Отпечатано на ротапринте челябинского ЦНТИ
Заказ № 512. Тираж 100 экз.

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Челябинский государственный педагогический университет

Т.В.Ершова

МОДИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Учебное пособие

Челябинск 1995

Печатается по решению кафедры алгебры и издательства "Факел" ЧГПУ

УДК 517.51

Учебное пособие посвящено некоторым вопросам теории приближения функций. Оно содержит теоремы о двух типах модификаций линейных операторов, введенных В.С.Виденским, Т.П.Пендиной и Г.Х.Кировым с целью улучшения порядка приближения дифференцируемых функций. Модификации характеризуются свойствами их центральных моментов и структурой остаточных членов. Большая часть рассматриваемых вопросов до сих пор не освещалась в учебной литературе и монографиях.

Пособие предназначено для проведения спец.курса и спец. семинара по теории приближения на старших курсах математических факультетов

Научный редактор: д-р ф.-м.н., проф. кафедры математического анализа РГПУ В.С.Виденский

Рецензент: канд.ф.-м.н., доц. кафедры алгебры ЧГПУ В.М.Ситников

Предисловие

В предлагаемом учебном пособии мы излагаем некоторые алгебраические вопросы теории приближения функций. Пособие не отражает всего разнообразия направлений в этих исследованиях. В нем рассмотрены отдельные аспекты теории, относящиеся к модификациям линейных операторов.

В теории приближения функций большое значение имеют линейные положительные операторы (коротко л.п.о.). Это плодотворное понятие введено в рассмотрение П.П.Коровкиным в 50-ые годы. Они широко применяются как в теоретических исследованиях, так и в прикладных областях математики. Однако эти операторы сравнительно медленно сходятся к приближаемой функции. Так, например, последовательность многочленов Бернштейна, являющихся широко известными л.п.о., приближает бесконечно дифференцируемые функции лишь со скоростью n^{-1}. Построение по данным линейным операторам новых операторов - модификаций - связано с намерением улучшить качество приближения для гладких функций. Идея эта была впервые выдвинута С.Н.Бернштейном [1] для функций, имеющих четыре производные.

Существует несколько вариантов построения модификаций, предложенных российскими и зарубежными математиками, в основном, для конкретных операторов. В данном учебном пособии рассмотрим два варианта модификаций. Первый вариант модификаций был предложен в 1987г. В.С.Виденским и Т.П.Пендиной, второй - в 1992г. болгарским математиком Г.Х.Кировым. Эти конструкции имеют весьма общий характер, благодаря чему оказалось возможным выявить их свойства, имеющие алгебраическую природу [3-5]. Изложение этих свойств и составляет содержание данного пособия.

Автор благодарит В.С.Виденского за полезные советы в работе над пособием.

Введение

Во введении мы приводим основные понятия, объясняем необходимость построения новых конструкций - модификаций данных операторов - на примере многочленов Бернштейна. С этой целью формулируем теорему Вороновской-Бернштейна для случая многочленов Бернштейна.

Как обычно, через $C[0,1]$ обозначается пространство непрерывных функций с нормой: $\|f\| = \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$.

Символ $C^{(m)}[0,1]$ обозначает пространство функций, непрерывно дифференцируемых m $(m\ge 0)$ раз на отрезке $[0,1]$; $C^{(0)}[0,1] = C[0,1]$.

Отображение $A:C[0,1] \to C[0,1]$ называется линейным оператором, заданным на пространстве непрерывных функций $C[0,1]$, если для $\forall\ f,g \in C[0,1]$ и $\forall\ \alpha,\beta \in R$ выполняется

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag.$$

Условимся значение функции Af в точке $x \in [0,1]$ обозначать через $A(f,x)$.

Если оператор A отображает пространство $C[0,1]$ в пространство полиномов, то он называется полиномиальным или многочленом.

Классическим примером полиномиальных операторов являются многочлены Бернштейна. Для функции $f\in C[0,1]$ многочлены Бернштейна определяются формулами

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left[\frac{k}{n}\right]p_{nk}(x), \tag{0.1}$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1],\ n \in N . \tag{0.2}$$

Для функции $e_0(t) = 1$ из формул (0.1) и (0.2) имеем

$$B_n(e_0,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1, \tag{0.3}$$

так как

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k(1-x)^{n-k} = [x+(1-x)]^n = 1 .$$

Несложно вычислить (см.,например, [1],[2]), что для функции $e_1(t) = t$

$$B_n(e_1,x) = x , \tag{0.4}$$

а для функции $e_2(t) = t^2$

$$B_n(e_2,x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} . \tag{0.5}$$

Следовательно,

$$B_n(e_1,x) = e_1(x),\ B_n(e_2,x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n} . \tag{0.6}$$

Линейный оператор A, заданный на пространстве $C[0,1]$, называется линейным положительным оператором (кратко л.п.о.), если для любой неотрицательной функции $f\in C[0,1]$ функция Af также неотрицательна.

Благодаря (0.1), (0.2) легко понять, что многочлены Бернштейна являются л.п.о.

Из определения л.п.о. следует, что для л.п.о. A из неравенства $f \le g$ вытекает $Af \le Ag$.

Так как $-|f| \le f \le |f|$, то имеем

$$- A(|f|) \le Af \le A(|f|). \tag{0.7}$$

Неравенство (0.7) перепишем так:

$$|Af| \le A(|f|). \tag{0.8}$$

Свойство л.п.о., выраженное неравенством (0.7), определяет то значение, которое имеют положительные операторы в теории приближения функций. Действительно, если функцию f приближаем функцией g с остаточным членом r, т.е.

$$f = g + r , \tag{0.9}$$

то из (0.9) и (0.8) получим

$$|A(f-g)| \le A(|r|). \tag{0.10}$$

Последнее неравенство означает, что задача оценки погрешности для оператора A сводится в некотором смысле к более простой задаче: оценке модуля остатка r.

Но, к сожалению, л.п.о. медленно сходятся к приближаемой функции. Поясним сказанное. Соотношение (0.6) показывает, что многочлены Бернштейна B_n приближают бесконечно дифференцируемую функцию $e_2(t) = t^2$ с малой скоростью порядка n^{-1}. Действительно, из (0.6) следует, что

$$\| B_n e_2 - e_2 \| = \frac{1}{4n} .$$

Этот факт не случаен. Имеет место теорема, называемая теоремой Вороновской - Бернштейна. Приведем только ее формулировку.

Теорема Вороновской - Бернштейна. Если функция $f \in C[0,1]$ дважды дифференцируема в точке $x \in [0,1]$, то

$$B_n(f,x) - f(x) = f^{(2)}(x) \cdot \frac{x(1-x)}{2n} + O(n^{-1}) . \qquad (0.11)$$

Доказательство теоремы приведено, например, в книге [2]. Соотношение (0.11) показывает, что порядок приближения функции f многочленами $B_n f$ зависит только от ее второй производной и характеризуется величиной n^{-1}. Более того, П.П.Коровкиным [6] было доказано, что порядок приближения полиномиальными л.п.о. не может быть выше n^{-2} в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$. Следует отметить, что такой аппарат приближения, как ряды Фурье, приближает функцию тем лучше, чем выше степень гладкости функции. Таким образом, появляется задача конструирования из данных последовательностей л.п.о. последовательностей новых операторов, которые бы реагировали на количество производных у функции. Ясно, что вновь построенные операторы, являясь линейными, уже не будут положительными.

Изложим два варианта решения этой задачи. Новые операторы, построенные по данным операторам, называются модификациями. В первой главе рассмотрим модификации В.С.Виденского и Т.П.Пендиной, а во второй - модификации Г.Х.Кирова. Обратим внимание читателей на то, что мы ограничимся изложением тех общих свойств модификаций, которые не связаны с положительностью операторов.

ГЛАВА I

МОДИФИКАЦИИ В.С.ВИДЕНСКОГО И Т.П.ПЕНДИНОЙ

В этой главе определим модификации В.С.Виденского и Т.П.Пендиной, центральные моменты и остаточные члены операторов. Далее, докажем формулы, позволяющие вычислить центральные моменты и остаточные члены модификаций, зная центральные моменты и остаточные члены исходных операторов соответственно.

1. Основные понятия

Пусть $L_n (n \geq 1)$ - линейные операторы, действующие в пространстве $C[0,1]$ и нормированные условием

$$L_n(1,x) = 1 \quad \text{для} \ \forall\, x \in [0,1] . \qquad (1.1)$$

Отметим, что линейные операторы L_n не обязаны быть положительными.

Центральными моментами порядка l $(l \geq 0)$ линейных операторов L_n называются функции

$$S_l(L_n,x) = L_n((t-x)^l,x) , \ x \in [0,1] . \qquad (1.2)$$

Модификации В.С.Виденского и Т.П.Пендиной задаются следующими рекуррентными формулами

$$L_{n1} f = L_n f ,$$

$$L_{n\nu} f = L_n f - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} L_{n,\nu-k} f^{(k)} \quad \text{при } \nu \geq 2. \qquad (1.3)$$

Операторы $L_{n\nu}$ заданы на пространстве $C^{(\nu-1)}[0,1]$ и, очевидно, являются линейными и удовлетворяют условию

$$L_{n\nu}(1,x) = 1 \quad \text{для} \ \forall \ x \in [0,1]. \qquad (1.4)$$

Действительно, $L_{n\nu}(1,x) = L_n(1,x) = 1$. Для $\nu \geq 2$ имеем

$$L_{n\nu}(1,x) = L_n(1,x) - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!} L_{n,\nu-k}(1^{(k)},x) = 1 - 0 = 1.$$

Аналогично (1.2) определяются центральные моменты модификаций $L_{n\nu}$. Ими называются функции

$$S_l(L_{n\nu},x) = L_{n\nu}((t-x)^l,x), \ x \in [0,1], \ l \geq 0 . \qquad (1.5)$$

Вслед за С.Н.Бернштейном [1] для функции $f \in C[0,1]$, дифференцируемой m ($m \geq 0$) раз в точке $x \in [0,1]$, напишем по формуле Тейлора разложение

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k + r_m(f,t,x) , \tag{1.6}$$

где $r(f,t,x)$ - остаточный член.

Применим к обеим частям (1.6) какой-либо оператор. Им может быть и оператор L_n, и оператор L_{nv}. Для оператора L_n получим

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} L_n((t-x)^k,x) + L_n(r_m(f,t,x),x) . \tag{1.7}$$

Используя определение центральных моментов, условие (1.1) и обозначение

$$R_m(L_n,f,x) = L_n(r_m(f,t,x),x), \tag{1.8}$$

формулу (1.7) перепишем в виде

$$L_n(f,x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{S_k(L_n,x)}{k!} f^{(k)}(x) + R_m(L_n,f,x). \tag{1.9}$$

Слагаемое $R_m(L_n,f,x)$ назовем остаточным членом оператора L_n порядка m, примененного к функции f. Аналогично определяется $R_m(L_{nv},f,x)$ - остаточный член оператора L_{nv}.

2. Центральные моменты порядков меньших v операторов L_{nv}

Напомним, что центральный момент нулевого порядка операторов L_{nv} равен единице. Мы покажем, что центральные моменты модификаций L_{nv} порядков $1,2,\ldots,v-1$ равны нулю, при этом, разумеется, $v \geq 2$. В связи с этим заметим, что у многочленов Бернштейна B_n равен нулю центральный момент первого порядка. Соответствующие выкладки проведены в пункте 7 главы I.

Теорема 2.1. Для $v \geq 2$, $1 \leq \gamma \leq v-1$ выполняется

$$S_\gamma(L_{nv}) = 0 . \tag{2.1}$$

Доказательство. Докажем формулу (2.1) индукцией по v. Для $v=2$ вычислим центральный момент первого порядка. Согласно (1.3) и (1.1) получим

$$L_{n2}((t-x),x) = L_n((t-x),x) - \frac{S_1(L_n,x)}{1!} \cdot L_n(((t-x))^{(1)},x) =$$

$$= S_1(L_n,x) - S_1(L_n,x)\, L_n(1,x) = 0 .$$

Предположим, что для $v \leq l-1$ $S_\gamma(L_{nv}) = 0$ при $1 \leq \gamma \leq v-1$. Рассмотрим случай $v = l$. Тогда по формуле (1.3) имеем

$$L_{nl}((t-x)^\gamma,x) = L_n((t-x)^\gamma x) - \sum_{k=1}^{l-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!} \cdot L_{n,l-k}([(t-x)^\gamma]^{(k)},x). \tag{2.2}$$

Напомним, что $L_n((t-x)^\gamma,x) = S_\gamma(L_n,x)$. Пусть $\gamma = 1$. Тогда $[t-x]^{(k)} = 0$ для $k = 2,\ldots,l-1$. Следовательно,

$$L_{nl}(t-x,x) = S_1(L_n,x) - [S_1(L_n,x) + 0 + \ldots + 0] = 0 .$$

Пусть теперь, $\gamma \geq 1$. Разобъем сумму, стоящую в правой части (2.2), на три части.

При $k>\gamma$ имеем $[(t-x)^\gamma]^{(k)} = 0$ и

$$L_{n,l-k}([(t-x)^\gamma]^{(k)}, x) = 0 .$$

При $k=\gamma$ получим $[(t-x)^\gamma] = \gamma!$ и

$$\frac{S_\gamma(L_n,x)}{\gamma!} L_{n,l-\gamma}([(t-x)^\gamma]^{(\gamma)},x) = S_\gamma(L_n,x) .$$

При $k<\gamma$ вычислим $[(t-x)^\gamma]^{(k)} = \gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-(k-1))\cdot(t-x)^{\gamma-k}$.
А так как $\gamma-k < l-k$, то по предположению индукции

$$L_{n,l-k}((t-x)^{\gamma-k},x) = 0 .$$

Окончательно,

$$L_{nl}((t-x)^\gamma,x) = S_\gamma(L_n,x) - S_\gamma(L_n,x) = 0$$

Теорема доказана.

3. Центральные моменты порядка v операторов L_{nv}

В теореме 3.1 докажем формулу, которая позволяет вычислить центральный момент порядка v модификаций L_{nv}. Для его вычисления необходимо знать центральные моменты исходных операторов L_n.

Нам потребуются функции α_{nv}, введенные В.С.Виденским и Т.П.Пендиной [2]. Они определяются рекуррентными формулами, аналогичными (1.3).

$$\alpha_{n0} = \frac{S_0(L_n)}{0!}, \quad \alpha_{n1} = \frac{S_1(L_n)}{1!},$$
$$\alpha_{nv} = \frac{S_v(L_n)}{v!} - \sum_{k=1}^{v-1} \frac{S_k(L_n)}{k!}\,\alpha_{n,v-k} \quad \text{при } v \ge 2. \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что α_{nv} задаются центральными моментами операторов L_n порядков $0,1,\dots,n$.

Теорема 3.1. Для $v \ge 1$ выполняется

$$\frac{S_v(L_{nv})}{v!} = \alpha_{nv}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Применим индукцию для доказательства формулы (3.2). Для $v=1$ по формуле (1.3) имеем

$$L_{n1}(t-x,x) = L_n(t-x,x) = S_1(L_n,x).$$

Осталось сравнить полученное со вторым равенством из (3.1). Предположим по индукции, что для $v \le i-1$ имеет место (3.2). Рассмотрим случай $v=i$. Применяя (1.3) и определение линейного оператора, выполним следующие преобразования

$$L_{ni}((t-x)^i,x) = L_n((t-x)^i,x) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!} L_{n,i-k}(((t-x)^i)^{(k)},x) =$$
$$= S_i(L_n,x) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!}\, i(i-1)\dots(i+1-k) L_{n,i-k}((t-x)^{i-k},x).$$

Заметим, что $i(i-1)\dots(i+1-k) = \dfrac{i!}{(i-k)!}$. Следовательно,

$$L_{ni}((t-x)^i,x) = S_i(L_n,x) - i!\sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!}\cdot\frac{L_{n,i-k}((t-x)^{i-k},x)}{(i-k)!}.$$

Учитывая предположение индукции, получим

$$\frac{L_{ni}((t-x)^i,x)}{i!} = \frac{S_i(L_n,x)}{i!} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!}\,\alpha_{n,i-k}(x).$$

Применяя (3.1), получим требуемое. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Соотношение (3.2) означает, в частности, что функции α_{nv} представлены через центральные моменты порядка v операторов L_{nv} без рекуррентных формул (3.1).

Замечание 3.2. Формулы (3.1) при $v \ge 1$ легко получить из формул (1.3), полагая $f(t)=(t-x)^v$ и применяя (3.2).

4. Представление $L_{n,v+1}$ через L_{nv}

В теореме 4.1 выведем соотношение (4.1), задающее оператор $L_{n,v+1}$ в иной форме, чем в формулах (1.3). В соотношении (4.1) оператор $L_{n,v+1}$ выражен через предыдущий оператор L_{nv}.

Соотношение (4.1) также означает, что оператор $L_{n,v+1}$ строится согласно требованию изменить оператор L_{nv} так, чтобы у нового оператора $L_{n,v+1}$ сделать нулевым центральный момент порядка v.

Теорема 4.1. Для $v \ge 1$ имеет место

$$L_{n,v+1}f = L_{nv}f - \alpha_{nv} L_n f^{(v)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Соотношение (4.1) докажем по индукции. Для $v=1$ из (1.3) и (3.1) имеем

$$L_{n2}f = L_n f - \frac{S_1(L_n)}{1!} L_n f^{(1)} = L_{n1}f - \alpha_{n1} L_n f^{(1)}.$$

Пусть (4.1) выполняется для $v \le i-1$. Для случая $v=i$ выполним следующие преобразования, применяя (1.3) и предположение индукции.

$$L_{n,i+1}f = L_n f - \sum_{k=1}^{i} \frac{S_k(L_n)}{k!} L_{n,i+1-k} f^{(k)} = L_n f - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} L_{n,i+1-k} f^{(k)} -$$
$$- \frac{S_i(L_n)}{i!} L_n f^{(i)} = L_n f - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} \left[L_{n,i-k} f^{(k)} - \alpha_{n,i-k} L_n f^{(i)} \right] -$$
$$- \frac{S_i(L_n)}{i!} L_n f^{(i)}.$$

Перегруппируем слагаемые и вновь применим (1.3). Получим

$$L_{n,i+1}f = \left[L_n f - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} L_{n,i-k} f^{(k)} \right] + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} \alpha_{n,i-k} L_n f^{(i)} -$$
$$\frac{S_i(L_n)}{i!} L_n f^{(i)} = L_{ni} f - \left[\frac{S_i(L_n)}{i!} L_n f^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} \alpha_{n,i-k} L_n f^{(i)} \right].$$

Вынесем за скобки $L_n f^{(i)}$. Выражение, оставшееся в скобках, согласно (3.1) заменим на α_{ni}. Таким образом, получим соотношение (4.1) при $v=i$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. Для $v\geq 1$ имеет место

$$L_{n,v+1}f = L_n f - \sum_{k=1}^{v} \alpha_{nk} L_n f^{(k)} . \tag{4.2}$$

Доказательство следствия очевидно.

Замечание 4.1. Соотношение (4.2) задает модификации L_{nv} еще одним способом, отличным от двух других способов, определяемых формулами (1.3) и (4.1).

5. Центральные моменты порядков больших v операторов L_{nv}

В этом пункте докажем формулу, позволяющую вычислить центральные моменты операторов L_{nv}, порядки которых больше v. С помощью формул (5.1) и (3.1) через центральные моменты исходных операторов можно выразить центральные моменты порядков больших v операторов L_{nv}.

Теорема 5.1. Для $i\geq 0$, $v\geq 1$ выполняется

$$\frac{S_{v+i}(L_n)}{(v+i)!} = \sum_{k=0}^{i} \frac{S_k(L_n)}{k!} \alpha_{n,v+i-k} . \tag{5.1}$$

Доказательство. Применим индукцию. При $i=0$ получим равенство (3.2), которое имеет место при любом натуральном v. Напомним, что $S_0(L_n)=1$ ввиду (1.4). Предположим, что (5.1) выполняется для $l\leq i-1$. Пусть $l=i$. В формуле (1.3) положим $f(t)=(t-x)^{v+i}$. Получим

$$\begin{aligned} L_{n,v+1}((t-x)^{v+i}; x) &= L_{nv}((t-x)^{v+i}; x) - \alpha_{nv}(x)\cdot L_n([(t-x)^{v+i}]^{(v)}; x) = \\ &= L_{nv}((t-x)^{v+i}; x) - \alpha_{nv}(x)\cdot\frac{(v+i)!}{i!}\cdot L_n((t-x)^{i},x) = \\ &= L_{nv}((t-x)^{v+i}; x) - \alpha_{nv}(x)\cdot\frac{(v+i)!}{i!} S_i(L_n,x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Показатель степени $v+i$ у центрального момента $L_{n,v+1}((t-x)^{v+i}; x)$ запишем иначе: $v+i=(v+1)+(i-1)$. По предположению индукции напишем

$$\begin{aligned} \frac{L_{n,v+1}((t-x)^{(v+1)+(i-1)},x)}{(v+i)!} &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} \alpha_{n,(v+1)+(i-1)-k}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{S_k(L_n)}{k!} \alpha_{n,v+1-k}(x). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Из (5.2) следует, что

$$\frac{L_{nv}((t-x)^{v+i},x)}{(v+i)!} = \frac{L_{n,v+1}((t-x)^{v+i},x)}{(v+i)!} + \frac{S_i(L_n,x)}{i!} \alpha_{nv}(x) .$$

Используя (5.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{L_{nv}((t-x)^{v+i},x)}{(v+i)!} &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{S_k(L_n,x)}{k!} \alpha_{n,v+1-k}(x) + \frac{S_i(L_n,x)}{i!} \alpha_{nv}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{i} \frac{S_k(L_n,x)}{k!} \alpha_{n,v+i-k}(x) . \end{aligned}$$

Теорема доказана.

6. Остаточные члены операторов L_{nv}

В настоящем пункте остаточный член оператора L_{nv}, примененного к функции f, представим через остаточные члены оператора L_n, действующего на функцию f и некоторые ее производные. Таким образом, задача оценки остаточного члена оператора L_{nv} сводится к задаче оценки остаточного члена оператора L_n . Последняя задача для некоторых типов оператора L_n уже решена. Для многочлена Бернштейна ее решение дано в книге [2].

Рассмотрим два случая.

Первый случай. Предположим, что функция f принадлежит пространству $C^{(v-1)}[0,1]$ и найдем представление остаточного члена оператора L_{nv} (см. теорему 6.1).

Второй случай. В дополнение к условию, что функция f из $C^{(v-1)}[0,1]$ потребуем существования производной порядка $v+l$ ($v\geq 2$, $l\geq 0$) в точке $x\in[0,1]$. Представление остаточного члена оператора L_{nv}, установленное в теореме 6.2 для второго случая, аналогично представлению остаточного члена из теоремы 6.1.

Что касается доказательств теорем 6.1 и 6.2, то последняя доказывается с некоторыми усложнениями по сравнению с первой. Но для удобства читателей приведем доказательства обеих теорем, допуская некоторые сокращения в доказательстве теоремы 6.2. Интересно отметить, что формула (6.3) получается из формулы (6.9) при $l = -1$.

Перейдем к формулированию теоремы 6.1. Пусть функция $f \in C^{(v-1)}[0,1]$. Напишем равенство (1.6) для $m=v-1$ при произвольном, но фиксированном $x \in [0,1]$.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{v-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k + r_{v-1}(f,t,x) . \tag{6.1}$$

Вычислим L_{nv} от правой и левой части (6.1), используя (1.4) и (2.1). Получим

$$L_{nv}(f,x) = f(x) + L_{nv}(r_{v-1}(f,t,x),x) . \tag{6.2}$$

Напомним, что последнее слагаемое в правой части равенства (6.2) называется остаточным членом порядка $v-1$ оператора L_{nv}, примененного к функции f, и обозначается $R_{v-1}(L_{nv},f,x)$. В теореме 6.1 будет указано представление остаточного члена $R_{v-1}(L_{nv},f,x)$ соотношения (6.2) через остаточные члены $R_{v-1}(L_n,f,x)$ и $R_{v-2}(L_n,f^{(1)},x)$, $R_{v-3}(L_n,f^{(2)},x)$, ... , $R_0(L_n,f^{(v-1)},x)$.

<u>Теорема 6.1.</u> Если функция $f \in C^{(v-1)}[0,1]$, $v \ge 2$, то

$$R_{v-1}(L_n,f,x) = R_{v-1}(L_n,f,x) - \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_{nk}(x) R_{v-1-k}(L_n,f^{(k)},x). \tag{6.3}$$

<u>Доказательство.</u> Согласно (4.2)

$$L_{nv}(f,x) = L_n(f,x) - \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_{nk}(x) L_n(f^{(k)},x). \tag{6.4}$$

Сначала напишем равенство (1.9) при $m=v-1$.

$$L_n(f,x) = \sum_{j=0}^{v-1} \frac{S_j(L_n,x)}{j!} f^{(j)}(x) + R_{v-1}(L_n,f,x). \tag{6.5}$$

Затем рассмотрим функцию $f^{(k)}$ при $k = 1,2,\dots,v-1$. Она дифференцируема $v-1-k$ раз на отрезке $[0,1]$. По формуле Тейлора напишем разложение (сравните его с разложением (1.6)).

$$f^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{v-1-k} \frac{f^{(k+i)}(x)}{i!}(t-x)^i + r_{v-1-k}(f^{(k)},t,x) . \tag{6.6}$$

Применим оператор L_n к обеим частям равенства (6.6). Будем иметь

$$L_n(f^{(k)},x) = \sum_{i=0}^{v-1-k} \frac{S_i(L_n,x)}{i!} f^{(k+i)}(x) + R_{v-1-k}(f^{(k)},x). \tag{6.7}$$

В (6.4) $L_n(f,x)$ и $L_n(f^{(k)},x)$ заменим правыми частями соотношений (6.5) и (6.7), при этом получим некоторое представление $L_{nv}(f,x)$. Теперь из (6.2) найдем остаточный член $R_{v-1}(L_{nv},f,x)$. В полученном выражении $L_{nv}(f,x)$ заменим его представлением, о котором речь шла выше. Таким образом, имеем

$$R_{v-1}(L_{nv},f,x) = \sum_{j=0}^{v-1} \frac{S_j(L_n,x)}{j!} f^{(j)}(x) + R_{v-1}(L_n,f,x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_{nk}(x) \Big[\sum_{i=0}^{v-1-k} \frac{S_i(L_n,x)}{i!} f^{(k+i)}(x) + R_{v-1-k}(f^{(k)},x) \Big] - f(x).$$

Выполним очевидные преобразования. Получим

$$R_{v-1}(L_{nv},f,x) = R_{v-1}(L_n,f,x) - \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_{nk}(x) R_{v-1-k}(L_n,f^{(k)},x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{v-1} \frac{S_j(L_n,x)}{j!} f^{(j)}(x) - \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_{nk}(x) \sum_{i=0}^{v-1-k} \frac{S_i(L_n,x)}{i!} f^{(k+i)}(x).$$

Осталось доказать, что разность двух последних сумм равна нулю. Для этого вычислим коэффициенты перед производными $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., $f^{(v-1)}$. Для краткости записи аргумент x опускаем. Коэффициенты будут равны соответственно

$$\frac{S_1(L_n)}{1!} - \frac{S_0(L_n)}{0!}\alpha_{n1}, \quad \frac{S_2(L_n)}{2!} - \frac{S_1(L_n)}{1!}\alpha_{n1} - \frac{S_0(L_n)}{0!}\alpha_{n2}, \ \dots,$$

$$\frac{S_j(L_n)}{j!} - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{S_i(L_n)}{i!}\alpha_{n,j-i}, \dots, \frac{S_{v-1}(L_n)}{(v-1)!} - \sum_{i=0}^{v-2} \frac{S_i(L_n)}{i!}\alpha_{n,v-1-i}.$$

Из формул (3.1) следует равенств нулю этих коэффициентов. Теорема доказана.

Теперь предположим, что функция $f \in C^{(\nu-1)}[0,1]$ дифференцируема $\nu+l$ $(\nu\geq 2, l\geq 0)$ раз в точке $x\in[0,1]$. В равенстве (1.6) следует положить $m=\nu+l$. Затем вычислить $L_{n\nu}$ от правой и левой части полученного равенства, используя (1.4) и (2.1). В данном случае получим

$$L_{n\nu}(f,x) = f(x)+\sum_{k=0}^{l} \frac{L_{n\nu}((t-x)^{\nu+k},x)}{(\nu+k)!} f^{(\nu+k)}(x)+L_{n\nu}(r_{\nu+l}(f,t,x),x). \tag{6.8}$$

$R_{\nu+l}(L_{n\nu},f,x)=L_{n\nu}(r_{\nu+l}(f,t,x),x)$ есть остаточный член порядка $\nu+l$ оператора $L_{n\nu}$, примененного к функции f. Укажем его представление, выраженное через остаточные члены $R_{\nu+l}(L_n,f,x)$ и $R_{\nu+l-1}(L_n,f^{(1)},x)$, $R_{\nu+l-2}(L_n,f^{(2)},x)$, ... , $R_{l+1}(L_n,f^{(\nu-1)},x)$.

Теорема 6.2. Если для функции $f \in C^{(\nu-1)}[0,1]$ в точке $x\in[0,1]$ существует производная $f^{(\nu+l)}(x)$ $(\nu\geq 2, l\geq 0)$, то

$$R_{\nu+l}(L_{n\nu},f,x) = R_{\nu+l}(L_n,f,x) - \sum_{k=1}^{\nu-1}\alpha_{nk}(x)R_{\nu+l-k}(L_n,f^{(k)},x). \tag{6.9}$$

Доказательство. На основании (4.2) имеем

$$L_{n\nu}(f,x) = L_n(f,x) - \sum_{k=1}^{\nu-1}\alpha_{nk}(x)L_n(f^{(k)},x). \tag{6.10}$$

Нас интересует равенство (1.9), написанное при $m=\nu+l$ в точке x, о которой идет речь в условии теоремы.

$$L_n(f,x) = \sum_{i=0}^{\nu+l}\frac{S_i(L_n,x)}{i!}f^{(i)}(x) + R_{\nu+l}(L_n,f,x). \tag{6.11}$$

Функции $f^{(k)}$ $(k=1,2,\dots,\nu-1)$ в точке $x\in[0,1]$ дифференцируемы $\nu+l-k$ раз. Для них понадобятся разложения, аналогичные разложениям (6.6). Применяя к обеим частям этих разложений оператор L_n, получим

$$L_n(f^{(k)},x) = \sum_{i=0}^{\nu+l-k}\frac{S_i(L_n,x)}{i!}f^{(k+i)}(x) + R_{\nu+l-k}(L_n,f^{(k)},x). \tag{6.12}$$

Из (6.8) находим остаточный член $R_{\nu+l}(L_{n\nu},f,x)$, а $L_{n\nu}(f,x)$ преобразуем с помощью (6.10), (6.11) и (6.12). В результате имеем

$$R_{\nu+l}(L_{n\nu},f,x) = \sum_{i=0}^{\nu+l}\frac{S_i(L_n,x)}{i!}f^{(i)}(x) + R_{\nu+l}(L_n,f,x) - \sum_{k=1}^{\nu-1}\alpha_{nk}(x)\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{i=0}^{\nu+l-k}\frac{S_i(L_n,x)}{i!}f^{(k+i)}(x) + R_{\nu+l-k}(L_n,f^{(k)},x)\right] -$$

$$- f(x) - \sum_{k=0}^{l}\frac{L_{n\nu}((t-x)^{\nu+k},x)}{(\nu+k)!}f^{(\nu+k)}(x).$$

В первой сумме, стоящей в правой части последнего равенства, переобозначим переменную суммирования с i на k. Выполним очевидные преобразования. Получим

$$R_{\nu+l}(L_{n\nu},f,x) = \sum_{k=1}^{\nu+l}\frac{S_k(L_n,x)}{k!}f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{\nu-1}\sum_{i=0}^{\nu+l-k}\alpha_{nk}(x)\cdot\frac{S_i(L_n,x)}{i!}\cdot$$

$$\cdot f^{(k+i)}(x) - \sum_{k=0}^{l}\frac{L_{n\nu}((t-x)^{\nu+k},x)}{(\nu+k)!}f^{(\nu+k)}(x) + R_{\nu+l}(L_n,f,x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\nu-1}\alpha_{nk}(x)\,R_{\nu+l-k}(L_n,f^{(k)},x).$$

Теперь к $\dfrac{L_{n\nu}((t-x)^{\nu+k},x)}{(\nu+k)!}$ применим формулу (5.1) и докажем, что

$$\sum_{k=1}^{\nu+l}\frac{S_k(L_n,x)}{k!}f^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{\nu-1}\sum_{i=0}^{\nu+l-k}\alpha_{nk}(x)\frac{S_i(L_n,x)}{i!}f^{(k+i)}(x) -$$

$$-\sum_{k=0}^{l}\sum_{i=0}^{k}\alpha_{n,\nu+k-i}(x)\frac{S_i(L_n,x)}{i!}f^{(k+\nu)}(x) = 0.$$

С этой целью вычислим коэффициенты перед производными $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)}, \dots, f^{(\nu+l)}$. Опуская для краткости записи аргумент x, напишем соответствующие коэффициенты.

$$\frac{S_1(L_n)}{1!} - \frac{S_0(L_n)}{0!}\alpha_{n1},$$

$$\frac{S_2(L_n)}{2!} - \frac{S_1(L_n)}{1!}\alpha_{n1} - \frac{S_0(L_n)}{0!}\alpha_{n2}, \ldots,$$

$$\frac{S_k(L_n)}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{S_i(L_n)}{i!}\alpha_{n,k-i}, \ldots,$$

$$\frac{S_{v+1}(L_n)}{(v+1)!} - \sum_{i=0}^{v+1-1} \frac{S_i(L_n)}{i!}\alpha_{n,v+1-i}.$$

Ввиду (3.1) коэффициенты равны нулю. Теорема доказана.

7. Итоги

Вернемся ко второму случаю из пункта 6. Предположим, что непрерывная функция f имеет в точке $x \in [0,1]$ производную порядка v, т.е. $l=0$. Тогда (6.8) примет следующий вид

$$L_{nv}(f,x) = f(x) + \frac{S_v(L_{nv},x)}{v!} f^{(v)}(x) + R_v(L_{nv},f,x) . \tag{7.1}$$

Благодаря теореме 6.2 этот остаточный член $R_v(L_{nv},f,x)$ можно представить через остаточные члены оператора L_n, примененного к функции и ее производным порядков $1,2,\ldots,v-1$.

Сравним соотношения (0.11) и (7.1). Прежде всего, покажем, что центральный момент первого порядка многочленов Бернштейна равен нулю. Действительно, из линейности операторов B_n, (0.3), (0.4) следует, что

$$S_1(B_n,x) = B_n(e_1,x) - B_n(x,x) = x - x\cdot 1 = 0 .$$

Вычислим центральный момент второго порядка многочленов Бернштейна, используя (0.3), (0.4) и (0.5).

$$S_2(B_n,x) = B_n(e_2,x) - 2xB_n(e_1,x) - x^2B_n(1,x) = \frac{x(1-x)}{n} .$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части соотношения (0.11) запишем как $\dfrac{S_1(B_n,x)}{2!} f^{(2)}(x)$.

Следовательно, модификации L_{nv} обобщают ситуацию, имеющую место

для операторов B_n, причем операторы L_n не обязаны быть многочленами Бернштейна.

Осталось сравнить остаточные члены соотношений (0.11) и (7.1). Укажем на связь между центральным моментом второго порядка многочленов Бернштейна и остаточным членом $O(n^{-1})$. Ясно, что соотношение (0.11) может быть записано в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty} n \left\{ B_n(f,x) - f(x) \right\} = f^{(2)}(x) \frac{x(1-x)}{2} .$$

Для оценки остаточного члена соотношения (7.1), очевидно, понадобится соотношение (6.9), которое приводит к исходным операторам L_n. При изучении их остаточных членов полезно потребовать, чтобы операторы L_n были положительными (см. (0.10)). Тогда в ряде случаев для модификаций L_{nv} можно будет установить соотношение, аналогичное соотношению (0.11), когда остаточный член $R_v(L_{nv},f,x)$ является по отношению к центральному моменту $S_v(L_{nv},x)$ величиной более высокого порядка при $n \to \infty$.

ГЛАВА II

МОДИФИКАЦИИ Г.Х.КИРОВА

В начале этой главы отметим следующий важный факт. Введение понятия центрального момента и его активное использование делает возможным проведение исследования модификаций по единой схеме. Применим эту схему и к модификациям Г.Х.Кирова.

8. Предварительные сведения

Болгарский математик Г.Х.Киров рассмотрел другие модификации многочленов Бернштейна. Его модификации также улучшают приближение для функций, имеющих производные высших порядков.

Г.Х.Киров [8] для функции $f \in C^{(r)}[0,1]$, $r = 0,1,2,\ldots$, ввел полиномы

$$G_{nr}(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{r} \frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^i p_{nk}(x) , \tag{8.1}$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k} .$$

При r=0 они совпадают с классическими многочленами Бернштейна B_n.

Модификации Г.Х.Кирова можно применить к произвольным линейным операторам A_n, действующим в пространстве $C[0,1]$ и удовлетворяющим условию

$$A_n(1,x) = 1 \quad \text{для} \quad \forall\, x \in [0,1]. \qquad (8.2)$$

Введем модификации Г.Х.Кирова $A_{n\nu}$ операторов A_n:

$$A_{n\nu}(f,x) = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{i} A_n\left[\frac{f^{(i)}(t)(t-x)^i}{i!},\, x \right] \quad \text{при} \quad \nu \ge 0. \qquad (8.3)$$

Считаем, что функция $f \in C^{(\nu)}[0,1]$. Легко понять, что для многочленов Бернштейна B_n при $\nu=r$ равенства (8.1) и (8.3) совпадают. Кроме того, модификации $A_{n\nu}$ удовлетворяют условию типа (8.2), т.е.

$$A_{n\nu}(1,x) = 1 \quad \text{для} \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно в формуле (8.3) положить $f(t) = 1$.

Из (8.3) следует, что операторы $A_{n\nu}$ являются линейными.

Представляет интерес понятие центральных моментов новых операторов $A_{n\nu}$. Назовем функцию $A_{n\nu}((t-x)^l,x)$ центральным моментом порядка l ($l \ge 0$) модификации $A_{n\nu}$. Ее будем обозначать $S_l(A_{n\nu},x)$.

Для того, чтобы определить остаточный член оператора $A_{n\nu}$, следует вернуться к пункту 1 главы I и повторить рассуждений относительно соотношений (1.6) - (1.9) с естественной заменой L_n на A_n, $L_{n\nu}$ на $A_{n\nu}$.

9. Центральные моменты операторов $A_{n\nu}$

Центральный момент нулевого порядка модификаций $A_{n\nu}$ равен единице (см. (8.4)); что касается центральных моментов порядков 1,2,..., ν, то они равны нулю. Рассматриваем случай $\nu \ge 1$.

Теорема 9.1. Для $\nu \ge 1$, $1 \le \gamma \le \nu$ выполняется

$$S_\gamma(A_{n\nu}) = 0\,. \qquad (9.1)$$

Доказательство: Положим в соотношении (8.3) $f(t)=(t-x)^\gamma$. Принимая во внимание, что при $i > \gamma$ $[(t-x)^\gamma]^{(i)} = 0$, получим

$$A_{n\nu}((t-x)^\gamma,x) = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^i A_n\left[\frac{[(t-x)^\gamma]^{(i)}(t-x)^i}{i!},\, x \right] =$$

$$= A_n((t-x)^\gamma,x) \sum_{i=0}^{\gamma} (-1)^i \frac{\gamma!}{(\gamma-i)!\,i!}\,.$$

Используя известное свойство биномиальных коэффициентов

$$\sum_{i=0}^{\gamma} (-1)^i \frac{\gamma!}{(\gamma-i)!\,i!} = 0\,, \qquad (9.2)$$

получим требуемое. Теорема доказана.

В теореме 9.2 мы вычислим центральные моменты модификаций $A_{n\nu}$ порядков больших ν. Из формулы (9.5) следует, что они незначительным образом отличаются от центральных моментов тех же порядков исходных операторов A_n.

Для доказательства теоремы 9.2 нам понадобится тождество (9.3), являющееся следствием (9.2).

Предложение 9.1. Справедливо равенство

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i C^i_{\nu+l} = (-1)^\nu C^\nu_{\nu+l-1}\,. \qquad (9.3)$$

Доказательство. Так как

$$\sum_{i=0}^{\nu+l} (-1)^i C^i_{\nu+l} = 0\,,$$

то

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i C^i_{\nu+l} = -\sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} (-1)^i C^i_{\nu+l}\,.$$

По индукции докажем, что при $l \ge 1$

$$\sum_{i=\nu+1}^{\nu+l} (-1)^i C^i_{\nu+l} = (-1)^{\nu+1} C^\nu_{\nu+l-1}\,. \qquad (9.4)$$

При $l=1$ равенство (9.4) очевидно. Пусть (9.4) выполняется при $l \le k$. Рассмотрим случай $l = k+1$. Представим сумму из левой части (9.4) при $l = k+1$ следующим образом.

$$\sum_{i=\nu+1}^{\nu+(k+1)} (-1)^i C^i_{\nu+(k+1)} = (-1)^{\nu+1} C^{\nu+1}_{\nu+k+1} + \sum_{i=\nu+2}^{(\nu+1)+k} (-1)^i C^i_{(\nu+1)+k}\,.$$

К последней сумме применим предположение индукции. Получим

$$\sum_{i=v+2}^{(v+1)+k} (-1)^i C_{(v+1)+k}^{i} = (-1)^{(v+1)+1} C_{(v+1)+k-1}^{v+1} .$$

Таким образом, можно вычислить интересующую нас сумму.

$$\sum_{i=v+1}^{v+(k+1)} (-1)^i C_{v+(k+1)}^{i} = (-1)^{v+1} C_{v+k+1}^{v+1} + (-1)^{v+2} C_{v+k}^{v+1} = (-1)^{v+1} C_{v+k}^{v}.$$

Предложение доказано.

Другое доказательство тождества (9.3) помещено в книге Д. Пойа, глава VII, задача №10 [7].

Теорема 9.2. Для $v\ge 0$, $l\ge 1$ выполняется

$$S_{v+l}(A_{nv}) = (-1)^v C_{v+l-1}^{v} S_{v+l}(A_n) . \tag{9.5}$$

Доказательство. Полагая в соотношении (8.3) $f(t)=(t-x)^{v+l}$, имеем

$$A_{nv}((t-x)^{v+l},x) = \sum_{i=0}^{v} (-1)^i A_n\left[\frac{[(t-x)^{v+l}]^{(i)}(t-x)^i}{i!} , x \right] =$$

$$= S_{v+l}(A_n,x) \sum_{i=0}^{v} (-1)^i \frac{(v+l)!}{(v+l-i)!\,i!} .$$

Осталось применить равенство (9.3). Теорема доказана.

10. Остаточные члены операторов A_{nv}

Содержание этого пункта полезно сравнить с тем, что написано в пункте 6. Остаточные члены модификаций Г.Х.Кирова как и в случае модификаций В.С.Виденского и Т.П.Пендиной представимы через остаточные члены исходных операторов. Но в отличие от модификаций В.С.Виденского и Т.П.Пендиной операторы действуют на функции и ее производные, взятые с некоторым коэффициентом. Здесь также следует рассмотреть два случая, второй из которых имеет локальный характер.

Первый случай. Пусть функция $f\in C^{(v)}[0,1]$. Применим к обеим частям (1.6) при $m=v$ оператор A_{nv}. Учитывая (8.4), (9.1), получим

$$A_{nv}(f,x) = f(x) + A_{nv}(r_v(f,t,x),x) . \tag{10.1}$$

Остаточный член $R_v(A_{nv},f,x)= A_{nv}(r_v(f,t,x),x)$ в (10.1) имеет представление, указанное в следующей теореме.

Теорема 10.1. Если функция $f\in C^{(v)}[0,1]$, $v \ge 0$, то

$$R_v(A_{nv},f,x)= \sum_{k=0}^{v} (-1)^k A_n(r_{v-k}(f^{(k)}, t,x) \frac{(t-x)^k}{k!} ,x) . \tag{10.2}$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{v-k} f^{(i+k)}(x) \frac{(t-x)^i}{i!} + r_{v-k}(f^{(k)},t,x) , \quad k=0,1,\dots,v.$$

Умножая эти равенства на $(t-x)^k/k!$ и используя (8.3), получим

$$A_{nv}(f,x) = \sum_{k=0}^{v} (-1)^k \sum_{i=0}^{v-k} \frac{f^{(i+k)}(x)}{i!k!} A_n((t-x)^{i+k},x) +$$

$$+\sum_{k=0}^{v}(-1)^k A_n(r_{v-k}(f^{(k)},f,x) \frac{(t-x)^k}{k!},x) .$$

Обозначим первую сумму через $\sum_1$ и сделаем в ней замену переменной, полагая $j=i+k$. Тогда $i=j-k$ и при изменении i от 0 до $v-k$ j изменяется от k до v. Следовательно,

$$\Sigma_1= \sum_{k=0}^{v} (-1)^k \sum_{j=k}^{v} \frac{f^{(j)}(x)}{(j-k)!k!} A_n((t-x)^j,x) .$$

Далее поменяем порядок суммирования. Тогда

$$\Sigma_1= \sum_{j=0}^{v} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{f^{(j)}(x)}{(j-k)!k!} A_n((t-x)^j,x) .$$

Из тождеств $\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!k!} = 0$ при $j\ge 1$ и $\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!k!} = 1$ при $j = 0$ следует, что $\sum_1 = f(x)$.

Теорема доказана.

Второй случай. Предположим, что функция $f \in C^{(v)}[0,1]$ в некоторой точке $x \in [0,1]$ имеет производную порядка $v+l$ ($v\ge 0, l\ge 1$). Напишем равенство (1.6) при $m=v+l$ и к обеим частям его применим A_{nv}. Ввиду (8.4), (9.1) имеем

$$A_{nv}(f,x) = f(x) + \sum_{j=v+1}^{v+l} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A_{nv}((t-x)^j,x) + A_{nv}(r_{v+l}(f,t,x),x) . \tag{10.3}$$

Остаточный член $R_{v+l}(A_{nv},f,x) = A_{nv}(r_{v+l}(f,t,x),x)$ в (10.3) имеет представление, аналогичное представлению (10.2). Докажем это.

Теорема 10.2. Пусть функция $f \in C^{(v)}[0,1]$ дифференцируема в точке $x\in[0,1]$ $v+l$ ($v\ge 0, l\ge 1$) раз. Тогда

$$R_{v+l}(A_{nv},f,x) = \sum_{k=0}^{v}(-1)^k A_n\left(r_{v+l-k}(f^{(k)},t,x)\frac{(t-x)^k}{k!},x\right). \qquad (10.4)$$

Доказательство. Для $k=0,1,\dots, v$ по формуле Тейлора имеем

$$f^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{v+l-k} f^{(i+k)}(x)\frac{(t-x)^i}{i!} + r_{v+l-k}(f^{(k)},t,x).$$

Умножим равенства на $(t-x)^k/k!$. Благодаря (8.3) получим

$$A_{nv}(f,x) = \sum_{k=0}^{v}\sum_{i=0}^{v+l-k}(-1)^k\frac{f^{(i+k)}(x)}{i!k!}A_n((t-x)^{i+k},x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{v}(-1)^k A_n\left(r_{v+l-k}(f^{(k)},t,x)\frac{(t-x)^k}{k!},x\right). \qquad (10.5)$$

В первой сумме правой части (10.5) сделаем замену переменной, полагая $j=i+k$, и представим ее в виде двух сумм:

$$\Sigma_1+\Sigma_2 = \sum_{j=0}^{v}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{f^{(j)}(x)}{(j-k)!k!}A_n((t-x)^j,x) +$$

$$\sum_{j=v+1}^{v+l}\sum_{k=0}^{v}(-1)^k\frac{f^{(j)}(x)}{(j-k)!k!}A_n((t-x)^j,x).$$

Сумма Σ_1 уже вычислена при доказательстве теоремы 10.1. Она равна $f(x)$. Для вычисления Σ_2 рассмотрим $\Sigma_3 = \sum_{k=0}^{v}(-1)^k\frac{j!}{(j-k)!k!}$. Будем считать, что $v \ge 1$ (при $v=0$ соотношение (10.4) очевидно). Тогда, если $j=v$, то $\Sigma_3 = 0$. Если $j\ge v+1$, то, полагая $j=v+t$, с учетом (9.3) получим

$$\Sigma_3 = \sum_{k=0}^{v}(-1)^k\frac{(v+t)!}{(v+t-k)!k!} = (-1)^v C^v_{v+t-1} = (-1)^v C^v_{j-1}.$$

Благодаря (9.5) имеем

$$\Sigma_2 = \sum_{j=v+1}^{v+l}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}A_{nv}((t-x)^j,x).$$

Теорема доказана.

11. Заключение

Отметим схожесть методов исследования модификаций Г.Х.Кирова и модификаций В.С.Виденского, Т.П.Пендиной. Свойства модификаций этих двух типов также оказались похожими; хотя, конечно, модификации имеют свои особенности в структуре центральных моментов и остаточных членов. Как для модификаций В.С.Виденского, Т.П.Пендиной, так и для модификаций Г.Х.Кирова возможно получение тех или иных аналогов соотношения (0.11), выведенного Е.В.Вороновской для многочленов Бернштейна. Разумеется, при этом надо наложить на исходные последовательности операторов A_n дополнительные условия: операторы должны быть положительными, поведение их центральных моментов при $n\to\infty$ должно подчиняться определенному закону. Имеется класс положительных операторов, для модификаций двух типов которых получены аналоги соотношения Е.В.Вороновской. Изложение этих результатов выходит за рамки настоящего пособия.

Литература

1. Бернштейн С.Н. Добавление к статье Е.В.Вороновской "Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н.Бернштейна"//Собр.соч. М., 1954. т.2. с.155-158.
2. Виденский В.С. Многочлены Бернштейна. Л., 1990.
3. Ершова Т.В. О некоторых свойствах модификаций многочленов Бернштейна//Функц.анализ. Ульяновск, 1993. вып.34. с.15-26.
4. Ершова Т.В. О некоторых свойствах модификаций Г.Х. Кирова// Вестник ЧГПИ. 1995. вып.1. сер. 4. с.201-205.
5. Ершова Т.В. О приближении гладких функций модификациями многочленов Бернштейна: Дис. ... канд. физ.- мат. наук. Челябинск, 1994. 112 с.
6. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. М.,1959.
7. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975.
8. Kirov G.H. A generalization of the Bernstein polinomials//Math. Balkanica. 1992. v.6. p.147-153.

ОГЛАВЛЕНИЕ