac{S_{\text{сект}}}{S}.$$

После автор знакомит учащихся с относительной частотой, статистической вероятностью и законом больших чисел Бернулли.

В учебнике 10-11 класса изучение данной темы начинается с комбинаторной линии [2]. Даются определения перестановкам из n элементов, размещениям и сочетаниям. Далее разбирается бином Ньютона. В следующей главе автор переходит к элементам теории вероятностей, а точнее к определениям: случайных, достоверных и невозможных событий. Определение суммы событий и произведения событий, так же как и другие авторы рассматривает на примере кругов Эйлера. После идут определения равных и противоположных событий. Вновь повторяется классическое определение вероятности и вероятность суммы двух несовместных событий. Вводится определение независимых событий, относительной частоты события, статистической вероятности. После определяются случайные величины, генеральная совокупность, а любая выбранная из нее часть – выборка. Далее формулируется определение моды, медианы, среднего арифметического, размаха, отклонения от среднего, среднего квадратичного отклонения.

Выводы, сделанные в ходе анализа:

1. Для введения элементов теории вероятностей и математической статистики в практику преподавания математики создаются реальные условия. Имеется учебно-методическое обеспечение, позволяющее включать элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей в учебный процесс.

2. Исходя из данного анализа, можно сделать вывод, что в учебниках Муравина Г. К., Никольского С. М. и Алимова Ш. А. тема «Элементы теории вероятностей и математическая статистика» является одной из ведущих.

3. Каждый автор имеет различный подход к изучению элементов стохастической линии. В одних учебных комплектах приоритетное внимание уделяется вероятностным понятиям, в других – статистическим, в-третьих – понятия рассматриваются отдельно.

Перейдя к изучению методических пособий, которые предлагают выше упомянутые авторы, следует обратить внимание на пособия Г. К. Муравина. Рассмотрим на примере методическое пособие для 11 класса, на предмет описания темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» [10].

Методическое пособие разделено по главам согласно оглавлению учебника. В учебнике тема относится к 5 главе, следовательно, и в методическом пособии соответственно. Муравин отмечает, что пятая глава завершает линию комбинаторики, вероятности и статистики старшей школы. В главе два пункта. Один посвящается вероятности, а другой статистике.

После автор озвучивает тему и обозначает, какое количество часов должно быть на неё отведено. Например, 14. Вероятность суммы и произведения событий (4 ч). Также автор отмечает, что если по какой-либо причине при изучении главы ощущается дефицит времени, учитель может предложить школьникам, самостоятельное знакомство с материалом, с этой целью в учебнике приведены подробные разборы заданий. Следом идут предметные и метапредметные результаты обучения, и цели урока, рассматриваемые в определенной теме. Затем автор оставляет комментарий к уроку, в этом комментарии он подробно описывает, что должно быть озвучено при решении каждой задачи, о чём должен говорить ученик.

Вслед за этим рассматриваются задачи и их подробное решение с описанием каждого шага, дается домашнее задание на закрепление данного урока.

Впоследствии прохождения главы 5 «Элементы теории вероятностей и математической статистики», автор предлагает провести зачет и дает подробные инструкции к его проведению. Автор рекомендует прохождение зачета в комбинированной форме, т.е. задания для письменной части и задания и вопросы к устной части зачета.

Далее перейдем к рассмотрению методического пособия С. М. Никольского для 10 класса, на предмет описания темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» [14]. Данное методическое пособие автор позиционирует, как книга для учителя. Пособие разделено по главам и параграфам согласно оглавлению учебника. В учебнике тема относится к 3 главе, следовательно, и в методическом пособии соответственно. Никольский пишет, что третья глава «Элементы теории вероятностей» совершенно новый раздел в курсе математики средней школы. Также он отмечает, что эти вопросы раньше изучались только в физико-математических классах, а теперь этот материал стал обязательным при обучении на базовом уровне. В качестве контроля усвоения материала главы 3, автор предлагает использовать задачи из учебника или из других источников. Также автор предлагает примерное тематическое планирование к каждой главе.

В отличие от методического пособия Г. К. Муравина, в данном пособии не описаны предметные и метапредметные результаты обучения, и цели урока. Автор лишь описывает, какие понятия будут введены в определенном пункте параграфа. Например, пункт 12.1. Понятие вероятности события и описано, что в данном пункте введены понятия равновозможных событий, единственно возможных событий, случая, достоверного события, невозможного события, несовместных событий, вероятности события [14]. После рассматриваются задачи и их подробное решение с описанием каждого шага.

По прохождении главы 3 «Элементы теории вероятностей», автор предлагает провести итоговую контрольную работу.

Из анализа методических пособий можно сделать вывод, что они могут отличаться по содержанию и изложению материала, но самое главное – это основное назначение данных пособий. Оно говорит, что пособие направлено на помощь учителю в организации учебной деятельности на уроке и дома. В первую очередь имеет большое значение поурочные разработки, которые предназначены для молодых учителей в целях выбора пути построения урока, отвечающего современным требованиям, а также для тех учителей, кто работают первый год по данному учебнику.

2.2 Анализ материалов ЕГЭ и ОГЭ по теме «Элементы теории вероятностей»

Математика является одним из обязательных экзаменов, которые учащиеся сдадут в 2020 году. Анализируя ЕГЭ по математике, следует отметить, что учащимся предлагается выбор, 2 уровня: базовый и профильный.

Экзаменационная работа базового уровня по математике, состоит из 20 заданий и предполагает длительность выполнения в 3 часа. Важно, что в контрольно-измерительных материалах отсутствуют сложные задания, т.е. повышенного и высокого уровня. В свою очередь экзаменационная работа профильного уровня распределена на две части, которые отличаются по сложности, числу заданий и форме ответов, всего 19 заданий и предполагается длительность выполнения в 3 часа 55 минут.

Начиная с 2012 года, в ЕГЭ по математике впервые появились задания по теории вероятностей. Относительно того времени, сейчас разнообразие прототипов заданий выросло и 2020 год не стал исключением, данные задания по теории вероятностей присутствуют.

Проанализировав материалы ЕГЭ 2019-2020 годов, было выявлено, что задания на тему «Элементы теории вероятностей и математической статистики» встречаются в следующих заданиях экзамена базового и профильного уровня:

— база: 10 задание, направлено на проверку классического определения вероятности и теорем о вероятностях событий;

— профиль: 4 задание, направлено на проверку классического определения вероятности и теорем о вероятностях событий.

Рассмотрим типовые задания, встречающиеся по данной теме в экзаменационных вариантах ЕГЭ.

Задание 10. В блюдце лежит 16 пряников: 7 без начинки, 5 с творогом и 4 с арахисом. Инга решила съесть пряник, и наугад вытащила один из блюдца. Найдите вероятность того, что пряник окажется с арахисом.

Решение:

Вероятность того, что пряник окажется с арахисом, равна:

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Задание 4. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, составляет 0,93. Вероятность того, что он прослужит более двух лет, составляет 0,87. Найдите вероятность того, что это продлится менее двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть $A = \{\text{чайник прослужит больше года, но меньше двух лет}\}$;

$\text{B} = \{\text{чайник прослужит больше двух лет}\}$; $\text{C} = \{\text{чайник прослужит ровно два года}\}$.

Тогда, $A + B + \text{C} = \{\text{чайник прослужит больше года}\}$.

События A, B и C – несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна 0. Тогда:

$$P(A + B + \text{C}) = P(A) + P(B) + P(\text{C}) = P(A) + P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем:

$$0{,}93 = P(A) + 0{,}87.$$

Для нахождения искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0{,}93 - 0{,}87 = 0{,}06.$$

Ответ: 0,06.

Задание 4. Биатлонист стреляет по мишеням пять раз. Вероятность поражения цели одним выстрелом составляет 0,8. Найти вероятность того, что биатлонист ударил цель три раза и пропустил последние два. Округлите результат до сотых.

Решение.

Событие $A = \{\text{Биатлонист попал в мишень}\}$;

событие $\bar{A} = \{\text{Биатлонист промахнулся}\}$ – противоположно событию A.

$P(A) = 0{,}8$, следовательно, $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Далее найдем вероятность события $B = A \times A \times A \times \bar{A} \times \bar{A}$. В заключение применим правило умножения вероятностей независимых событий:

$P(B) = P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(\bar{A}) \times P(\bar{A}) = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \approx$ $\approx 0{,}02$.

Ответ: 0,02.

Умение решать задания данного вида не только принесут долгожданные баллы по ЕГЭ, но и пригодятся в жизни, так как научит определять закономерности случайных явлений.

Рассматривая ОГЭ по математике 2020 года, следует отметить, что оно состоит из двух частей, которые отличаются по сложности, числу заданий и форме ответов, всего 26 заданий.

Проанализировав материалы ОГЭ 2019-2020 годов, было выявлено, что задания на тему «Элементы теории вероятностей и математической статистики» встречаются в задачах под № 10. Данное задание направлено на проверку умения пользоваться классическим определением вероятности, статистики и теорем о вероятностных событиях.

Рассмотрим типичные задания, встречающиеся по данной теме в экзаменационных вариантах ОГЭ.

Задание 10. Ангелина загадала трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно будет делиться на 5.

Решение.

Всего 900 трехзначных чисел. Каждое пятое из них делится на пять, то есть такие числа $\frac{900}{5} = 180$. Тот факт, что Ангелина загадала трехзначное число, делящееся на 5, определяется отношением количества трехзначных чисел, делящихся на 5, на общее количество трехзначных чисел:

$$\frac{180}{900} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Задание 10. Рост (в сантиметрах) пяти учащихся равен: $160, 166, 151, 145, 133$. Насколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

Решение.

Упорядочим данный ряд: $133, 145, 151, 160, 166$, следовательно, медиана равна 151. Среднее арифметическое же будет равно

$$\frac{133 + 145 + 151 + 160 + 166}{5} = 151.$$

Разница между медианой и средним арифметическим составляет:

$$151 - 151 = 0.$$

Ответ: 0.

Таким образом, на основании анализа учебной литературы и пособий, а также анализа ЕГЭ был составлен курс по выбору «Элементы теории вероятностей и математической статистики».

2.3 Курс по выбору «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Пояснительная записка

Курс по выбору подготовлен для занятий учащихся старших классов, с целью подготовки учащихся к ЕГЭ и повышению уровня знаний по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики».

Главной целью курса по выбору является повторение, углубление и систематизация полученных знаний по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики». Также важным компонентом является: расширение кругозора учащихся, развитие математического мышления и формирование активного познавательного интереса к предмету.

Представленный курс предназначен для учащихся 10 классов и предусмотрен на 16 часов.

В курс входят практические занятия по решению задач из теории вероятностей, математической статистики и комбинаторики, входящие в состав ЕГЭ по математике.

После изучения курса, ученики должны:

— знать основные понятия математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей;

— уметь рассчитывать вероятности событий, используя различные определения вероятностей и формулы;

— видеть в конкретных бытовых, научных и технических проблемах вопросы, задачи, которые могут быть решены методами теории вероятностей, умение формулировать и решать такие проблемы;

— уметь представлять событие как комбинацию нескольких элементарных событий;

— уметь использовать приближенные формулы для расчета вероятностей;

— различать дискретные и непрерывные случайные величины;

— уметь находить числовые характеристики случайных величин;

— уметь решать простейшие задачи математической статистики и интерпретировать результаты.

Организация изучения курса. Целесообразно включить предлагаемый курс в учебный процесс в 10 классе, один час в неделю.

Обоснование системы контрольно-оценочной деятельности. По завершению курса проходит проверочная работа, для контроля усвоения полученных знаний и умений учащихся.

В Таблице 2 представлено тематическое планирование курса.

Таблица 2 – Тематическое планирование курса

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения урока	Форма контроля
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Раздел 1. Элементы теории множеств и комбинаторика				
1.	Правила сложения и умножения в комбинаторике. Размещения.	1	Практическая работа.	Решение задач.

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
2.	Сочетания. Перестановки.	1	Практическая работа.	Решение задач.
3.	Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий.	1	Практическая работа.	Решение задач.
Раздел 2. Теория вероятностей				
4-5.	Классическое определение вероятности. Основные понятия теории вероятности.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.	Решение задач.
6-7.	Задачи, использующие теорему сложения и умножения вероятностей. Вероятность нахождения хотя бы одного события.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.	Решение задач.
8-9.	Вероятность зависимых событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.	Решение задач.
Раздел 3. Статистика				
10.	Среднее арифметическое. Мода. Размах. Медиана.	1	Практическая работа.	Опрос. Решение задач.
11-12.	Дисперсия. Математическое ожидание. Среднее квадратичное отклонение.	2	Лекция-беседа. Практическая работа.	Опрос. Решение задач.
Раздел 4. Обобщение				
13-14.	Решение задач из ЕГЭ.	2	Практическая работа.	Решение задач.
15.	Проверочная работа.	1	Самостоятельная работа.	Итоговая работа.
16	Разбор результатов проверочной работы.	1	Беседа. Практическая работа.	Работа над ошибками.
			Всего:	16 часов

Содержание курса

Раздел 1. Элементы теории множеств и комбинаторика

Занятие 1. Правила сложения и умножения в комбинаторике. Размещения без повторений. Размещения с повторениями

Основные понятия

Правило сложения. Суммой, или объединением, нескольких событий A и B называется такое событие, которое состоит в наступлении хотя бы одного из этих событий A или B. Сумма S событий $A, B, C, .., N$

обозначается так: $S = A + B + C + .. + N$.

Правило умножения. Произведением, или пересечением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Произведение S событий $A, B, C, .., N$ обозначается $S = A \times B \times C \times .. \times N$.

Понятия суммы и произведения событий имеют четкую геометрическую интерпретацию. Пусть событие A состоит из попадания в точку в области A, событие B в попадание в область B, затем событие $A + B$ – поражает точку в области, заштрихованной на рисунке 6, а событие $A \times B$ – попадание в точку в заштрихованной области на рисунке 7.

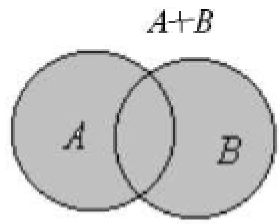


Рисунок 6 – Сумма событий

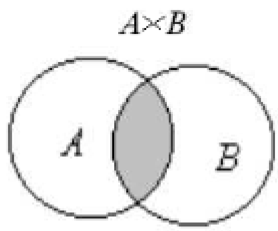


Рисунок 7 – Объединение событий

Размещения без повторений. Множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые различаются либо по составу элементов, либо по их порядку, называются размещениями. Число всех возможных размещений определяется формулой:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Размещения с повторениями. Множества, в которых повторяются некоторые элементы, часто встречаются в задачах комбинаторики. При размещении для таких задач применяется формула:

$$\bar{A}_n^m = n^m.$$

Задачи к уроку:

Задача 1. В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек, 3 блюдца и еще 4 ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение:

Пусть первое действие – будет выбором чашки, второе – выбором блюдца, третье – выбором ложки. Чтобы выбрать набор чашек, блюдца и ложки, необходимо выполнить все три шага. Таким образом, согласно правилу произведения, количество различных наборов составляет $5 \times 3 \times 4 = 60$.

Ответ: 60.

Задача 2. Из 30 участников собрания необходимо выбрать председателя и секретаря. Сколько способов это можно сделать?

Решение.

Из 30 элементов выбираем 2, причем порядок выбора имеет значение. Количество способов выбора равно $A_{30}^2 = 30 \times 29 = 870$ – способов.

Ответ: 870 способов.

Задача 3. В лифте восьмиэтажного здания находилось 5 пассажиров. Во сколько способов пассажиры могут выйти на каждом этаже, начиная со второго?

Решение.

Задача сводится к распределению 5 пассажиров по 7 этажам, и повторение возможно. Таким образом, задача сводится к поиску количества мест, размещения с повторениями:

$$\bar{A}_7^5 = 7^5 = 16807.$$

Ответ: 16807.

Домашнее задание:

1. Дается 5 шаров. Их нужно бросать в 8 лунок, несмотря на то, что в каждую лунку могут поместиться все 5 шаров. Сколькими способами это можно сделать?

(**Ответ:** 32768.)

2. Телефонные номера состоят из 6 цифр каждый. Сколько можно составить телефонных номеров, так чтобы все номера были разными?

(**Ответ:** 151200.)

<u>Занятие 2.</u> Сочетания. Перестановки

Основные понятия

Сочетания без повторений. Множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом, называются сочетаниями из n различных элементов по m. Число сочетаний из n элементов по m обозначают: C_n^m. Это число выражается формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Сочетания с повторениями. Пусть существуют предметы n различных видов предметов, и из них составляются наборы, содержащие k элементов. Подобные выборки называются сочетаниями с повторением. Их число обозначается $\bar{C}_n^k$. Число сочетаний с повторениями может быть вычислено по формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Перестановки без повторений. Перестановки элементов называются наборами этих элементов, состоящими из одних и тех же разных элементов и отличающихся друг от друга только своим порядком. Количество перестановок без повторений можно рассчитать по формуле:

$$P_n = n!.$$

Перестановки с повторениями. Число различных перестановок с повторениями из элементов $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в которых элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ повторяются соответственно i раз, равно:

$$\bar{P}_n = P_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \frac{n!}{n!_1 \times n!_2 \times \ldots \times n!_k}.$$

Задачи к уроку:

Задача 1. В цветочном магазине продаются 10 видов роз. Сколькими способами вы можете купить 8 роз в магазине.

Решение:

Количество покупок равно числу сочетаний восьми видов роз по десять. Используем формулу сочетаний с повторения:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

Подставляем в формулу значения из условия задачи:

$$\bar{C}_{10+8-1}^{8-1} = \frac{(10+8-1)!}{10!(8-1)!} = \frac{17!}{7!10!} = 11 \times 13 \times 8 \times 17 = 19448 \text{ – способов.}$$

Ответ: 19448.

Задача 2. В 10 классе успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них троих для участия в математической олимпиаде?

Решение:

Используем формулу сочетаний без повторения:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Подставляем в формулу значения из условия задачи:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{2 \times 3} = 120 \text{ – способов.}$$

Ответ: 120.

Задача 3. Сколькими способами можно разместить 4 человека в четырехместном купе?

Решение:

В этой задаче важен порядок, поскольку места в купе разные, нужно выбрать все объекты без повторов. Мы используем формулу перестановки без повторений:

$$P_n = n!.$$

Подставляем в формулу значения из условия задачи:

$$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \text{ – способа.}$$

Ответ: 24.

Задача 4. Сколько разных пятибуквенных слов можно составить из букв слова «манна»?

Решение:

В слове буквы а и н повторяются 2 раза, а буква «м» – один раз. Применим формулу перестановки с повторениями:

$$\bar{P}_n = P_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \frac{n!}{n!_1 \times n!_2 \times \ldots \times n!_k}.$$

Подставляем в формулу значения из условия задачи:

$$\bar{P}_5 = P_{2,2,2} = \frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 2} = 30.$$

Ответ: 30 способов.

Домашнее задание:

1. Сколькими способами 9 человек могут выстроиться в очередь в кассу за продуктами?

(**Ответ:** 362880.)

2. В научном конкурсе участвуют 12 человек, в том числе 5 женщин и 7 мужчин. Как можно сформировать группу из 7 человек, чтобы в ней было 3 женщины?

(**Ответ:** 10.)

3. Сколько существует способов расстановки белых фигур (короля, ферзя, 2 ладьи, 2 слона и 2 коня) на первой линии шахматной доски?

(**Ответ:** 5040.)

<u>Занятие 3.</u> Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий

Задачи к уроку:

Задача 1. В урне 10 шаров, из которых 6 белых и 4 черных. Вынули 2 шара из урны. Какова вероятность того, что оба шара белые?

Решение:

Рассмотрим событие $A -$ оба вынутых шара белого цвета.

Число всевозможных исходов равно количеству выборок 2 шаров из 10. Выборка без возвращения и без повторения, поэтому

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45.$$

Число исходов, благоприятствующих наступлению события A равно числу вариантов извлечения 2 белых шаров из 6, поэтому. Тогда, получим:

$$P = \frac{15}{45} = \frac{1}{33} = 0{,}33.$$

Ответ: $0{,}33$.

Задача 2. В секретном замке на общей оси находятся 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны различные номера. Блокировка открывается, если диски установлены так, что номера на них составляют определенный четырехзначный номер. Найдите вероятность того, что при случайной установке дисков замок откроется.

Решение:

Рассмотрим событие $A -$ замок будет открыт.

Так как варианты набора цифр на дисках образуют выборку с возвращением упорядоченную, $n = \bar{A}_5^4 = 5^4 = 625$. Благоприятный исход у этого события только один, поэтому $m = 1$. Тогда:

$$P = \frac{1}{625}.$$

Ответ: $\frac{1}{625}$.

Задание 3. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня только, что эти цифры разные, набрал их случайным образом. Найти вероятность того, что нужные номера набраны.

Решение:

Пусть событие A – правильный номер будет набран.

Тогда число всех возможных результатов равно количеству трехзначных чисел, составленных из разных чисел. Так как в этом случае мы имеем выборку без возвращения, но упорядоченную, то

$$n = A_{10}^{3} = \frac{10!}{7!} = 720.$$

Исход, благоприятствующий наступлению события A только 1. Поэтому:

$$P = \frac{1}{720}.$$

Ответ: $\frac{1}{720}$.

Задание 4. В почтовом отделении существует 6 видов почтовых открыток. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все разные?

Решение:

Пусть событие $A-$ все проданные открытки различны.

Тогда число всевозможных исходов равно числу вариантов выбора 4 открыток. Эта выборка с возвращением, неупорядоченная. Значит $n = \bar{C}_{6}^{4} = \frac{9!}{4!\times 5!} = 126$. Число исходов, благоприятствующих наступлению события A, есть число способов, которыми можно выбрать 4 различные открытки из 6 видов. Так как открытки теперь различны, то эта неупорядоченная выборка без повторения, значит $m = C_{6}^{4} = 15$. Тогда:

$$P = \frac{5}{42} \approx 0{,}12.$$

Ответ: $0{,}12$.

Домашнее задание:

1. Придумать 5 задач на расчет вероятности с помощью формул комбинаторики. Оценивается:

— содержание (интерес);

— решение (правильность, рациональность);

— оригинальность и находчивость (в решении и содержании).

Раздел 2. Теория вероятностей

<u>Занятие 4-5.</u> Классическое определение вероятности. Основные понятия теории вероятностей

Основные понятия

В теории вероятностей основными понятиями являются испытания и события. **Событие** – это любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Под событием понимают определенный набор условий, при которых наблюдается то или иное явление, тот или иной результат фиксируется [6].

Классическое определение вероятности. Отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания называют вероятностью события A при проведении некоторого испытания. Если $\boldsymbol{m}$ – количество случаев, которые благоприятствуют событию A, а $\boldsymbol{n}$ – общее количество случаев в данном опыте, то вероятность события A [12]. Вероятность события вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события (обозначим его A) лежит в пределах от нуля до единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$. Последнее соотношение часто называют **шкалой вероятностей**.

Событие называется **достоверным**, если в результате испытания оно обязательно произойдет. Обозначение достоверного события: U. Вероятность достоверного события принимается равной единице:

$$P(U) = 1.$$

Событие называется **невозможным**, если в результате испытания оно никогда не произойдет. Обозначение: $I(\text{impossible})$ или $\emptyset$. Вероятность невозможного события принимается равной нулю:

$$P(\emptyset) = 0.$$

Событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может произойти, а может и не произойти. Вероятность случайного события (обозначим его A) больше нуля и меньше единицы: $0 < P(A) < 1$. Обычно случайные события обозначают латинскими буквами: A, B, C и т.д. [6].

Задачи к уроку:

Задание 1. В коллекции билетов по химии всех билетов один из них содержит вопрос на тему «Пресмыкающиеся». Найдите вероятность того, что школьнику будет задан вопрос по теме «Пресмыкающиеся» в случайно выбранном билете на экзамене.

Решение:

Вероятность события находится по формуле классического определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где

$m -$ количество благоприятных исходов,

$n -$ количество всех событий.

Благоприятным событием будем вопрос по теме «Пресмыкающиеся». Тогда можем подставить значения в формулу:

$$P = \frac{6}{25} = 0{,}24.$$

Ответ: 0,24.

Задание 2. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они отличаются и образуют двузначный номер менее 30. Учитывая это, он набирает случайным образом 2 цифры. Найдите вероятность того, что это будут правильные числа.

Решение:

Вероятность события находится по формуле классического определения вероятности, $m = 1$, так как только одно число правильное. Подсчитаем количество всех возможных двузначных чисел с разными цифрами, меньшее 30, которые может набрать абонент, составим таблицу этих чисел (Таблица 3):

Таблица 3 – Двузначные числа, подходящие по условию задачи

10	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	23	24	25	26	27	28	29

Таких чисел $n = 18$ штук. Тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{1}{18}.$$

Ответ: $\frac{1}{18}$.

Задание 3. В потоке 2401 ученик, среди них два отличника – Сергей и Дима. Поток случайным образом делится на 49 равных групп. Найдите вероятность того, что Сергей и Дима будут в одной группе.

Решение:

По условию задачи все группы равные, следовательно, в каждой из них $\frac{2401}{49} = 49$студентов. В группе, в которую попал Сергей, для Димы остаётся только $49 - 1 = 48$ подходящих мест. Всего же на потоке для Димы остаётся $2401 - 1 = 2400$ различных мест.

Искомую вероятность найдём по формуле классического определения вероятности:

$$p = \frac{48}{2400} = 0{,}02.$$

Ответ: $0{,}02$.

Задание 4. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Решение:

Число всех способов расставить ладьи равно $n = 64 \cdot 63 = 4032$.

Число способов расставить ладьи так, что они не будут бить одна другую равно $m = 64(64 - 15) = 64 \cdot 49 = 3136$.

Тогда искомая вероятность по классическому определению:

$$P = \frac{3136}{4032} = \frac{49}{63} = \frac{7}{9} = 0{,}778.$$

Ответ: $0{,}778$.

Домашнее задание:

1. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и поэтому набирает ее случайным образом. Определите вероятность того, что ему придется звонить не более чем в 3 места.

(**Ответ:** $0{,}3$.)

2. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: «а», «м», «р», «т», «ю». Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово «юрта».

(**Ответ:** $\frac{1}{120}$.)

<u>Занятие 6-7.</u> Задачи, использующие теорему сложения и умножения вероятностей. Вероятность нахождения хотя бы одного события

Основные понятия

События, появление одного из которых не исключает возможность появления другого, называются **совместными** событиями.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B).$$

События, появление одного из которых исключает возможность появления другого, называются **несовместными** событиями. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

События, появление одного из которых влияет на появление другого события, называются **зависимыми** событиями.

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого:

$$P(A \times B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \times P\left(\frac{A}{B}\right).$$

События, появление одного из которых не влияет на появление другого события, называются **независимыми** событиями.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B).$$

Событие, являющееся обратным по отношению к какому-либо событию, называется **противоположным** событием.

Вероятность противоположного события равна единице, минус вероятность этого события.

Задачи к уроку:

Задача 1. Ученик 11 класса Сидоров пришел на экзамен по математике: если он правильно решает более 20 задач, вероятность составляет 0,73; если он правильно решает более 18 задач – вероятность 0,82. Найдите вероятность того, что Сидоров правильно решит ровно 20 задач.

Решение:

Рассмотрим события:

$A = \{\text{Сидоров правильно решит 20 заданий}\}; P(A) - ?$

$B = \{\text{Сидоров правильно решит, больше 20 заданий}\}; P(B) = 0{,}7.$

A и B являются несовместными событиями, следовательно, наступление события A или события B означает, что $\{\text{Сидоров правильно решит, больше 9 заданий}\}$.

$$A + B = \{\text{Сидоров правильно решит, больше 9 заданий}\};$$

$P(A + B) = 0{,}82$. По формуле вероятности суммы двух несовместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Отсюда находим:

$$P(A) = P(A + B) - P(B) = 0{,}82 - 0{,}73 = 0{,}09.$$

Ответ: $0{,}09$.

Задача 2. Биатлонист стреляет по мишеням пять раз. Вероятность поражения цели одним выстрелом составляет $0{,}59$. Найти вероятность того, что биатлонист ударил цель три раза и пропустил последние два. Округлите результат до сотых.

Решение.

Событие $A =$ {Биатлонист попал в мишень};

событие $\bar{A} =$ {Биатлонист промахнулся} – противоположно событию A.

$P(A) = 0{,}59$, следовательно, $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}59 = 0{,}41$. Далее найдем вероятность события $B = A \times A \times A \times \bar{A} \times \bar{A}$. В заключение применим правило умножения вероятностей независимых событий:

$P(B) = P(A) \times P(A) \times P(A) \times P(\bar{A}) \times P(\bar{A}) = 0{,}59 \times 0{,}59 \times 0{,}59 \times 0{,}41 \times$ $\times\, 0{,}41 \approx 0{,}035$.

Ответ: $0{,}035$.

Задача 3. Магазин получил товары в коробках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять с 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Коробка для продажи была выбрана случайным образом. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение:

Всего получено магазином: $4 + 5 + 7 + 4 = 20$ – ящиков.

Вероятность события находится по формуле классического определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где

$m -$ количество благоприятных исходов,

$n -$ количество всех событий.

Подставим в формулу:

$P_1 = \frac{4}{20} = 0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$P_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада;

По теореме сложения несовместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Подставим в формулу:

$P = P_1 + P_3 = 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: $0{,}55$.

Задача 4. В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика случайным образом извлекается один предмет. Найдите вероятность того, что все детали будут стандартными.

Решение:

Вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

$S_1 -$ из $1-$го ящика извлечена стандартная деталь;

$S_2 -$ из $2-$го ящика извлечена стандартная деталь;

$S_3 -$ из $3-$го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению найдем соответствующие вероятности:

$$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8;$$

$$P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7;$$

$$P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Интересующее нас событие выражается произведением $S_1 S_2 S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = P(S_1) \times P(S_2) \times P(S_3) = 0{,}8 \times 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}504$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504.

Задача 5. Стрелок поражает цель с одинаковой вероятностью при каждом выстреле. Какова эта вероятность, если вероятность хотя бы одного попадания тремя выстрелами равна 0,973.

Решение:

Обозначим: $p -$ вероятность попадания в мишень при каждом выстреле;

$q = 1 - p -$ вероятность промаха при каждом выстреле.

Распишем события:

A – при 3 выстрелах стрелок попадёт в мишень хотя бы один раз;

$\bar{A}$ – стрелок 3 раза промахнётся.

По условию $P(A) = 0{,}973$, тогда вероятность противоположного события:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}973 = 0{,}027.$$

С другой стороны, по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(\bar{A}) = q \times q \times q = q^3$$

Таким образом:

$$q^3 = 0{,}027$$

$q = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ – вероятность промаха при каждом выстреле.

В результате:

$p = 1 - q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ – вероятность попадания при каждом выстреле.

Ответ: 0,7.

Домашнее задание:

1. Из трех орудий стреляли по цели. Вероятность попадания одного выстрела только из первого пистолета составляет 0,7, из второго – 0,6, из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что:

— хотя бы одна снаряд попадет в цель;

— только две снаряда попали в цель;

— цель будет поражена как минимум два раза.

(**Ответ:** 0,976; 0,452; 0,788.)

<u>Занятие 8-9.</u> Основные правила вычисления вероятностей, формула полной вероятности, формула Бейеса

Основные понятия

Формула полной вероятности:

Вероятность события A, которое может произойти одновременно с одним из n попарно несовместимых событий $H_1, H_2, .., H_n$, называемых гипотезами, образующих полную группу событий, равна:

$$P(A) = P(H_1) \times P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P(H_2) \times P\left(\frac{A}{H_2}\right) +..+ P(H_n) \times P\left(\frac{A}{H_n}\right).$$

Формула Байеса

Рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Событие А может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть ***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей:

$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B|A)$, откуда

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}, i = 1, \dots, n.$$

Полученная формула называется **формулой Байеса.** Вероятности гипотез $P(B_i|A)$ называются **апостериорными вероятностями**, тогда как $P(B_i)$ – **априорными вероятностями.**

Задачи к уроку:

Задача 1. Есть три одинаковых урны. В первой урне 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые, а в третьей – только черные. Одна урна для голосования выбирается случайным образом, и из нее выбирается случайный шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?

Решение: рассмотрим событие A – наугад из выбранной урны будет извлечён чёрный шар. Данное событие может произойти или не произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:

B_1 – будет выбрана $1-$я урна;

B_2 – будет выбрана $2-$я урна;

B_3 – будет выбрана $3-$я урна.

Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн равновозможен, следовательно:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

Обратите внимание, что перечисленные гипотезы образуют **полную группу событий**, то есть, по условию чёрный шар может появиться только из этих урн. Проведём простую промежуточную проверку:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

В первой урне $4\,\text{белых} + 7\,\text{черных} = 11\,\text{шаров}$, по **классическому определению**:

$P_{B_1}(A) = \frac{7}{11}$ – вероятность извлечения чёрного шара при условии, что будет выбрана 1-я урна.

Во второй урне только белые шары, поэтому в случае её выбора появление чёрного шара становится *невозможным*: $P_{B_2}(A) = 0$.

И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая **условная вероятность** извлечения чёрного шара составит $P_{B_3}(A) = 1$.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + P(B_2) \times P_{B_2}(A) + P(B_3) \times P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{7}{11} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{6}{11}$$

Получили вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.

Ответ: $\frac{6}{11}$.

Задача 2. Из 1000 ламп 380 относятся к 1 партии, 270 – ко второй, а остальные – к третьей. В первой партии 4% брака, во второй – 3%, в третьей – 6%. Случайно, одна лампа выбрана. Определите вероятность того, что выбранная лампа неисправна.

Решение:

Введем полную группу независимых гипотез:

$$H_i = (\text{Лампа принадлежащая } i - \text{ой партии}), i = 1{,}2{,}3.$$

Найдем вероятность гипотез по классическому определению вероятностей. Всего ламп 1000, из них 1-ой партии принадлежат 380, т.е. $P(H_1) = \frac{380}{1000} =$ $= 0{,}38$, 2-ой партии принадлежат 270, то есть $P(H_2) = \frac{270}{1000} = 0{,}27$, остальные $1000 - 380 - 270 = 350$ – ламп принадлежат 3-ей партии, поэтому $P(H_3) = \frac{350}{1000} = 0{,}35$.

Введем событие $A = \{\text{Лампа бракованная}\}$. По условию даны априорные вероятности: $P(A|H_1) = 0{,}04$, $P(A|H_2) = 0{,}03$, $P(A|H_3) = 0{,}06$.

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3).$$

Подставим в формулу:

$$P(A) = 0{,}38 \times 0{,}04 + 0{,}27 \times 0{,}03 + 0{,}35 \times 0{,}06 = 0{,}0443.$$

Ответ: 0,0443.

Задача 3. Из 30 стрелков 12 поражают цель с вероятностью 0,6, 8 – с вероятностью 0,5 и 10 – с вероятностью 0,7. Случайно выбранный стрелок выстрелил, поразив цель. Какая группа, скорее всего, принадлежала этому стрелку?

Решение:

Введем полную группу гипотез:

$$H_1 = (\text{Стрелок принадлежал первой группе}),$$

$$H_2 = (\text{Стрелок принадлежал второй группе}),$$

$$H_3 = (\text{Стрелок принадлежал третьей группе}).$$

По классическому определению вероятности:

$$P(H_1) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, P(H_2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}, P(H_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Введем событие $A = \{\text{Стрелок попал в мишень}\}$. Выпишем условные вероятности: $P(A|H_1) = 0{,}6$, $P(A|H_2) = 0{,}5$, $P(A|H_3) = 0{,}7$.

Найдем сначала вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2) + P(A|H_3) \times P(H_3).$$

Подставим в формулу:

$$P(A) = \frac{2}{5} \times 0{,}6 + \frac{4}{15} \times 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}7 = 0{,}607.$$

Теперь найдем апостериорные вероятности того, что стрелок принадлежал i-ой группе, если он попал в цель, по формуле Байеса.

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \times 0{,}6}{0{,}607} \approx 0{,}395,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15} \times 0{,}5}{0{,}607} \approx 0{,}22,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0{,}7}{0{,}607} \approx 0{,}384.$$

Таким образом, стрелок принадлежал первой группе.

Ответ: первой группе.

Задача 4. Две машины производят детали. Вероятность изготовления стандартной детали на первом станке составляет 0,8, на втором – 0,9. Производительность первой машины в пять раз выше, чем у второй. Рабочий взял случайную деталь, и она оказалась стандартной. Какова вероятность того, что эта часть сделана на второй машине?

Решение:

Пусть $\boldsymbol{A} = \{\text{Деталь признана стандартной}\}$.

Введем систему гипотез:

$$H_1 = \{\text{проверка была осуществлена первым атоматом}\},$$

$$H_1 = \{\text{проверка была осуществлена вторым атоматом}\}.$$

Пусть производительность второго автомата равна x, а первого равна $5x$.

Найдем вероятность гипотез:

$$P(H_1) = \frac{5x}{x+5x} = \frac{5}{6}, P(H_2) = \frac{5x}{x+5x} = \frac{1}{6}.$$

Согласно условию задачи условные вероятности события А равны:

$$P(A\,|H_1) = 0{,}8;\ P(A\,|H_2) = 0{,}9.$$

Применим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(A|H_1) \times P(H_1) + P(A|H_2) \times P(H_2)$$

Подставим в формулу:

$$P(A) = \frac{5}{6} \times 0{,}8 + \frac{1}{6} \times 0{,}9 = \frac{49}{60}.$$

Тогда по формуле Байеса вероятность того, что деталь изготовлена вторым автоматом, если она казалась стандартной:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \times 0{,}9}{\frac{49}{60}} = \frac{9}{49} \approx 0{,}184.$$

Ответ: 0,184.

Домашнее задание:

1. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнения нормы для лыжника составляет 0,9, для бегуна 0,75, для велосипедиста – 0,8. Найдите вероятность того, что спортсмен, выбранный случайным образом, выполнит норму.

(**Ответ:** 0,845.)

2. Отслеживаемый астрономический объект может находиться в одном из двух состояний: $H1$ или $H2$. Априорные вероятности этих состояний $P(H1) = 0{,}6$, $P(H2) = 0{,}4$. Наблюдение осуществляется независимо двумя обсерваториями. Первая обсерватория обычно дает правильную информацию о состоянии объекта в 90% случаев, а в 10% ошибается; вторая дает правильную информацию в 80% случаев, а в 20% ошибается. Первая обсерватория сообщила, что объект находится в состоянии $H1$, а вторая – в состоянии $H2$. Найти апостериорную вероятность состояния $H1$.

(**Ответ:** 0,771.)

Раздел 3. Статистика

<u>Занятие 10.</u> Среднее арифметическое. Мода. Размах. Медиана (технологическая карта данного урока представлена в Приложении А)

Основные понятия

Основными статистическими характеристиками являются среднее арифметическое, мода, размах, медиана.

Для обозначения **среднего арифметического** набора чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (кратко — просто среднего значения) следует использовать $\bar{x}$. Это соответствует общепринятой мировой практике. Записывать среднее арифметическое при вычислении лучше в виде дроби:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n},$$

где

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – индивидуальные значения признака (варианты),

$n-$ число единиц совокупности (вариант).

Модой обычно называется число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто [5]. **Мода** – это величина признака (варианта), наиболее часто повторяющаяся в изучаемой совокупности.

Под **размахом** набора чисел понимается разность между самым большим и самым маленьким числом в этом наборе:

$$R = X_{max} - X_{min}.$$

Медиана ряда, состоящего из нечетного числа чисел, является номером данного ряда, который будет посередине, если этот ряд упорядочен. Если число чисел в строке четное, то медиана строки равна половине суммы двух чисел в середине строки, упорядоченных в порядке возрастания [9].

Задачи к уроку:

Задача 1. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) $12; 18; 45; 13; 11; 9.$

Решение:

$(12 + 18 + 45 + 13 + 11 + 9) : 6 = 18.$

Ответ: $18.$

б) $34; -4; -18; 44; 3.$

Решение:

$(12 + (-4) + (-18) + 44 + 3) : 5 = 7{,}4.$

Ответ: $7{,}4.$

Задача 2. Найти размах ряда чисел:

а) $69, 33, 65, 19, 56, 98.$

Решение:

$98 - 19 = 79.$

Ответ: $79.$

б) $0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}18;\ 0{,}999.$

Решение:

$0{,}999 - 0{,}18 = 0{,}819$.

Ответ: $0{,}819$.

Задача 3. Найдите моду ряда чисел:

а) $5, 12, 38, 5, 76, 12, 67, 5, 38$.

Решение:

Мода: 5

Ответ: 5.

б) $-7; -8; -11; 0; -7; -11$.

Решение:

Мода $-7; -11$.

Ответ: $-7; -11$.

Задание 4. Машенька в первой четверти по русскому языку получила следующие оценки: $3, 4, 5, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 5, 5, 4$. Какую оценку за четверть получит Маша?

Решение:

Данную задачу можно решить двумя способами:

1 способ.

Всего Маша получила 12 оценок, и первая идея – это найти средний балл – среднее арифметическое всех полученных Машей оценок:

$$\frac{3+4+5+5+5+5+2+3+4+5+4}{11} = \frac{45}{11} \approx 4.$$

2 способ.

Ранжируем последовательность оценок Маши, т.е. выписываем оценки в порядке возрастания:

$$2, 3, 3, 4, 4, \mathbf{4}, 5, 5, 5, 5, 5.$$

Четверка, которая выделена в этом ряду отметок, находится точно посередине – перед ней и после неё стоит по 5 оценок.

Ответ: Маша заслужила оценку «4».

Домашнее задание:

1. Найдите медиану ряда, представленного ранжированной выборкой, содержащей четное количество членов:

$$3, 5, 5, 6{,}8, 8, 33{,}34, 46, 67, 69, 76.$$

(**Ответ:** 20,5.)

2. Приведены ранжированные данные в секундах результатов бега на 100 м девушек 11 класса:

$$11{,}8; 12{,}1; 12{,}5; 12{,}9; 12{,}9; 13{,}3; 14{,}5; 15{,}6; 17{,}6; 17{,}8; 18{,}4.$$

Найдите: а) размах ряда; б) среднее арифметическое ряда; в) медиану ряда; г) моду ряда.

(**Ответ:** а) 6,6; б) 14,5; в) 13,3; г) 12,9.)

<u>Занятие 11-12.</u> Дисперсию выборки и среднее квадратичное отклонение выборки. Математическое ожидание

Основные понятия

Дисперсию числового набора (набора чисел) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ принято обозначать S^2 (читается «эс-квадрат»; заметим, что это именно обозначение, а не степень). При этом в знаменателе дроби:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

стоит количество чисел в наборе n, а не $n - 1$. Говоря языком математической статистики, величина S^2 является смещенной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины X, если считать числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ независимыми наблюдениями значений этой случайной величины [13].

В старших классах наряду с дисперсией набора чисел рассматривается квадратный корень этой величины $S = \sqrt{S^2}$. Предпочтительно называть такую характеристику «**стандартным отклонением**». Часто вы можете найти другое название для этой величины: «**среднее квадратичное отклонение**».

Сумму произведений возможных результатов испытания на их вероятность называют **математическим ожиданием.** Формула нахождения математического ожидания:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

Задачи к уроку:

Задача 1. В Таблице 4 дан закон распределения случайной величины X.

Таблица 4 – Закон распределения случайной величины X

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{p_i}$	0,2	0,3	0,4	0,1

Найдите: математическое ожидание.

Решение:

Найдем математическое ожидание по формуле:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

Подставим в формулу: $M(X) = 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}1 = 1{,}4.$

Ответ: 1,4.

Задача 2. Найти дисперсию выборки и среднее квадратичное отклонение выборки:

$$8, 13, 15, 17, 5, 2.$$

Дисперсию найдем по формуле:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Сначала найдем $\bar{x}$ – среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{8 + 13 + 15 + 17 + 5 + 2}{6} = \frac{60}{6} = 10.$$

Теперь можем полученные значения подставить в формулу:

$S^2 = \frac{(8-10)^2+(13-10)^2+(15-10)^2+(17-10)^2+(5-10)^2+(2-10)^2}{6} = \frac{4+9+25+49+25+64}{6} \approx$

$\approx 29{,}3.$

Среднее квадратичное отклонение выборки найдем по формуле:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Подставим значение в формулу:

$S = \sqrt{29{,}3} \approx 5{,}4.$

Ответ: $29{,}3;\ 5{,}4.$

Задача 3. Вычислить математическое ожидание числа очков при бросании игральной кости.

Решение:

Вероятность каждого возможного результата при бросании игральной кости равна $1/6$. Математическое ожидание равно:

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=$$
$$=3{,}5.$$

Ответ: $3{,}5.$

Домашнее задание:

1. Найти дисперсию выборки и среднее квадратичное отклонение выборки: $2, -1, 3, -2, 5.$

(**Ответ:** $6{,}44;\ 2{,}58.$)

Раздел 4. Обобщение

<u>Занятие 13-14.</u> Решение задач из ЕГЭ

Задачи к уроку:

Задание 1. Автоматическая линия производит батареи. Вероятность того, что готовый аккумулятор неисправен, составляет $0{,}02$. Перед упаковкой каждая батарея проходит систему контроля. Вероятность того, что система отклонит неисправную батарею, составляет $0{,}98$. Вероятность того, что система по ошибке отклонит работающую батарею, составляет $0{,}01$.

Определите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарея будет отклонена системой мониторинга.

Решение:

Все возможности выбора батареек (1) делятся на неисправные $(0{,}01)$ и исправные $(1-0{,}02=0{,}98)$:

$$1=0{,}02+0{,}98.$$

Умножим вероятности выбора разных видов батареек на соответствующие им вероятности забракованные системой:

$$p = 0{,}02 \times 0{,}98 + 0{,}98 \times 0{,}01 = 0{,}0196 + 0{,}0098 = 0{,}0294$$

Ответ: 0,0294.

Задание 2. В коллекции биологических билетов всего 25 билетов. Только в двух встречается вопрос о животных. На экзамене выпускник получает один случайно выбранный билет из этой коллекции. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о животных [20].

Решение:

Вероятность события находится по формуле классического определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где

$m -$ количество благоприятных исходов;

$n -$ количество всех событий.

Т.к. только в двух билетах встречается вопрос о животных, то благоприятных событий 2. Всего билетов 25.Тогда,

$$P = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Ответ: 0,08.

Задание 3. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, составляет 0,94. Вероятность того, что он продлится более двух лет, составляет 0,86. а) Найти вероятность того, что он прослужит менее двух лет, но больше года. б) Найти вероятность того, что он прослужит меньше года.

Решение:

Решение:

Вероятность того, что чайник прослужит больше года, равна 0,94, значит, вероятность того, что он прослужит меньше года, равна $1 - 0{,}94 = 0{,}06$.

Это ответ на пункт б).

Найдем вероятность того, что чайник прослужит от 1 до 2 лет.

$$1 - 0{,}06 - 0{,}86 = 0{,}08.$$

Ответ: а) 0,08; б) 0,06.

Здание 4. Каждый стрелок поражает цель с вероятностью 0,3, независимо от результатов предыдущих выстрелов. Какова вероятность, что он поразит цель не более чем тремя выстрелами?

Решение:

Вероятность промаха $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Вероятность того, стрелок промахнется при трех выстрелах:

$$0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}343.$$

Вероятность того, что стрелок не промахнется $1 - 0{,}343 = 0{,}657$.

Ответ: 0,657.

Задание 5. В чемпионате по спортивной гимнастике принимают участие 50 спортсменов: 24 из США, 13 из Мексики, остальные из Канады. Порядок выступления гимнасток определяется по жребию. Найдите вероятность того, что первая спортсменка будет из Канады.

Решение:

Благоприятное событие A: первой выступает спортсменка из Канады

Количество всех событий группы n – соответствует количеству всех гимнасток. $n = 50$.

Количество благоприятных событий: m – соответствует количеству гимнасток из Канады: $m = 50 - (24 + 13) = 13$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13}{50} = 0{,}26.$$

Ответ: 0,26.

Задание 6. У Алекса было 4 рубля в кармане и 2 монеты по 5 рублей каждая. Петя, не глядя, перенес три монеты в другой карман. Найти вероятность того, что монеты по пять рублей находятся в разных карманах [20].

Решение:

Всего 6 монет. В Таблице 5 представлены возможные варианты перекладывания:

Таблица 5 – Возможные варианты перекладывания

1 карман			**2 карман**		
5	1	1	5	1	1
1	5	1	1	5	1
1	1	5	1	1	5

$$P1 = 2/6 * 4/5 * 3/4 = 1/5$$

«**5**» «**1**» «**1**»

$$P2 = 4/6 * 2/5 * 3/4 = 1/5$$

«**1**» «**5**» «**1**»

$$P3 = 4/6 * 3/5 * 2/4 = 1/5$$

«**1**» «**1**» «**5**»

$$P = P1 + P2 + P3 = 3/5 = 0{,}6$$

Ответ: 0,6.

Домашнее задание:

1. Подготовиться к проверочной работе.

Занятие 15. Проверочная работа

Проверочная работа состоит из 5 заданий:

Задача 1. В Таблице 6 показано время, которое Лена потратила на подготовку домашнего задания, на неделю во время дистанционного обучения.

Таблица 6 – Время, потраченное на домашнее задание

День недели	Время, час
Понедельник	5
Вторник	3
Среда	3,5
Четверг	4
Пятница	4,5
Суббота	4

1. Сколько в среднем часов в день Лена делала домашнее задание?

2. Найдите моду этого ряда данных.

Ответ: $1.\ 4$ ч; $2.\ 4$ ч.

Задача 2. Генеральный директор 100000 рублей в месяц, четверо его заместителей – по 50000 рублей, и 15 сотрудников компании – по 15000 рублей.

1. Найдите среднее арифметическое зарплат всех сотрудников компании.

2. Найдите медиану зарплат всех сотрудников компании.

Ответ: $1.\ 26250; 2.\ 15000$.

Задача 3. В торговом центре два идентичных торговых автомата раздают мороженое. Вероятность того, что к концу дня мороженое закончится в автомате, составляет $0{,}3$. Вероятность того, что мороженое закончится в обеих машинах, составляет $0{,}12$. Найдите вероятность того, что к концу дня мороженое останется в обеих машинах.

Ответ: $0{,}52$.

Задача 4. Стрелок стреляет в цель один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же цели. Вероятность поражения цели одним выстрелом составляет $0{,}6$. Найти вероятность того, что цель будет поражена (один из выстрелов).

Ответ: $0{,}84$.

Задача 5. В 9 классе учатся 7 учащихся, в 10 – 9 учащихся, а в 11 – 8 учащихся. Для работы на пришкольном участке надо выделить двух учащихся из 9 класса, трех – из 10, и одного – из 11 . Сколько существует способов выбора учащихся для работы на пришкольном участке?

Ответ: 14112.

Занятие 16. Разбор результатов проверочной работы

При проведении 16, заключительного урока, запланированная цель выражена в этих параграфах, ход этого урока зависит от анализа проверочной работы, написанной учениками:

— развитие навыков и отражение образовательной деятельности;

— анализ ошибок, допущенных в проверочной работе;

— выявлять трудности, выстраивать алгоритм коррекции и самостоятельно его реализовывать;

— повторять и систематизировать знания и навыки в тех разделах программы, в которых было допущено наибольшее количество ошибок.

2.4 Программно-методическая поддержка к курсу по выбору

В качестве программно-методической поддержки курса по выбору для темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» был разработан онлайн-курс, имеющий одноименное название. Тематическое планирование онлайн-курса полностью совпадает с запланированным тематическим курсом в период обучения в школе.

Данный курс направлен на выполнение межпредметных связей, расширенное освоение множества вопросов, оказывает помощь ученикам быстрее войти в проблематику современной содержательной линии.

Теоретический материал сопровождается модельными примерами и примерами из реальной жизни. Также к каждому уроку прилагаются задания и их разбор, и обязательно домашнее задание.

Перейдем к структуре курса:

1. Данный курс представлен на платформе WordPress (система управления содержимым сайта с открытым исходным кодом; написана на PHP; сервер базы данных — MySQL). Пройдя по ссылке http://localhost/wordpress/ (ссылка пока не работает, так как сайт не опубликован сети Интернет), мы оказываемся на стартовой странице курса, где представлено главное меню. На рисунке 8 представлен титульный экран данного курса.

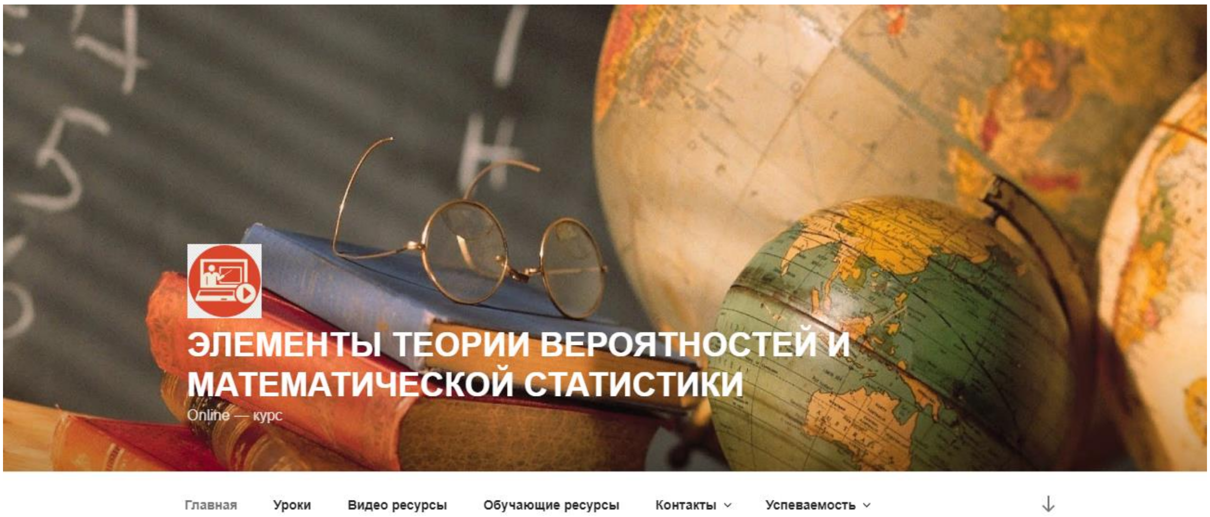
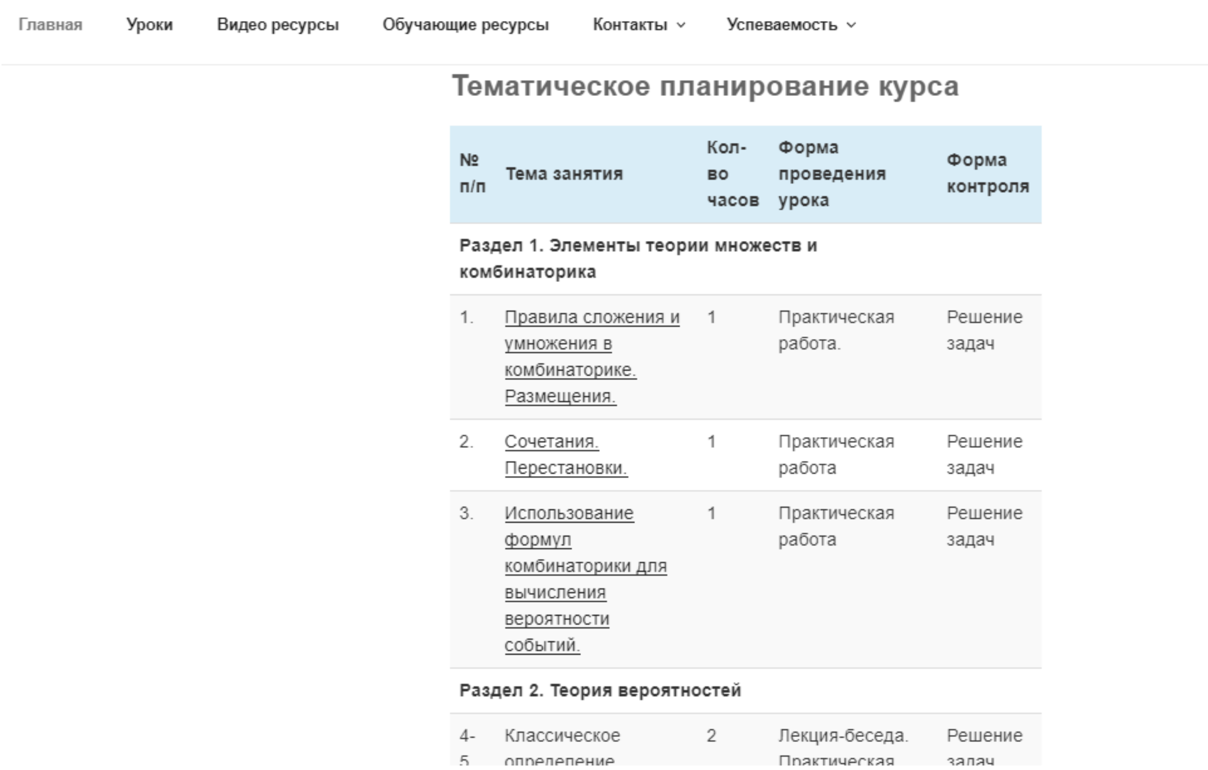


Рисунок 8 – Титульный экран

2. Прокрутив колесико мыши вниз, мы оказываемся на главной странице сайта (рисунок 9). Тут нас встречают приветственные слова, описание курса и нагрузка (соответствует Таблице 2) (рисунок 10). Каждый урок из разделов курса подчеркнут, это значит, что кликнув по любому из представленных уроков, мы перейдем к содержательной части.

Для учителя, в удобной форме, сделана страница МЕРОПРИЯТИЯ, которая предполагает распределение уроков по дням, назначение онлайн-конференций и уроков. На рисунке 11 в качестве примера представлено распределение уроков данного курса по дням.

Рисунок 9 – Главная страница сайта



Главная Уроки Видео ресурсы Обучающие ресурсы Контакты Успеваемость

Тематическое планирование курса

№ п/п	Тема занятия	Кол-во часов	Форма проведения урока	Форма контроля
Раздел 1. Элементы теории множеств и комбинаторика				
1.	Правила сложения и умножения в комбинаторике. Размещения.	1	Практическая работа.	Решение задач
2.	Сочетания. Перестановки.	1	Практическая работа	Решение задач
3.	Использование формул комбинаторики для вычисления вероятности событий.	1	Практическая работа	Решение задач
Раздел 2. Теория вероятностей				
4-5	Классическое определение	2	Лекция-беседа. Практическая	Решение задач

Рисунок 10 – Нагрузка

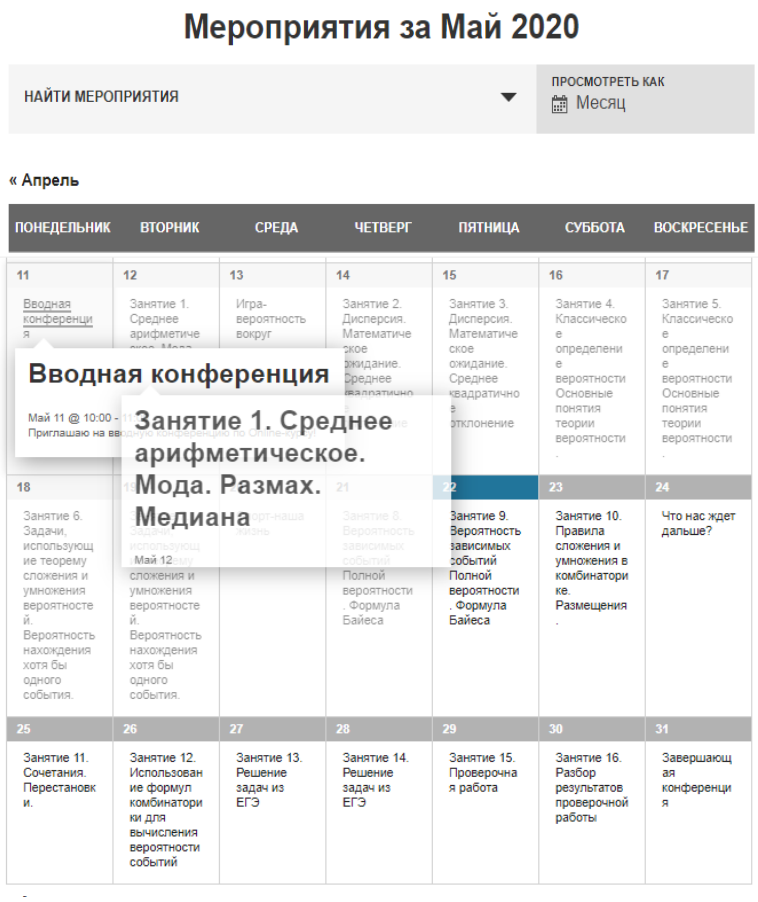


Рисунок 11 – Распределение уроков

3. Передвигаясь далее по главному меню, зайдем на вкладку Уроки (рисунок 12). Здесь в виде списка отображаются раздел и номер урока. В качестве примера рассмотрим Раздел 3. Статистика «Урок №10. Среднее арифметическое. Мода. Размах. Медиана». Данный урок начинается с основных понятий, а чтобы дальше просмотреть содержание урока, нужно нажать на кнопку <u>читать далее</u>. Нажимая, кнопку читать далее, мы перенесемся к теоретической и практической частям урока. Также после каждого урока, есть возможность оставить комментарий. Учащиеся могут делиться своими впечатлениями и организовывать обсуждения.

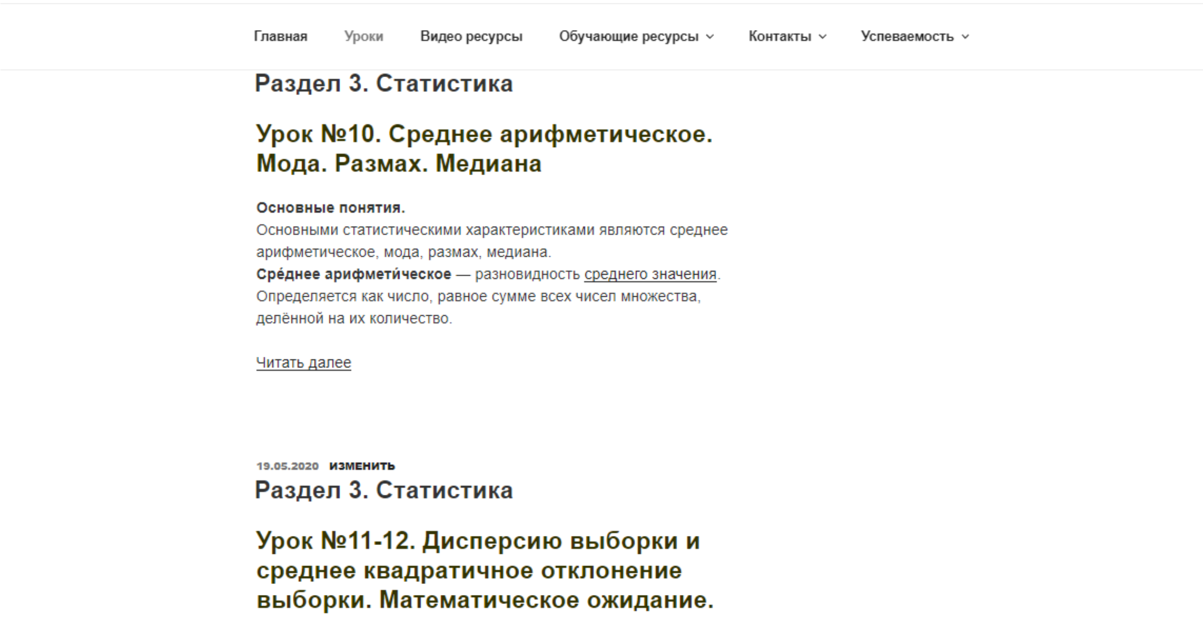


Рисунок 12 – Уроки

После каждого урока разработаны задачи для самостоятельного решения. Нажимая на кнопку начать тест (рисунок 13). Появляются, запланированные учителем задачи (рисунок 14). Они сделаны по порядку. Чтобы завершить тест необходимо выполнить все задания. Для более сложных задач для учеников есть подсказка, которая может натолкнуть на правильное решение.

Когда мы решили нашу задачу необходимо ввести ответ в пустое поле. Предположим, что мы ответили неправильно. Тогда наш ответ выделят в красный цвет и прикрепят подробное решение для нахождения ошибки на том или ином этапе. В случае получения системы правильного ответа, его выделят зеленым цветом и предложат рассмотреть основные этапы решения.

Следует отметить, что некоторые тесты ограничены по времени, так как находятся после разделов.

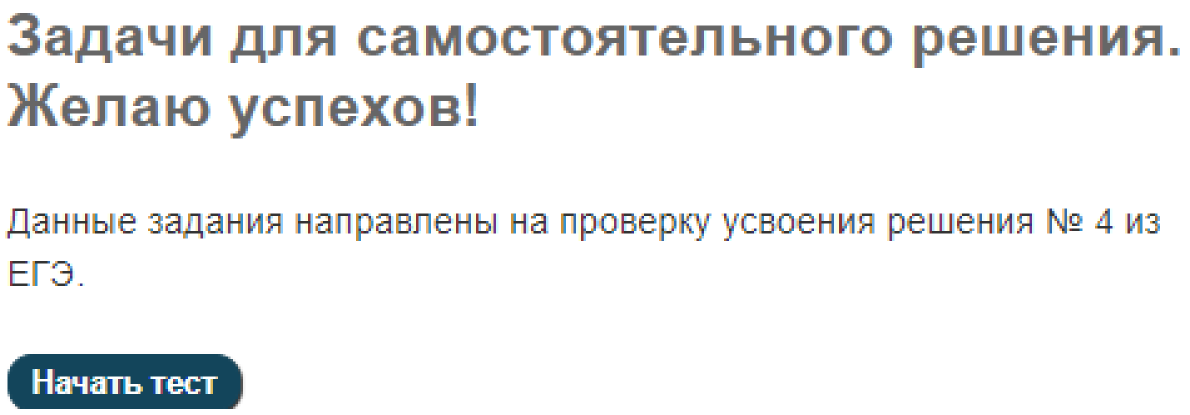


Рисунок 13 – Пример теста для проверки знаний

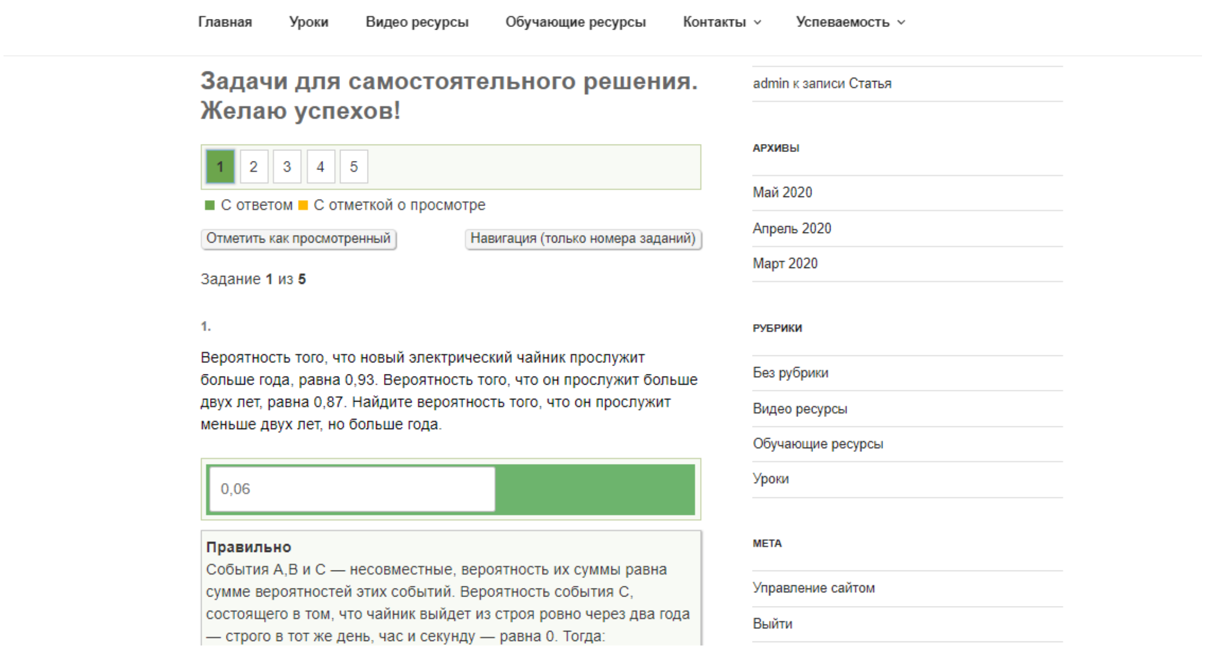


Рисунок 14 – Пример задания в тесте

4. Двигаясь далее по главному меню, перейдем на вкладку Видео ресурсы (рисунок 15). Использование видео ресурсов является примером применения нетрадиционных форм проведения занятий для поддержания плодотворной и успешной учебной деятельности учащихся. Кроме того

способствует развитию различных сторон психической деятельности учащихся, и прежде всего, внимания и памяти.

В этой вкладке представлен ряд видео ресурсов, которые не являются дополнениями к урокам, они являются дополнениями к разделам, в общем, и способствуют расширению кругозора в рамках прохождения данного курса. На рисунке ниже представлен пример видео ресурса под названием «Комбинаторика 1. Вводный урок, что соответствует Разделу 1. Элементы теории множеств и комбинаторика.

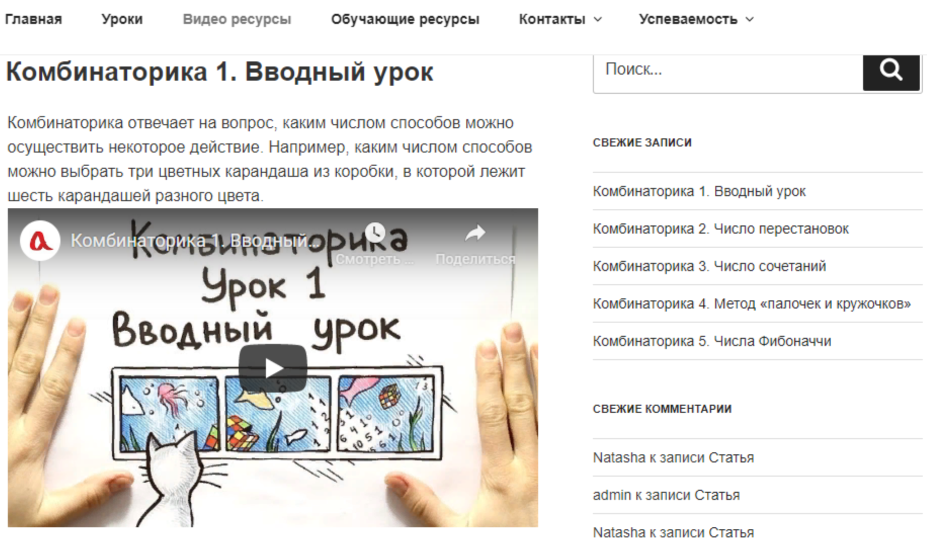


Рисунок 15 – Видео ресурсы

5. Двигаясь далее по главному меню, перейдем на вкладку Обучающие ресурсы (рисунок 16).

На протяжении всего процесса обучения перед учителем встает задача сделать материал запоминающимся, интересным, чтобы ученики за короткое время усвоили как можно больше. В этом случае незаменимым помощником становятся ЦОРы (Цифровые образовательные ресурсы).

На данной вкладке ученикам предлагается закрепить пройденный по курсу материал. Обратим внимание на рисунок 16, на нём отображён обучающий ресурс «Основные темы теории вероятностей», который направлен на закрепление знаний основных теорем теории вероятностей, а точнее нужно выбрать формулу и прикрепить ее к теореме, к которой она относиться.

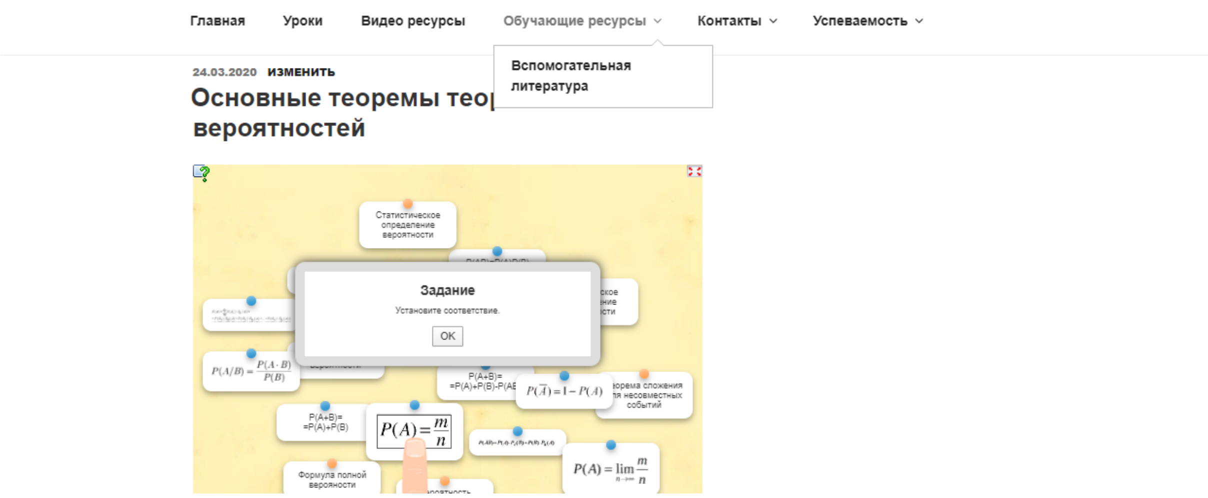


Рисунок 16 – Обучающие ресурсы

6. Двигаясь далее по главному меню, перейдем на вкладку Контакты (рисунок 17). На данной вкладке можно просмотреть, где был создан образовательный сайт. Прокрутив колесико мыши вниз, мы увидим поле для обратной связи (рисунок 18). Данное поле предназначено для передачи учениками домашнего задания преподавателю. Система очень удобно налажена, ученику лишь требуется заполнить поля: Ваше имя; Ваш e-mail (данные поля являются обязательными); Тема сообщения; Сообщение. В поле Сообщение прикрепляется домашнее задание по выполненной теме. Нажимаем кнопку отправить и домашнее задание доставлено на проверку преподавателю.

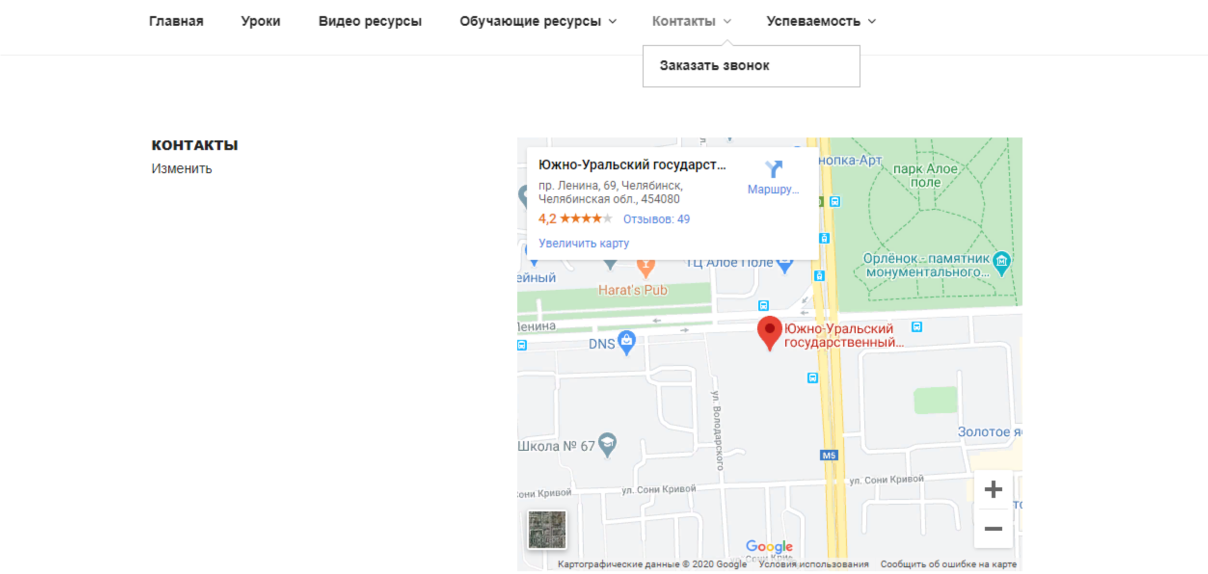


Рисунок 17 – Контакты

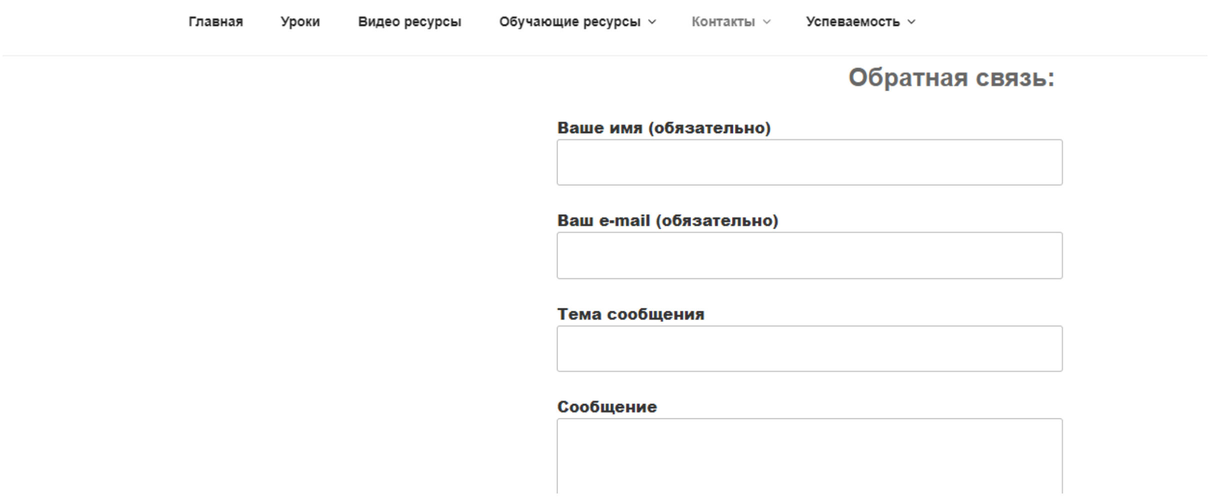


Рисунок 18 – Обратная связь

Обратим внимание, что вкладка Контакты содержит дочерний элемент Заказать звонок (рисунок 19), перейдем на него. На данной вкладке в случае возникновения вопросов по организации и проведения курса можно заказать звонок, указав: Ваше имя (обязательно); Ваш номер. В течение некоторого времени с вами свяжутся и ответят на ваши вопросы.

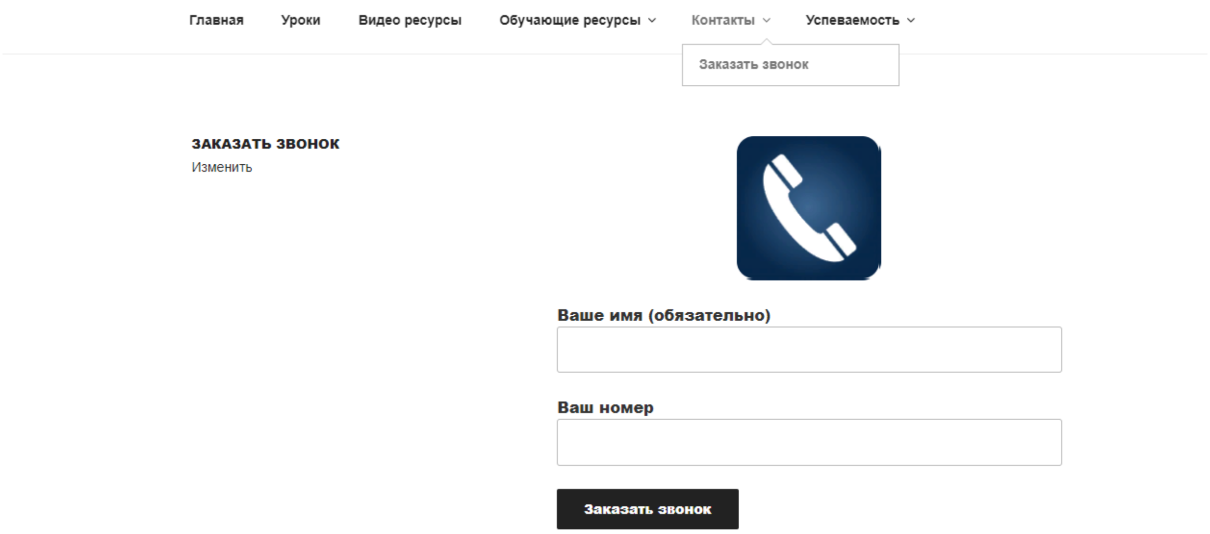
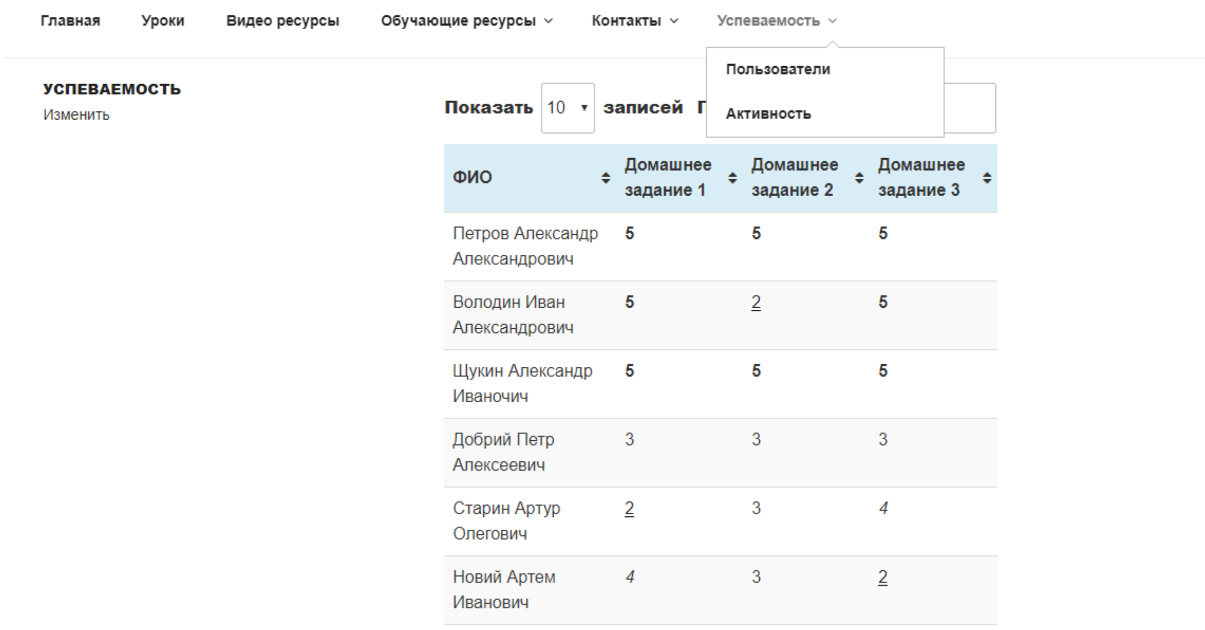


Рисунок 19 – Заказать звонок

7. Двигаясь далее по главному меню, перейдем на вкладку Успеваемость (рисунок 20). На данной вкладке, как и в привычном, для нас журнале, выставлены оценки по пройденным темам за домашнее задание. Оценка **5** – выделена жирным шрифтом, 4 – курсивом, 2 – подчеркнута, нажав на 2, мы перейдем на тему, по которой получили неудовлетворительную оценку, и сделать работу над ошибками.



ФИО	Домашнее задание 1	Домашнее задание 2	Домашнее задание 3
Петров Александр Александрович	5	5	5
Володин Иван Александрович	5	2	5
Щукин Александр Иваночич	5	5	5
Добрий Петр Алексеевич	3	3	3
Старин Артур Олегович	2	3	4
Новий Артем Иванович	4	3	2

Рисунок 20 – Успеваемость

Для учителя в удобной форме организована отчетность по домашнему заданию в форме Статистики. На рисунке 21 представлены примеры того, как может просматривать статистику по темам учитель и также отображать её для учащихся. Именно анализ показателей помогает лучше увидеть пробелы у учащихся и позволяет скорректировать процесс обучения.

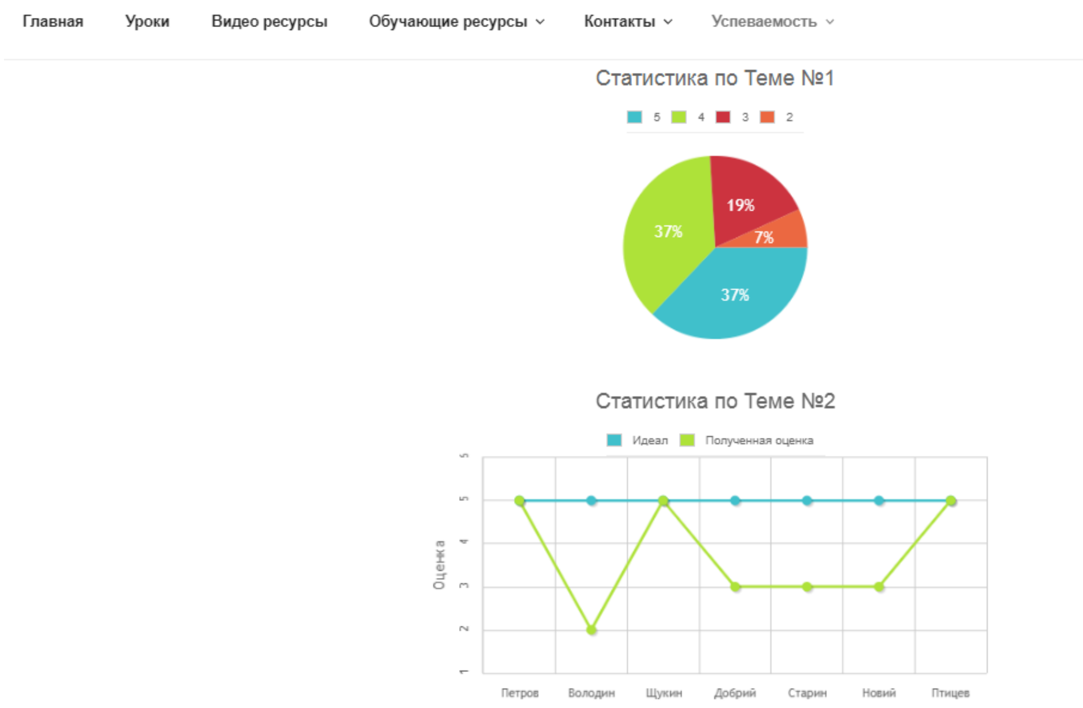


Рисунок 21 – Статистика по темам

Также вкладка Успеваемость имеет уже два дочерних элемента Пользователи и Активность. Для примера перейдем на вкладку Пользователи (рисунок 22), она содержит удобный интерфейс для преподавателя, в виду того, что он может просмотреть, кто присоединился к курсу и какие активности за последнее время были у частников.

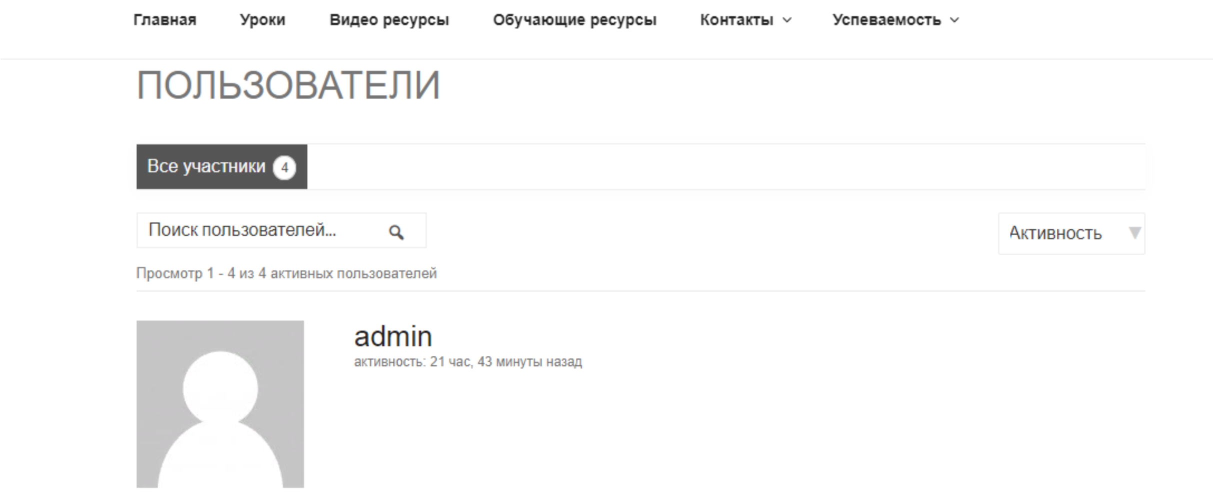


Рисунок 22 – Пользователи

8. Важно, что онлайн-курс адаптирован для пользователей, у которых есть какие-либо нарушения зрительного аппарата. Доступность сайтов очень важна. Панель для слабовидящих устраняет вопросы, связанные с контрастностью и размером шрифта. Нужно лишь нажать на кнопку Версия для слабовидящих (рисунок 23). Сайт обновится и предстанет в версии удобной для пользователя.

Рисунок 23 – Версия для слабовидящих

В конце обзора курса хочется отметить, что онлайн-обучение может быть не только отличным вариантом для получения знаний, но и послужит развитию информационной компетентности учащихся. Также стоит учитывать такие преимущества как:

— индивидуальный темп обучения – вы можете изучать материалы по собственному графику, без привязки к группе, времени и месту работы;

— доступность – вы можете учиться можно с любого компьютера, смартфона в удобное время;

— эффективная обратная связь с учителями в течение всего периода обучения;

— курс в «кармане» – вы можете в любое время просмотреть урок и передать работу преподавателю для проверки.

Как вы знаете, образование является важным социальным процессом, поэтому оно должно быть максимально доступным для каждого человека. Обучение в режиме реального времени позволяет решить эту проблему, потому что онлайн-обучение удобно, весело и эффективно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В квалификационной работе по теме «Методические особенности изучения элементов теории вероятностей и математической статистики в средней школе» нами было рассмотрено введение материала в обучение в школьном курсе алгебры.

Проанализировав современные учебники по изучению темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики», был сделан вывод, что существуют проблемы с реализацией этого материала в школьных учебниках. Виной тому, стало относительно недавнее введение вероятностно-статистической линии в школьный курс математики. Также, авторы разных учебных пособий по-разному подходят к изучению составляющих стохастической линии. В одних учебниках на первый план выдвигаются вероятностные понятия, в других – статистические, в-третьих – все понятия рассматриваются отдельно.

Подводя итоги, следует отметить, что достигнуты цель и все поставленные задачи квалификационной работы. В первую очередь рассмотрены стандартные методы решения типовых задач по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики», а также подобраны и решены задания более сложного уровня. Использование подобных задач способствует развитию математической и логической культуры у учащихся, развитию интереса к математике, поскольку открывает для них новые способы и возможности для самостоятельного поиска. В работе были решены следующие задачи:

1. Рассмотрены исторические аспекты введения стохастической линии в школьный курс математики.
2. Проанализированы вопросы, изучающиеся в курсе математики по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики».
3. Изучены возрастные особенности при изучении данной темы в10-11 классах.

4. Выполнен анализ учебной литературы, посвященной введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики.

5. Осуществлен анализ материалов ЕГЭ и ОГЭ по теме «Элементы теории вероятностей и математической статистики».

6. Разработан курс по выбору для темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики».

7. В качестве программно-методической поддержки курса по выбору для темы «Элементы теории вероятностей и математической статистики» разработан онлайн-курс.

В подтверждении гипотезы можно сказать, что курс, направленный на изучение элементов теории вероятностей и математической статистики среди учащихся 10 классов, в рамках курса по выбору, позволяет повысить интерес к математике и способствует развитию навыков работы с новым продуктом.

В ходе выполнения данной дипломной работы достигнута цель и решены поставленные задачи, а гипотеза нашла свое практическое подтверждение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов Ш. А. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 287 с.

2. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

3. Бунимович Е. А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики / Е. А. Бунимович // Математика в школе. – 2002. – № 4. – С. 52-58.

4. Буняковский В. Я. Основания математической теории вероятностей: учебное пособие / В. Я. Буняковский. – Санкт-Петербург: Типография Императорской Академии Наук. – 1846. – 479 с.

5. Высоцкий И. Р. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики / И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко // Математика в школе, 2014. – №4.

6. Горлач Б. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / Б. А. Горлач. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 320 с.

7. Муравин Г. Л. Алгебра. 9 кл.: учебник / Г. Л. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

8. Муравин Г. Л. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень.10 кл.: учебник / Г. Л. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

9. Муравин Г. Л. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень.11 кл.: учебник / Г. Л. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 318 с.

10. Муравин Г. Л. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень.11 кл.: методическое пособие / Г. Л. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2014. – 130 с.

11. Никольский С. М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2014. – 335 с.

12. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430с.

13. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: книга для учителя / М.К. Потапов, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2008. – 245с.

14. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 464 с.

15. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

16. Ткачева М. В. Элементы статистики и вероятность: учебное пособие для 9 классов / М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова. – 2-е изд. – М., 2005. – 112 с.

17. Тюрин Ю. Н. Теория вероятностей и статистика: учебное пособие для общеобразовательных учебных заведений / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – М.: 2008. – 256 с.

18. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования: электронный ресурс / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2010. – 50 с.

19. Щербатых С. В. Методическая система обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы: дис. доктора педагогических наук / Место защиты: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – М., 2011. – 438 с.

20. Ященко И. В. ЕГЭ 2018. Математика. Теория вероятностей. Задача 4 (профильный уровень) рабочая тетрадь / И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2018. – 64 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Технологическая карта урока

I. Основные сведения

Тема урока: Среднее арифметическое. Мода. Размах. Медиана.

Тип урока: Повторение изученного материала, практикум, обобщение.

Применение образовательной технологии: здоровьесберегающая

II. Результативно-целевая основа проектирования урока

Цель урока: использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных: среднее значение, мода, размах, медиана выборки, сформировать навыки самостоятельной работы.

Планируемые предметные результаты освоения курса:

Выпускник научится:

— использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных: среднее значение, мода, размах, медиана выборки.

Выпускник получит возможность:

— определять условия для решения типовых задач.

Планируемые личностные результаты освоения курса:

1. Готовность и способность к саморазвитию, самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.
2. Формирование компетенций анализа, проектирования, ориентации деятельности.

Планируемые метапредметные результаты освоения курса (регулятивные, познавательные, коммуникативные универсальные учебные действия (УУД))

Обучающийся сможет:

1. Определять необходимые действие (я) в соответствии с учебной и познавательной задачей и составлять алгоритм их выполнения (Регулятивные УУД).

2. Вносить коррективы в текущую деятельность на основе анализа изменений ситуации для получения запланированных характеристик продукта/результата (Регулятивные УУД).

3. Соотносить реальные и планируемые результаты индивидуальной образовательной деятельности и делать выводы (Регулятивные УУД).

4. Строить логические рассуждения, умозаключение и делать выводы (Познавательные УУД).

5. Выбирать наиболее эффективные решения поставленной задачи. (Познавательные УУД).

6. Осуществлять учебное сотрудничество с учителем и сверстниками на основе заданных правил взаимодействия (Коммуникативные УУД).

7. Грамотно строить высказывания в устной и письменной форме (использовать речевые средства) (Коммуникативные УУД).

8. Вести понятия статистических характеристик: среднее арифметическое, размах, мода и медиана (Познавательные УУД).

Результаты освоения темы урока в форме действий, подлежащих освоению обучающимися, представлены в Таблице А.1.

Таблица А.1 – Результаты освоения темы урока

Базовый уровень	Повышенный уровень
Б1. **Использует** простейшие способы представления и анализа статистических данных. Б2. **Дает** определение среднему значению, моде, размаху, медиане выборки.	П1**. Определяет** условия для решения типовых задач.

III. Перечень средств ИКТ, используемых на уроке:

— персональный компьютер (ПК) учителя;

— интерактивная доска;

IV. Описание особенностей применяемой технологии здоровьесберегающей

При внедрении в образовательный процесс здоровьесберегающих технологий, которые предполагают совокупность педагогических, психологических и медицинских воздействий, направленных на защиту и обеспечение здоровья учащихся, формирование у них ценностного отношения к своему здоровью, происходит организация здоровьесберегающей образовательной среды учащегося.

Название и описание здоровьесберегающей технологии: «Профилактика и коррекция нарушений зрения» Гимнастика для глаз.

1. Откинувшись на спинку стула, сделать глубокий вдох, наклонившись вперед сделать выдох. Повторить 5-6 раз.
2. Откинувшись на спинку стула, прикрыть веки, крепко зажмурить глаза и затем открыть веки. Повторить 5-6 раз.
3. Поднять глаза к вверху, сделать ими круговые движения по часовой стрелке, затем – против часовой стрелки. Повторить 5-6раз.
4. Руки – вперед, посмотреть на кончики пальцев, поднять руки вверх (вдох), следить глазами за руками, не поднимая головы, руки опустить (выдох). Повторить 5-6 раз.
5. Смотреть прямо перед собой на дальний предмет 2-3 секунды, перевести взгляд на кончик носа на 3-5 секунд. Повторить 6-8 раз.

V. Описание этапов и учебных ситуаций

Этапы урока

1. Организационный момент. (2 минуты).
2. Актуализация знаний. Мотивация учебной деятельности школьников (6 минут).
3. Формулировка темы и целей урока (2 минуты).
4. Обобщение и систематизация знаний и способов деятельности (13 минут).
5. Физ. минутка. (2минуты).
6. Применение знаний и умений (12 минут).
7. Подведение итогов. Рефлексия (3 минуты).

Далее в Таблице А.2 рассмотрена структура урока.

Таблица А.2 – Структура урока

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты
1	*2*	*3*	*4*
1. Организационный момент	Приветствует учащихся. Отмечает отсутствующих	Приветствуют учителя. Вызываются, когда слышат свою фамилию.	
2. Актуализация знаний. Мотивация учебной деятельности школьников	Для подведения к формулировке темы урока организовывает небольшую интеллектуальную игру в форме ребуса. Обобщает итоги данной игры, формулирует тему. С помощью наводящих вопросов, определяет необходимость изучения данной темы в реальной жизни и профессиональной деятельности. «Каков средний возраст современного кинозрителя? (величина А) Какой самый популярный фильм 2019 года? (величина В) Чему равен максимальный возраст младшей половины аудитории фильма «Гравити Фолз»? (величина С)	Старательно решают ребусы, чтобы получить наилучший результат, анализирует его, и выдвигают предположения, о чем будет урок. Учувствуют в обсуждении результатов с учителем, отвечают на его вопросы. Внимательно слушают информацию о предстоящей деятельности.	Личностные: готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. Метапредметные: 1. Определяет понятия статистических характеристик: среднее арифметическое, размах, мода и медиана. 2. Строить логическое рассуждение, умозаключение и делать выводы. 3. Осуществлять учебное сотрудничество с учителем и сверстниками на основе заданных правил взаимодействия. Предметные: использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных: среднее значение, мода, размах, медиана выборки.

Продолжение таблицы А.2

1	*2*	*3*	*4*
3. Формулировка темы и целей урока	Формулирует тему урока «Среднее арифметическое. Мода. Размах. Медиана». Проговаривает с учениками цели урока.	Записывают тему урока в тетрадь. Проговаривают с учителем цели урока.	Метапредметные: 1. Строить логические рассуждения, умозаключение и делать выводы. 2. Осуществлять учебное сотрудничество с учителем и сверстниками на основе заданных правил взаимодействия;
4. Обобщение и систематизация знаний и способов деятельности	Для эффективного выполнения практической работы проводит повторение изученного материала. Опр.: среднему значению, моде, размаху, медиане выборки. Выдает задание: «1. Найдите среднее арифметическое чисел: а) $12; 18; 45; 13; 11; 9.$ 2. Найти размах ряда чисел: а) $69, 33, 65, 19, 56, 98.$ 3. Найдите моду ряда чисел: а) $5,12,38,5,76,12,67,5,3$ 4. Машенька в первой четверти по русскому языку получила следующие оценки: $3, 4, 5, 5, 5, 5, 2, 3, 4,5,5,$ Какую оценку за четверть получит Маша?	Внимательно слушают учителя, зная необходимость данного материала в последующей деятельности на уроке. Выполняют задания, отвечают и задают вопросы. 1. а) Решение: Сложив все данные числа, получим 108. Полученную сумму разделим на кол-во этих чисел, т. е. $108: 6 = 18.$ Ответ: 18. 2. а) Решение: $98 - 19 = 79.$ Ответ: 79. 3. Решение: Мода: 5 Ответ:5. 4.Решение: Всего Маша получила 11 оценок, средний балл – среднее арифметическое всех полученных Машей оценок. Получаем	Личностные: формирование компетенций анализа, проектирования, организации деятельности. Метапредметные: 1. Определять необходимые действие (я) в соответствии с учебной и познавательной задачей и составлять алгоритм их выполнения. 2. Определяет понятия статистических характеристик: среднее арифметическое, размах, мода и медиана. Предметные: 1. Использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных: среднее значение, мода, размах, медиана

Продолжение таблицы А.2

1	2	3	4
	По одному ученики выполняют эти задания доске» По ходу выполнения задания помогает учащимся.	приблизительно 4.	выборки. 2. Определять условия для решения типовых задач.
5. Физ. минутка	Проводит разминку, сидя за партами, направленную на глаза, руки, кисти, шею.	Выполняют указания учителя.	
6. Применение знаний и умений	Выдает задание, которое необходимо выполнить. Задание: «1. Найдите среднее арифметическое чисел: б) $34; -4; -18; 44; 3$. 2. Найти размах ряда чисел: б) $0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}18;\ 0{,}999$. 3. Найдите моду ряда чисел: б) $-7; -8; -11; 0; -7; -1$ 4. Машенька в первой четверти по русскому языку получила следующие оценки: $3, 4, 5, 5, 5, 5, 2, 3, 4{,}5{,}5,$ Какую оценку за четверть получит Маша? Найти второй способ решения» Контролирует, помогает при возникновении вопросов.	Выполняют задание самостоятельно, но могут вести обсуждение с одноклассником для решения задания. 1. б) Решение: Сложив все данные числа, получим 37. Полученную сумму разделим на кол-во этих чисел, т. е. $37: 5 = 7{,}4$. Ответ: 7,4. 2.б) Решение: $0{,}999 - 0{,}18 = 0{,}819$. Ответ: 0,819. 3.б) Решение: Мода $-7; -11$. Ответ: $-7; -11$. 4. Решение: 2 способ. Ранжируем последовательност ь оценок Маши, т.е. выписываем оценки в порядке возрастания: $2, 3, 3, 4, 4{,}4, 5, 5, 5, 5,$ Четверка, которая выделена в этом ряду отметок, находится точно посередине –	Личностные: формирование компетенций анализа, проектирования, организации деятельности. Метапредметные: 1. Определять необходимые действие (я) в соответствии с учебной и познавательной задачей и составлять алгоритм их выполнения. 2. вносить коррективы в текущую деятельность на основе анализа изменений ситуации для получения результата. 3. Ориентироваться в содержании текста. 4. Осуществлять учебное сотрудничество с учителем и сверстниками. Предметные: 1. Использовать простейшие способы представления и анализа статистических

Продолжение таблицы А.2

1	2	3	4
		перед ней и после неё стоит по 5 оценок. Ответ: Маша заслужила оценку «4».	данных: среднее значение, мода, размах, медиана выборки. 2. Определять условия для решения типовых задач.
7. Подведение итогов. Рефлексия	Проводит рефлексию для проверки эмоционального состояния учащихся во время урока, для этого использует рефлексию «Плюс, минус, интересно». Выдает домашнее задание «Найдите медиану ряда, представленного ранжированной выборкой, содержащей четное количество членов: 3, 5, 5, 6,8, 8, 33,34, 46, 67, 69, 76. 2. Приведены ранжированные данные в секундах результатов бега на 100 м девушек 11 класса: 11,8;12,1;12,5;12,9; 12,9;13,3;14,5;15,6;17,6; 17,8;18,4. Найдите: а) размах ряда; б) среднее арифметическое ряда; в) медиану ряда; г) моду ряда».	Анализируют свою деятельность и эмоциональное состояние на уроке. Получают домашнее задание.	Личностные: готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию Метапредметные: 1. Соотносить реальные и планируемые результаты индивидуальной образовательной деятельности и делать выводы. 2. Грамотно строить высказывания в устной и письменной форме (использовать речевые средства).