

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Челябинский государственный педагогический университет»

**А.Л. Королев**  
**Компьютерное моделирование технических  
систем**

**Учебное пособие**

Допущено Учебно-методическим объединением по  
профессионально - педагогическому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности 050501.06 – Профессиональное  
обучение (информатика, вычислительная техника и  
компьютерные технологии)

**Челябинск 2009**

УДК 681.14(021)  
ББК 32.973.2 - 04 я43  
К 68

Королев А.Л. Компьютерное моделирование технических систем: учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений / А. Л. Королев. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2009. – 170с.

Пособие посвящено компьютерному моделированию технических систем, которое позволяет существенно расширить знания о свойствах проектируемых объектов. Пособие содержит теоретические положения моделирования, примеры построения и анализа моделей. Построение моделей опирается на доступное программное обеспечение.

ISBN 978-5-85716-803-5

Рецензенты:

В.В. Мокеев, зав. каф. информационных систем ЮУрГУ, д-р тех. наук, профессор

С.А. Хузина, зав. каф. ППП и ПМ ЧГПУ, канд. пед. наук, доцент

Ю.Н. Макаров, канд. тех. наук, доцент ЮУрГУ.

© Королев А.Л., 2009

© Издательство Челябинского  
государственного педагогического  
университета, 2009

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	5
<b>Глава I. Основы моделирования</b> .....	9
§ 1. Исторический обзор развития моделирования.....	9
§ 2. Основные понятия моделирования.....	13
§ 3. Роль моделирования в науке и технике .....	18
§ 4. Компьютерное моделирование .....	21
§ 5. Общая схема построения модели.....	35
§ 6. Адекватность моделей.....	37
§ 7. Классификация моделей.....	40
§ 8. Моделирование в педагогической практике.....	44
Контрольные вопросы к главе 1.....	47
<b>Глава II. Математическое моделирование в технике</b> .....	49
§ 1. Введение в математическое моделирование.....	49
§ 2. Примеры построения математических моделей.....	58
§ 3. Построение безразмерных обобщенных моделей.....	66
§ 4. Методы исследования моделей, численное моделирование .....	71
§ 5. Компьютерный вычислительный эксперимент.....	76
Контрольные вопросы к главе 2.....	79
<b>Глава III. Некоторые актуальные для техники виды моделей</b> .....	81
§ 1. Оптимизационные модели.....	81
§ 2. Структурные модели.....	86
§ 3. Геометрические и графические компьютерные модели.....	90
Контрольные вопросы к главе 3.....	106

<b>Глава IV. Моделирование систем</b> .....	108
§ 1. Системный подход в моделировании.....	108
§ 2. Моделирование сложных систем.....	113
§ 3. Модели регрессионного анализа.....	120
§ 4. Моделирование стохастических систем.....	127
Контрольные вопросы к главе.....	134
<b>Глава V. Моделирование систем автоматического регулирования и управления</b> .....	135
§ 1. Развитие теории автоматического управления.....	135
§ 2. Основные понятия теории автоматического управления.....	137
§ 3. Математическое моделирование систем управления..	141
§ 4. Временные и частотные характеристики типовых звеньев.....	145
§ 5. Преобразование Лапласа и передаточная функция....	149
§ 6. Анализ устойчивости систем управления.....	152
Контрольные вопросы к главе 5.....	160
<b>Терминологический минимум</b> .....	162
<b>Библиографический список</b> .....	165

## Введение

Любая техническая система проходит несколько этапов в своем жизненном цикле: проектирование, подготовка производства, создание и испытания опытных образцов, серийное производство и эксплуатация, модернизация, снятие с производства. На всех этапах жизненного цикла системы в различных видах применяется моделирование, в настоящее время – это компьютерное моделирование. Любая новая техническая система, прежде чем она будет изготовлена, должна быть спроектирована. Проект – это описание еще не существующей системы, которое необходимо для ее создания. При этом проект должен обеспечить новой технической системе после ее изготовления заранее заданные свойства.

Проектирование – это, пожалуй, единственная область человеческой деятельности, в которой с момента ее зарождения до момента внедрения информационных технологий достигнуты самые скромные результаты в повышении производительности. Внедрение средств вычислительной техники и информационных технологий в сферу проектно-конструкторской деятельности представляется самым эффективным шагом, который позволяет автоматизировать и существенно повысить производительность и качество этого вида технической деятельности.

Процесс проектирования технической системы включает следующие стадии:

- разработка технического задания, которое включает описание назначения технической системы, ее параметры и технические требования к изделию с учетом достижений науки и техники, наличия сырьевой базы, ресурсов и прочих ограничений;

- стадия технического предложения предусматривает анализ технического задания, возможных способов создания проектируемого объекта, оценку вариантов проектных решений, выполнение технико-экономического обоснования разработки;
- при разработке эскизного проекта выполняется уточнение общих представлений о системе, производится выбор структуры системы и принципов ее действия;
- техническое проектирование дает полное представление о системе, ее структуре и параметрах.
- рабочее проектирование включает разработку технической документации (чертежей), необходимой для создания объекта в конкретных условиях.

Многие проектные процедуры включают типовые операции: разработка структуры, создание модели, назначение (выбор) параметров, анализ свойств системы по ее модели. Актуальной задачей проектирования является выбор оптимизация структуры и параметров системы, а также рациональных принципов действия.

Разработка технической документации в рамках бумажных технологий является наиболее трудоемкой и рутинной процедурой, требующей временных затрат и человеческих ресурсов. Современные компьютерные технологии автоматизированного конструирования позволяют создавать электронные параметрические чертежи (геометрические модели) деталей и устройств. Изготовление деталей и сборка узлов проводится станками с числовым программным управлением и робототехническими системами. Подобные технологии не требуют чертежей, для них необходим программный код выполнения операций, который и генерируется системами автоматизированного проектирования.

На этапе испытаний опытных образцов технической системы выполняется сравнение проектных параметров и результатов испытаний, на основе которых уточняются параметры системы, модели и корректируются технические решения. На этапе эксплуатации для сложных технических систем выполняется техническая диагностика их состояния с целью распознавания предаварийной ситуации.

И, наконец, накопленная информация используется для создания новых систем, более совершенных и более эффективных. Таким образом, цикл создания новой технической системы повторяется.

Компьютерное моделирование в настоящее время – это мощный инструмент развития техники по той простой причине, что при проектировании новых технических систем необходимо исследовать свойства еще не существующих объектов. Компьютерные модели – основа автоматизированных систем проектирования. Компьютерное моделирование является инструментом, который применяется на всех стадиях создания новой техники – от проекта до технологической подготовки производства, отслеживания жизненного цикла новой технической системы, а также сопровождения изделия в процессе эксплуатации. Все это позволяет создать техническую систему с высокой надежностью, обладающую необходимыми свойствами, требующую минимальных затрат на доработку и испытания опытных образцов.

Моделирование для решения задач проектирования – одно из первых направлений применения компьютера. Естественно, что проектирование выполнялось и без применения вычислительной техники. При этом разработка сложного проекта требовала значительного времени. Новый объект

требовал длительной доработки по результатам испытаний опытных изделий.

Цель настоящего пособия дать представление о современных методах построения моделей технических систем; расширить представления о моделировании; познакомить с методологией компьютерного моделирования в технической сфере; освоить технологию компьютерного моделирования; научить студентов применять методы моделирования для решения конкретных технических задач; сформировать навыки в области моделирования технических систем различного назначения.

Основная концепция пособия – моделирование технических систем на основе универсальных инструментальных программных комплексов. Используются свободно распространяемые и учебные версии современных программных комплексов моделирования: MVStudio, КОМПАС 3D-LT, VisSim, MathLab. Данные программные комплексы имеют профессиональные версии, которые могут успешно использоваться студентами на основе знаний и умений, полученных при освоении учебных версий.

Настоящее учебное пособие подготовлено по материалам учебного курса, который читается автором для студентов специальности 050501.06 – Профессиональное обучение (информатика, вычислительная техника и компьютерные технологии) по дисциплине «Компьютерное моделирование технических систем». Пособие является первой частью учебно-методического комплекса, который также включает лабораторный практикум и конспект лекций.

Автор выражает благодарность рецензентам данного пособия Владимиру Викторовичу Мокееву, Светлане Александровне Хузиной и Юрию Николаевичу Макарову.



# Глава I. Основы моделирования

## § 1. Исторический обзор развития моделирования

Моделирование имеет многовековую историю, это неотъемлемая сторона человеческой деятельности. Исторически моделирование имеет широкий диапазон применения – от живописи до математического моделирования сложных технических систем. По существу, история науки и техники – это история развития моделирования явлений и объектов, которые играли жизненно важную роль в деятельности человечества с тех пор, как оно стало стремиться к пониманию и изменению окружающей среды.

Естественно, что моделирование первоначально носило материальный и наглядный характер: рисунок, макет, схема и т.п. Древние философы считали, что отобразить явления природы можно только с помощью словесных моделей (вербальных, по современной терминологии). Через несколько столетий девизом английского Королевского научного общества стал лозунг «Ничего словами!». Признавались только выводы на основе экспериментов или математических расчетов. В английском языке в понятие «наука» не входят области знания, которым в русском языке соответствует термин «гуманитарные науки», они отнесены к категории «искусства».

В истории моделирования можно выделить три направления. Первое связано с технологией литья в формы, по соответствующим образцам-моделям. Второе направление связано с материальными макетами объектов, которые использовались при решении архитектурно-строительных и технических задач. Третье образовано научными представлениями. Примером может служить трактат Архимеда

«О плавающих телах», который является моделью для изучения и объяснения наблюдаемых на практике явлений.

Использование материальных моделей для решения технических и технологических задач началось еще в глубокой древности. Создаваемые материальные модели служили средством для разработки новой и усовершенствования существующей техники. Моделирование становится средством и способом поиска рациональной конструкции устройств. Такого рода модели были основой творчества мастеров-изобретателей, усилиями которых создавалась техническая база машинного производства. Например, основой творчества Джеймса Уатта был, прежде всего, модельный эксперимент. Научная составляющая подобных технических моделей была крайне малой в силу слабого развития науки.

По мере развития науки и расширения ее технологического применения методы моделирования насыщаются теоретическим содержанием, а сами материальные модели из наглядных пособий превращаются в средство для получения научных данных и применения методов в конкретных задачах. В XIX веке материальные модели становятся составной частью науки. В ряде областей научного знания и его практических приложений они сохраняют большое значение и в настоящее время. Энергичное применение науки в технической практике привело к насыщению модельных экспериментов теоретическим содержанием. Выявленные наукой законы становились исходными данными при постановке конкретного модельного эксперимента, направленного на решение определенной технической задачи, или применялись при обработке результатов экспериментов.

Использование научных достижений в технике и технологии обозначило два класса моделей. Первый образуют

модели, полученные на основе научных законов. Второй составляют модели в форме таблиц, графиков и эмпирических зависимостей, которые получены опытным путем. Теоретические и эмпирические модели дополняют друг друга, обеспечивая достижение главной цели научно-технической деятельности, – создание новых технических средств и технологических процессов с заранее заданными свойствами. Совокупность таких моделей, относящихся к некоторому классу технических задач, дополнялись инженерными методиками и приобретали статус самостоятельных научно-технических дисциплин. Примерами являются такие науки, как сопротивление материалов, термодинамика, гидро- и аэродинамика и т.д.

В практике кораблестроения моделирование впервые получило научную основу в виде теории подобия. При проектировании пароходов важной задачей является снижение сопротивления движению судна. От этого зависит запас топлива, мощность и масса двигателя, грузоподъемность и скорость хода корабля. Прямое опытное решение этой задачи невозможно по очевидным причинам. Подобные задачи могут быть решены только современными весьма мощными вычислительными комплексами на основе сложных математических моделей и численных методов.

В свое время выход был найден путем соединения теории и экспериментального исследования малых геометрически подобных моделей кораблей. Теория подобия позволила выполнить перенос результатов моделирования на проектируемые суда. Экспериментальное исследование гидродинамических характеристик кораблей с помощью масштабных моделей стало первым в истории примером применения научной методологии моделирования и

стимулировало развитие теории подобия применительно к целому ряду явлений разнообразной физической природы.

В конце XIX века возникло новое направление – аналоговое моделирование. При этом свойства и характеристики некоторого объекта воспроизводятся с помощью модели иной, чем у оригинала физической природы. Оказалось, что явления различной природы описываются аналогичными по форме математическими моделями, что позволяет исследовать свойства моделей как самостоятельных абстрактных объектов. Это привело к развитию ряда прикладных направлений математики. Например, математическая физика, теория колебаний и т.п.

С развитием техники все большее значение приобретали вероятностные модели, которые оказывались более адекватными многим реальным явлениям. Развитие теории автоматического управления, теории информации позволило уточнить понятие «модель», независимо от того, реализована она материально или представляет собой некое идеальное построение. В любом случае суть модели заключается в том, что она несет в себе информацию о свойствах объекта-оригинала, существенных с точки зрения решаемой задачи.

В настоящее время от моделирования процессов и явлений происходит переход к моделированию знаний и рассуждений, логического вывода новых знаний на базе уже имеющихся. Методология моделирования и формализации знаний, ориентированная на их компьютерную обработку, является одним из основных направлений развития искусственного интеллекта.

Даже небольшой экскурс в историю показывает, что моделирование прошло огромный путь развития – от непосредственно наблюдаемых закономерностей реальности до

сложнейших алгоритмических и интеллектуальных систем, опирающихся на возможности вычислительной техники.

Таким образом, моделирование постепенно распространялось на все новые области научно-технической деятельности: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и общественные науки. Компьютерная техника существенно расширила сферу применения моделирования, породила принципиально новые возможности, новые виды моделей и целые технологии. Поэтому в настоящее время понятия «модель», «моделирование» неявно отождествляются с компьютерными моделями и компьютерным моделированием. Этим и объясняется содержание пособия.

Дополнительные сведения по вопросам истории развития моделирования можно найти в монографиях [1], [4], [6 - 10].

## **§ 2. Основные понятия моделирования**

Рассмотрим основные понятия моделирования. Объект моделирования (объект-оригинал) – некоторая часть окружающего нас мира, реальной действительности (объект, процесс, явление), которая может быть рассмотрена как единое целое. Под моделью будем понимать объект произвольной природы, отражающий свойства, характеристики и связи моделируемого объекта (объекта-оригинала), которые считаются существенными для решения поставленной задачи.

В идеальном случае модель должна отражать только главные свойства объекта моделирования (и не отражать несущественные). Однако модель как самостоятельный объект имеет и свои собственные свойства, которые никак не связаны с моделируемым объектом.

Главное назначение модели состоит в упрощении получения информации о свойствах объекта-оригинала для решения конкретных задач практической деятельности. Полное соответствие модели оригиналу невозможно по определению. В этом случае теряются все преимущества моделей, так как мы будем иметь второй экземпляр объекта-оригинала с малодоступным для изучения бесконечным набором свойств.

Понятие модели включает в себя следующие основные компоненты: объект-оригинал; решаемая задача; характер отражаемых свойств объекта-оригинала; способ построения и способ реализации модели. Решаемая задача является одним из главных элементов, определяющим характер создаваемой модели. Именно задача определяет набор существенных свойств моделируемого объекта, вид и способ построения модели. Без связи с конкретной задачей понятие модели не имеет смысла.

Ряд факторов определяет множественность моделей, используемых для описания и исследования объекта:

1. Любой объект имеет бесконечное количество свойств, следовательно, для его всестороннего изучения необходимо построить множество моделей, каждая из которых будет отображать определённую группу свойств.
2. Для одного и того же объекта для отображения одних и тех же свойств можно построить множество моделей разными способами в зависимости от целей моделирования и доступных средств.
3. В зависимости от решаемой задачи для одного и того же объекта одним и тем же способом для отображения одних и тех же свойств можно построить множество моделей с разной степенью детализации описания свойств объекта.

Таким образом, технология моделирования подразумевает вариативность в разработке и выборе типов моделей, а также в получении ряда различных моделей, различающихся степенью детализации описания объекта моделирования.

При создании новых технических систем всегда имеется образ будущего объекта. Он задается в виде технического задания на проектирование. Затем в ходе проектирования создается модель новой технической системы, которая позволяет получить информацию о свойствах еще не существующего объекта. Этим обеспечивается создание объекта с заданными (желаемыми) свойствами. В целом можно сказать, что моделирование является обязательным элементом во всякой целесообразной деятельности.

Все модели можно разделить на две большие группы: познавательные и прагматические. Первые являются формой представления знаний, поэтому при обнаружении расхождения между моделью и реальностью устранение этого расхождения выполняется путем изменения модели. Познавательная деятельность ориентирована на приближение модели к реальности, которую модель должна отображать. Познавательные модели широко используются в естественных науках. Примером может служить модель солнечной системы.

Вторая группа моделей является средством организации практических действий и отображением цели, примерами прагматических моделей могут служить проекты, рабочие чертежи и т.п. Такие модели носят нормативный характер, играют роль стандарта, образца, под который «подгоняются» как сама деятельность, так и ее результат. Действительно, при создании нового объекта (например, здания) отклонение от проекта считается недопустимым.

Рассмотрим основные функции моделей в современной науке, технике и практической деятельности. Еще раз подчеркнем, что главное назначение моделей – упрощение получения информации об объекте моделирования. Вместе с тем в технической сфере модели выполняют и ряд других важных функций:

- создание объектов с заданными свойствами;
- решение задач оптимизации и управления состоянием объекта;
- диагностика состояния объекта, прогнозирование его поведения или развития процессов в объекте;
- имитация объектов и создание тренажеров;
- разработка игровых моделей и моделей обучения.

Следует отметить познавательную функцию (получение новых знаний), функцию передачи информации и знаний.

В целом моделирование – это общенаучный метод изучения свойств объектов и процессов по их моделям, используемый в целях познания, исследования, проектирования, принятия решений. Процесс моделирования включает нескольких этапов: реальный объект → построение модели → исследование модели → получение знаний об объекте на основе модельных экспериментов → перенос результатов моделирования на реальный объект.

Термин «моделирование» используется для обозначения собственно процесса построения модели. В этом смысле он понимается как технология построения моделей. Второй смысл термина – применение модели по назначению (эксперименты с моделью). В принципе существует два пути исследования любого объекта или процесса: прямое изучение объекта-оригинала или изучение объекта по его модели. Естественно,



что во многих случаях используется и моделирование, и прямое изучение объекта моделирования.

Необходимо признать, что моделирование особо актуально в следующих случаях:

1. Объект либо ещё, либо уже не существует, однако необходимо изучить его свойства. Как уже отмечалось ранее, любое производство предусматривает проектирование, его результатом является модель будущего объекта, который должен обладать определенными свойствами.
2. Масштаб времени реальных процессов или геометрические размеры объекта несоизмеримы с возможностями нашего восприятия. Моделирование позволяет изучать и весьма быстрые и достаточно медленные процессы, микро- и макроскопические объекты.
3. Реальный объект или процесс недоступен для прямого изучения. Средства наблюдения (измерения) способны существенно исказить естественный ход событий, либо прямые измерения в принципе невозможны.
4. Эксперименты с реальным объектом дороги или слишком опасны. Подобная ситуация имеет место в экономических и социальных науках, где эксперименты с реальными системами могут привести к необратимым катастрофическим последствиям. Многие сложные технические системы существуют в единственном экземпляре.

Таким образом, модель служит для получения информации об объекте исследования, которую невозможно получить путем непосредственного исследования оригинала, во

многих случаях моделирование – единственно возможный путь изучения объектов и процессов.

Рассмотрим три типовые задачи моделирования:

**Прямая задача моделирования.** Требуется определить реакцию объекта или его поведение в ответ на известное внешнее воздействие. Решение данной задачи выполняется с помощью проведения модельных экспериментов.

**Обратная задача моделирования.** Реакция объекта известна или задана. Требуется определить, какое внешнее воздействие способно вызвать подобную реакцию. Обратные задачи актуальны, например, в управлении: как необходимо воздействовать на объект, чтобы он сохранял заданное состояние или выполнял необходимые действия.

**Задача идентификации или синтеза модели.** Известно внешнее воздействие на объект, известна реакция объекта, требуется определить параметры модели объекта или построить собственно модель. В этом случае методами математической статистики и регрессионного анализа можно построить чисто формальную модель объекта типа «черный ящик».

Дополнительные сведения об основах моделирования можно найти в работах [1], [4], [6], [8 – 11], [14], [19 – 20].

### **§ 3. Роль моделирования в науке и технике**

Ранее историческая роль моделирования в развитии науки и техники уже рассматривалась. Цель данного параграфа – более детально показать роль моделей и моделирования в современной науке и технике.

Моделирование – это один из основных методов научного познания. Его суть заключается в том, что из сложного явления выделяются главные части и замещаются моделями, более понятными, более простыми, более удобными для решения

поставленной задачи. Таким образом, в научных исследованиях всегда приходится иметь дело с моделями.

В основе любой науки особую роль имеют концептуальные модели, т.е. представления об объекте-оригинале, которые сложились в сознании человека. Основой для формирования таких моделей являются результаты наблюдений свойств объекта-оригинала и теоретический багаж исследователя, его опыт, аналогии, логические выводы. Объединение всех этих представлений в концептуальную модель осуществляется неформально.

С помощью концептуальных моделей строится первичная система простейших абстрактных моделей, которые отражают свойства реальных объектов, представляющих интерес для данной науки, например, «материальная точка», «идеальный газ», «абсолютно черное тело» и т.д. Концептуальная модель «материальная точка» отражает свойство инерции тела (материальная точка имеет массу) и способность занимать определенное положение в пространстве (материальная точка имеет координаты). Концептуальные модели занимают самый нижний уровень научного знания, но именно они связаны с практической деятельностью и рождаются в ее ходе.

В свою очередь научные законы формулируются как описание связей и взаимодействий между концептуальными моделями. Примером могут служить законы Ньютона, законы Кирхгофа, закон Гука и т.п. Таким образом, научные законы также являются в определенном смысле моделями реальности. Научные законы носят общий характер и занимают более высокий уровень по сравнению с концептуальными моделями. На базе концептуальных моделей и соответствующих законов строятся модели целых классов явлений и процессов, которые образуют научные теории.

Итак, с точки зрения моделирования научные теории являются системой концептуальных моделей и законов, описывающих взаимодействие между концептуальными моделями, например, теория относительности, квантовая теория, теория твердого тела, теория колебаний и т.п.

Давно известное науке понятие гипотезы можно считать моделью реальности в условиях неполной изученности явлений. Наука допускает существование нескольких гипотез, поскольку одни и те же наблюдения могут одинаково хорошо объясняться с различных точек зрения. Как бы хорошо существующие модели не описывали процессы и явления, всегда возможно их уточнение, которое постоянно происходит в любой науке.

Проектирование и эксплуатация современных сложных технических систем все больше требует «поддержки» со стороны моделирования. Давно ушли в историю методы проектирования, основанные на опыте и интуиции инженеров и техников. Современные технологии проектирования подразумевают применение научных знаний, математических моделей, методов оптимизации с целью получения объекта с наилучшими свойствами. Кроме того, техническая документация проекта (чертежи) создается программными средствами автоматизированного проектирования.

Как уже отмечалось, применение моделирования в ходе проектирования неизбежно, так как оно позволяет создать объект с необходимыми свойствами, существенно сократить затраты на доработку спроектированного изделия по данным испытаний опытных образцов. Однако исключить испытания и натурные эксперименты не удастся в силу сложности современных технических систем. Профессия летчика-испытателя в обозримом будущем останется необходимой.

Функционирование современных сложных технических систем предусматривает управление и регулирование режимов их работы. Управление производится компьютерными системами на основе моделей объектов управления, которые позволяют учесть возможные взаимосвязи, ограничения, установить оптимальные режимы функционирования.

В ходе эксплуатации технических объектов возможны аварии и поломки. Для обеспечения высокой надежности технических систем важно вовремя распознать приближение аварии. Такая задача решается методами диагностики состояния объекта. Для подобных задач необходимо на основе моделирования аварийных ситуаций получить информацию о состояниях, предшествующих аварии, т.е. получить картину динамики ее развития. В случае распознавания предаварийного состояния технический объект может быть своевременно выведен из эксплуатации для проведения ремонта. Например, при работе подшипников турбин или двигателей их состояние можно диагностировать по частоте и амплитуде вибраций, зависящих от износа подшипников. Если авария произошла, то модель системы помогает установить ее причины и исключить их в будущем. Так, при изучении аварии на Чернобыльской АЭС была создана модель функционирования энергоблока и установлены вероятные причины аварии.

Рассмотренные выше примеры применения моделей показывают, что роль моделирования в современной технике трудно переоценить. Пройденный путь начат с применения макетов, продолжен математическими и компьютерными моделями. Примеры применения моделирования в технике сдержатся в монографиях [1], [6 - 7], [9], [22 - 23], [26], [31], [36 - 37].

## § 4. Компьютерное моделирование

В настоящее время методы компьютерного моделирования прочно вошли в практику решения широкого круга теоретических проблем и прикладных технических задач в различных сферах практической деятельности. В самом деле, ведь исторически первая роль компьютера – «вычислитель», т.е. численное решение задач моделирования, в первую очередь технических систем.

Сущность компьютерного моделирования состоит в построении модели, которая представляет собой программный комплекс, алгоритмически описывающий развитие процесса или поведение объекта. Компьютерная модель предназначена для проведения с ней экспериментов на вычислительной машине. Она имеет две составляющие – программную и аппаратную. Программная составляющая интерпретируется процессором компьютера и отображает свойства объекта моделирования.

Главной особенностью компьютерных моделей является относительная простота создания и модификации. Изменениям подвергается только программа, а аппаратная составляющая остается неизменной. Если добавить практически неограниченную функциональную и структурную сложность компьютерных моделей, высокую точность результатов, то становится ясно, почему в настоящее время под моделированием почти всегда понимают компьютерное моделирование.

Выделим ряд его особенностей:

1. Компьютер – мощный инструмент проведения вычислительных экспериментов, так как позволяет хранить и быстро обрабатывать большие объемы информации. Это существенно увеличило возможности численного решения задач математического

моделирования и на порядки сократило время их решения.

2. Компьютерное моделирование позволяет исследовать модели высокой степени сложности, учитывать и анализировать влияние множества факторов. Только применение компьютерного моделирования дало возможность использовать технологии, опирающиеся на тонкие физико-химические эффекты.
3. Применение компьютера в моделировании привело к рождению новых направлений как в самом моделировании (имитационное и стохастическое моделирование, моделирование знаний), так и в различных прикладных науках (вычислительная физика, автоматизированное проектирование и т.п.).
4. Компьютерные модели стали основой математизации ряда областей научного знания и практической деятельности, которые ранее развивались как описательные и носили сугубо качественный характер. Это относится, например, к моделированию знаний и технологиям искусственного интеллекта.
5. В ходе компьютерного моделирования возможна визуализация результатов моделирования, отображение их в наиболее обозримой и наглядной форме средствами компьютерной графики и виртуальной реальности. Такую возможность дает, например, компьютерная технология трёхмерного твердотельного моделирования.
6. Компьютер не только средство реализации модели и проведения эксперимента, но и инструмент создания самих моделей: предоставляется возможность автоматизированного построения модели, выбора

численных методов и создания программы, реализующей вычислительную модель.

Построение модели с использованием компьютерной техники содержит в себе несколько необходимых этапов. На первом формируется теоретическое представление об исследуемом объекте, строится его концептуальная модель. На втором этапе концептуальная модель переводится на формальный язык математики и численных методов, язык описания алгоритмов: создаются математическая и алгоритмическая модели объекта.

Переложение модели на язык программирования дает компьютерную модель, позволяющую оперировать с цифровой информацией. Наконец, используя данные о параметрах исследуемой системы, можно получить полноценную компьютерную модель, которая позволяет с той или иной степенью достоверности исследовать свойства объектов, прогнозировать последствия принятых решений, иными словами, проводить модельный вычислительный эксперимент.

В настоящее время актуален вопрос создания автоматизированных систем моделирования, которые позволят выполнять быстрое построение моделей, проведение модельных экспериментов, обработку и анализ их результатов. В связи с этим рассмотрим разделение ролей при разработке модели. Представленное разделение ролей несколько утрировано, но не меняет их сути.

Традиционный путь создания компьютерной модели начинается с выявления структуры объекта, при этом проводится предварительный качественный анализ его свойств. Постановка всех задач моделирования осуществляется специалистом в конкретной предметной области в терминах



соответствующего профессионального языка – строится концептуальная модель объекта, процесса или явления.

Далее необходима работа математика, который выполняет математическую постановку задачи, создает описание (модель) объекта средствами языка математики. На этом этапе модель формализуется и существенно уточняется математиком. Итогом его работы является математическая модель объекта, которая затем преобразуется в вычислительную.

На следующем этапе программист разрабатывает алгоритмы и программы, реализующие решение задачи моделирования, выполняет отладку программы и представляет первичные результаты математику.

Общая оценка модели по данным предварительных расчетов должна быть выполнена специалистом-предметником, которому и предстоит использовать компьютерную модель в своей практике. Если потребуется переработка модели, то весь путь должен быть пройден вновь. Ясно, что данная схема весьма громоздка и инертна. Следовательно, необходимо приближение компьютера к специалисту. В свое время в XX веке для решения этой проблемы создавались модели знаний предметной области, на основе которых и проводилось построение модели конкретного объекта. В рамках этого подхода были разработаны несколько программных систем – МАВР, ПРИЗ, ДЕКАРТ.

Система моделирования МАВР была предназначена для автоматизации построения модели и реализующего ее программного обеспечения на основе описания объекта средствами формализованного языка. Создавалась эта система для автоматизации проектирования энергетических установок и энергетических систем. В ней предварительно была построена модель знаний конкретной предметной области. Используя специальный язык, специалист-предметник строил описание



(рис. 2), кроме того, имеется возможность создавать собственные новые функциональные блоки.

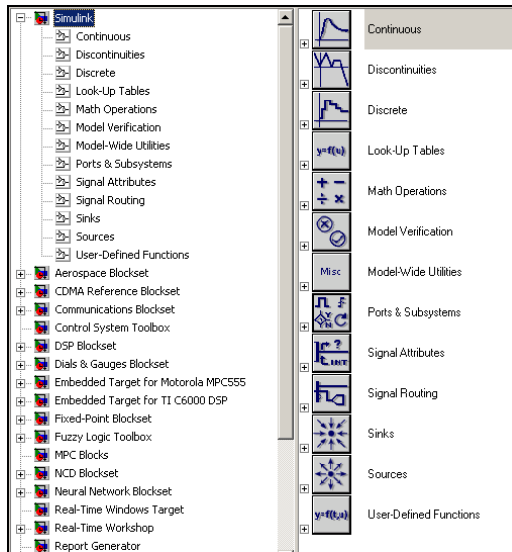


Рис. 2. Библиотека блоков Simulink

Моделирование систем возможно по блочно-иерархическому принципу. Simulink автоматизирует решение уравнений, которые описывают созданную функциональную блок-схему. Пакет автоматически меняет модель системы при вводе в схему новых элементов. Таким образом, в рамках этого пакета автоматизируются функции и математика, и программиста, а модель объекта в виде блок-схемы строится самим пользователем.

Инструментальная среда Stratum предназначена для имитационного и математического моделирования. Использование объектно-ориентированного подхода в моделировании позволяет свести к минимуму или исключить программирование, повысить скорость создания моделей и легко их модифицировать. На базе библиотек моделей возможно

создание целого виртуального мира. Среда Stratum поддерживает весь цикл разработки модели. Визуальные средства среды Stratum – имиджи (рис. 3) обеспечивают построение модели системы в виде иерархически связанных подсистем и наглядно представить структуру сложной системы.

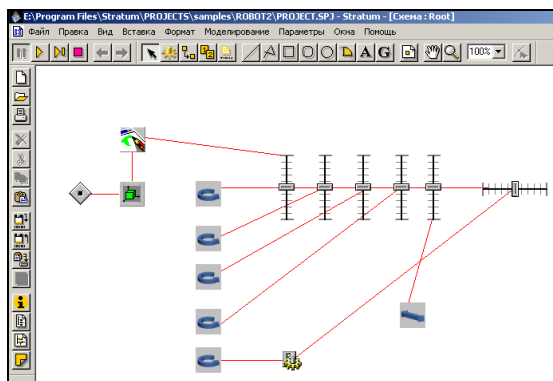


Рис. 3. Отображение взаимодействия элементов манипулятора

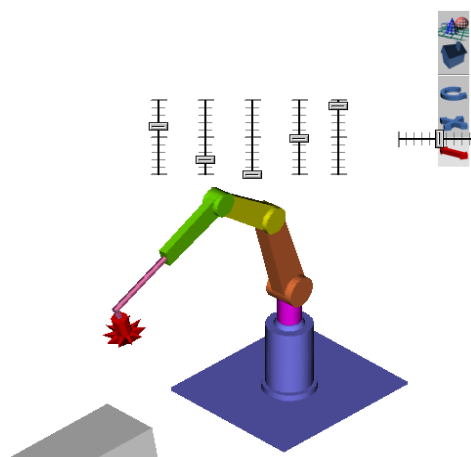


Рис. 4. Модель манипулятора

Средства среды Stratum автоматически преобразуют модель объекта в программу. В ней возможно использование

стандартных и пользовательских 2D и 3D объектов, манипулировать ими и изменять их параметры (рис. 4), открывается возможность наблюдать функционирование системы.

Современный программный комплекс SolidWorks совместно с встроенным пакетом CosmoWorks позволяет построить трехмерную твердотельную модель объекта (рис. 5) и провести расчеты полей напряжений и деформаций или температурных полей под действием заданных пользователем внешних воздействий (рис. 6). При этом пользователь строит только трехмерную модель объекта и определяет внешние воздействия. Построение математической и вычислительной модели, получение и представление результатов исследования производится автоматически.

Одним из универсальных программных комплексов моделирования является пакет MVS (Model Vision Studium) – это интегрированная графическая система для быстрого создания интерактивных визуальных моделей сложных динамических систем и проведения с ними вычислительных экспериментов.

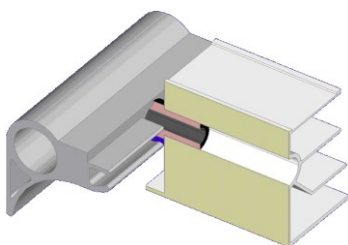


Рис. 5. Трехмерная модель узла конструкции

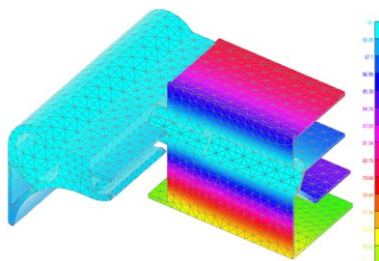


Рис. 6. Отображение температурных полей

Главными особенностями MVS являются: технология объектно-ориентированного моделирования; возможность

описания гибридных (дискретно-непрерывных) систем; обеспечение численного решения и визуализации результатов моделирования. Компьютерные модели создаются без традиционного программирования.

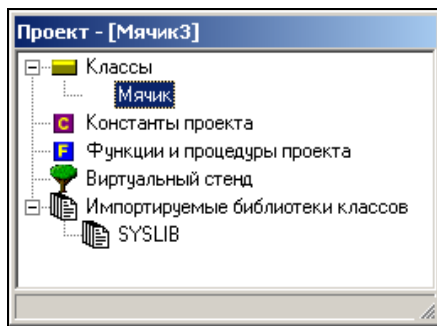


Рис. 7. Проект MVS

При создании модели в MVS выбор численного метода решения выполняются автоматически. Пользователь имеет возможность вмешиваться в ход вычислительного эксперимента. Любая модель, создаваемая в MVS, представляет собой проект, содержащий стандартные компоненты (рис. 7).

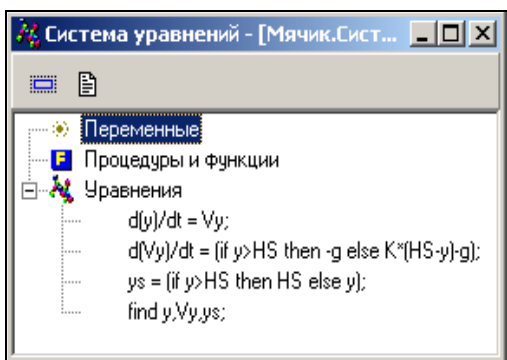


Рис. 8. Система уравнений

Основным элементом модели в MVS является устройство (CDevice) – некоторый объект, функционирующий параллельно и независимо от других устройств в непрерывном времени. Непрерывное поведение устройства задается совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений (рис. 8).

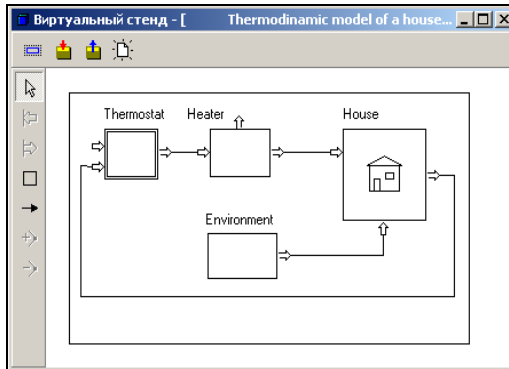
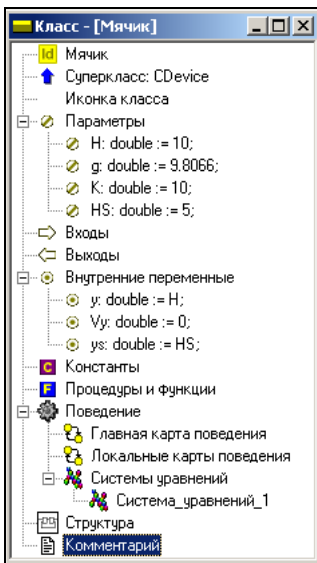


Рис. 9. Блок-схема модели



Устройства могут объединяться в блоки, что позволяет строить модели систем по блочно-иерархическому принципу. Блоки могут соединяться между собой функциональными связями и входить в состав других блоков, образуя определенную структуру. Все взаимодействия блока осуществляются только через его входы и выходы, составляющие интерфейс блока (рис. 9). Конкретная модель, с которой

Рис. 10. Компоненты класса будет проводиться вычислительный эксперимент, собирается в окне редактора виртуального стенда.

Компоненты устройства (класса) представлены на рис. 10. Модель дополняется средствами графического отображения результатов моделирования (рис. 11).

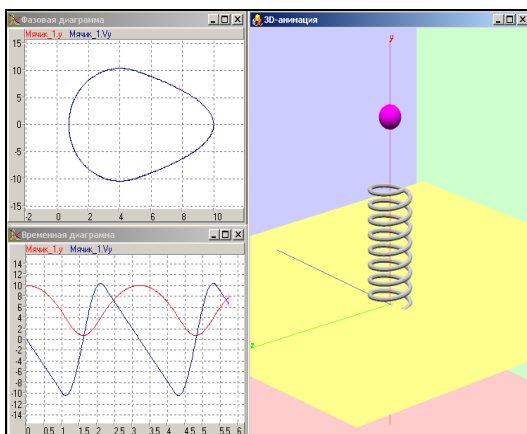


Рис. 11. Отображение результатов моделирования

Система MVS использует наглядное представление гибридного поведения в виде карты поведения (рис. 12), которая описывает логику смены состояния объекта. Карта поведения – это ориентированный граф, в котором узлам приписывается некоторое локальное непрерывное поведение, а дуги интерпретируются как переходы от одного поведения к другому. Для перехода между узлами должно быть задано запускающее событие: логическое условие, определяющее возможность срабатывания перехода; поступление внешнего сигнала; истечение заданного времени пребывания в узле, а также действия (actions) в переходе (рис. 12).



Срабатывание перехода представляет собой следующую последовательность действий: данный узел перестает быть текущим; выполняется последовательность мгновенных действий в том порядке, как они записаны для перехода; текущим становится новый узел.

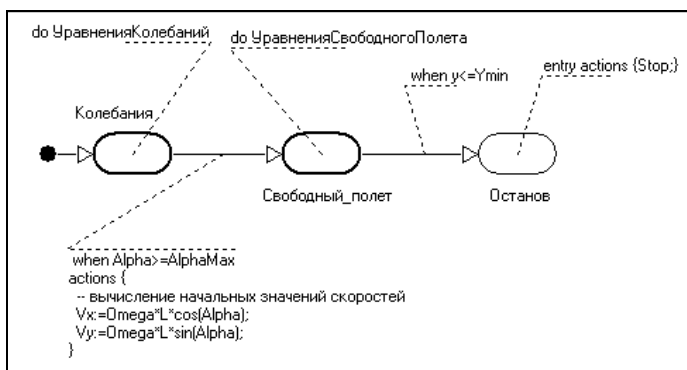


Рис. 12. Карта поведения с условиями срабатывания переходов

В MVS имеется большой набор численных методов, предназначенных для воспроизведения поведения гибридных систем. Это программные реализации методов решения нелинейных алгебраических уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для каждой группы задач имеется автоматический решатель.

К проекту MVS могут быть присоединены ранее созданные библиотеки классов, таким образом, при создании модели можно использовать уже готовые устройства. Пакет поставляется со стандартной библиотекой классов SysLib, содержащей наиболее типичные блоки. Пакет MVS позволяет создавать самостоятельные модели-приложения (исполняемые файлы) и использовать их независимо от оболочки MVS.

Система AnyLogic – профессиональный инструмент имитационного моделирования нового поколения, основанный

на достижениях в области информационных технологий последних десятилетий. По сравнению с другими системами он предоставляет широкий спектр возможностей (рис. 13):



Рис. 13. Возможности AnyLogic в моделировании

- Моделирование при помощи визуальных компонентов.
- Моделирование на основе любых подходов.
- Создание интерактивных анимаций, визуально отображающих результаты работы модели в реальном времени.
- Использование визуальных способов построения моделей и программирования на языке Java.
- Использование средств анализа и оптимизации непосредственно из среды разработки модели.
- Интеграция моделей с офисным и корпоративным программным обеспечением, включая электронные таблицы, базы данных, ERP и CRM системы.

Данная система моделирования предназначена для построения стохастических и детерминированных моделей.

В AnyLogic поддерживаются все существующие подходы дискретно-событийного и непрерывного моделирования (рис. 14). Встроенный оптимизатор позволяет находить оптимальные значения параметров модели. Поскольку модели AnyLogic – это Java-модели, их можно не только запускать на большинстве современных платформ, но и помещать на web-

сайты в виде апплетов. Это позволяет удалённым пользователям использовать интерактивные модели без установки специального программного обеспечения.

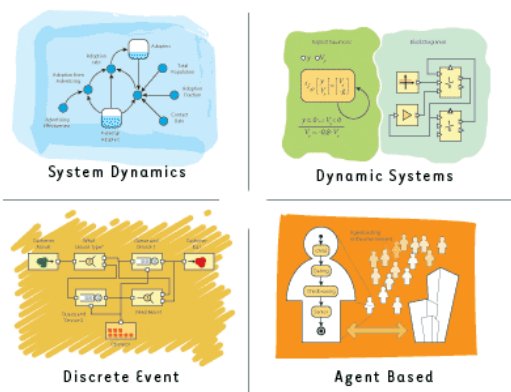


Рис. 14. Подходы к моделированию в AnyLogic

Следует отметить, что в данном разделе рассмотрены только некоторые системы моделирования общего назначения. Кроме них существует множество специализированных систем моделирования, которые применяются для решения узкоспециальных задач конкретной предметной области.

Дополнительную информацию о компьютерных системах моделирования можно получить в монографиях: [4], [11], [13], [28 - 29], [39] и на сайтах [41 - 47].

## § 5. Общая схема построения модели

Долгое время построение моделей считалось искусством. Успех в этой деятельности определялся опытом, экспериментаторским мастерством и интуицией. Основой моделирования, особенно при создании новых технических систем, оставался метод проб и ошибок. В этом случае создание новой технической системы сопровождалось длительной отработкой объекта проектирования на основе испытаний

опытных образцов. Эти факторы и сегодня играют достаточно большую роль при создании новой техники. Вместе с тем опыт моделирования все более сложных технических систем убедительно показывает, что качество моделей решающим образом зависит от целесообразности процесса их создания.

Общая логика моделирования получила развитие в рамках работ по исследованию операций, теории планирования эксперимента, теории подобия, прикладному системному анализу и теории идентификации как инструмента построения моделей слабо изученных сложных систем. Достижения в данных дисциплинах составляют сегодня научный фундамент методологии моделирования.

В общем случае построение модели и моделирование актуально при возникновении некоторой проблемы. Её конкретизация приводит к формулированию задач исследования, которые включают в себя и описание объекта моделирования. В технике результаты данной работы фиксируются в виде технического задания на проектирование.

Следующим шагом в построении модели является анализ объекта моделирования с точки зрения поставленной задачи. В итоге формируется некий образ объекта, который можно назвать когнитивной моделью. При этом с целью получения компактного описания объекта сложная реальность упрощается путем отсечения всего второстепенного для решения задачи.

На основе когнитивной создается концептуальная модель, при построении которой используются научные положения, законы и понятия той предметной области, в которой решается задача. В технике на основе концептуальной модели удастся выполнить математическое описание объекта.

Если объект достаточно изучен и комплекс свойств, подлежащих исследованию, может быть выявлен на основе

теоретических представлений, применяется теоретический путь построения модели. Альтернативой является идентификация модели объекта, т.е. ее построение на основе статистической обработки результатов наблюдений или экспериментов.

Рассмотрим общую схему построения модели без учета особенностей конкретных видов моделей. Содержание этапов этой схемы представляется следующим:

1. На основе существующей проблемы формулируется задача. Выбирается объект, действия с которым приведут к решению поставленной задачи.
2. Выполняется анализ объекта моделирования. Устанавливается, из каких элементов состоит объект, как они взаимодействуют между собой. Устанавливаются свойства объекта, актуальные для решения поставленной задачи. Выявляются факторы, определяющие эти свойства.
3. Выполняется создание собственно модели, при этом производится выбор вида и способа построения модели. Естественно, что выбор существенно зависит от решаемой задачи и возможностей исследователя.
4. Решается вопрос об интерпретации результатов моделирования, т.е. каким образом результаты эксперимента с моделью будут перенесены на реальный объект. При этом следует учесть, что модель – это самостоятельный объект, обладающий рядом собственных свойств, которые не имеют отношения к объекту моделирования.
5. Проводятся эксперименты с моделью, осуществляется проверка ее адекватности, т.е. степени соответствия

между моделью и объектом по моделируемым свойствам.

6. Выполняется корректировка или переработка модели в случае ее слабой адекватности.
7. Модель применяется для решения поставленной задачи.

Следует отметить, что любые правила разработки моделей могут служить лишь в качестве определенного каркаса. По-видимому, основой успешной методики моделирования может быть последовательная разработка системы моделей. Начав с относительно простой модели, необходимо продвигаться к более совершенной ее форме, отражающей объект или процесс более точно. По мере проведения испытаний, получения дополнительных данных обычно возникает уточненный вариант модели. Вопросы методики построения моделей рассмотрены в работах [1], [4], [6], [8 - 10].

### **§ 6. Адекватность моделей**

Адекватность – это характеристика точности отражения моделью свойств объекта-оригинала, необходимой для решения поставленной задачи. Модель, с помощью которой успешно решается задача, будем называть адекватной. Таким образом, адекватность модели означает, что требования точности отражения свойств выполнены в той мере, которая достаточна для решения поставленной задачи.

Естественное различие между моделью и оригиналом вызвано тем, что в модели отображаются лишь самые важные для решения задачи свойства объекта. В результате приближенность модели неизбежна, но оказывается, что даже простых моделей достаточно для практики. Следует помнить, что модель – это самостоятельный объект, имеющий и свои собственные свойства, которые могут быть никоим образом не

связаны со свойствами моделируемого объекта. Проблема адекватности одна из важнейших, от которой зависит степень доверия к результатам моделирования. В ряде случаев удается ввести некоторую меру адекватности модели, тогда можно ставить вопрос о наиболее адекватной модели.

Рассмотрим некоторые причины неадекватности. При построении моделей всегда производится отбор свойств объекта, которые актуальны для решения поставленной задачи. Причем в первую очередь рассматриваются известные свойства и отношения. Вполне вероятно, что моделируемый объект имеет еще неизвестные свойства, которые также актуальны для данной задачи. Таким образом, причиной неадекватности может быть неполный учет свойств, существенно влияющих на поведение объекта. Кроме того, модель всегда есть продукт деятельности человека и несет в себе долю субъективизма.

Другой возможной причиной неадекватности может быть неполный учет факторов, которые определяют актуальные свойства объекта моделирования, вынужденное упрощение закономерностей, неполнота и неточность используемых при построении моделей данных наблюдений и экспериментов.

При построении любой модели неизбежно производится упрощение, схематизация, принимаются допущения, которые ограничивают область применения модели. Использование модели в условиях, когда эти допущения нарушаются, с большой вероятностью даст неадекватные результаты.

Проверка адекватности возможна путем сравнения результатов моделирования и данных экспериментов (наблюдений) с реальным объектом. Для доказательства адекватности можно провести ретроспективный анализ поведения объекта моделирования. Если данные о прошлой «жизни» объекта достаточно хорошо описываются моделью, то

есть основания предполагать, что такое же соответствие будет в случае прогноза развития процессов в будущем.

Можно различать адекватность на качественном и количественном уровнях. Модель, адекватная на качественном уровне, воспроизводит определенные эффекты, например, наличие резонанса, развитие автоколебаний и т.д. Если модель адекватна на качественном уровне, то только после этого можно говорить об адекватности на количественном уровне. Адекватность на количественном уровне – это отражение с необходимой степенью точности изменения параметров системы в пространстве и во времени.

Адекватность непосредственно связана со степенью детализации описания объекта. Естественно, что детализация описания протекающих в объекте моделирования процессов ограничена общим уровнем знаний.

Сложность (простота) модели и ее адекватность – конкурирующие свойства. Слишком простые модели не гарантируют отражения свойств объекта в необходимой полноте. С другой стороны, слишком сложные модели лишь потенциально «богаче», чем простые. Для исследования детальных моделей необходимо применение достаточно сложных методов анализа, что неизбежно вносит определенную погрешность, требует больших затрат времени и средств. Кроме того, в любой модели используются эмпирические и полуэмпирические законы, низкая степень точности которых существенным образом влияет на качество результатов моделирования.

С практической точки зрения бессмысленно строить детальные модели и использовать слишком точные численные методы, если при разработке модели приняты весьма грубые исходные допущения. Многие крупнейшие инженеры-



математики рассматривали излишнюю точность методов получения результатов как грубейшую ошибку. Следовательно, при неточности исходных данных и детальная модель не гарантирует высокой степени адекватности. Для разрешения данной проблемы обычно создают ряд моделей, начиная с самых простых.

Таким образом, любой результат модельного исследования должен восприниматься критически. Такие исследования всегда основаны на тех или иных гипотезах или допущениях, которые могут оказаться и ошибочными.

В заключение отметим, что проверка адекватности модели является одним из важнейших этапов ее разработки. Дополнительные сведения по данному вопросу можно найти в работах [1], [6], [9], [23], [26], [35].

## **§ 7. Классификация моделей**

Задача классификации достаточно сложна даже в тех случаях, когда признаки родства элементов совершенно объективны. Пример тому – классификация в биологии, которая достаточно долго является предметом научных дискуссий. Модели строятся для объектов с чрезвычайно широким спектром признаков, поэтому общепринятой их классификации на сегодня не существует. Рассмотрим классификацию, которая опирается на определение модели, а также учитывает признаки, принятые в наиболее развитых областях моделирования.

Каждая модель характеризуется следующими основными признаками:

1. Принадлежностью к определенному классу задач.
2. Принадлежностью к определенному классу объектов моделирования.
3. Способом построения модели.

4. Характеристикой основных свойств объекта, которые отражаются моделью.
5. Целью моделирования.

Именно эти признаки часто выносятся в название модели, например, экономико-математическая модель. Ясно, что такая модель построена средствами математики (способ реализации), а объект моделирования относится к сфере экономики.

**1. По классам решаемых задач** модели можно разделить на познавательные, проектные, оптимизационные, модели управления и т.п.

**2. Классы объектов моделирования** – второй основной классификационный признак. Перечень объектов соответствует исторически сложившимся в науке представлениям: физические, химические, биологические, экономические и т.д.

**3. По способу реализации** модели разделяются на материальные и абстрактные (информационные).

Материальное моделирование используется при экспериментальном методе исследования. Здесь модель выступает как некоторая вторая система, имеющая определенное сходство с системой-оригиналом. Создаваемые материальные модели находятся с оригиналом в отношении подобия и функционируют по тем же законам, что и система-оригинал.

К абстрактным моделям можно отнести:

- Концептуальные модели, т.е. системы представлений об объекте-оригинале, которые сложились в сознании человека на основе непосредственных наблюдений объекта-оригинала и теоретических представлений.
- Графические модели отображают средствами графики свойства оригинала, доступные зрительному восприятию

(художественная графика, географические карты, чертежи и др.).

- Графические условные модели воспроизводят средствами графики свойства оригинала, которые в принципе не могут наблюдаться визуально (графики, диаграммы, схемы, фазовые портреты и др.). Для восприятия подобного рода моделей требуются специальные знания, составляющие специфический язык данного вида графических моделей.
- Формализованные модели состоят из компонентов, которые представляют собой формальное описание с помощью некоторого жесткого языка с однозначной семантикой и синтаксисом. Формализация описания объекта позволяет использовать логико-математические и вычислительные методы, что существенно повышает информативность моделирования, дает возможность применения количественных методов анализа и обеспечивает наибольшую общность исследования. К числу формализованных моделей относятся, например, математические модели.
- Алгоритмические модели представляет собой наиболее универсальное средство моделирования. Использование данных моделей связано с моделированием поведения системы в виде алгоритма.

В последнее время моделирование в связи с использованием компьютерной техники называется (в широком смысле слова) информационным. В более узком смысле информационная модель определяется как формализованное описание информационных структур и операций над ними и отождествляется с моделями данных, а также как параметрическое представление процесса циркуляции

информации, подлежащей автоматизированной обработке в системе управления.

**4. Характер отражаемых моделью свойств объекта-оригинала** часто выносится в ее название. Например: структурная модель отражает структуру системы. Если модель именуется структурно-функциональной, то ясно, что речь идет о взаимосвязи функций элементов системы. Геометрическая модель отражает геометрические свойства объекта: ориентацию в пространстве, взаимное расположение, размеры и форму элементов системы.

В ряде случаев модели разделяют по степени неопределенности на детерминированные и вероятностные (стохастические), которые отражают влияние случайных факторов. В зависимости от фактора времени выделяют динамические и статические модели. Первые учитывают изменение состояния объекта моделирования во времени, вторые отражают некоторое равновесное, стационарное состояние объекта, которое не меняется во времени.

**5. По цели моделирования** модели можно разделить на следующие виды: познавательные, образовательные, проектные, модели управления, модели диагностики и т.п.

Представленная классификация не претендует на полноту (известно несколько десятков классификаций). Она затрагивает свойства, которые составляют основу понятия «модель». Другие варианты классификаций можно найти в монографиях [1], [6], [9 – 10], [14].

## **§ 8. Моделирование в педагогической практике**

Ранее уже отмечалось, что моделирование является общенаучным методом изучения свойств объектов и систем самой различной природы. Как показывает опыт, активное участие в моделировании вырабатывает более глубокое понимание сути законов природы.

Развитие технологий компьютерного моделирования дает возможность в педагогической деятельности представить информацию о свойствах объектов и характере протекающих в них процессов оперативно и с максимальной степенью наглядности. Это расширяет круг изучаемых явлений. Построение моделей, проведение с ними компьютерных экспериментов способствует углублению и расширению знаний в конкретной предметной области, развитию познавательной активности и творчества студентов.

Использование современных информационных технологий моделирования, с одной стороны, обогащает любую учебную дисциплину содержательными задачами, а с другой стороны, конкретные учебные предметы получают мощное средство решения собственных задач. Становится очевидной реальная польза информатики и громадная область приложения полученных при ее изучении знаний.

В настоящее время известно много компьютерных программно-методических комплексов, которые построены по принципу обучающих систем. В подобных системах ставится цель в определенной степени заменить традиционные способы и источники получения знаний. В этом случае компьютер используется как техническое средство обучения, которое в определенном смысле повторяет старые средства: учебники, справочники, традиционные уроки, аудио- и видеofilмы и т.д. Естественно, что и в этом случае приобретаются новые

возможности и достигается существенный положительный эффект. Однако такие методики отличаются от методов, применяемых без использования компьютеров, лишь количественными показателями. С другой стороны, представление информации на экране монитора, например, в виде простого текста, создает проблемы восприятия, повышает утомляемость учащихся и существенно снижает влияние положительных факторов применения компьютера. В этом плане остается еще много не решенных чисто психологических проблем. Ярким примером является простой перенос обычного учебника на электронные носители.

Наибольший эффект от внедрения компьютерных информационных технологий в обучении может быть получен в том случае, когда появляются качественно новые возможности, недоступные в обычных условиях. Например, применение технологий трехмерного моделирования позволяет наглядно представить объект и провести необходимые для решения задач конструирования преобразования. После чего построение чертежа становится очевидным, так как с моделью объекта можно провести различные манипуляции, рассмотреть ее в различных положениях, что принципиально невозможно без компьютера. Долгое время сильным препятствием в направлении применения моделирования в учебном процессе была необходимость создания моделей средствами какой-либо системы программирования. В этом случае собственно моделирование отодвигалось на второй план и становилось практически недоступным в рамках учебного процесса. В совершенстве владеть этим инструментом в мере, достаточной для создания законченного продукта, может программист, но не студент-пользователь. Кроме того, подобная деятельность требует достаточно больших затрат времени.

В этом смысле компьютерное моделирование на основе инструментальных программных комплексов предоставляет возможность построить процесс обучения, который будет принципиально отличаться от обучающих систем тем, что студент вовлекается в активную учебно-познавательную и исследовательскую деятельность. При этом имеется возможность не только провести компьютерный эксперимент на основе готовой модели, но и самостоятельно построить различные модели изучаемых явлений. Следовательно, инструментальные программные комплексы моделирования, предоставляющие возможность конструирования моделей и наглядного представления результатов моделирования без программирования, имеют особую ценность. Эффект применения компьютера в учебном процессе в этом случае существенно возрастает.

Очевидно, что для решения вопроса о применении вычислительной техники в каждом конкретном случае следует ответить на ряд вопросов: можно ли то же самое реализовать другими доступными средствами, какие принципиально новые качественные возможности дает персональный компьютер как средство обучения, какой положительный эффект при этом будет достигнут. С этой точки зрения главная особенность применения моделирования в учебном процессе состоит в использовании компьютера как средства познания. Основой изучения процессов становится имитация, активный компьютерный эксперимент и анализ его результатов.

Таким образом, обучение приобретает активную, познавательную, творческую форму. Традиционные методики не дают таких широких возможностей.

Применение информационных технологий способно обеспечить индивидуализацию образования. Обычными средствами эта цель не достижима, так как требует нереального количества ресурсов. Общение студента с компьютером обеспечит развитие сообразно его наклонностям, даст навыки работы с формализованным знанием и практику самостоятельного получения знаний. Применение программных средств моделирования возможно в различных формах: демонстрация, достижение требуемой реакции объекта, экспериментирование и т.д. Все это дает возможность на деле выработать навыки самостоятельного добывания знаний. Главным результатом обучения будет знание, полученное активным путем. Таким образом, моделирование, в том числе компьютерное, составляет неотъемлемую часть образования, причем по важности оно приобретает первостепенное значение.

Подведем итог. В данной главе рассмотрены основные теоретические положения и основные понятия моделирования. Описаны особенности компьютерного моделирования, представлена информация о современных инструментальных системах моделирования общего назначения. Здесь рассматривается особая роль моделирования в современной науке и технике, а также в педагогической практике. Материал главы составляет основу для дальнейшего изучения курса.

### **Контрольные вопросы к главе 1**

1. В каких областях научных знаний находит применение моделирование?



2. Раскройте роль и особенности применения моделирования в технике.
3. Раскройте суть понятий «модель» и «моделирование».
4. В каких случаях моделирование особо актуально?
5. Укажите причины необходимости множества моделей для изучения объекта или процесса.
6. Каковы основные функции моделей?
7. Какие типовые задачи решаются путем моделирования?
8. Какие модели составляют фундамент любой научной теории?
9. Каковы особенности компьютерного моделирования?
10. Назовите причины актуальности моделирования в технике.
11. Перечислите этапы построения модели.
12. Какие факторы должны учитываться при выборе вида и способа построения модели?
13. Что такое адекватность модели?
14. Каковы причины неадекватности моделей?
15. По каким основным признакам классифицируются модели?

## **Глава II. Математическое моделирование в технике**

### **§ 1. Введение в математическое моделирование**

Элементы математического моделирования используются с момента появления точных наук. Само рождение науки математики связано с решением практических задач на основе вычислений и моделирования. Второе рождение математического моделирования связано с появлением компьютеров, которые избавили ученых и инженеров от огромной рутинной работы по проведению расчетов и существенно расширили сферы приложения математического моделирования, без которого нельзя представить современную науку и технику.

При обсуждении актуальности моделирования отмечалось, что прямой натурный эксперимент для многих объектов дорог, опасен или невозможен. Многие из технических систем существуют в единственном экземпляре. Результаты экспериментов с реальными объектами могут привести к необратимым отрицательным последствиям. При создании новых технических объектов их необходимо сначала спроектировать, т.е. установить, какие значения должны иметь параметры объекта, чтобы его свойства и функции соответствовали требуемым. Иными словами, параметры нового объекта, прежде чем он будет создан, необходимо рассчитать и провести анализ его свойств.

Совершенно очевидно, что результаты теоретических исследований в любой области науки будут иметь наибольшее практическое значение, если выразить их в виде конкретных количественных зависимостей или, попросту говоря, в виде математических формул. Кроме того, теоретические результаты необходимо сопоставлять с результатами измерений,

полученных в ходе экспериментов. Для решения подобных проблем необходимо моделирование на основе количественных закономерностей протекающих процессов. Именно такую возможность предоставляет математическое моделирование. Оно является незаменимой составляющей в развитии науки и техники.

Математическое моделирование какого-либо объекта или процесса связано с отражением количественных характеристик его свойств, как правило, в числовом виде. Количественное выражение свойств объекта выполняется с помощью системы параметров, но только в том случае, если эти свойства можно измерить. Лишь в результате измерения свойств параметры могут получить свои значения. Измерения любого свойства всегда связаны с какой-либо шкалой, в рамках которой они проводятся. Именно шкала позволяет выполнить сравнение нескольких объектов по одному свойству.

Измерение – это операция, которая наблюдаемому состоянию объекта ставит в соответствие определенное обозначение. Рассматриваются различные состояния объекта. Будем рассматривать такие способы измерения, которые различным состояниям ставят в соответствие различные обозначения.

Допустим, что число различных состояний конечно. Каждому состоянию поставим в соответствие свое обозначение. Суть измерений состоит в определении принадлежности результата к определенному классу и записи этого с помощью определенного обозначения. Такие измерения называются измерениями в шкале наименований (или в классификационной шкале). Раз обозначения классов – символы (даже если это цифры), то при обработке данных в шкале наименований можно

выполнить только операцию проверки их различия или совпадения.

Если измерения позволяют сравнивать разные классы, то можно выбрать порядковую шкалу. В этом случае между классами можно установить соотношения типа:  $A > B$  или  $B < A$ . Примеры: воинские звания, место в конкурсе, оценка успеваемости в процессе обучения. При оценивании успеваемости для обозначения классов могут использоваться слова: «отлично», «хорошо» и т.д. или цифры: 5, 4, 3, 2.

Отношения порядка не говорят о «расстоянии» между классами. Измерения в таких шкалах нельзя обрабатывать как числа, например, вычислять среднеарифметическое значение оценок успеваемости.

Если измерения можно выполнить настолько точно, что становятся известны «расстояния» между любыми двумя классами, то измерения можно проводить в шкале интервалов. Расстояние между классами должно выражаться в единицах, одинаковых по всей шкале. Пример: измерение времени, высоты, температуры. В подобных шкалах только длины интервалов имеют смысл настоящих чисел и только над ними можно выполнять арифметические операции.

Наиболее сильной является абсолютная шкала, она имеет абсолютный нуль и абсолютную единицу. Абсолютная шкала безразмерна. Пример: числовая ось или абсолютная шкала температур. Над показателями такой шкалы можно выполнять любые операции.

Опираясь на общее определение модели, можно сказать, что математическая модель – это математический объект, который по своим свойствам подобен объекту-оригиналу.

Математическая модель – это абстракция, в которой отношения и связи между реальными элементами объекта моделирования заменены подходящими математическими соотношениями между параметрами. Математическая модель отражает количественные характеристики процессов, которые протекают в объекте, т.е. она отражает связи между параметрами. В виде совокупности параметров количественные характеристики объекта представляются в модели. Параметры можно разделить следующим образом:

1. **Входные параметры** – характеризуют внешние воздействия на объект (например, внешние управляющие воздействия).
2. **Выходные параметры** – характеризуют реакцию объекта, его воздействие на окружающую среду, т.е. характеризуют внешнее проявление объекта.
3. **Внутренние параметры** – характеризуют свойства процессов, протекающих в самом объекте. Внутренние параметры могут быть зависимыми или независимыми. Естественно, что независимые параметры можно изменять произвольно, а зависимые изменяются только косвенно в силу их зависимости от других факторов.

Таким образом, объект моделирования характеризуется:

- совокупностью параметров внешних управляющих воздействий  $\vec{I}_1(t) = (u_1(t), \dots, x_n(t))$ ;
- совокупностью параметров воздействий окружающей среды  $\vec{I}_2(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$ ;
- совокупностью внутренних независимых параметров  $\vec{I}_3(t) = (h_1(t), \dots, h_k(t))$ ;

- совокупностью внутренних зависимых параметров  $\vec{P}(t) = (p_1(t), \dots, p_s(t))$ ;
- совокупностью выходных параметров системы  $\vec{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t))$ .

С учетом вышесказанного можно утверждать, что математическая модель устанавливает количественные связи между входными и независимыми внутренними параметрами, с одной стороны, и выходными и внутренними зависимыми параметрами, с другой стороны. Как правило, математическая модель – это система уравнений.

В общем случае векторные величины  $\vec{X}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{H}$  могут содержать как детерминированные, так и стохастические составляющие. Входные воздействия  $\vec{X}$ , внутренние параметры  $\vec{V}$  и частично воздействия окружающей среды являются независимыми переменными. Совокупность векторных величин  $\vec{X}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{Y}$  полностью характеризует состояние объекта. Процесс изменения состояния объекта можно выразить следующей обобщенной математической моделью:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}}(t) &= F_1(t, \vec{X}, \vec{V}, \vec{H}, \vec{Y}), \\ \dot{\vec{V}}(t) &= F_2(t, \vec{X}, \vec{V}, \vec{H}, \vec{Y}), \\ \dot{\vec{H}}(t) &= F_3(t, \vec{X}, \vec{V}, \vec{H}, \vec{Y}), \end{aligned}$$

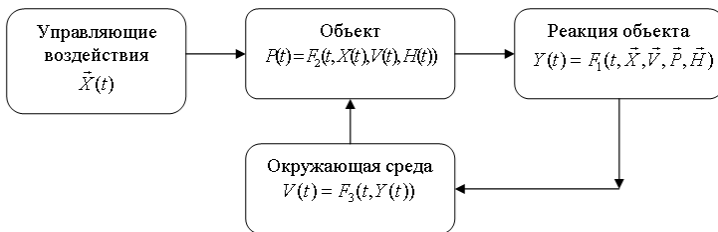


Рис. 15. Схема связей параметров математической модели

Представленные соотношения дополняются начальными условиями, определяющими состояние объекта моделирования в момент времени  $t=0$ . Данные соотношения называются законом функционирования объекта (рис. 15). Подобные модели принято называть динамическими. В этом случае параметры, которые изменяют свои значения во времени, называются переменными.

Статические модели отражают определенное состояние объекта, которое не меняется во времени (состояние равновесия). Совокупность переменных, определяющих состояние динамической системы, называют фазовым вектором, а область его изменения – фазовым пространством. При изменении времени фазовый вектор определяет последовательность точек, называемую фазовой диаграммой.

В большинстве случаев математическая модель представляет собой задачу некоторого раздела математики, для которой методы исследования уже разработаны. Замечательным свойством является формальное сходство (аналогия) математических моделей разнородных по своей природе объектов и процессов. Таким образом, имеется возможность сгруппировать математические модели в однородные с точки зрения математики классы и исследовать их как самостоятельные математические объекты безотносительно оригиналов.

Основой построения математической модели могут быть фундаментальные законы природы. Наиболее распространенный способ построения математических моделей как раз и состоит в применении фундаментальных законов к конкретной ситуации. Однако чисто теоретическим путем математическую модель построить проблематично, на определенном этапе всегда приходится использовать данные

экспериментов и наблюдений, феноменологические законы, эмпирические или полуэмпирические зависимости.

В научной литературе в качестве необходимых условий содержательного математического моделирования предполагается наличие априорной информации о природе и характере исследуемых объектов и процессов, например, в форме научных теорий, законов и т.п. Кроме того, необходимо наличие некоторых опытных данных о процессах в исследуемом объекте. На основе их статистической обработки определяются численные значения параметров модели. Результаты такой обработки опытных данных могут использоваться в виде уже готовых полуэмпирических зависимостей, которые можно найти в справочной литературе.

Таким образом, при построении математических моделей существует несколько путей:

1. Построение модели на основе законов, описывающих протекающие в объекте процессы, т.е. на основе знания о механизмах процессов и явлений с привлечением фундаментальных законов природы.
2. Построение модели объекта путем ее идентификации, т.е. чисто формальным путем с помощью статистической обработки результатов наблюдений, экспериментов с объектом, не опираясь на какие-либо знания о закономерностях процессов.
3. Построение модели системы на основе моделей элементов. Обычно этот метод используется тогда, когда необходимо построить математическую модель сложной системы на основе моделей ее элементов.

Первый путь (аналитический) реализуется при достаточной изученности общих закономерностей процессов, протекающих в моделируемом объекте. Недостатком подобных



моделей является сложность получающихся при этом уравнений. Достоинством аналитических моделей является общность результатов моделирования и большая информативность, возможность предсказать новые неизвестные свойства изучаемых процессов и явлений.

Второй путь, который называется экспериментальным, применяется при отсутствии информации о механизмах процессов, слабой изученности либо сложности объекта моделирования. Он используется при исследовании объекта в достаточно узком «рабочем» диапазоне параметров. При таком подходе требуется постановка опытов непосредственно на самом изучаемом объекте. Достоинством экспериментального метода является простота получаемых моделей при достаточно точном описании свойств объекта в узком диапазоне изменения параметров. Однако экспериментальный метод далеко не всегда позволяет распространить полученные результаты на другие однотипные объекты.

Третий путь характерен для моделирования сложных систем, когда исследователя интересуют свойства системы в целом.

В главе 1 мы уже рассматривали общую схему построения моделей. Теперь проанализируем особенности построения математических моделей. Первоначально любая задача моделирования строится как задача какой-либо предметной области либо конкретной области науки. Описание (модель) объекта выполняется на основе естественного языка, а затем на основе более строгого научного языка, в котором используется система базовых понятий некоторой области науки. Естественно, постановка задачи должна содержать определение конечных целей моделирования, того набора свойств системы,

взаимосвязи между которыми актуальны для решения данной задачи. Подобная модель носит название концептуальной.

Построение математического описания объекта всегда требует формализации задачи моделирования, т.е. ее описания в рамках какой-либо формальной системы на основе строгих и однозначных правил.

Необходима также формулировка исходных допущений относительно исследуемого явления и упрощающих предположений.

При построении математической модели необходимо выбрать класс математических объектов, которые в принципе могут отображать количественные характеристики моделируемого объекта. Естественно, что выбранный математический объект должен учитывать структуру и связи объекта моделирования, иметь такое число параметров, которых достаточно для отражения его главных свойств. Значения параметров модели должны быть определены путем идентификации или с привлечением феноменологических или полуэмпирических законов. Иначе математическая модель остается неопределенной. После построения модели необходимо сопоставление модельных результатов и наблюдений, т.е. оценка адекватности модели.

Одной из серьезнейших проблем математического моделирования является большая размерность, т.е. большое число параметров. В этом случае систематизировать результаты моделирования и установить скрытые связи практически невозможно. Причиной этого является то, что к простым по форме фундаментальным законам при построении модели добавляются начальные и граничные условия, которые выделяют единственное решение. Физические свойства системы определяются физическими константами, которые должны

быть определены дополнительно. Ход процессов зависит от взаимодействия с окружающей средой, что порождает ряд дополнительных параметров, характеризующих это взаимодействие. Аналогичным образом требуется определить геометрические свойства объекта моделирования и т.п.

Большая размерность моделей не является их собственным свойством. Оказывается, что влияние параметров на свойства системы проявляется не порознь, а в некоторой совокупности. То есть при анализе моделей следует рассматривать не отдельные параметры, а их комплексы. Теория подобия дает способы построения таких комплексов, основанных на анализе исходной задачи. Подобная процедура позволяет существенно (иногда полностью) сократить число параметров модели, т.е. построить своеобразную обобщенную математическую модель и уже на этом этапе выявить определенные закономерности и свойства процессов. Методы построения таких моделей представлены далее в следующих разделах.

Дополнительные теоретические материалы по математическому моделированию объектов, процессов и систем можно найти в монографиях [1], [9], [10], [14], [20], [26 - 33].

## **§ 2. Примеры построения математических моделей**

В данном разделе в качестве примеров математических моделей используются модели физических процессов. Это классическая область применения математического моделирования. Здесь излагается материал в рамках подхода, основанного на построении обобщенных безразмерных моделей и применения инструментальной системы MVS для их реализации.

**Движение тела под действием силы тяжести в среде с сопротивлением.** На примере этой простой задачи подробно

рассмотрим весь путь построения модели и принимаемые допущения, которые определяют условия адекватности моделирования. Обычно подобные задачи в учебной литературе рассматриваются без предварительного анализа всех необходимых допущений.

Итак, объект моделирования представляет собой тело определенных размеров, которое совершает прямолинейное движение под действием силы тяжести и силы сопротивления движению со стороны окружающей среды. Расчетная схема процесса представлена на рис. 16.

Допущения, принятые при построении модели:

- Тело имеет правильную геометрическую форму, например, шар, движение происходит прямолинейно под действием силы тяжести и силы сопротивления. Действительно, законы движения шарообразного тела и тела, имеющего форму пластины, имеют существенное различие.
- Масса тела – постоянная величина. Таким образом, модель не описывает, например, движение тел, вещество которых испаряется, сгорает или растворяется.
- В процессе движения форма тела не изменяется. Капля жидкости или пузырек газа изменяют свою форму, для описания их движения требуются намного более сложные модели.
- Плотность тела существенно выше плотности окружающей среды. Таким образом, силой Архимеда можно пренебречь. В соответствии с этим допущением из рассмотрения исключаются процессы, в которых сила Архимеда имеет определяющее значение. Например, всплывающий газовый пузырек намного легче

окружающей жидкости, его движение подчиняется более сложным законам, в соответствии с которыми траектория его движения будет иметь волнообразный характер.

- Вращение тела отсутствует. Таким образом, полет футбольного мяча данная модель в полной мере описать не в состоянии.
- Сила сопротивления линейно зависит от скорости движения тела:  $F = -kV$ . Такое допущение справедливо в определенном диапазоне скоростей движения тела. На практике часто реализуется квадратичный закон сопротивления:  $F = -k \cdot V \cdot |V|$ .
- Гравитационная сила – постоянная величина. Таким образом, модель не распространяется на описание процессов космического масштаба, например, движения космического летательного аппарата по околоземной орбите или полета метеорита.

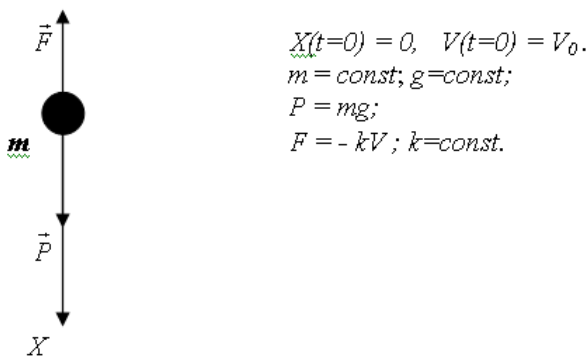


Рис. 16. Расчетная схема движения тела

Если перечисленные допущения выполняются, то тело можно считать материальной точкой, движение которой описывается законами классической механики. Все допущения

направлены на то, чтобы определить область корректного применения законов движения материальной точки. Однако определение значения коэффициента  $k$  возможно только путем идентификации или с помощью полуэмпирических зависимостей.

На примере данной модели мы хотим подчеркнуть, что любая модель имеет свою область применения. Действительно, перечень допущений достаточно велик и невыполнение любого из них приведет к неадекватным результатам моделирования.

Например, вращение тела при движении в среде с сопротивлением создает дополнительную силу (эффект Магнуса). Проявление данного эффекта можно наблюдать в ходе любого футбольного матча.

Цель моделирования: построить модель, на основе которой можно определить закон изменения скорости движения тела  $V(t)$  и закон изменения координаты  $X(t)$  во времени. В соответствии с принятыми допущениями модель движения тела строится на основе второго закона Ньютона. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение тела, имеет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - kV, \quad \frac{dx}{dt} = V$$

с начальными условиями:  $V(t=0) = V_0$ ;  $x(t=0) = 0$ .

Данная модель имеет четыре параметра, что существенно затрудняет анализ. Для упрощения анализа результатов моделирования необходимо свести количество параметров к минимуму. Преобразуем модель к безразмерному виду следующим образом:

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = 1 - \frac{k}{mg} V.$$

Определим безразмерную скорость  $\bar{V}$  как отношение текущего значения скорости  $V$  к ее начальному значению  $V_0$ :  $\bar{V} = V/V_0$  и преобразуем уравнение движения:

$$\frac{V_0}{g} \frac{d\bar{V}}{dt} = 1 - \frac{kV_0}{mg} \bar{V}.$$

Обозначим:  $t^* = V_0/g$  – характерное время процесса.

Введем безразмерное время  $\bar{t} = t/t^*$ . Тогда уравнение движения примет вид:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = 1 - \left(\frac{kV_0}{mg}\right) \bar{V}.$$

Обозначим  $\bar{k} = \frac{kV_0}{mg}$  – безразмерный коэффициент сопротивления. С учетом принятых обозначений уравнение движения запишем в следующей форме:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = 1 - \bar{k}\bar{V}.$$

Кинематическое уравнение преобразуется аналогичным образом:

$$\frac{1}{V_0 t^*} \frac{dx}{dt} = \bar{V}, \quad \bar{x} = x/(V_0 t^*).$$

В итоге получим систему безразмерных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = 1 - \bar{k}\bar{V}, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}$$

с начальными условиями:  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 0, \quad \bar{V}(\bar{t} = 0) = 1.$

После преобразований задача приведена к безразмерному виду и имеет всего один безразмерный параметр  $\bar{k}$ .

Естественно, анализ свойств подобной модели проводить значительно проще, чем исходной.

При анализе модели в исходном размерном виде, задав конкретные значения параметров, мы установим свойства лишь единственной конкретной системы. Анализ модели в безразмерной форме для заданного значения  $\bar{k}$  дает информацию о свойствах бесконечного числа реальных систем, для которых:

$$\bar{k} = \frac{kV_0}{mg} = const.$$

Различные реальные системы, имеющие одинаковое значение параметра  $\bar{k}$ , называются подобными, а параметр  $\bar{k}$  для данной задачи называется критерием подобия.

В частном случае, когда  $V_0=0$ , аналогичным способом можно получить безразмерную модель с нулевым количеством параметров. Такая система называется автомодельной. В этом случае все реальные процессы подобны друг другу.

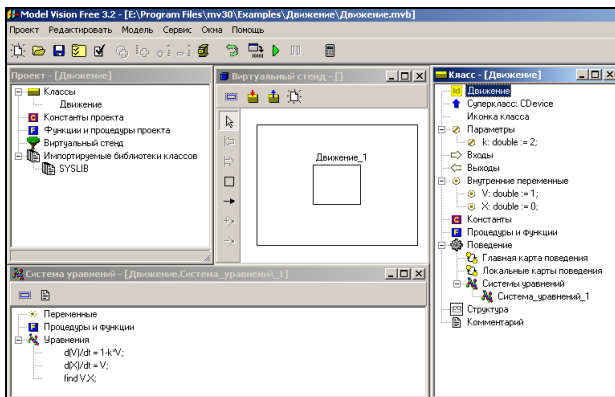


Рис. 17. Компьютерная MVS-модель движения тела в среде с сопротивлением



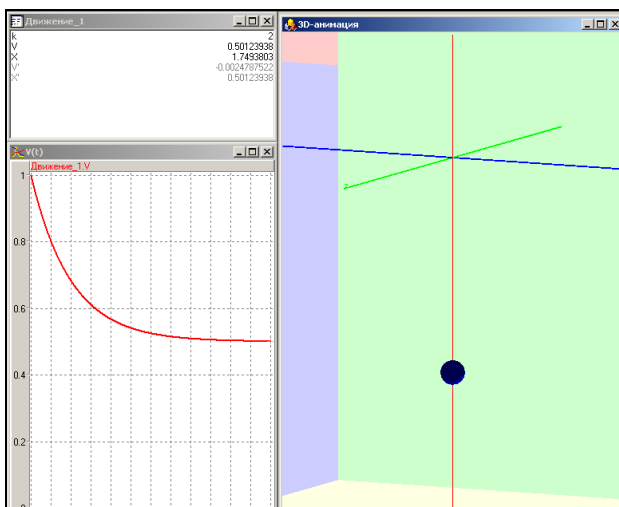


Рис. 18. Результаты моделирования в среде MVS

Таким образом, проделанные предварительные преобразования существенно повысили информативность модели и упростили дальнейший вычислительный эксперимент. Построенная в среде MVS для данного процесса компьютерная модель имеет вид по рис. 17. Результаты представлены на рис. 18.

### **Тепловое взаимодействие тела с окружающей средой.**

Имеется тело с параметрами:  $m$  – масса тела,  $c$  – теплоемкость, которые неизменны с течением времени. В начальный момент времени температура тела равна заданной величине:  $T(t=0)=T_1$ .  $T_1 > T_0$ , где  $T_0$  – температура окружающей среды:  $T_0=const$ . Тепловое взаимодействие тела с окружающей средой происходит по поверхности тела площадью  $F=const$ . Задача состоит в следующем: установить характер изменения температуры тела во времени  $T(t)$  после того, как началось охлаждение.

Модель процесса строится на основе закона сохранения энергии в форме уравнения теплового баланса:

$$mc \frac{dT}{dt} = F\alpha(T_0 - T).$$

Левая часть уравнения отражает скорость изменения во времени количества тепла в нагретом теле, правая часть соответствует скорости передачи тепла в окружающую среду через боковую поверхность тела. Данная величина пропорциональна площади боковой поверхности тела и разности температур. Здесь  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, который определяется на основе полуэмпирических зависимостей.

Эта модель адекватно описывает процесс только в том случае, если скорость распространения тепла внутри тела за счет теплопроводности много больше скорости теплоотдачи через боковую поверхность тела. В противном случае нельзя полагать, что температура тела по его объему будет иметь равномерное распределение.

Преобразуем уравнение к безразмерной форме:

$$\frac{mc}{\alpha F} \cdot \frac{dT}{dt} = (T_0 - T), \quad t^* = \frac{mc}{\alpha F}, \quad \frac{dT}{dt} = (T_0 - T).$$

Здесь  $t^*$  – характерное время (масштаб) процесса,  $\bar{t}$  – безразмерное время процесса:  $\bar{t} = t/t^*$ . Определим безразмерную температуру следующим образом:  $\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$ .

При  $T = T_0 \Rightarrow \bar{T} = 0$ ,  $T = T_1 \Rightarrow \bar{T} = 1$ . Тогда уравнение модели можно преобразовать и представить в виде:

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} = -\bar{T}, \quad \bar{T}(\bar{t} = 0) = 1.$$

Полученная безразмерная модель не имеет параметров, тогда как исходная размерная модель содержала шесть параметров. Компьютерная MVS модель процесса и результаты моделирования представлены на рис. 19-20.

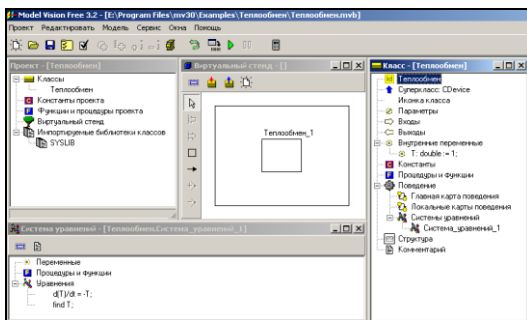


Рис. 19. Компьютерная MVS-модель теплового взаимодействия

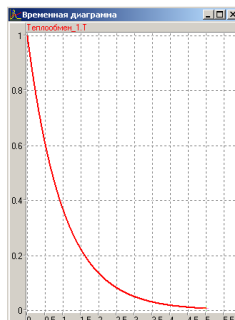


Рис. 20. Результат моделирования

Дополнительно примеры задач математического моделирования можно найти в изданиях [1], [3], [9], [11], [26], [31].

### § 3. Построение безразмерных обобщенных моделей

Математические модели многих объектов или процессов, как правило, имеют достаточно большое число параметров. Это существенно затрудняет выявление каких-либо закономерностей. Построение безразмерной модели еще на этапе, предшествующем проведению вычислительных экспериментов с математической моделью, позволяет существенно повысить ее информативность и информативность результатов моделирования. Это следствие сокращения числа параметров и выявления безразмерных комплексов, которые и определяют свойства моделируемого объекта.

Построение безразмерной модели позволяет установить законы подобия. Именно при построении моделей технических объектов были впервые разработаны основные положения теории подобия, которые впоследствии нашли применение при решении многих задач. В предыдущем разделе такие преобразования уже производились. Теперь рассмотрим общую методику, суть которой состоит в следующем:

1. **Построение модели.** Математическая модель строится в виде системы уравнений в размерной форме. Только в этом виде уравнения отражают «физическую» суть моделируемых процессов.
2. **Определение безразмерных переменных.** Все переменные (пространственные координаты, время, искомые функции) представляются в безразмерной форме путем введения неопределенных масштабов.
3. **Преобразование модели к безразмерному виду.** Уравнения, краевые и начальные условия преобразуются к безразмерному виду чисто алгебраическими методами. В этом случае в уравнениях образуются безразмерные комплексы размерных параметров, которые включают неопределенные масштабы.
4. **Определение масштабов.** Безразмерные комплексы, содержащие неопределенные масштабы, приравниваются единице. Тем самым образуется система алгебраических уравнений, решение которой дает выражения для неопределенных масштабов. Естественно, что число алгебраических уравнений, которые используются для определения масштабов, должно быть равно числу неопределенных масштабов. В оставшихся безразмерных комплексах масштабы получают конкретные значения. Эти комплексы и

образуют безразмерные параметры задачи. Таким чисто формальным путем могут быть получены естественные безразмерные параметры модели, которые в каждом конкретном случае имеют свой «физический» смысл.

Результаты исследования безразмерной модели распространяются на множество реальных объектов, для которых безразмерные параметры имеют одинаковые значения.

В качестве примера рассмотрим преобразование к безразмерному виду модели динамической системы, которая представляет собой тело массой  $m$ , совершающее колебания под действием упругой пружины и сил трения. Схема объекта моделирования представлена на рис. 21.

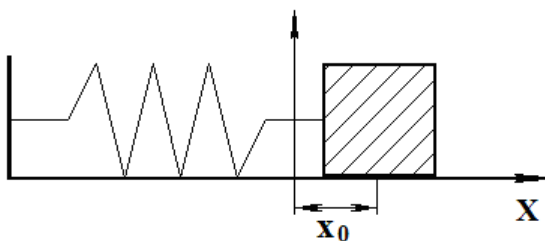


Рис. 21. Схема объекта моделирования

### 1. Построение модели

Исходная размерная модель, записанная в виде системы дифференциальных уравнений, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = -cx - kV, \\ \frac{dx}{dt} = V; \end{cases} \quad x(t=0) = x_0, \quad V(t=0) = 0,$$

где  $m$  – масса тела,  $x$  – координата тела,  $V$  – его скорость,  $c$  – жесткость пружины,  $k$  – коэффициент трения. Значение  $x = 0$  соответствует положению равновесия.

## 2. Определение безразмерных переменных

Определим безразмерные переменные следующими соотношениями:

$$\bar{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V^*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}.$$

Здесь  $x^*$ ,  $V^*$ ,  $t^*$  – неопределенные масштабы (положительные константы),  $x$ ,  $V$ ,  $t$  – размерные переменные.

## 3. Преобразование модели к безразмерному виду

Преобразуем модель к безразмерному виду путем замены переменных:

$$x = \bar{x} \cdot x^*, \quad V = \bar{V} \cdot V^*, \quad t = \bar{t} \cdot t^*.$$

Тогда уравнения и начальные условия примут вид:

$$\frac{V^* m}{t^*} \frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -x^* c \cdot \bar{x} - k V^* \bar{V}; \quad \frac{x^*}{t^*} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = V^* \bar{V}.$$

Или

$$\frac{V^* m}{x^* t^* c} \frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -\bar{x} - \frac{k V^*}{c x^*} \bar{V}; \quad \frac{x^*}{V^* t^*} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}.$$

$$\bar{x}(\bar{t} = 0) = x_0 / x^*, \quad \bar{V}(\bar{t} = 0) = 0.$$

## 4. Определение масштабов

Масштабы  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $t^*$  выберем таким образом, чтобы:

$$\frac{V^* m}{x^* t^* c} = 1, \quad \frac{x^*}{V^* t^*} = 1, \quad x_0 / x^* = 1.$$

Тогда

$$t^* = \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad x^* = x_0, \quad V^* = x_0 \sqrt{\frac{c}{m}};$$

и система уравнений будет иметь следующий безразмерный вид:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -\bar{x} - \bar{k}\bar{V}, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}.$$

Здесь  $\bar{k} = \frac{k}{\sqrt{mc}}$  – безразмерный параметр, безразмерный коэффициент трения. Начальные условия суть следующие:  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 1$ ,  $\bar{V}(\bar{t} = 0) = 0$ .

Прделанные преобразования показали, что поведение и свойства системы по рис. 23 полностью определяются значением безразмерного параметра  $\bar{k}$ . Таким образом, результаты исследования модели при конкретном значении параметра  $\bar{k}$  будут представлять свойства целой группы подобных явлений, имеющих такие же значения этого параметра.

Применение данной методики позволяет свести к минимуму число параметров, что существенно упрощает задачу моделирования. Эта процедура может быть выполнена разными способами. В данной задаче при отсутствии трения ( $\bar{k} = 0$ ) все системы подобны между собой (автомодельны).

В итоге получается обобщенная безразмерная модель, которая сама по себе лишена всякого «физического» смысла. Физический смысл результатов моделирования истолковывается только через интерпретацию безразмерных параметров и переменных. При проведении вычислительного эксперимента на основе подобных моделей во многих случаях порядок величин и порядок вычислительных ошибок может быть оценен заранее.

Таким образом, представленный метод позволяет выявить важное для моделирования свойство объектов и процессов – явление подобия. В рамках рассмотренной модели подобными будут считаться все процессы, имеющие одинаковые значения безразмерных параметров.

Утверждение о подобии явлений есть констатация определенной общности их свойств. Исторически понятие подобия сложилось на основе сравнительного анализа явлений одной и той же физической природы. Установлено, что результаты, полученные при анализе единичного конкретного явления (объекта или процесса), могут быть по определенным правилам перенесены на множество других явлений. Изучение и установление законов подобия явлений самой разнообразной природы есть предмет исследований теории подобия.

Понятие подобия физических процессов родственно понятию геометрического подобия. В этом случае под подобием понимается такое взаимно однозначное соответствие между сопоставляемыми объектами или процессами, при котором правила перехода от параметров одного объекта к параметрам другого объекта известны или заданы.

Замечательным свойством окружающего нас мира является то, что модели процессов и явлений самой разнообразной природы сводятся к тождественным по форме



безразмерным математическим моделям. Таким образом, результаты исследования одного явления могут быть перенесены на явление совершенно другой физической природы. Такое подобие называют аналогией. Наиболее известными являются электротепловая и электромеханическая аналогии. Оказывается, что закономерности электрических и механических процессов, электрических и тепловых процессов описываются одинаковыми уравнениями. Различие состоит лишь в разной физической интерпретации переменных и параметров, входящих в эти уравнения. Таким образом, можно заменить неудобное и громоздкое экспериментирование, например, с механической конструкцией на простые опыты с электрической схемой.

Таким образом, выявление законов подобия при моделировании систем различной природы показывает, как наиболее информативно представить результаты модельных экспериментов и выявить закономерности процессов. Дополнительные теоретические материалы из области теории подобия можно найти в монографиях [23] и [38].

#### **§ 4. Методы исследования моделей, численное моделирование**

Построение математической модели и преобразование ее к безразмерному виду позволяет уже на этой стадии получить определенную информацию о свойствах ее решения и, следовательно, объекта моделирования. Существует класс качественных математических методов, предназначенных для выявления свойств объекта или процесса моделирования без решения уравнений, составляющих его математическую модель.

Они позволяют установить свойства решения только на основе анализа параметров модели. Однако во многих случаях получение решения уравнений математической модели необходимо. Используемые в настоящее время методы исследования математических моделей в прикладных областях можно разделить на следующие виды: точные, асимптотические, приближенные и численные.

Под точными методами понимаются методы, которые позволяют получить решение исходной задачи в аналитическом виде. Они применимы для решения достаточно простых линейных задач с постоянными коэффициентами. Достоинством точных аналитических решений является их наглядность, большая информативность и компактность. Для решения современных задач моделирования такие методы практически не применяются. Однако точные решения могут использоваться в качестве тестовых задач при разработке других методов (приближенных и численных).

Технические системы, изучаемые современной наукой, не поддаются исследованию в необходимой для практики полноте аналитическими методами. Это обстоятельство обусловлено сложностью и нелинейностью математических моделей. Для нелинейных задач большим достижением считается получение даже частных решений.

Изучение любого явления начинается с определения его основных закономерностей на качественном уровне. При этом уравнения модели часто настолько сложны, что необходимо построение упрощенных моделей, без которых невозможно выявить механизмы процессов и составить их ясное понимание. В ряде случаев упрощение достигается за счет того, что рассматривается такой вариант задачи, в котором удается выделить малый параметр. В этом случае решение

представляется в виде разложения в ряд. Подобные методы носят название асимптотических или методов возмущений и применяются в гидродинамике, квантовой механике и т.д.

До сих пор сохраняют свое значение приближенные методы, которые опираются на неформальное понимание сути процессов. Приближенные методы удобны для получения грубых оценок на предварительном этапе исследования. Они играют большую роль в получении качественных представлений и часто используются в инженерной практике, когда исходная задача имеет приближенную постановку и значения параметров определены с точностью до порядка. В качестве примера приближенных методов можно привести решение нелинейной задачи по линейному приближению, решение задачи с переменными параметрами по алгоритмам для задач с постоянными коэффициентами и т.д.

Как бы ни были разнообразны методы приближенного или качественного анализа математических моделей, область их применения ограничена. Это либо достаточно простые модели, либо упрощенные фрагменты сложных нелинейных моделей. Математические модели реальных объектов являются нелинейными. Для проведения экспериментов с ними, т.е. для получения информации об их свойствах, требуется компьютерная реализация математических моделей на основе численных методов. Это единственный достаточно универсальный способ исследования математических моделей с помощью средств компьютерной техники, поэтому современное математическое моделирование всегда предполагает применение численных методов анализа и проведение компьютерных вычислительных экспериментов. Численные решения являются всегда приближенными и имеют дискретный характер. Доступный «пониманию» компьютера

вычислительный алгоритм должен удовлетворять достаточно жестким требованиям. К ним относятся, прежде всего, необходимость получить решение с заданной точностью за разумное время. Объемы обрабатываемой информации при этом не должны превышать возможностей компьютера.

Проблемы численного моделирования не решаются одним развитием вычислительной техники, так как постоянно происходит усложнение задач, выдвигаемых теорией и практикой, существует необходимость проведения большого числа серий вычислительных экспериментов для более полного изучения объекта. Поэтому разработка эффективных вычислительных методов остается одной из ключевых задач математического моделирования.

Для математических моделей, представленных дифференциальными уравнениями, процесс создания вычислительных алгоритмов состоит из построения дискретного алгебраического аналога исходных уравнений и его численного решения. Дискретный аналог позволяет приближенно определить решение уравнений в конечном числе фиксированных точек по времени или по пространственным координатам.

Численные методы позволяют получить решения в областях, где другие методы бессильны. Однако огромный потенциал численных методов не делает их всесильным средством. К недостаткам численных методов можно отнести слабую наглядность и информативность результатов по сравнению с аналитическими и приближенными решениями, трудоемкость реализации, трудности применения, отсутствие строгого обоснования корректности вычислительных процедур для сложных нелинейных задач, проявление эффектов конечной разрядной сетки кодирования чисел. Любой численный метод

привносит в решение задачи количественную погрешность, а в ряде случаев и качественные эффекты, распознать природу которых затруднительно.

Рассмотрим основные характеристики численных методов, актуальные для моделирования:

**Устойчивость метода.** Неустойчивый численный метод приводит к накоплению и неограниченному росту вычислительных ошибок. Характерный признак неустойчивости вычислений: решение имеет пилообразный характер с быстро растущей амплитудой.

Естественно, что неустойчивые методы применять нельзя. Существуют условно и безусловно устойчивые методы. Условно устойчивый метод это такой метод, когда устойчивое решение получается при выполнении определённого условия для параметров вычислений. Для безусловно устойчивого метода устойчивость вычислений обеспечивается при любых сочетаниях вычислительных параметров.

**Степень точности метода** (порядок метода). Любой численный метод имеет основной характерный параметр. Обычно степень точности метода указывается в виде зависимости погрешность метода от величины этого параметра. Например:  $\delta \sim h^2$ , где  $\delta$  – погрешность метода,  $h$  – шаг вычисления. Такой метод называется методом второго порядка точности.

Выбор численного метода при реализации математической модели имеет большое значение. Так как любой численный метод является приближенным, то результаты моделирования будут содержать определенную заранее неизвестную ошибку. Существует множество научных публикаций, в которых проявление свойств численных методов ошибочно принималось в качестве свойств объекта моделирования.

Следует иметь в виду, что выбор численного метода определяется задачей моделирования исходя из принципа «оптимальной неточности». Это означает, что в задачах с приближенными исходными данными или при качественном анализе процессов применение методов высокой степени точности ничем не оправдано. В большинстве случаев результат может быть получен на основе простейших методов первого или второго порядка точности.

**Сходимость метода.** Это теоретическая характеристика, которая констатирует тот факт, что в пределе метод может дать точное решение при стремлении его основного параметра к нулю (или бесконечности). В практике численного моделирования большую роль играет скорость сходимости метода. Например, при решении нелинейных алгебраических уравнений наибольшую скорость сходимости имеет метод Ньютона.

Во многих случаях математические модели представляют собой системы алгебраических или дифференциальных уравнений. Суть методов решения подобных уравнений рассматривается в отдельных курсах и здесь не анализируется. Современные математические пакеты и инструментальные системы моделирования выполняют автоматический выбор и реализацию численного метода решения задачи.

Дополнительные материалы к данному разделу можно найти в монографиях [1], [9], [26], [40].

## **§ 5. Компьютерный вычислительный эксперимент**

Компьютерный вычислительный эксперимент проводится с компьютерной математической моделью с целью получения информации о свойствах модели. В принципе компьютерный эксперимент и эксперимент с натурным объектом имеют много

общего в плане методологии проведения. Однако компьютерный вычислительный эксперимент, несомненно, имеет ряд особенностей, которые состоят в следующем:

1. Простота проведения и повторения эксперимента с компьютерной моделью.
2. Возможность полного воспроизведения условий эксперимента.
3. Возможность управления экспериментом, включая его прерывание и возобновление.
4. Варьирование условий проведения эксперимента в широких пределах, включая изменение воздействия окружающей среды.
5. Возможность наглядного представления результатов.

Во многих случаях компьютерное математическое моделирование применяется для изучения уже произошедших событий. Однако существует значительное количество областей практической деятельности, в которых невозможно полагаться на непосредственное наблюдение и экспериментирование с реальными системами, поскольку последствия таких действий могут оказаться необратимыми. В технике актуальной проблемой является изучение свойств еще несуществующих объектов в процессе проектирования. Вычислительный эксперимент позволяет исследовать события или явления, которые могут носить исключительно гипотетический характер (например, «ядерная зима»). Компьютерный эксперимент позволяет выяснить механизмы развития процессов путем численного анализа влияния различных факторов на свойства системы. Что невозможно в натурном эксперименте.

Таким образом, в современной науке и технике появляется все больше областей, задачи в которых необходимо решать

исключительно на основе компьютерного вычислительного эксперимента:

- Прогнозирование и диагностика работы атомных реакторов, энергетических установок и энергетических систем на основе детального математического моделирования происходящих в них процессов. Имитация аварийных ситуаций в энергосистемах, выбор оптимальных режимов их работы.
- Расчет траекторий летательных аппаратов, решение задач аэродинамики, автоматизированное проектирование. Компьютерная обработка данных наблюдений, полученных со спутников.
- Моделирование технологических процессов, которые опираются на тонкие физико-химические эффекты.
- Классическая область применения математического моделирования – физика. В 1982 г. Нобелевская премия по физике была присуждена К.Вильсону, предложившему ряд фундаментальных моделей в теории элементарных частиц, которые исследовались численно.

В целом технологический цикл вычислительного эксперимента содержит следующие этапы:

1. Для исследуемого объекта или процесса строится математическая модель, формулируются допущения и границы применимости модели.
2. Математическая модель на основе численных методов преобразуется в такую форму, которая позволит получить информацию о свойствах объекта в ходе вычислительного эксперимента. В итоге разрабатывается вычислительный алгоритм.
3. Для реализации вычислительного алгоритма создается компьютерная программа, позволяющая проводить



компьютерный вычислительный эксперимент с целью получения информации о свойствах объекта моделирования.

На определенном этапе проведения вычислительных экспериментов наступает фаза прогноза: средствами математического моделирования предсказывается поведение объекта в условиях, где опыты не проводились или они вообще невозможны.

Таким образом, основой вычислительного эксперимента является математическая модель, теоретической базой – прикладная математика, а технической – электронная вычислительная техника (компьютер). Применение инструментальных систем моделирования по содержанию не меняет указанных действий.

Дополнительные сведения о методологии компьютерных вычислительных экспериментов содержатся в публикациях [1], [4], [9 – 10], [14], [19], [31].

Подведем итог. В данной главе мы познакомились с понятием «математическая модель», с особенностями построения таких моделей. Рассмотрено важное свойство математических моделей – подобие. Представлена методика построения безразмерных моделей, которые существенно упрощают исследование объектов и позволяют выявить условия подобия. Рассмотрены основные методы исследования математических моделей, характеристики численных методов моделирования и особенности компьютерного эксперимента.

### **Контрольные вопросы к главе 2**

1. Что такое математическая модель?
2. Каковы особенности математических моделей по сравнению с другими видами моделей?

3. Особенности построения математических моделей.
4. Что такое параметр?
5. Роль измерений в математическом моделировании.
6. Какие характеристики численных методов актуальны для моделирования?
7. Какие существуют способы построения математических моделей?
8. В чём преимущество безразмерных моделей?
9. В чём суть понятий «подобие» и «аналогия»?
10. На какие классы можно разделить методы исследования математических моделей?
11. Какие этапы включает в себя технологический цикл вычислительного эксперимента?
12. Приведите примеры технических задач, которые решаются исключительно на основе вычислительного эксперимента.

## **Глава III. Некоторые актуальные для техники виды моделей**

### **§ 1. Оптимизационные модели**

На протяжении всей практической деятельности по созданию новых объектов и систем человек вынужден искать способы создания изделий с наилучшими свойствами на основе имеющихся ограниченных ресурсов. При проектировании новых объектов всегда существует множество вариантов (альтернатив) выбора проектных решений. Выбрать наилучший вариант возможно формальным или творческим путем. Творческий путь основан на интуиции, опыте и т.п. Формальное решение проводится по строгим правилам, которые основаны на моделировании и методах оптимизации.

Рассмотрим один из методов решения задачи выбора наилучшего (оптимального) решения, который проводится с помощью определенного критерия – меры качества объекта. Суть критериального подхода состоит в следующем: формулируется критерий качества объекта (целевая функция), который, по сути, является математической моделью этого объекта, т.к. отражает количественную характеристику определенного свойства объекта. Для каждой задачи целевая функция формулируется исходя из сути самой задачи. Например, в качестве целевой функции может быть выбрана прибыль от реализации плана, затраты, производительность технической системы, ее мощность и т.п. Так как значение критерия качества (целевой функции) дает количественную (численную) оценку каждого варианта решения, то это позволяет сравнивать различные варианты и выбрать наилучший вариант.

Таким образом, при решении задач оптимального выбора в рамках критериального подхода используются математические модели особого рода – оптимизационные, включающие следующие компоненты:

1. Перечень независимых параметров объекта, определяющих его свойства и которые можно варьировать при поиске оптимального решения.
2. Критерий качества объекта (целевая функция). Могут быть заданы следующие варианты поиска значения целевой функции: максимизация или минимизация.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \text{Max}, (\text{Min}).$$

Здесь  $x_j$  – независимые параметры системы, которые можно варьировать при поиске решения.

3. Ограничения, которые отражают взаимозависимости между параметрами объекта:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq (= \leq) b_i.$$

4. Граничные условия, определяющие допустимые пределы изменения параметров:

$$e_j \leq x_j \leq d_j.$$

Решение (набор значений параметров  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), удовлетворяющее ограничениям и граничным условиям, называется допустимым. Среди допустимых решений необходимо найти такое, которое дает требуемое значение целевой функции (*max, min*). Это и есть оптимальное решение задачи. Получение оптимального решения позволяет обойтись без экспериментов с самим объектом.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального проектирования. При проектировании любого объекта ряд параметров может быть задан, другие же необходимо

определить расчетным путем исходя из некоторых условий, которые оговорены в техническом задании на проектирование. Такие методы расчета параметров объекта называются проектными.

Суть задачи состоит в следующем: требуется спроектировать бак для жидкости, имеющий форму параллелепипеда. Бак имеет днище и четыре боковые стенки. Задача сформулирована следующим образом: определить размеры бака заданного объема, изготовление которого потребует минимум материала.

Для расчета параметров бака используем следующие формулы:

$$V = a \cdot b \cdot h, \quad S = a \cdot b + 2 \cdot (a + b) \cdot h.$$

Здесь  $a$  и  $b$  – стороны основания (размеры днища),  $h$  – высота бака,  $V$  – объем бака,  $S$  – площадь необходимого листового материала (площадь боковой поверхности бака + площадь днища). Таким образом, в этой задаче формула расчета площади и есть целевая функция, значение которой необходимо сделать минимальным. Ограничения в задаче суть следующие: параметры бака имеют положительные значения, объем бака должен быть равен заданной величине.

Данная задача может быть решена с помощью надстройки электронных таблиц «Поиск решения». Для решения задачи оптимального проектирования предварительно необходимо в среде Excel создать таблицу по рис. 22.

Поиск оптимального решения по нелинейной модели (задача нелинейной оптимизации) производится методом итераций, поэтому в ячейки B3-D3 (изменяемые ячейки) предварительно необходимо ввести начальные значения переменных, более или менее правдоподобные. В эти ячейки автоматически будет помещено найденное решение. В ячейки

В4-D4 вводятся граничные значения переменных. В ячейки С7-С8 по правилам электронных таблиц вводятся формулы расчета объема бака и площади его поверхности, в ячейку Е7 – заданное значение объема бака.

	A	B	C	D	E
1	<b>Переменные</b>				
2		a	b	h	
3	<b>Значения</b>	2,00	1,50	1,00	
4	<b>Нижняя граница</b>	0	0	0	
5	<b>Зависимости</b>				
6		обозначение	формула	знак	Ограничение
7	<b>Объем бака</b>	V	3,00	=	3
8	<b>Площадь стального листа</b>	S	10,00	→	Minimum

Рис. 22. Таблица для решения задачи проектирования

Для построения собственно оптимизационной модели в диалоговом окне «Поиск решения» (рис. 23) необходимо задать адрес целевой ячейки, вид определяемого значения целевой функции, адреса изменяемых ячеек и ограничения.

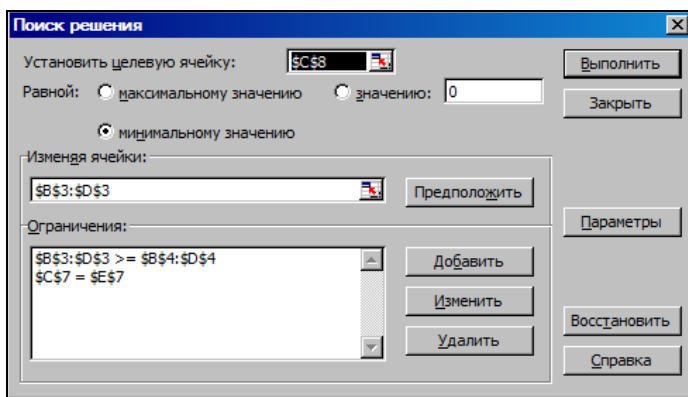


Рис. 23. Окно «Поиск решения»

Параметры поиска решения, задаваемые по умолчанию, обеспечивают решение задачи в большинстве случаев.

На практике оценка альтернатив одним критерием затруднена. Любая система характеризуется многими положительными или отрицательными качествами, например, производительность, мощность, энергоемкость, стоимость, трудоемкость изготовления и т.п. Обычно оценка решения делается с учетом нескольких частных критериев, такая задача называется задачей многокритериальной оптимизации. Как правило, нет решения, соответствующего экстремальному значению всех альтернатив, так как частные критерии качества имеют конкурирующий характер. Улучшение одного критерия ведет к ухудшению другого и т.д. В этом случае при выборе решения требуется принятие определенного компромисса. Отметим некоторые варианты методов принятия компромиссных решений:

1. **Метод уступок.** Этот прием основан на том, что с точки зрения решения конкретной задачи частные критерии неравнозначны между собой, одни более важны, чем другие. Пусть частные критерии упорядочены по степени их важности. Возьмем первый, самый важный критерий и найдем по нему наилучшее решение. Затем определим уступку, т.е. величину, на которую мы согласны изменить полученное значение самого важного критерия, чтобы за счет этого попытаться улучшить значение следующего критерия, и т.д.
2. **Введение интегрального критерия,** т.е. сведение многокритериальной задачи к однокритериальной. Важным элементом подобной оптимизации является назначение коэффициентов веса для каждого частного критерия. При построении подобных критериев применяются аддитивные и мультипликативные функции, которые определяют вклад каждого частного

критерия в интегральный критерий. Однако полученное подобным способом решение может быть весьма чувствительным к изменению весовых коэффициентов.

В заключение отметим, что оптимизация получила широкое применение, в первую очередь, в практике проектирования технических систем, а также в административной и управленческой деятельности. И это не удивительно, так как повышение эффективности любой целенаправленной деятельности – естественное стремление человека.

Нахождение оптимальных вариантов особенно важно для оценки состояния современной техники и экономики, определения перспектив ее дальнейшего развития. Часто оказывается, что оптимальное решение всего на несколько процентов превосходит существующее. Но нередко оптимизация вскрывает значительные резервы улучшения качества систем, практическое применение решений задач оптимизации прямо зависит от адекватности исходной модели.

Методам решения задач оптимизации посвящены монографии [15], [32], [37].

## **§ 2. Структурные модели**

Система – совокупность взаимодействующих между собой элементов. Любая система имеет структуру – это одно из ее основных свойств. В структуре отображается состав элементов системы и связи между ними. Структура – это внутренняя форма организации системы, определяющая способ взаимодействия составляющих ее элементов. Она придает целостность системе и обуславливает возникновение новых качеств. Свойства системы во многом зависят от ее структуры. Так как структура – одно из важнейших свойств системы, то ее



моделирование представляет особый интерес. Разработка принципиальной схемы технической системы – необходимый этап при ее проектировании.

Полезность моделирования структуры системы очевидна. Такие модели могут помочь упорядочить представления о системе. Например, представление совокупности работ в виде структурной модели позволяет продумать последовательность проведения работ для обеспечения выполнения проекта в заданные сроки. Такая модель помогает выявить временные ограничения, требуемые ресурсы, имеющиеся резервы и т.п.

При моделировании структуры главным свойством системы является наличие или отсутствие связей между элементами, пространственное же размещение элементов для структурных моделей не имеет значения.

Примеры структурных моделей: схема маршрутов перевозок, схема энергоснабжения предприятия, электрическая схема, блок-схема алгоритма и т.п. Положение элементов на подобных схемах выбирается из соображений наглядности и удобства анализа, оно никак не связано с их реальным пространственным размещением в отличие, например, от плана местности или географических карт, т.е. геометрических моделей. Например, схема метрополитена содержит информацию о существующих маршрутах и станциях пересадки пассажиров. Естественно, что в реальности кольцевой маршрут это не окружность, радиальные маршруты по конфигурации далеки от прямых линий. По такой схеме невозможно определить расстояние и время движения по маршруту.

Все структурные модели имеют нечто общее, что побудило рассматривать их как особый объект. Для этого необходимо отвлечься от содержательной стороны, оставив в схеме только общее: наличие элементов и связей между ними.

Такая схема называется графом. Теория графов родилась непосредственно в ходе решения прикладных задач. Это работы Эйлера (1737г., задача о кёнигсбергских мостах, рис. 24), работы Кирхгофа в области анализа электрических цепей, работы Кэли в области органической химии. С полным основанием теорию графов можно считать разделом прикладной математики.

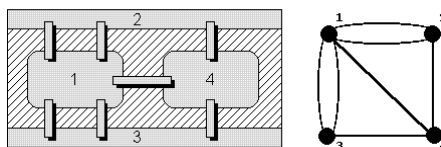


Рис. 24. Граф в задаче о кёнигсбергских мостах

Граф состоит из обозначений элементов произвольной природы, называемых вершинами, и обозначений связей между ними, называемых ребрами или дугами. Для отображения направленности связей ребра изображают со стрелками. Если направление обозначено, то граф называется ориентированным, в противном случае неориентированным. Пара вершин может быть соединена любым количеством ребер. Вершина может быть соединена сама с собой, в этом случае ребро называется петлей. Если указаны количественные характеристики вершин или ребер, то граф называется взвешенным. Если не накладывать ограничений на пересечение ребер, то можно утверждать, что графы могут отображать структуры любой сложности. Некоторые виды структур имеют особое значение для практики, они получили специальные названия: линейные, древовидные (иерархические), сетевые, матричные. Например, в управлении особое место занимают структуры с обратными связями, соответствующие кольцевым путям в ориентированных графах.

Построение структурной модели в виде графа позволяет формализовать описание структуры системы. Если представить граф в виде матрицы инцидентий, то структура системы может быть подвергнута анализу средствами вычислительной техники.

Особую роль структурные модели играют при проектировании новых технических объектов. Так построение структурно-функциональной модели технической системы позволяет создать новые технические решения на уровне изобретений.

Действительно, в каждой технической системе любой элемент выполняет определенные функции и функционально связан с другими элементами. Любой элемент технической системы реализует свои функции на основе каких-либо физических, химических либо других эффектов. Выяснение функциональных связей между элементами системы на основе структурной модели позволяет получить четкое представление об ее устройстве.

Структурно-функциональную модель можно представить в виде графа, отражающего взаимодействие элементов при выполнении своих функций. При этом вершины такого графа – элементы системы, а ребра – функции, выполняемые элементами системы.

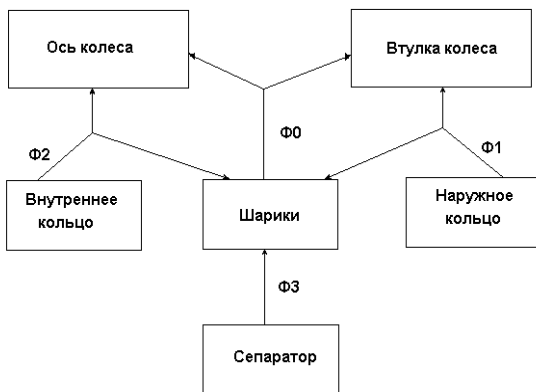


Рис. 25. Структурно-функциональная модель подшипника

Ребра выходят из вершин-элементов, чьи функции они описывают, и заканчиваются в вершинах-элементах, чью работу они обеспечивают, или в вершинах-объектах окружающей среды, взаимодействующих с рассматриваемым элементом. Из каждой вершины выходит столько ребер, сколько функций выполняется. Функции элементов на рис. 25: Ф0 – снижение трения при вращении; Ф1 – обеспечение качения втулки по шарикам; Ф2 – обеспечение качения шариков по оси; Ф3 – обеспечение равного удаления между шариками.

Имея функционально-структурную модель системы, можно выбрать различные физические эффекты для реализации функций элементов. Подобный подход позволяет автоматизировать процесс поиска новых технических решений и путем вариации физических эффектов получить любой тип подшипника. Дополнительную информацию о структурном моделировании можно найти в монографиях [10], [14], [20], [31], [36].

### § 3. Геометрические и графические компьютерные модели

Геометрическое моделирование изучает и применяет методы построения моделей, описывающих геометрические свойства различных объектов окружающего мира. К геометрическим свойствам относятся пространственные отношения между реальными объектами, их форма и размеры, положение и ориентация в пространстве.

Сам термин «компьютерная графическая модель» говорит о том, что отражение геометрических свойств объекта-оригинала осуществляется средствами компьютерной графики. Подобные модели как наиболее наглядные широко используются в практике моделирования при проектировании и конструировании.

Теоретической основой компьютерного геометрического моделирования являются математические методы построения подобных моделей, разрабатываемые в течение веков:

1. Геометрия Евклида – построения с помощью циркуля и линейки.
2. Аналитическая геометрия – алгебраические методы в геометрии.
3. Начертательная геометрия – проективная геометрия.
4. Вычислительная геометрия, методы геометрического моделирования на основе сплайн-аппроксимации трехмерных поверхностей.

Теоретические основы геометрического моделирования развивались, в первую очередь, как средство поддержки решения задач проектирования и конструирования. Геометрическое моделирование в технике, например, построение чертежей, имеет многовековую историю.

Описание геометрических свойств объектов при компьютерном моделировании происходит путем построения

математических моделей, отражающих эти свойства, что позволяет проводить различные преобразования, редактировать и строить графические отображения этих объектов. Подобные описания составляют основу векторной графики.

Для построения геометрических моделей используются идеализированные геометрические объекты: точка, линия, плоскость, поверхность и т.п., которые в отличие от реальных объектов обладают набором только наиболее существенных свойств. Эти идеализированные объекты являются концептуальными моделями геометрии. Так, геометрическая точка имеет только координаты, но не имеет размеров, геометрическая линия не имеет ширины и цвета, геометрическая плоскость – толщины и т.д.

Из многих вариантов компьютерных графических моделей рассмотрим один, который имеет особую актуальность, – отображение трехмерных объектов на плоской поверхности.

Еще задолго до появления компьютеров подобные задачи решались на основе законов перспективы и проекционного черчения. На базе точной геометрической интерпретации этих законов родилась целая техническая наука – начертательная геометрия. Однако и картина художника, и чертеж инженера дают статичное отображение объекта, с которым невозможно производить преобразования и различные манипуляции.

В практической деятельности человек имеет дело с трехмерными объектами, для отображения которых вынужден был строить модели на плоской поверхности. Основным недостатком традиционного двумерного изображения (например, чертежа), состоит в том, что конструктор вынужден использовать проекции трехмерного объекта на базовые ортогональные плоскости. Ограничение двумерных графических моделей особо проявляются, когда поверхность

детали имеет сложную криволинейную форму. Трудности восприятия по чертежу формы, взаимодействия и взаимного расположения различных деталей механизма в рамках двумерных графических моделей неустранимы.

Исторически возможности компьютерного графического моделирования претерпели существенное изменение, прежде чем они сравнивались с возможностями обычного рисунка или чертежа. Достаточно сказать, что первоначально отображение даже двумерных объектов (графиков, диаграмм и т.п.) производилось с помощью символов алфавита.

Следующий этап развития компьютерного графического моделирования связан с технологиями растровой и векторной графики. Естественно, что с тех пор, как компьютер «научился» рисовать на уровне пикселей, отображение плоских двумерных объектов не представляет особых трудностей.

На современном уровне развития информационных технологий модели трехмерных объектов по принципу их построения можно разделить на три вида: каркасные, поверхностные, твердотельные (сплошные).

**Каркасная модель** трехмерного геометрического объекта полностью описывается в терминах точек и линий (рис. 26). Элементами модели объекта являются линии (ребра) и точки (вершины). Подобный вид моделирования давно известен в черчении – это аксонометрическая проекция, которая непосредственно связана с прямоугольным проецированием при построении чертежа. Главное ограничение каркасных моделей вытекает из недостатка информации о поверхностях, заключенных между ребрами. Они строятся наблюдателем чисто умозрительно, вследствие чего невозможно однозначно распознать ориентацию и видимость граней трехмерного каркасного изображения. Этот эффект, которым иногда

умышленно пользуются художники, обусловлен самой природой каркасной модели и может привести к непредсказуемым результатам. Еще сложнее в рамках каркасной модели обстоит дело с отображением криволинейных поверхностей.

Каркасное моделирование – это моделирование самого низкого уровня. По своей сути оно является воспроизведением средствами компьютерной графики технологий трехмерного моделирования, разработанных для черчения на бумаге.

**Поверхностное моделирование** трехмерных объектов связано с использованием поверхностей как графических примитивов (рис. 27). Результатом моделирования является некоторая оболочка, которая описывает поверхность моделируемого объекта. В поверхностном моделировании создаются и модифицируются поверхности, описывающие отдельные элементы объекта. Эти поверхности обрезают по линиям пересечения, сопрягают друг с другом и т.п. Метод поверхностного моделирования эффективен для моделирования объектов, которые изготавливаются из листового материала и имеют сложные криволинейные поверхности, например, корпус автомобиля или самолета. В рамках этой технологии сложные поверхности образуются из элементарных геометрических поверхностей: поверхностей вращения, поверхностей, заданных аналитическими выражениями, или поверхностей, образованных параллельным переносом линий (рис. 27). Системы поверхностного моделирования представляют тело как совокупность поверхностей, соединенных друг с другом и ограничивающих «пустой» объем. Применение данного метода моделирования, несмотря на ряд его достоинств, создает проблемы в отображении внутренних полостей тела. Оно неприемлемо, например, в машиностроении.



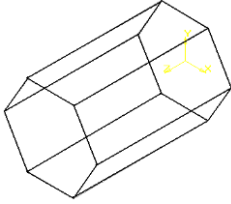


Рис. 26. Каркасная модель.

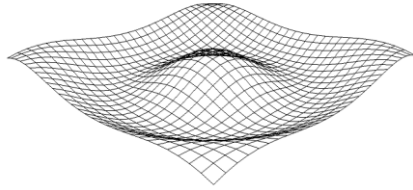


Рис. 27. Поверхностная модель.

**Твердотельная модель.** Основным элементом твердотельной модели является трехмерный объект как таковой. В твердотельном моделировании с самого начала построения модели работа производится с оболочками тел, а не с отдельными поверхностями. Оболочка полностью описывает поверхности объекта, отделяющие его внутренний объем от остальной части пространства. В модели отражено, что одну часть пространства занимает объект, а другая часть находится вне объекта. Модель объекта имеет одну внешнюю и несколько внутренних оболочек, которые ограничивают внутренние пустоты тела.

Представление тела как совокупности оболочек, ограничивающих его объем, является наиболее общим подходом. Каждая оболочка строится из набора стыкующихся друг с другом поверхностей, содержащих полную информацию о своих границах и связях с соседями. Такое описание тел называется представлением с помощью границ. Оно дает возможность выполнять над телами множество операций, сохраняя при этом единый способ их «внутреннего» устройства. Такое представление тел позволяет моделировать объекты произвольной формы и сложности. Процесс построения твердотельной модели детали аналогичен процессу изготовления самой детали. Сначала создается некоторая

простая заготовка. Далее она изменяется путем присоединения или отсечения отдельных объемов. Создание модели основано на использовании операций объединения, исключения и пересечения.

Таким образом, технология твердотельного моделирования основана на конструировании модели из некоторого набора базовых трехмерных твердотельных простейших объектов. Каждый такой объект строится пользователем на основе плоских эскизов с применением трехмерных операций. Самая простая твердотельная модель образуется при движении какого-либо контура. Движение может быть поступательным, вращательным или по произвольной траектории. На базе созданных таким образом тел можно получать новые тела, например, соединить одно тело с другим и т.д. В каждом случае получается один объект – твердое тело (рис. 28 – 29).

Для редактирования геометрической модели тела необходима информация о последовательности ее построения, поэтому в модель тела включают дерево модели (дерево построения). В итоге результатом твердотельного геометрического моделирования некоего объекта является математическая модель его геометрии. Трехмерный объект определен многими изменяемыми параметрами. Вся эта информация содержится в математической модели его геометрических свойств, поэтому твердотельное моделирование называют параметрическим.

Компьютерное изображение объекта является результатом использования его геометрической модели. Для того, чтобы «увидеть» модель объекта, нужно смоделировать поток падающих и отраженных от его поверхностей лучей света.

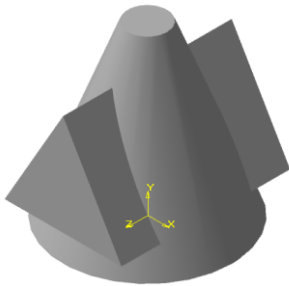


Рис. 28. Твёрдотельная модель пересечение конуса и призмы

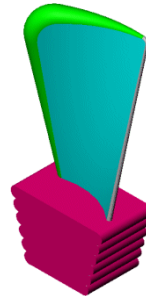


Рис. 29. Твёрдотельная модель лопатки турбины

Модель можно «осветить» с разных сторон светом различного цвета и интенсивности. Исходная информация для построения изображения объекта на экране компьютера содержится в геометрической модели этого объекта.

Можно получить реалистическое изображение объекта, близкое к его фотографии. При этом поверхностям модели можно придать необходимый цвет, зеркальность, прозрачность и другие оптические свойства. При графическом отображении твёрдотельная модель, полностью определяя форму объекта, обеспечивает автоматическое удаление невидимых линий, позволяет эффективно имитировать движение, управлять цветовой гаммой для получения тоновых эффектов.

С твёрдотельной моделью можно производить операции как с реальным объектом: перемещать, вращать, рассекать, приближать или удалять, выполнять сборку и разборку на простейшие элементы, отображать деформацию или самые сложные движения трехмерного объекта в соответствии с законами механики и т.д. Твёрдотельное моделирование позволяет не только отображать чисто геометрические свойства, но и, например, наделять модель свойством инерции

(массой), отображать поведение целостного объекта и происходящие в нем процессы.

Информативность и наглядность компьютерного эксперимента возрастает на порядок, если его результаты представить не в виде традиционных числовых таблиц и графиков, а в виде наглядных образов. Технологии 3D моделирования позволяют полностью автоматизировать модельные исследования, например, температурных полей, полей напряжений и деформаций. Так, для объекта, представленного на рис. 30, после построения его трехмерной модели и задания внешних воздействий расчет и отображение температурного состояния детали выполнены полностью автоматически. Теперь конструктору достаточно одного взгляда, чтобы определить наиболее нагретые участки. Имея эту информацию, можно принять необходимые меры для обеспечения надежности.

Численные результаты моделирования могут быть отображены в виде виртуального движения трехмерных твердотельных моделей объектов. Действительно, если твердотельная модель – это объект, то программным путем можно изменять его свойства и отображать поведение объекта, изменение его состояния и параметров на экране компьютера в виде 2D или 3D анимации. Инструментальные системы моделирования MVS, SolidWorks и т.п. позволяют использовать подобную технологию. Аналогичные технологии применяет современный кинематограф для создания сцен фантастических событий. Твердотельное моделирование позволяет создавать модели, состоящие из множества взаимодействующих деталей, так называемые сборки (рис. 31). Наглядность подобных моделей не нуждается в комментариях.

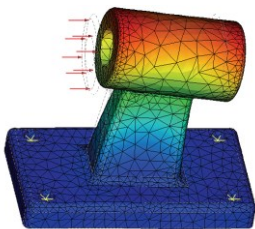


Рис. 30. Поле напряжений

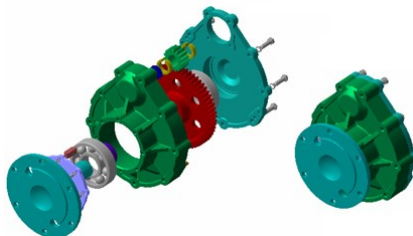


Рис. 31. Модель сборки

Таким образом, современное компьютерное графическое моделирование представляет собой синтез математической модели формы объекта и графического отображения геометрических свойств, а также позволяет отображать другие (не геометрические) свойства объекта.

Рассмотрим в качестве примера построение 3D модели цилиндра с продольным отверстием. Моделирование проводится средствами пакета САПР «КОМПАС». В режиме создания 3D модели – «Деталь» выбираем для построения эскиза плоскость XY (рис. 32).

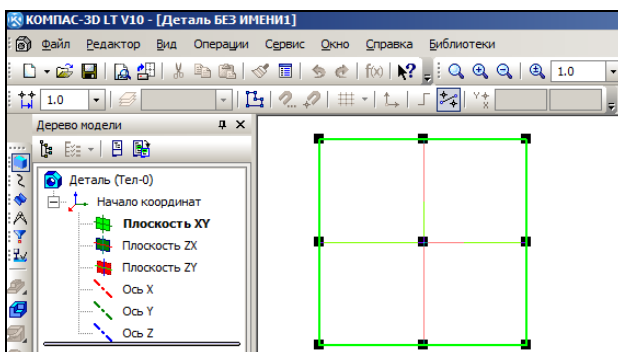


Рис. 32. Выбор базовой плоскости для построения эскиза

Далее строим эскиз – окружность, который будет использована для образования цилиндра (рис. 33).

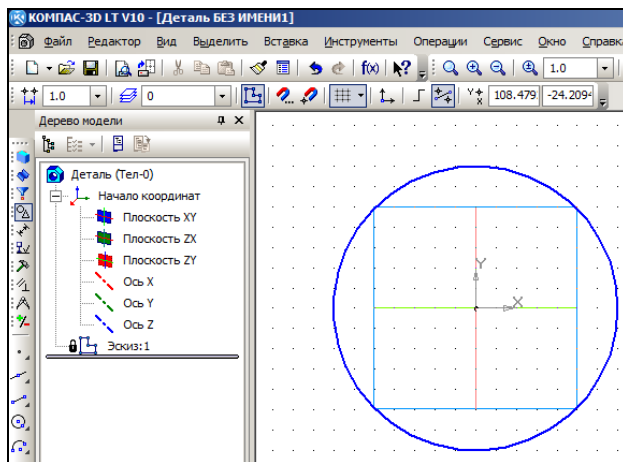


Рис. 33. Построение эскиза

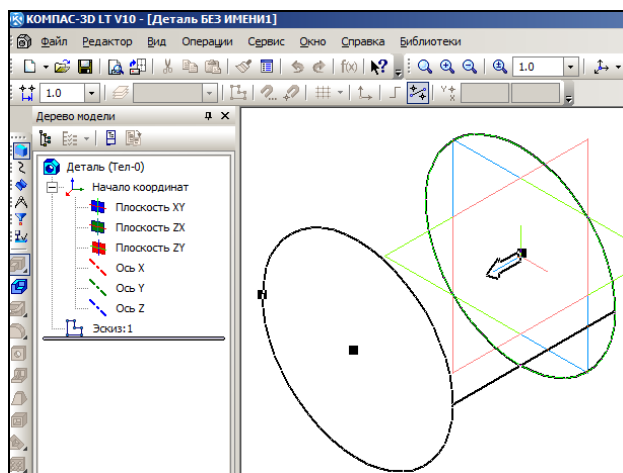


Рис. 34. Выполнение операции выдавливания

Применяем к эскизу трехмерную операцию «выдавливания» (рис. 34). Результат операции представлен на рис. 35.

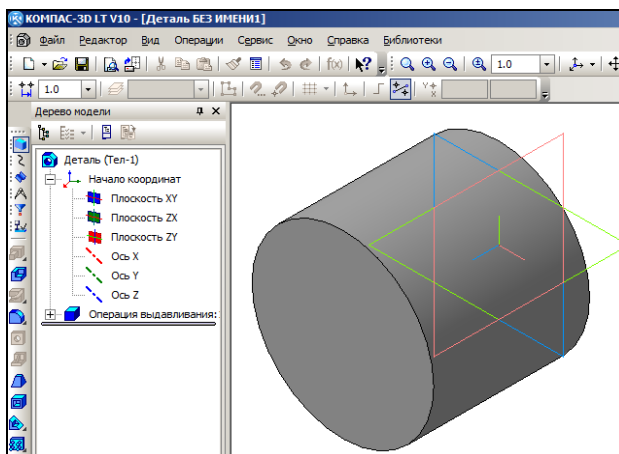


Рис. 35. Результат операции выдавливания

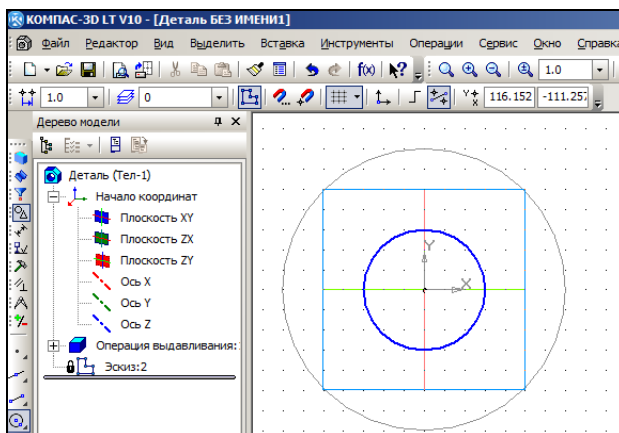


Рис. 36. Построение эскиза для операции «вырезать выдавливанием»

Для образования продольного отверстия в построенном цилиндре строим второй эскиз (рис. 36) и выполняем операцию «вырезать выдавливанием» (рис. 37). Результатом всех операций является требуемая деталь – цилиндр с продольным сквозным отверстием (рис. 38).

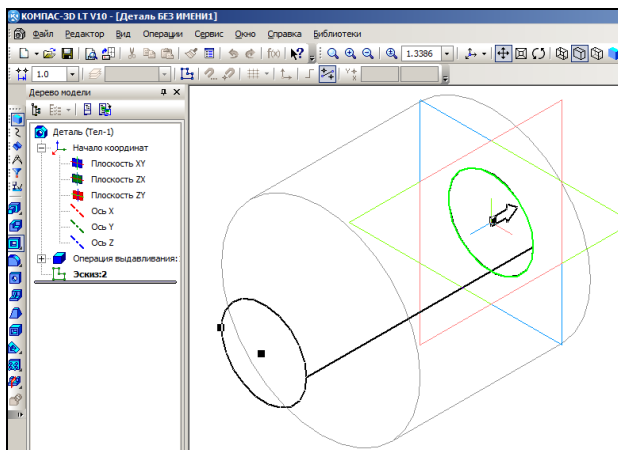


Рис. 37. Выполнение операции «вырезать выдавливанием»

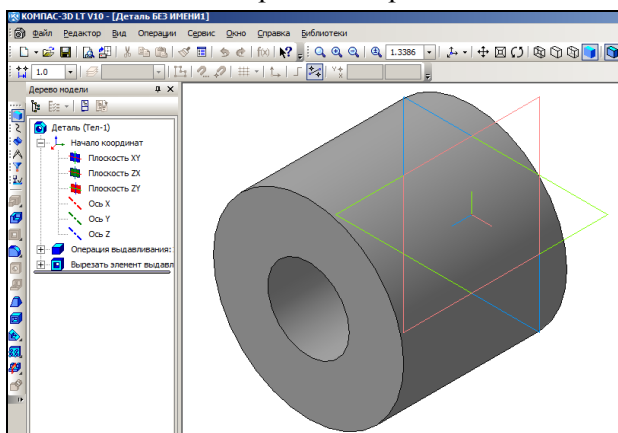


Рис. 38. Готовая деталь



Таким образом, новые технологии компьютерного графического моделирования существенно расширили возможности проектирования. В комплексе с другими методами в САПР (системы автоматизированного проектирования) они играют ведущую роль. Автоматизированное проектирование представляет собой проектирование, осуществляемое при взаимодействии человека с компьютером. Под проектированием понимается процесс создания описания, необходимого для производства в заданных условиях еще не существующего технического объекта. Термин «САПР» традиционно связан с английской аббревиатурой CAD, которая соответствует различным программным системам: Computer Aided Drawing – черчение с помощью компьютера; Computer Aided Design – проектирование с помощью компьютера. Аббревиатура CAM (Computer Aided Manufacturing) означает компьютерную технологическую подготовку производства. Можно встретить сокращение CADD, т.е. черчение и проектирование с помощью компьютера. Итогом работы таких систем являются не столько чертежи деталей, а программы для станков с ЧПУ для изготовления этих деталей.

Исторически разработка и развитие CAD-систем определялась, в первую очередь, потребностями аэрокосмической, автомобильной и военной промышленности. Основные успехи CAD-систем связаны с развитием компьютерной графики, геометрического моделирования и компьютерного аппаратного обеспечения:

1. При построении модели на основе технологии векторной графики создается цифровой документ. Средства САПР предоставляют пользователю «виртуальные» электронные инструменты моделирования, свойства

которых значительно превосходят возможности традиционных инструментов черчения.

2. Геометрическая модель объекта фактически представляет собой математическую модель формы объекта, которая может быть передана для обработки в другие приложения для получения чертежей заготовок, подготовки конструкторской документации, исследования свойств модели математическими методами, создания программ для станков с ЧПУ.
3. Возможна интеграция технологий трехмерного моделирования с другими методами, в частности, с методами численного моделирования процессов в проектируемом объекте.

Известно множество CAD/CAM-систем различного уровня. Система CATIA (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application) – одна из самых распространенных САПР высокого уровня. Это комплексная система автоматизированного проектирования (CAD), технологической подготовки производства (CAM) и инженерного анализа (CAE), включающая в себя инструментарий трёхмерного моделирования, подсистемы программной имитации сложных технологических процессов, средства анализа и единую базу данных текстовой и графической информации. Она позволяет эффективно решать все задачи технической подготовки производства – от предварительного проектирования до выпуска чертежей, спецификаций, монтажных схем и управляющих программ для станков с ЧПУ.

AutoCAD – одна из первых САПР, ориентированная на решение задач машиностроения. В настоящее время это одна из САД-систем для разработки конструкторской документации практически в любой сфере промышленного производства.

Имеется множество приложений, интегрированных с AutoCAD, предназначенных для решения разнообразных задач проектирования.

T-FLEX – профессиональная CAD-система параметрического двухмерного и трёхмерного геометрического моделирования в интересах машиностроительного производства. Система позволяет полностью решить проблему подготовки технической документации – чертежей, схем, спецификаций и т.д. Обладая мощным параметрическим геометрическим ядром, дает возможность существенно повысить скорость проектирования.

САПР ADEM предназначена для автоматизации решения конструкторских и технологических задач производства. Система ADEM объединяет все известные методы геометрического моделирования, что позволяет сформировать конечный вид изделия и создать необходимую конструкторскую документацию.

CAD-система SolidWorks допускает построение самых разнообразных комплексов автоматизации проектирования, инженерного анализа и технологической подготовки производства. Для оптимизации состава комплексов и их функциональных возможностей в соответствии с решаемыми задачами в систему включен базовый модуль специальных API-функций для программирования прикладных задач. В результате во многих популярных прикладных системах появились средства прямого доступа к моделям SolidWorks. Более того, специально для SolidWorks было создано большое число модулей, работающих непосредственно в его среде.

Преимущества такого построения сквозного интегрированного решения очевидны. Возможность прямой передачи данных между различными приложениями позволяет

создать гибкий программный комплекс, в котором могут быть задействованы лучшие в своем классе приложения. И сейчас пользователь SolidWorks может выбирать из нескольких сотен программных и аппаратных партнеров такие дополнительные модули, которые решат именно его задачи с минимальными финансовыми издержками. И тот факт, что отдельные модули созданы самыми разными производителями, для конечных пользователей остается незаметным. Например, COSMOWorks – мощный и простой в использовании программный комплекс, который полностью встроен в SolidWorks. Созданный для нужд аэрокосмической промышленности, он позволяет решать многие инженерные задачи на основе трехмерных моделей, построенных средствами SolidWorks.

CAD-система КОМПАС-3D предназначена для создания трёхмерных параметрических моделей и сборок и последующего создания их чертежей, содержащих все необходимые виды, разрезы и сечения, имеет определённые преимущества перед другими системами:

1. Система русскоязычна изначально, термины и определения полностью соответствуют терминологии отечественного конструирования.
2. Заложено выполнение всех требований стандарта ЕСКД.
3. Имеется широкий набор функций редактирования изображений.
4. Система включает прикладные библиотеки (конструкторские библиотеки, справочники материалов и др.), ориентированные на отечественное производство.

Дополнительную информацию о компьютерном геометрическом моделировании можно получить в монографиях [2], [12], [16 – 17], [22] и на сайте [41].

Подведем итог. В данной главе рассмотрены некоторые важные в технике виды моделей: оптимизационные, структурные и геометрические. Действительно, в практике разработки и создания моделей технических систем без них невозможно обойтись. Подобные модели составляют ядро систем автоматизированного (компьютерного) проектирования. На современном этапе компьютерное геометрическое и графическое моделирование является весьма актуальным и развивается самыми быстрыми темпами.

### **Контрольные вопросы к главе 3**

1. В чем суть критериального подхода при решении задач оптимизации?
2. Какие составляющие имеет модель оптимизации в рамках критериального подхода?
3. Что такое многокритериальная оптимизация?
4. В чем состоит суть метода уступок?
5. Как строится интегральный критерий оптимизации?
6. Какие существуют способы построения моделей трехмерных объектов?
7. Почему современное компьютерное геометрическое моделирование называется параметрическим?
8. Какое назначение имеет дерево построения трехмерной модели?
9. Поясните суть термина «трехмерная твердотельная модель».
10. Каково назначение структурных моделей?
11. Какова принципиальная разница между геометрическими и структурными моделями?
12. Какова принципиальная разница между геометрическими и графическими моделями?

## **Глава IV. Моделирование систем**

### **§ 1. Системный подход в моделировании**

Системный подход – это подход к анализу объектов, в основе которого лежит исследование объектов как систем. Под системой будем понимать совокупность взаимодействующих между собой элементов. Любой объект окружающего мира можно рассматривать как систему. Любой технический объект является системой. Сам термин указывает на необходимость всестороннего, комплексного исследования объекта. На этой основе можно получить более полные представления о реальных объектах, выявить их новые свойства, определить взаимоотношения с окружающей средой и т.д.

Применение методологии системного подхода позволило решать задачи проектирования, анализа целенаправленной деятельности, функционирования, планирования, управления и оптимизации для систем самой разнообразной природы и сложности. Таким образом, значение системного подхода, который применяется в экологии для моделирования технических объектов и систем, трудно переоценить.

Определить систему – значит выделить её из состава окружающей среды. В технике эта задача решается достаточно просто. Элемент системы – это ее некоторая самостоятельная часть. В принципе разделить систему на элементы можно несколькими способами в зависимости от характера решаемой задачи. Для любой системы существует системообразующий фактор, это то, что объединяет элементы в систему и придаёт ей целостность. Он позволяет выделить систему как самостоятельный объект окружающего мира.

В принципе, каждый элемент системы можно рассматривать как другую систему более низкого уровня –

подсистему. С другой стороны, любую систему можно рассматривать как элемент более общей системы. Возможность деления системы на подсистемы связана с вычленением совокупности взаимодействующих элементов, способных выполнять относительно независимые функции. Сложные технические системы уже при проектировании создаются по блочному принципу.

Любая система имеет структуру, которая отображает состав элементов системы и связи между ними. Структура системы может быть отображена в виде графа (рис. 39). Связи между элементами обеспечивают сохранение структуры и свойств системы.

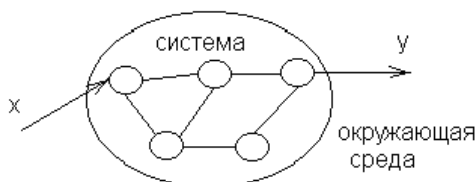


Рис. 39. Представление структуры системы

На рис. 39  $X$  – вход, внешнее (входное) воздействие на систему. Это либо управляющее воздействие, либо воздействие со стороны окружающей среды, либо со стороны другой системы,  $Y$  – выход системы, воздействие системы на окружающую среду, т.е. реакция системы.

Функции и свойства системы (тем более технической системы) зависят и от свойств элементов, и от ее структуры. Свойства системы не являются простой суммой свойств её элементов. Соединение элементов в систему дает новые свойства.

Информация о свойствах системы в определенный момент времени определяет состояние системы. Целенаправленное поведение системы представляется как стабильная способность

к определенным действиям. Движение (поведение) системы – это процесс перехода системы из одного состояния в другое и т.д. Если переход системы из одного состояния в другое происходит скачкообразно, то система называется дискретной. Если при переходе между любыми двумя состояниями система обязательно проходит через промежуточные состояния, то она называется непрерывной (динамической).

Можно выделить следующие режимы поведения системы:

- стационарный – соответствует положению равновесия, система находится все время в одном и том же состоянии;
- динамический – состояние системы непрерывно изменяется;
- периодический – система через равные промежутки времени проходит одни и те же состояния;
- переходный – предполагает движение системы из одного стационарного состояния в другое;
- хаотический – соответствует развитию хаоса в поведении системы.

Возможность отражения поведения системы зависит от того, каким образом представлен объект моделирования. Например, газ в сосуде можно представить в виде системы молекул, каждая из которых имеет свои координаты и скорость. В этом случае мы получим сверхсложную систему с хаотическим движением молекул, которую исследовать вряд ли возможно. Если же воздух в комнате представить как систему, состоящую из одного элемента, параметрами которого являются давление, температура и влажность, то такую систему достаточно просто описать в соответствии с законами термодинамики. Для всех практических задач этот способ определения системы предпочтительнее.



Всё, что не входит в систему, но взаимодействует с ней, называется окружающей средой (рис. 39). Любая система всегда существует и функционирует, взаимодействуя с окружающей средой. Это взаимодействие происходит по принципу обратной связи (рис. 40). Реакция системы  $Y$  воздействует на окружающую среду. В результате окружающая среда (ОС) вырабатывает ответную реакцию  $Z$ , дополнительно воздействующую на систему.

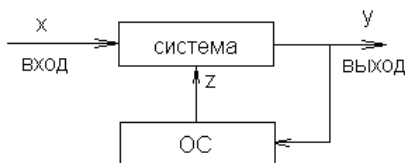


Рис. 40. Схема взаимодействия системы и окружающей среды

Классификацию систем можно провести по критериям сложности, детерминированности и непрерывности.

По степени сложности системы можно разделить на простые, сложные и сверхсложные. К простым относятся системы, имеющие соответствующую простую структуру, достаточно легко поддающиеся математическому описанию. Сложными являются системы, имеющие много элементов и внутренних связей и, соответственно, сложное математическое описание. Математические модели таких систем реализуются только с использованием вычислительной техники. Сверхсложные системы не поддаются математическому описанию, их исследование возможно исключительно методами компьютерного имитационного моделирования.

Сложность системы может определяться ее поведением. Примером являются гибридные системы, которые сочетают непрерывное и дискретное поведение.

Системы можно разделить на детерминированные и стохастические. На поведение стохастических систем оказывают влияние внешние или внутренние случайные факторы. Возможные варианты систем получаются комбинированием указанных классов: от простых детерминированных до сверхсложных стохастических.

Непрерывно-детерминированные системы описываются моделями на основе дифференциальных или алгебраических уравнений. Искомые переменные являются непрерывными. Подобные модели, как правило, отражают динамику изменения состояния системы. Примером таких систем являются системы автоматического управления.

К дискретно-детерминированным системам относятся так называемые конечные автоматы – некоторые устройства, на которые подаются входные сигналы и снимаются выходные. У конечного автомата множество входных сигналов и множество внутренних состояний является конечным. Если состояние автомата может иметь случайный характер, то такая система относится к классу дискретно-стохастических систем. Примером подобных систем могут служить системы массового обслуживания. В таком виде могут быть представлены различные процессы функционирования технических, экономических и производственных систем. В практике моделирования часто встречаются сложные системы, в которых одновременно (параллельно) протекает несколько процессов. Модели таких систем строятся в виде сетей Петри.

Изучение и описание любой системы неизбежно связано с моделированием, которое осуществляется на двух уровнях.

На внешнем уровне происходит выделение самой системы и ее связей с окружающей средой, на внутреннем уровне

производится выделение элементов системы и связей между ними.

При моделировании систем решаются два типа задач: задача анализа – исследование свойств существующей системы; задача синтеза – построение новых систем с заранее заданными свойствами.

В заключение отметим, что системный подход позволяет сделать ряд простых, но весьма важных для моделирования выводов: при построении модели системы необходимо разработать не только модель собственно системы, но и модель её взаимодействия с окружающей средой. При построении модели объекта требуется провести его системный анализ, при этом необходимо выяснить:

1. из каких элементов и подсистем он состоит;
2. как эти элементы взаимодействуют между собой;
3. каким образом происходит взаимодействие системы и окружающей среды.

Рассмотренные положения системного подхода в определенном смысле составляют методологическую основу моделирования, что, в первую очередь, относится к моделированию сложных систем. Дополнительную информацию по системному анализу можно найти в монографиях [7-8], [14], [20], [30].

## **§ 2. Моделирование сложных систем**

Одной из проблем современных технических, социальных и естественных наук является разработка и внедрение в практику методов моделирования сложных систем. Как отмечал еще академик Н.Н.Моисеев «сложность изучаемых и проектируемых систем приводит к необходимости создания специальной, качественно новой техники исследования» [34].

Сложными системами считаются крупные технологические, производственные, энергетические, коммуникационные комплексы, системы управления, социальные, экономические, экологические системы и т.п. Естественно, что сложные системы могут быть и искусственного, и естественного происхождения. Сложные системы характеризуются большим количеством элементов и связей между ними, разнообразием взаимодействий между системой и окружающей средой, наличием случайных факторов внутренней и внешней природы, возможностью случайного изменения структуры. Обычно выделяют структурную и поведенческую сложность моделируемых объектов.

Для систем сложного поведения характерно несколько качественно различных, последовательно сменяющих друг друга во времени режимов функционирования. Подобная сложная динамическая система в каждый конкретный момент времени ведет себя как некоторая относительно простая динамическая система. Однако при определенных условиях режим функционирования системы скачкообразно меняется. Например, при падении упругого тела его поведение меняется скачкообразно в момент удара о жесткую преграду.

Дать полный перечень всех функций моделей сложных систем затруднительно. Наиболее значимыми являются:

1. Модели сложных систем помогают упорядочить представления о свойствах этих систем. В технике такие модели служат в качестве средства для создания новых более совершенных систем.
2. Модели сложных систем применяются как средство обучения лиц, которые должны уметь справляться со всевозможными случайностями до возникновения

критической ситуации (модели космических кораблей, тренажеры для обучения водителей, пилотов, операторов АЭС).

3. Прогнозирование поведения моделируемых объектов и диагностика их состояния.
4. Производство контролируемых экспериментов в ситуациях, где экспериментирование на реальных объектах экономически нецелесообразно, опасно или практически невозможно.

Естественно, что при исследовании сложной системы, содержащей большое количество элементов, невозможно и не имеет смысла детально моделировать процессы в каждом элементе. Если строить детальное описание элементов, то модель сложной системы вряд ли удастся исследовать с необходимой полнотой даже средствами современной вычислительной техники. С общесистемной точки зрения представляют интерес только те свойства элементов, которые непосредственно влияют на свойства системы в целом.

Таким образом, в силу сложности системы, модели элементов должны быть просты в реализации средствами вычислительной техники, поэтому модели сложных систем строятся на основе моделей элементов типа «черный ящик». Такие модели отражают только зависимость между реакцией элемента, внешними воздействиями и влиянием окружающей среды, но не отражают процессы внутри элемента. Название модели подчеркивает полное отсутствие сведений о внутреннем содержании «черного ящика». Примером реализации такого подхода являются электрические цепи, математические модели которых построены на законах Ома и Кирхгоффа. Вектор внешних воздействий  $\vec{A}(t)$  в данном случае (рис. 41) включает в себя и действие на объект других элементов системы. Такая

модель может быть построена на основании обработки данных наблюдений и экспериментов формальными методами математической статистики, например, на основе регрессионного анализа.

Преимущество таких моделей состоит не только в простоте их реализации, но и в возможности построения моделей элементов, даже в том случае, если законы протекающих в них процессов не исследованы теоретически, но поведение элементов может быть изучено в ходе натурных испытаний. Таким образом, модели элементов типа «черный ящик» обеспечивают возможность создания модели сложной системы, с которой можно производить компьютерный эксперимент.



Рис. 41. Структура модели элемента типа «черный ящик»

Для сложных систем определяющую роль играет моделирование структуры системы, т.е. взаимодействий между ее элементами и взаимодействия с окружающей средой. Таким образом, при моделировании сложных систем возникает задача анализа функционирования системы в целом. При этом сущность процессов, протекающих в элементах системы, отодвигается на второй план.

При исследовании систем малосущественно, идет ли речь о машиностроительном предприятии, химическом реакторе,

телефонной сети, информационной системе или рынке, поэтому изучение комплексных проблем сложных систем выделилось в самостоятельное научно-техническое направление, названное системотехникой.

Модель системы является абстрактным, формально построенным объектом. Ясно, что модель функционирования сложной системы в состоянии охватить только основные, характерные закономерности, оставляя в стороне второстепенные факторы. Построение модели системы начинается с моделирования ее структуры и закономерностей взаимодействия элементов. В результате этого появляется содержательное описание системы – первая попытка четко описать закономерности, характерные для исследуемой системы и поставить задачу моделирования. На этапе содержательного описания выявляются подсистемы, которые входят в систему, определяются структурные взаимосвязи. Определяется то, что будет считаться окружающей средой.

Собственно построение модели сложной системы начинается с разработки структурно-функциональной модели. В этой схеме отображаются подсистемы и элементы системы, связи между ними и т.д. Модель сложной системы строится по иерархическому принципу на основе моделей подсистем, входящих в состав системы, моделей элементов системы, моделирования связей между подсистемами, между элементами, моделирования взаимодействия с окружающей средой (рис. 42).

Первоначально в схеме отображаются только связи и сами элементы. Далее производится «наполнение» элементов законами их функционирования, задаются формальные соотношения, характеризующие взаимодействия элементов в системе и т.п.

Среди задач исследования сложных систем можно выделить задачи анализа, связанные с изучением свойств и поведения системы в зависимости от значений параметров, задачи синтеза, сводящиеся к выбору структуры системы и значений параметров исходя из желаемых свойств системы в целом.

Одной из задач является исследование способов управления сложной системой, которая может быть решена исключительно средствами моделирования.

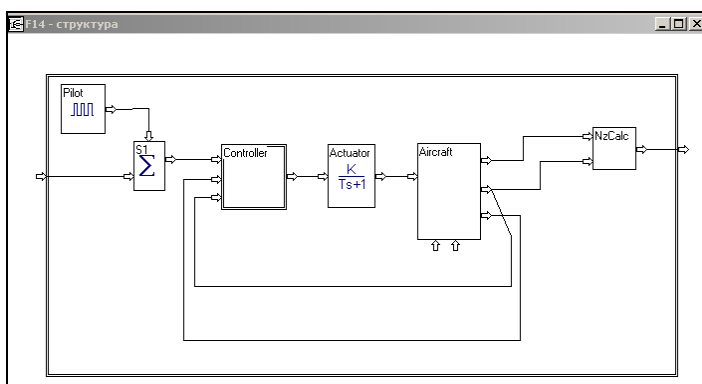


Рис. 42. Модель системы управления, построенная по блочно-иерархическому принципу

Итак, характерными признаками сложной системы является наличие большого количества взаимодействующих элементов; сложность функций, выполняемых системой; возможность разбиения системы на подсистемы; наличие управления и взаимодействия с окружающей средой; функционирование в условиях воздействия случайных факторов.

Модельное исследование сложных динамических систем может быть выполнено на основе современных пакетов



визуального моделирования, которые на сегодня являются одним из основных инструментов быстрого построения и исследования моделей в инженерной и научной практике. Они позволяют вводить описание моделируемой системы в естественной для прикладных наук форме.

Имеется возможность в буквальном смысле рисовать функциональную схему, размещать в ней блоки и соединять их связями, строить иерархические функциональные схемы (модели) высокой степени сложности, применять различные численные методы, использовать средства визуализации поведения объектов, технологию объектно-ориентированного моделирования и полностью исключить написание кода программы моделирования.

Эти пакеты предоставляют компьютерную среду, в которой можно создавать виртуальные, параллельно функционирующие системы и проводить эксперименты с ними. Результаты эксперимента с моделью представляются в виде графиков, гистограмм, анимации и т.д.

Программный комплекс VisSim предназначен для построения и исследования виртуальных моделей технических объектов, в том числе и систем управления. Этот комплекс разработан и развивается компанией Visual Solutions. VisSim – это аббревиатура выражения Visual Simulator – визуальная среда моделирования. Он предоставляет пользователю графический интерфейс, с помощью которого исследователь создает модель из виртуальных элементов, что позволяет исследовать модели достаточно сложных систем. По технологии моделирования VisSim подобен другим аналогичным программным комплексам (рис. 43).

Особенностью этого пакета моделирования является ориентация на задачи анализа систем автоматического управления. При описании и последующем построении модели в среде VisSim численные методы реализации модели выбираются автоматически. Результаты решения могут быть представлены в виде временных и фазовых диаграмм.

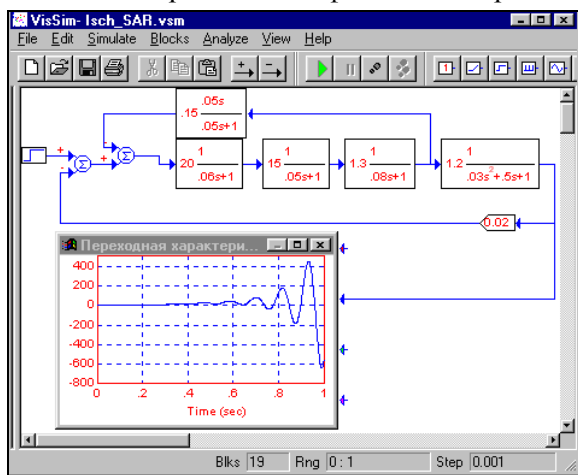


Рис. 43. Виртуальный стенд моделирования пакета VisSim

При построении моделей в среде VisSim программирование не требуется, однако имеется возможность создания дополнительных моделей элементов и помещение этих моделей в библиотеку стандартных блоков VisSim.

Вопросы моделирования сложных систем широко представлены в научной литературе. Примером могут служить монографии [4], [10], [13 - 14], [27 - 28], [34], [39] и на сайтах [42], [45 - 47].

### § 3. Модели регрессионного анализа

В настоящем разделе мы познакомимся с методами построения моделей типа «черный ящик». При построении таких моделей прослеживается одно из характерных явлений современной науки – стремление перейти к изучению сложных и плохо организованных систем, в которых нельзя выделить отдельные физически однородные явления и разграничить их действие. Это обусловлено тем, что путем моделирования стали исследоваться реальные производственные и технологические процессы и системы. Примерами могут служить любые химико-технологические процессы, которые включают в себя процессы теплопередачи, диффузии, переноса и химической кинетики протекающих реакций. Классические математические модели подобных систем весьма сложны, содержат множество параметров, значения которых либо весьма неточны, либо неизвестны.

Единственный подход в изучении подобных систем – использование методов математической статистики для построения моделей элементов системы. Методы математической статистики – это хорошо обоснованная система формализации эмпирических наблюдений, когда исследователь сознательно отказывается от детального традиционного изучения механизмов всех протекающих в системе процессов, реализуется чисто эмпирический подход. Одним из результатов таких исследований является построение уравнения регрессии или регрессионной модели. При моделировании технических систем такой подход применяется весьма часто.

Пусть эксперимент поставлен и проведен, результаты наблюдений получены. Теперь их необходимо представить в компактной форме, удобной для практического применения. Пусть явление или процесс характеризуется параметрами  $X$  и  $Y$ ,

значения которых фиксируются в процессе эксперимента или наблюдений и имеют случайный характер. Задачей исследования является установление так называемой статистической зависимости между случайными величинами, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение другой величины. Поскольку  $X$  и  $Y$  – случайные величины, то для заданного значения  $X$  величина  $Y$  не может быть предсказана точно, а может быть указана лишь с определенной вероятностью. Вероятностная функциональная зависимость между случайными величинами называется регрессией.

Задачами регрессионного анализа является определение функции регрессии. Следует помнить, что уравнение регрессии лишь формально устанавливает соответствие между переменными, хотя реально такой зависимости может и не быть. Уравнение регрессии представляет собой формальную математическую зависимость измеряемой величины от влияющих на нее факторов. Выбор формы зависимости определяет точность, с которой модель описывает реальную действительность.

Существуют различные виды регрессий:

- Простая – представляет собой зависимость между двумя переменными, т.е. уравнение регрессии представляет собой функцию одного аргумента.
- Множественная – отражает функциональную зависимость от многих аргументов.
- Линейная и нелинейная.

Построение регрессионной модели проводится в несколько этапов:

**Исследование проблемы.** Проводится описание процессов и явлений, формулируются гипотезы о взаимозависимости явлений.

**Формирование перечня факторов и их анализ.** Исходя из содержательного описания объекта и предварительной информации теоретического характера выявляются параметры модели, производится их разделение на зависимые и независимые. На основе информации о функционировании объекта формулируется гипотеза о форме связи между параметрами модели: линейная, нелинейная, простая или множественная.

Пусть исходная информация о свойствах объекта, полученная в ходе экспериментов, представлена в табл. 1. Здесь  $y$  – зависимый параметр, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – факторы, определяющие, свойства объекта, т.е. значение  $y$ . По этим данным необходимо построить регрессионную зависимость:  
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таблица 1

$X_1$	$X_2$	$X_3$	....	$X_n$	$Y$

**Построение регрессионной модели.** На этом этапе выбирается класс функций, в рамках которого строится регрессионная модель, и методом наименьших квадратов определяются коэффициенты модели.

Рассмотрим простой пример построения регрессионной модели. Предположим, выполнено  $N$  измерений величин  $X$  и  $Y$  –  $(x_i, y_i)$ . Допустим, что зависимость  $y$  от  $x$  линейная:

$$f(x) = a x + b.$$

Результаты измерений  $(x_i, y_i)$  содержат определенную (неизвестную) случайную величину, которая обусловлена погрешностями измерений и неконтролируемыми случайными факторами. Требуется построить такую линейную зависимость, которая наилучшим образом описывает результаты наблюдений. Иными словами, требуется определить параметры линейной функции  $a$  и  $b$ . Для решения данной задачи наиболее часто используется метод наименьших квадратов (МНК). Параметры линейной функции должны иметь такие значения, чтобы в целом точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...  $(x_n, y_n)$  лежали как можно ближе к прямой.

Назовем отклонением разность вида:  $f(x_i) - y_i$ . Подберем параметры  $a$  и  $b$  таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальна:

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

В этом и состоит требование метода наименьших квадратов. Эта сумма есть функция искомых параметров  $a$  и  $b$ :

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^N ((a \cdot x_i + b) - y_i)^2.$$

Аналогичным образом метод наименьших квадратов применяется для нахождения параметров множественной линейной и нелинейной регрессии. Пример регрессионной модели представлен на рис. 44.

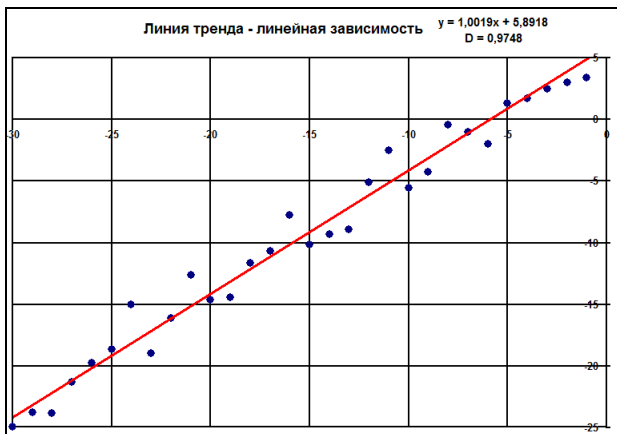


Рис. 44. Линейная регрессионная модель

Для оценки точности регрессии используется коэффициент детерминации, который характеризует степень соответствия уравнения регрессии имеющимся эмпирическим данным:

$$D = 1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{общ}^2}; \quad \sigma_{общ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}; \quad \sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2}{N-1}.$$

Величина  $\sigma_{общ}^2$  – общая дисперсия, характеризует разброс наблюдаемых величин  $y_i$  относительно среднего значения  $\bar{y}$ ;  $\sigma_{ост}^2$  – остаточная дисперсия, характеризует отклонения наблюдаемых величин  $y_i$  от значений, полученных по регрессионной зависимости.

На основе коэффициента детерминации может быть проведена оценка адекватности регрессионной модели. Если  $D=1$ , значит  $\sigma_{ост}^2 = 0$ , т.е. все наблюдаемые точки соответствуют построенной регрессионной зависимости. В противном случае при  $D \approx 0$  имеет место ложная регрессия.

Определение простой регрессионной зависимости может быть выполнено средствами электронных таблиц путем построения линии тренда. При этом электронные таблицы реализуют метод наименьших квадратов автоматически. Кроме линейной функции могут быть использованы следующие (табл. 2) типы зависимостей:

Таблица 2

Тип зависимости	Уравнение	Параметры
Линейная	$Y=ax+b$	$a, b$
Полиномиальная	$Y=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+b$	$a_1, \dots, a_n, b$
Логарифмическая	$Y=a + b \ln(x)$	$a, b$
Экспоненциальная	$Y=a \exp(bx)$	$a, b$
Степенная	$Y=a x^b$	$a, b$

Для построения уравнения регрессии необходимо создать таблицу числовых данных. Затем по таблице построить диаграмму «точечная». При этом выбрать вариант диаграммы, который отображает табличные данные в виде точек. Далее необходимо выбрать команду «Добавить линию тренда» (рис. 45).

В открывшемся диалоговом окне «Линия тренда» выбрать тип зависимости. На вкладке «Параметры» (рис. 46) выбрать опции «Показывать уравнение» и «Поместить величину достоверности». Результат представлен на рис. 44.



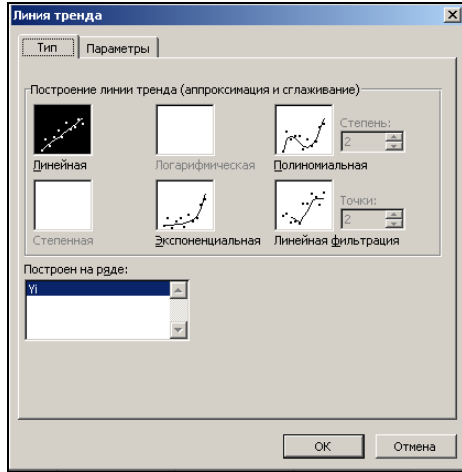


Рис. 45. Диалоговое окно «Линия тренда»

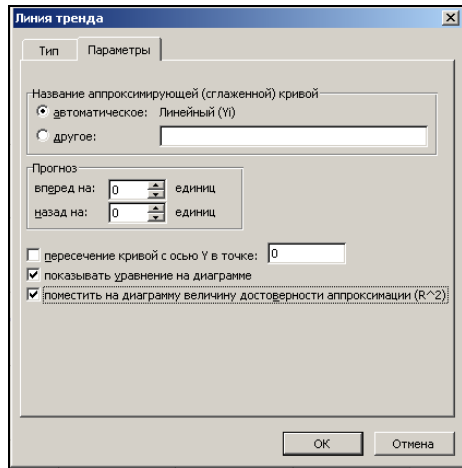


Рис. 46. Вкладка «Параметры»

Проблемам регрессионного анализа посвящены монографии [32], [34].

#### **§ 4. Моделирование стохастических процессов**

Моделирование случайных (стохастических) процессов – это одно из важнейших направлений моделирования. Подобные явления неотъемлемая составляющая многих технических системах. Само понятие «случайный» является фундаментальным. Событие называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо. Случайность играет в нашей жизни и положительную, и отрицательную роль.

В практике моделирования весьма часто приходится иметь дело с системами, которые в процессе функционирования подвергаются случайным воздействиям окружающей среды или содержат внутренние механизмы, порождающие случайное изменение параметров. Примером могут служить производственные и любые другие системы, в которых значительную роль играет человеческий фактор.

При проектировании технических систем часто предполагается, что все параметров задачи известны или могут быть определены их точные значения. Иными словами, предполагается, что все параметры объекта являются детерминированными. Однако на практике точных значений параметров просто не существует. Действительно, при изготовлении объекта проектные значения параметров будут обеспечены с некоторыми случайными отклонениями. В процессе эксплуатации любая система подвержена внешним воздействиям, физическое старение также приводит к изменению параметров системы. Все эти факторы имеют случайный характер, говорить об их конкретных значениях можно только с определенной вероятностью.

При анализе случайных явлений обращают внимание на их непредсказуемость, противопоставляя случайность детерминированности, хаотичность – упорядоченности.

Однако следует подчеркнуть, что случайность – это такой вид неопределенности, которая подчиняется строгой закономерности в виде распределения вероятности.

При моделировании случайных процессов значительно изменяется сама методология моделирования – основным методом изучения подобных систем становится стохастическое моделирование и статистическая обработка его результатов. Стохастическое моделирование представляет собой метод получения статистических данных с помощью компьютера о процессах, происходящих в моделируемой системе, параметры которой изменяются случайным образом с заданным законом распределения. Иными словами, сущность метода стохастического моделирования сводится к построению некоего моделирующего алгоритма, имитирующего функционирование системы, случайные воздействия на систему, случайные изменения параметров системы и случайные изменения начальных условий.

Данный алгоритм многократно повторяется с помощью компьютерных программных средств. В результате получается серия частных значений искомых величин, статистическая обработка которых позволит получить информацию о свойствах системы (рис.47). Если количество реализаций велико, то полученные результаты с достаточной точностью могут характеризовать процесс функционирования системы. Например, точно предсказать результат бросания монеты весьма трудно. Однако в ходе имитационного эксперимента можно легко установить, что с равной вероятностью может выпасть либо один результат, либо другой.

Первоначально подобный метод был разработан и применялся для решения детерминированных аналитических задач и получил название метода Монте-Карло, затем стал

применяться для компьютерного моделирования функционирования систем, подверженным случайным воздействиям, т.е. появился метод стохастического моделирования.

При стохастическом моделировании формальное описание случайных факторов проводится с использованием понятий: «случайная величина», «случайное событие», «случайный процесс» и т.п. Случайной величиной называется такая величина, которая может принимать ряд значений, причем заранее неизвестно, каких именно. Таким образом, случайная величина – это величина определенного физического смысла, поддающаяся измерению, но ее значения подвержены некоторому неконтролируемому разбросу при повторениях процесса.

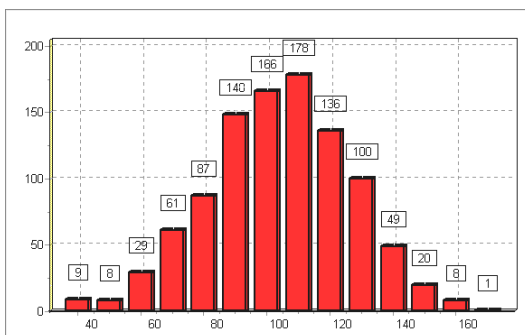


Рис.47. Гистограмма распределения случайной величины

Под событием понимается всякий факт, который может наблюдаться в данных условиях. Наступление события всегда связано с реализацией определенного комплекса условий, называемого испытанием. Различают достоверное событие, которое наступает каждый раз при реализации данного комплекса условий. Невозможное (недостоверное) событие никогда не наступает при реализации комплекса условий.

Случайное событие при реализации комплекса условий может наступить или не наступить. Достоверное и невозможное события можно рассматривать как два крайних варианта случайного события.

Частотой события называется отношение числа испытаний, в котором появлялось данное событие, к общему числу испытаний. Частота события обладает определенной устойчивостью, что отражает связь между комплексом условий и возможностью наступления события. Количественной мерой возможности проявления события является его вероятность. При большом числе испытаний частота события близка к его вероятности.

Свойства вероятностей событий:

1. Вероятность события  $A$  заключена между нулем и единицей:  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
2. Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице.
3. Для любого события  $A$  вероятность противоположного события  $\bar{A}$  равна  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

В результате многократного повторения испытаний получается ряд значений случайной величины. В пределе такой бесконечный ряд значений случайной величины называется генеральной совокупностью. На практике всегда имеют дело с конечным числом значений. Такая совокупность называется выборкой. Чем большее число значений содержит выборка, тем ближе она соответствует той генеральной совокупности, частью которой она является.

Случайные величины подразделяются на дискретные, имеющие конечное или счетное множество значений, и непрерывные, значения которых принадлежат какому-либо интервалу числовой оси.

Закономерность распределения значений в генеральной или выборочной совокупности называется распределением. Распределение можно изобразить в виде зависимости значения случайной величины от частоты появления этого значения. График такой зависимости называется кривой плотности распределения вероятности случайной величины. Он показывает, какие ее значения наиболее часто реализуются.

При решении многих практических задач часто достаточно указать отдельные числовые характеристики случайной величины, например, среднее значение или математическое ожидание случайной величины; среднеквадратичное отклонение. Третьей характеристикой случайной величины является коэффициент вариабельности, который показывает относительную величину разброса: отношение дисперсии к математическому ожиданию. Наиболее полной характеристикой случайной величины является закон ее распределения, который имеет две формы представления: в виде функции плотности распределения вероятности  $f(x)$  и в виде функции распределения вероятности  $F(x)$ . Эти функции связаны соотношением:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx .$$

Вероятность появления случайной величины  $x$ , имеющей значение  $x \leq a$ , можно определить с помощью соотношения:

$$P(x \leq a) = F(a) .$$

Формирование компьютерных реализаций случайных объектов любой природы из выше перечисленных сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел с равномерным распределением на интервале  $[0;1]$ . С помощью равномерно распределенных случайных величин

можно сконструировать как случайные события, возникающие с любой заданной вероятностью, так и случайные величины с любым законом распределения.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании являются случайные события. Пусть в модели необходимо реализовать случайное событие  $A$ , которое наступает с заданной вероятностью  $p$ . Для компьютерной реализации данного события необходим датчик случайной величины, равномерно распределенной на интервале  $[0;1]$ . Пусть такой датчик генерирует последовательность случайных чисел:  $x_1, x_2, \dots, x_i$ . Определим, что событие  $A$  наступает в том случае, если значение случайной величины  $x_i$  удовлетворяет неравенству  $x_i < p$ .

Таким образом, процедура моделирования случайного события состоит в компьютерной генерации последовательности значений  $x_i$  и их сравнения с  $p$ . При этом вероятность события  $A$  будет равна:

$$P(A) = \int_0^p dx = p.$$

Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  равна  $P(\bar{A}) = 1 - p$ . Таким образом, если соотношение  $x_i < p$  выполняется, то исходом моделирования испытания является событие  $A$ , в противном случае исходом испытания является событие  $\bar{A}$ .

Аналогичным образом можно моделировать группу случайных событий. Пусть возможна реализация только одного события из группы  $A_1, A_2, \dots, A_s$ . События наступают с

вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , причем обязательно наступает только одно из событий. Таким образом,  $\sum_{i=1}^s p_i = 1$ .

Определим, что событие  $A_m$  наступает, если для сгенерированного значения случайной величины  $x_i$ , имеющей равномерный закон распределения на интервале  $[0,1]$ , выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_i < x_i \leq \sum_{i=1}^m p_i .$$

Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательной генерации случайных чисел  $x_i$  и проверке для них данного условия. Подобная процедура называется «определение исхода по жребию» с заданными вероятностями.

Суть метода моделирования соответствует делению интервала  $[0;1]$  на  $s$  отрезков, длины которых составляют  $p_1, p_2, \dots, p_s$ . Если случайное число  $x_i$  попало на отрезок  $p_m$ , то это означает, что произошло событие  $A_m$ .

При компьютерном моделировании часто необходимо моделировать сложные события, которые зависят от нескольких простых. Пусть независимые события  $A$  и  $B$  имеют вероятность наступления  $p_A$  и  $p_B$ . Возможными исходами испытаний могут быть события  $AB, \bar{A}B, A\bar{B}, \bar{A}\bar{B}$ , с вероятностями  $p_A p_B, p_A(1-p_B), p_B(1-p_A), (1-p_A)(1-p_B)$ . В этом случае имеем четыре несовместимых события, вероятности наступления которых заданы. Определить результат моделирования можно методом, который описан выше.

Если события  $A$  и  $B$  являются зависимыми, причем событие  $B$  наступает с некоторой вероятностью  $P(B/A)$  при



условии, что событие  $A$  произошло, то в этом случае из последовательности случайных чисел  $x_i$  извлекается очередное число  $x_m$  и проверяется справедливость неравенства  $x_m \leq P_A$ . Если это неравенство справедливо, то наступило событие  $A$ . Далее из совокупности чисел  $x_i$  извлекается следующее число  $x_{m+1}$  и проверяется условие  $x_{m+1} \leq P(B/A)$ . При выполнении этого условия считается, что наступило и событие  $B$ . В противном случае считается, что произошло событие  $\bar{B}$ .

Дополнительные сведения о стохастическом моделировании содержатся в монографиях [1], [10], [33], [41].

Подведем итог. Содержание данной главы связано с разработкой и применением моделей систем. Рассмотрены принципы системного подхода как основы методологии моделирования, методы построения моделей элементов, а также моделирования стохастических систем.

#### **Контрольные вопросы к главе 4**

1. В чем суть системного подхода в моделировании?
2. Раскройте понятия: система, подсистема, окружающая среда, структура системы.
3. Какие аспекты системного подхода используются при построении моделей?
4. Какие выводы для моделирования позволяет сделать системный подход?
5. Как происходит взаимодействие системы и окружающей среды?
6. Что такое сложная система?
7. Каковы особенности моделирования сложных систем?

8. Какие основные задачи решаются при моделировании сложных систем?
9. В чем сущность метода статистического моделирования?
10. Каковы особенности моделей типа «черный ящик» ?
11. Как построить модель случайного события?
12. Как построить модель полной группы событий?
13. Как построить модель событий, которые могут проявляться совместно?
14. Что такое регрессионная модель?

# **Глава V. Моделирование систем автоматического регулирования и управления**

## **§ 1. Развитие теории автоматического управления**

Потребность в автоматическом регулировании и управлении возникла и стала весьма актуальной с ростом сложности техники и расширением применения технических систем в производстве. Возникла необходимость управления процессами, которые подвержены действию помех и внешних воздействий, не только нарушающих точность функционирования, но и работоспособность системы в целом. Стало очевидно, что человек (оператор) не в состоянии обеспечить требуемую точность и оперативность регулирования режима работы технической системы. Например, необходимость регулирования актуальна для таких точных механических систем, как часы. Для них требуется обеспечить точность хода в условиях постоянного действия небольших помех.

Развитие устройств регулирования и управления началось в эпоху промышленной революции. Одними из первых промышленными регуляторами являются поплавковый регулятор питания котла паровой машины И.И.Ползунова и центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины Дж. Уатта. Паровая машина стала первым объектом применения регулирования, так как она не обладает свойством устойчивой работы. Известно множество случаев, когда регулятор паровой машины был не способен выполнять свои функции, а наоборот, «раскачивал» колебания ее параметров. Именно потребности регулирования паровой машины стимулировали развитие теоретических исследований в данной области.

Фундаментальное значение для практики и теории регулирования имели работы Дж. Максвелла «О регуляторах», И.А. Вышнеградского «Об общей теории регуляторов» и «О регуляторах прямого действия». В данных работах реализован системный подход к проблеме. Регулятор и машина рассматривались как единая динамическая система. В этих работах заложен общий методологический подход к исследованию разнообразных по принципу действия систем. В работах И.А. Вышнеградского сформулированы основы теории устойчивости и установлены важные закономерности регулирования с использованием обратной связи.

В начале XX века теория автоматического регулирования сформировалась как самостоятельная научная дисциплина с рядом прикладных разделов, которые связаны с конкретными техническими системами. Разрабатываются новые математические методы анализа линейных и нелинейных систем регулирования, методы исследования устойчивости и чувствительности, новые принципы управления: регулирование по возмущению, теория компенсации возмущения и инвариантности, принципы экстремального управления, теория оптимального управления и т.д.

Существенный вклад в развитие теории автоматического управления и регулирования внесли российские ученые Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, А.В. Михайлов, А.А. Ляпунов, А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин, А.А. Крассовский и другие.

Значение теории автоматического управления актуально не только для технических систем, управляемые процессы имеют место в самых различных системах, например, в экономических, технологических, человеко-машинных и т.п.

В настоящее время теория автоматического управления является научно-технической дисциплиной, которая изучает

общие принципы управления разнообразными техническими системами на основе построения их математических моделей, разрабатывает собственные методы анализа и синтеза систем управления, методы анализа устойчивости, методы оценки свойств проектируемых систем и качества регулирования.

## **§ 2. Основные понятия теории автоматического управления**

Управление – это целенаправленное воздействие на объект управления с целью обеспечить его оптимальное состояние или поведение. Регулирование – это частный случай управления, оно предполагает обеспечение определенного состояния объекта регулирования. Автоматическое управление и регулирование осуществляются без участия оператора (человека). Действие системы автоматического регулирования состоит в том, чтобы при возникновении отклонений от требуемого режима функционирования объекта воздействовать на объект так, чтобы устранить эти отклонения.

Различают управление в системе (это внутренняя функция системы), которое называется самоуправлением или саморегулированием, и управление системой – это внешнее управление, обеспечивающее необходимое функционирование системы.

Теория автоматического управления решает задачи анализа, т.е. исследования свойств системы управления. Целью анализа является определение возможностей системы управления по регулированию данного объекта управления. Задача синтеза имеет цель создания системы управления, которая обеспечит необходимое поведение объекта управления.

Различают следующие типы систем управления (регулирования): управление без обратной связи (жесткое управление), управление по возмущению (на основе принципа

компенсации), управление с обратной связью. При управлении без обратной связи (рис. 48) сигналы управления генерируются по определенной программе без учета состояния объекта. Примером системы с жестким управлением является светофор, который является регулятором движения на перекрестке (объект управления – перекресток).

Схемы с управлением по возмущению (рис. 49) используются в случае, если возможно ввести коррективы в алгоритм управления для компенсации возмущения. Пример: биметаллическая система стержней в маятнике хронометра обеспечивает постоянную длину маятника при колебаниях температуры.

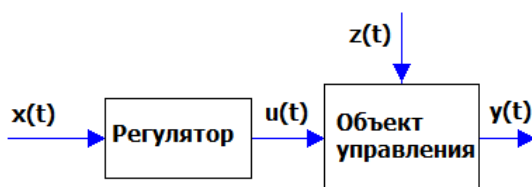


Рис. 48. Схема управления без обратной связи

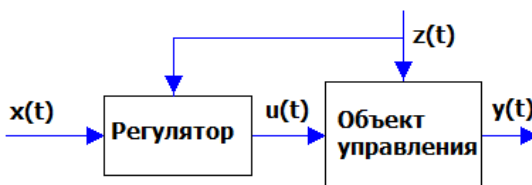


Рис. 49. Схема управления по возмущению без обратной связи

При управлении с обратной связью (рис. 50) система управления учитывает изменение состояния объекта управления. Его функционирование обеспечивается без измерения возмущения, только на основе информации о состоянии объекта управления. Примером может служить

система регулирования температуры в термостате (холодильнике).

В подобных системах сигнал, поступающий по линии обратной связи, вычитается из задающего воздействия (отрицательная обратная связь). Если состояние объекта управления изменяется, то обратная связь стремится компенсировать изменения состояния объекта управления. Системы с обратной связью при определенных сочетаниях параметров могут быть неустойчивыми, т.е. способны дестабилизировать состояние объекта управления.

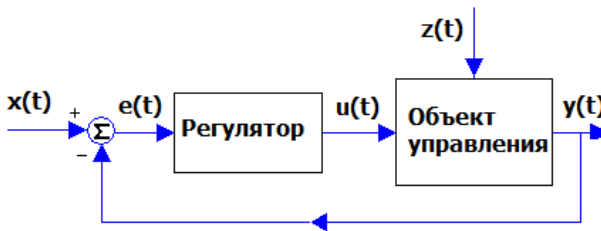


Рис. 50. Схема управления с обратной связью

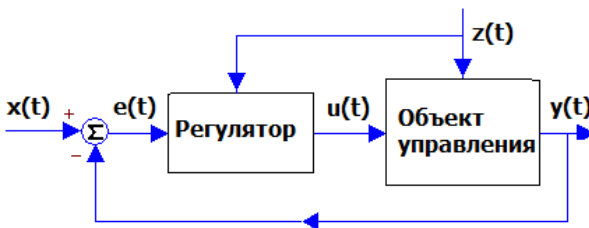


Рис. 51. Схема комбинированного управления

Здесь:  $x(t)$  – управляющее воздействие,  $e(t)=x(t)-y(t)$ ,  $z(t)$  – возмущение,  $u(t)$  – воздействие регулятора на объект управления,  $y(t)$  – регулируемый параметр. Используются комбинированные системы управления: управление по возмущению с обратной связью (рис. 51).

К основным видам систем автоматического управления можно отнести:

**Системы стабилизации.** На начальном этапе развития техники системы стабилизации представляли единственный вид систем управления. Задачей данной системы является поддержание постоянства управляемого параметра.

**Программное управление.** В этом случае алгоритм функционирования системы задан. В подобных системах существует датчик, который вырабатывает задающие воздействия по определенному алгоритму. Программное управление может быть организовано по любой схеме (рис. 48 - 50). Например, системы подобного рода применяются при программном управлении металлорежущими станками.

**Следящие системы.** Алгоритм функционирования в таких системах заранее не известен. Регулируемый параметр в таких системах должен воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, например, движения цели. Следящая система управления может быть организована по любой схеме (рис. 48 - 50), если в ней будет присутствовать датчик слежения за изменением внешнего фактора.

**Системы с поиском экстремума.** В ряде систем показатель эффективности процесса может быть выражен функцией текущих значений параметров. Системы такого вида предназначены для поддержания показателя качества на максимуме.

**Оптимальное управление.** Подобные системы применяются в управлении динамическими системами, для которых актуальна оптимизация протекания переходных процессов. Показатель эффективности таких процессов выражается некоторым функционалом. Он зависит и от текущих значений параметров, и от характера протекания процесса во



времени. Примером может служить управление полетом ракеты, которая имеет ограниченный запас топлива.

**Адаптивные системы управления.** В реальных условиях внешние воздействия способны изменить не только управляемую величину, но и параметры объекта управления, причем существенно, что может привести к полной потере работоспособности управляемой системы. Адаптивные системы способны автоматически изменять свои параметры или структуру при изменении внешних воздействий на основании анализа состояния или поведения объекта так, чтобы сохранить необходимое качество функционирования объекта.

Управляющие сигналы к объекту управления могут поступать непрерывно. Такие системы управления называются системами непрерывного действия. Примером является система управления паровой машиной на основе регулятора Уатта. Примером систем управления дискретного действия является система термостатирования, в которой обогрев или охлаждение включаются и выключаются в момент достижения определенных температур в термостате.

Критерием классификации может быть вид математической модели системы управления. В соответствии с этим признаком можно выделить линейные системы, нелинейные системы и существенно нелинейные системы управления. Нелинейные системы отличаются от существенно нелинейных тем, что последние описываются функциональными зависимостями с разрывами или самих функций, или их производных. Пример – функциональная зависимость с насыщением.

### **§ 3. Математическое моделирование систем управления**

Математическое моделирование систем управления – это классический подход к анализу подобных систем, который составляет основу теории автоматического управления и регулирования. В рамках теории автоматического регулирования были разработаны специфические методы анализа, которые затем использовались в других науках. Примером может служить теория устойчивости.

Методы математического моделирования, несомненно, актуальны в теории управления. Экспериментальный метод в данной области уместен лишь на этапе испытаний опытных образцов систем управления.

Первоначально в теории автоматического управления развивались аналитические и приближенные методы. В настоящее время разработаны специализированные программные комплексы компьютерного моделирования, предназначенные для моделирования систем управления и решения специальных задач этой области. Например, инструментальная система компьютерного моделирования VisSim и ее российский русскоязычный аналог программный комплекс МВТУ (Моделирование в технических устройствах), разработанный в МГТУ им. Баумана. Последний предназначен для численного исследования на математических моделях нестационарных процессов в технических системах. Модели систем строятся как модели с сосредоточенными параметрами в виде обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Этот программный комплекс позволяет решать различные задачи моделирования: анализа, синтеза, идентификации, контроля и управления.

Принцип моделирования программного комплекса МВТУ состоит в создании и исследовании виртуальной модели

реальной системы (рис. 52), которая представляет собой блок-схему. При моделировании не обязательно записывать уравнения модели в явном виде, модель конструируется из готовых блоков путем их копирования и соединения в блок-схему. Принцип построения моделей в среде MBTU аналогичен технологиям построения моделей в программных комплексах VisSim и Simulink.

Математическое моделирование систем управления основано на их декомпозиции, т.е. разделении на элементы (звенья). Математические модели элементов строятся на основе закономерностей процессов, которые в них протекают. Накопленный опыт исследования и разработки систем управления позволили выделить типовые математические модели элементов систем управления, из которых и создаются системы. Более сложные элементы могут быть получены путем соединения простейших типовых звеньев. Анализ свойств систем строится на результатах исследования свойств типовых элементов и свойств соединений элементов.

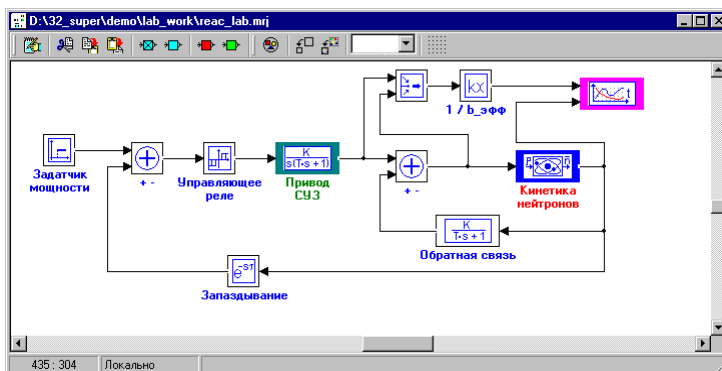


Рис. 52. Окно модели системы в программном комплексе MBTU



Рис. 53. Модель типового звена

Рассмотрим математические модели простейших типовых звеньев. Именно они реализованы в виде стандартных блоков в программных комплексах моделирования МВГУ, VisSim и Simulink.

**Пропорциональное звено.** Математическая модель пропорционального (усилительного) звена имеет вид:  $y(t) = k \cdot x(t)$ . Здесь  $x(t)$  – входное воздействие,  $y(t)$  – реакция элемента на внешнее воздействие (рис. 53).

**Интегрирующее звено.** Математическая модель интегрирующего звена может быть представлена зависимостями

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t),$$

или  $y(t) = k \int_0^t x(t) dt$ . Реакция  $y(t)$  интегрирующего звена

является интегралом входного воздействия  $x(t)$ .

**Дифференцирующее звено.** Зависимость выходного сигнала от входного воздействия для дифференцирующего звена имеет вид:

$$y(t) = k \cdot \frac{dx(t)}{dt}.$$

Таким образом, реакция  $y(t)$  дифференцирующего звена пропорциональна скорости изменения входного сигнала.

**Апериодическое (инерционное) звено,** которое называется еще инерционным звеном первого порядка. Математическая модель аperiодического звена имеет вид:

$$\frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = k \cdot x(t).$$

Подобной моделью, например, описывается процесс изменения температуры тела при нагревании или охлаждении. Очевидно, что такой процесс обладает инерцией.

**Колебательное звено.** В общем случае модель подобного звена имеет вид:

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k \cdot \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = \lambda \cdot x(t).$$

Примером системы, которая является колебательным звеном, может служить амортизатор автомобиля.

**Звено запаздывания** описывается соотношением  $y(t) = k \cdot x(t - \tau)$ , где  $\tau$  - время запаздывания. Реакция звена  $y(t)$  определяется входным сигналом в момент времени  $t - \tau$ , т.е. значением  $x$ , которое было  $\tau$  секунд назад.

#### § 4. Временные и частотные характеристики

Реакция  $y(t)$  типового звена или любого другого объекта определяется как параметрами самого объекта, так и видом внешнего воздействия  $x(t)$ . С точки зрения теории регулирования интерес представляют собственные динамические свойства объекта исследования. В качестве входных воздействий выбираются простейшие сигналы, которые легко генерируются, и на их основе можно представить другие более сложные воздействия. Входные сигналы – это математические модели воздействий. Входные и выходные сигналы являются функциями времени. Реакция  $y(t)$  объекта на простейший входной сигнал несет информацию о его динамических свойствах. В качестве простейших входных сигналов используются следующие функции:

- единичная ступенчатая функция:

$$x(t) = 1(t): 1(t) = 1, \text{ при } t \geq 0; \quad 1(t) = 0, \text{ при } t < 0;$$

- гармоническая функция:  $x(t) = \cos(\omega t)$ ;

- дельта-функция Дирака:

$$x(t) = \delta(t): \delta(t) = 0, \text{ при } t \neq 0; \quad \delta(t) = \infty, \text{ при } t = 0.$$

Входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции моделирует «включение» системы, а входное воздействие в виде гармонической функции имитирует воздействие вибрации или переменного напряжения. В свою очередь, дельта-функция является аналогом ударного внешнего воздействия. Очевидно, что подобные воздействия являются достаточно типичными при функционировании любого объекта.

Реакция объекта на единичную ступенчатую функцию называется переходной функцией  $h(t)$ , в свою очередь, реакция на входное воздействие в виде дельта - функции называется импульсной функцией  $q(t)$  (рис. 54 - 55).

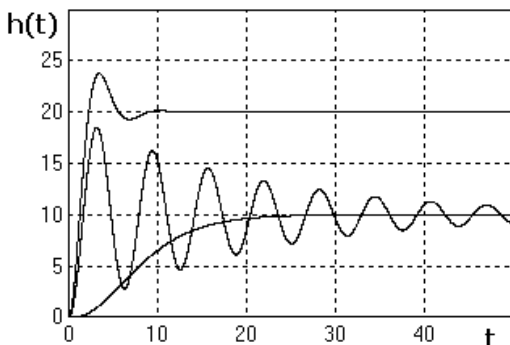


Рис. 54. Примеры переходных функций

Для типовых элементов и других линейных объектов (линейная математическая модель) гармоническое входное воздействие  $x(t) = \cos(\omega t)$ , вызывает реакцию следующего

вида:  $y(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$ . Здесь  $A(\omega)$  – амплитуда выходного гармонического сигнала;  $\varphi(\omega)$  – его фаза. Амплитуда и фаза являются функциями частоты  $\omega$ .

Зависимость амплитуды выходного сигнала от частоты  $A(\omega)$  называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) (рис. 58). Зависимость фазы от частоты  $\varphi(\omega)$  – фазочастотная характеристика (ФЧХ) (рис. 59).

Естественно, что все функции для одного и того же элемента взаимосвязаны, так как они характеризуют его динамические свойства.

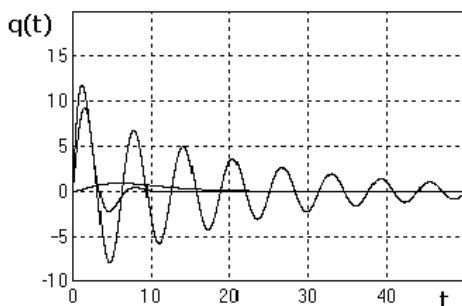


Рис. 55. Примеры импульсных функций

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: реакция объекта на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.

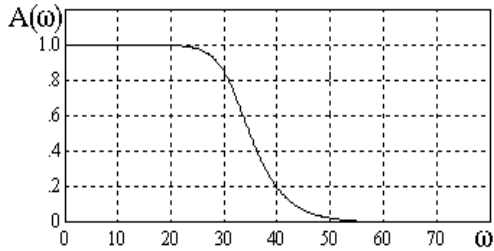


Рис. 56. Пример АЧХ

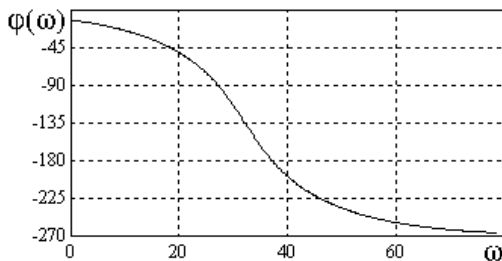


Рис. 57. Пример ФЧХ

Обычно переходный процесс характеризуют следующими параметрами:

- время регулирования  $t_p$  – минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению;
- перерегулирование  $\sigma$  – отношение максимального отклонения переходной функции от установившегося значения к установившемуся значению регулируемой величины;
- частота колебаний в переходном процессе;
- число колебаний в переходном процессе;
- время достижения первого максимума  $t_{\max}$ .



- время нарастания переходного процесса  $t_n$  – время первого достижения установившегося значения регулируемой величины;
- декремент затухания  $K$ , равный отношению модулей двух первых перерегулирований.

Переходные функции по форме могут быть монотонными, колебательными и апериодическими (рис. 54).

В качестве параметров АЧХ рассматриваются следующие показатели:

- показатель  $M = A_{\max}(\omega) / A(\omega = 0)$  характеризует склонность системы к развитию колебаний;
- частота максимума АЧХ  $A(\omega) = \text{Max}$ ;
- полоса пропускания – интервал частот, для которого выполняется условие:  $A(\omega) \geq 0,707 A(\omega = 0)$ ;
- частота среза, при которой  $A(\omega) = 1$ .

Эти характеристики являются показателями качества регулирования и определяются в задании на проектирование.

## § 5. Преобразование Лапласа и передаточная функция

Операционное исчисление нашло широкое применение в теории автоматического регулирования, где с его помощью проводится анализ динамических процессов в системах управления и регулирования. Суть преобразования Лапласа состоит в следующем. Для заданной функции времени  $f(t)$  функция  $F(s)$  называется изображением по Лапласу, причем

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt .$$

Преобразование Лапласа обладает замечательным свойством: производной  $f(t)$  соответствует произведение  $s \cdot F(s)$ . Соответственно,  $\int_0^{\infty} f''(t)e^{-st} dt = s^2 \cdot F(s)$  и т.д.

Таким образом, преобразование Лапласа позволяет перейти от дифференциальной формы записи зависимостей к алгебраической форме. Параметр  $s = \alpha + j\omega$ , параметр преобразования Лапласа, является комплексной величиной. Здесь  $\alpha = \text{Re}(s)$  – действительная часть параметра  $S$ ,  $\omega = \text{Im}(s)$  – мнимая часть параметра  $S$ .

Пусть математическая модель объекта представляется дифференциальным соотношением:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \end{aligned}$$

Здесь параметры  $a_i, b_j$  – постоянные величины.

Применим к обеим частям соотношения преобразование Лапласа. В итоге с учетом свойств преобразования Лапласа получим:

$$Y(s) \cdot (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) = X(s) \cdot (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)$$

или

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Здесь  $Y(s)$  и  $X(s)$  – изображения по Лапласу для функций времени –  $y(t)$  и  $x(t)$  соответственно:  $x(t)$  – входное воздействие на объект,  $y(t)$  – реакция объекта. Используем

обозначение  $\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ .  $\Phi(s)$  называется передаточной функцией. Последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$Y(s) = \Phi(s) \cdot X(s).$$

Таким образом, зная передаточную функцию  $\Phi(s)$  и изображение входного воздействия  $X(s)$ , можно определить изображение реакции объекта  $Y(s)$ . Рассмотрим передаточные функции типовых звеньев, которые представлены в табл. 3.

В реальных системах элементы могут соединяться последовательно, параллельно, по принципу обратной связи (рис. 58 - 60). Простейшие преобразования позволяют получить выражения передаточных функций для представленных на рис. 58 - 60 схем соединений.

Передаточная функция последовательного соединения элементов:

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = F_1(s) \cdot F_2(s).$$

Для параллельного соединения передаточная функция суть следующее:

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = F_1(s) + F_2(s).$$

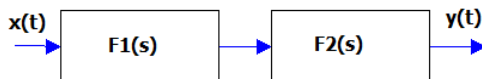


Рис. 58. Последовательное соединение

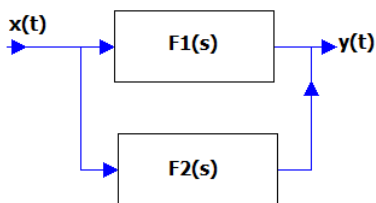


Рис. 59. Параллельное соединение

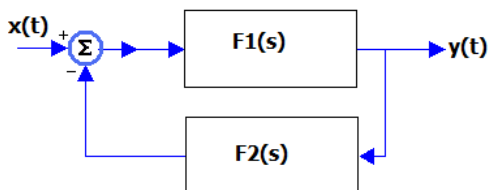


Рис. 60. Отрицательная обратная связь

Соединение элементов по принципу отрицательной обратной связи имеет следующую передаточную функцию:

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s) \cdot F_2(s)}.$$

Здесь  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$  - передаточные функции элементов,  $X(s)$  и  $Y(s)$  – изображения по Лапласу функций  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Таблица 3

Вид звена	Математическая модель	Передаточная функция
Пропорциональное	$y(t) = k \cdot x(t)$	$\Phi(s) = k$
Интегрирующее	$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t)$	$\Phi(s) = \frac{k}{s}$
Дифференцирующее	$y(t) = k \cdot \frac{dx(t)}{dt}$	$\Phi(s) = k \cdot s$

Апериодическое	$\frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = k \cdot x(t)$	$\Phi(s) = \frac{k}{s+c}$
Колебательное	$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k \cdot \frac{dy(t)}{dt} + c \cdot y(t) = \lambda \cdot x(t)$	$\Phi(s) = \frac{\lambda}{ms^2 + ks + c}$
Запаздывания	$y(t) = k \cdot x(t - \tau)$	$\Phi(s) = k \cdot \exp(-s \cdot \tau)$

Типовые схемы соединений элементов при их комбинациях позволяют построить любые сложные схемы соединений элементов. Данные правила построения передаточных функций позволяют построить передаточную функцию любой системы.

## § 6. Анализ устойчивости систем управления

Функционирование любой системы сопряжено с действием внешних возмущений, которые нарушают ее нормальную работу. Устойчивая система всегда возвращается в исходное состояние после прекращения действия возмущений. Неустойчивая система либо переходит в новое состояние, либо совершает колебания вокруг исходного состояния (режим автоколебаний), либо в ней развивается хаотическое поведение.

Для некоторых систем свойство устойчивости зависит от величины возмущения. Такое положение дел имеет место для нелинейных систем. Различают устойчивость «в малом», устойчивость «в большом» и устойчивость «в целом». Система считается устойчивой «в малом», если ее устойчивость установлена без указания величины возмущения. В этом случае считается, что система устойчива относительно малых возмущений. Устойчивость «в малом» важное свойство систем, так как во многих случаях величина внешних возмущений действительно достаточно мала.

Если границы величин возмущений, при которых система сохраняет устойчивость, заданы, то имеет место устойчивость «в большом». Устойчивость «в целом» имеет место для любых возмущений.

Понятие устойчивости можно распространить не только на состояние равновесия системы, но и на ее «движение». Внешние возмущения вызывают отклонение «движения» от невозмущенного. Невозмущенное движение считается устойчивым, если после прекращения действия внешних возмущений возмущенное движение системы стремится к невозмущенному.

Свойство устойчивости чрезвычайно важно для систем автоматического регулирования. Неустойчивые системы регулирования неспособны выполнять свои функции. В этом случае система регулирования будет дестабилизировать состояние объекта. Таким образом, анализ устойчивости для систем регулирования является актуальной задачей.

Прямое исследование устойчивости путем численного решения уравнений математической модели в этом случае весьма неэффективно, так как связано с расчетами и анализом результатов для многих вариантов значений параметров системы. В теории автоматического регулирования разработан ряд качественных методов анализа устойчивости, которые не требуют решения уравнений модели и более информативны. Рассмотрим некоторые теоретические положения подобных методов.

Пусть математическая модель движения объекта представлена в виде системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1 - n.$$

Здесь  $y_i(t)$  – переменные, которые характеризуют движение системы,  $F_i$  – известные функции. Исходное состояние задано начальными условиями:  $y_i(t=0) = y_{i0}$ .

Пусть начальные условия изменились (получили возмущение). Тогда движение объекта будет описываться новыми решениями системы уравнений, которая представлена выше. Обозначим эти решения, как  $y_i^*(t)$ . Введем новые переменные:  $z_i(t) = y_i^*(t) - y_i(t)$ , которые назовем отклонениями. Для возмущенного движения справедливо  $y_i^*(t) = z_i(t) + y_i(t)$ . Последнее соотношение подставим в уравнения движения системы:

$$\frac{dz_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n), \quad i = 1 - n.$$

После разложения функций  $F_i$  в ряд Тейлора (будем считать, что это возможно) последние уравнения примут вид:

$$\frac{dz_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) + \sum_1^n \frac{\partial F_i}{\partial z_i} z_i + R_i(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1 - n.$$

Здесь функции  $R_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$  – совокупность слагаемых, которые зависят от  $z_i$  в степени выше первой. С учетом уравнений невозмущенного движения получим:

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial F_i}{\partial z_i} z_i + R_i(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1 - n.$$

Последняя система уравнений описывает возмущенное движение через отклонения  $z_i(t)$ . Если отклонения достаточно малы, то функциями  $R_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$  можно пренебречь. В итоге получим систему линейных (линеаризованных) уравнений

движения (рис. 61), которые называются уравнениями первого приближения:

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial F_i}{\partial z_i} z_i(t), \quad i = 1 - n.$$

Доказано, что невозмущенное движение системы устойчиво «в малом», если устойчиво решение уравнений первого приближения. Этот факт подчеркивает важность исследования линейных (линеаризованных) моделей систем регулирования.

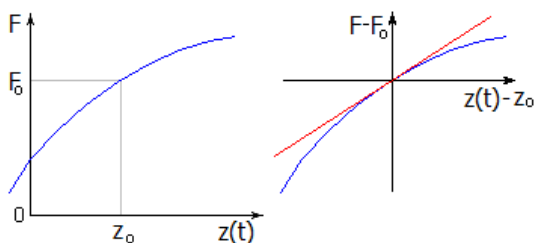


Рис. 61. Геометрический смысл линеаризации: замена кривой касательной

Пусть модель динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением следующего вида:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t),$$

где  $x(t)$  – внешнее воздействие на систему. Решение данного уравнения имеет вид:  $y(t) = y_e(t) + y_c(t)$ , где  $y_e(t)$  – вынужденная составляющая решения, которая определяется функцией  $x(t)$ ,  $y_c(t)$  – собственное решение уравнения.

Собственное решение имеет общий вид:  $y_c(t) = \sum_1^n C_i e^{s_i t}$ , где  $s_i$  –

корни характеристического уравнения:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$



Для динамической системы, которая описывается представленным линейным дифференциальным уравнением, условие устойчивости формулируется следующим образом. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни  $s_i = \alpha_i + j\omega_i$  характеристического уравнения имели отрицательную действительную часть. Действительно,

$$e^{st} = e^{\alpha t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)).$$

Тогда при  $\alpha < 0$   $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ , а при  $\alpha > 0$   $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  (рис. 62).

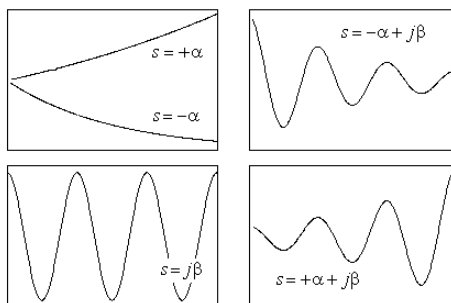


Рис. 62. Корни характеристического уравнения и устойчивость

Для характеристических уравнений высоких порядков непосредственное вычисление корней становится проблематичным. Разработаны критерии, которые позволяют установить знак действительной части корней характеристического уравнения, т.е. установить, устойчива система или нет.

В соответствие с критерием Гурвица характеристическое уравнение будет иметь корни с отрицательной действительной частью, если выполняются условия:

- для характеристического уравнения первого порядка

$$a_1 s + a_0 = 0$$

условия устойчивости имеют вид:  $a_1 > 0$ ,  $a_0 > 0$ ;

- для характеристического уравнения второго порядка  $a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$  условия устойчивости суть

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0;$$

- для характеристического уравнения третьего порядка

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

условия устойчивости определяются неравенствами:

$$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0;$$

- для характеристического уравнения четвертого порядка

$$a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

$$a_4 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_1(a_3a_2 - a_4a_1) - a_2^2a_0 > 0.$$

Подобные условия на основе критерия Гурвица могут быть получены для уравнений и более высоких степеней.

Существуют так называемые частотные критерии устойчивости, которые позволяют судить об устойчивости по частотной характеристике. Введем обозначение для левой части характеристического уравнения:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0.$$

Для  $s = j\omega$  функцию  $D(s)$  можно представить в следующем виде:

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 = X(\omega) + jY(\omega).$$

Изменяя  $\omega$  от 0 до  $\infty$  в координатах  $X(\omega) - Y(\omega)$ , получим кривую, которая называется годографом Михайлова (рис. 63). На основе поведения этой кривой можно сделать вывод об устойчивости системы. Суть критерия Михайлова: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , начинаясь при  $\omega=0$  на вещественной положительной полуоси,

обходил против часовой стрелки последовательно  $n$  квадрантов координатной плоскости  $X(\omega) - Y(\omega)$ . Здесь  $n$  – порядок характеристического уравнения.

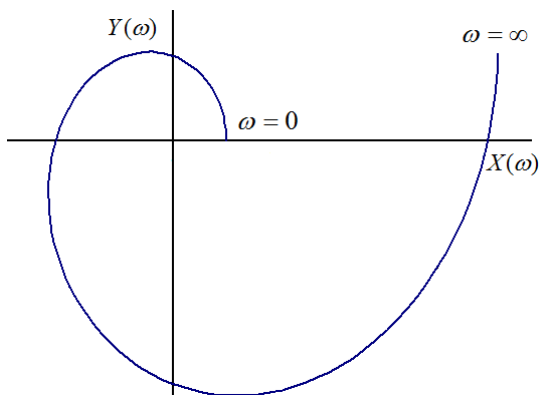


Рис. 63. Годограф Михайлова,  $n=5$

При анализе устойчивости актуален не только вопрос о собственно устойчивости, но и о «запасе» устойчивости в системе. Это обусловлено тем, что с течением времени параметры любой системы изменяются, кроме того, существует случайный разброс параметров в любой системе, связанный с неточностью изготовления. Помимо этого «запас» устойчивости влияет на вид и параметры переходных функций и частотных характеристик системы.

При исследовании устойчивости, особенно при проектировании систем, большое практическое значение имеет построение областей устойчивости в пространстве параметров системы. Одним из методов построения областей устойчивости является метод D-разбиения. Его суть состоит в следующем. Рассмотрим характеристическое уравнение системы:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0.$$

Уравнение имеет  $n$  корней, их размещение на комплексной плоскости непрерывно зависит от значений параметров системы (коэффициентов характеристического уравнения). Уравнение границ устойчивости может быть получено из характеристического уравнения заменой  $s = j\omega$ . Подобная замена даст уравнения, которые определяют значения параметров системы, соответствующих границе устойчивости:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega)^1 + a_0 = 0$$

$$= N(\omega) + jM(\omega) = 0.$$

Данное равенство будет справедливо, если

$$N(\omega) = 0; M(\omega) = 0.$$

Последние уравнения и определяет границы устойчивости в пространстве параметров системы. Пример границы устойчивости, построенной в пространстве параметров системы представлен на рис. 64.

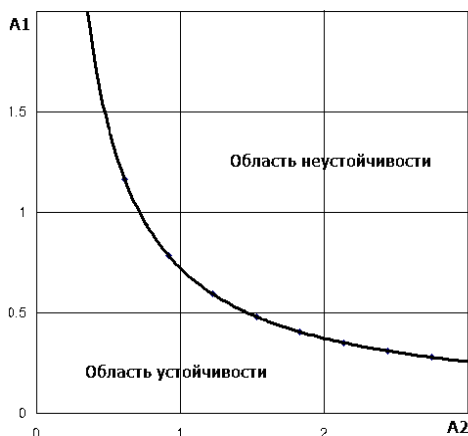


Рис. 64. Пример границы устойчивости

Подведем итог. В данной главе рассмотрены самые простейшие понятия и методы теории автоматического регулирования, теоретические основы компьютерного моделирования и анализа важного класса технических систем – систем автоматического регулирования. Подробные сведения в данной области можно найти в монографиях [18], [21] и на сайтах [42], [47].

### **Контрольные вопросы к главе 5**

1. Какова схема регулирования с жестким управлением?
2. Какова схема регулирования с управлением по возмущению?
3. Какова схема регулирования с обратной связью?
4. Что такое переходная функция линейной системы?
5. Как строится амплитудо-частотная характеристика системы?
6. Какие функции применяются в качестве типовых внешних воздействий?
7. Какие существуют типы простейших звеньев?
8. Какие типовые параметры выделяют для переходной функции?
9. Какие типовые параметры различают для амплитудо-частотных характеристик?
10. Что такое передаточная функция?
11. Какие существуют типовые схемы соединения звеньев?
12. Что такое устойчивая система?
13. Перечислите программные комплексы моделирования систем управления.

## Терминологический минимум

**Адекватность модели.** Характеристика точности отражения моделью свойств объекта, которая необходима для решения поставленной задачи.

**Алгоритмическая модель.** Модель, отражающая алгоритм поведения системы или объекта.

**Аналитическая модель.** Модель, состоящая из набора уравнений, решение которых возможно в точной или приближенной аналитической формах.

**Геометрическая модель.** Модель, отражающая геометрические свойства объекта: размеры, ориентацию в пространстве, взаимное расположение элементов.

**Графическая модель.** Модель, построенная средствами графики.

**Детерминированная модель.** Модель, свойства и характеристики которой определены через известные отношения, а заданные входные воздействия всегда приводят к одним и тем же результатам.

**Динамическая модель.** Модель объекта, в котором происходит изменение его состояния во времени.

**Дискретная модель.** Математическая или алгоритмическая модель, параметры которой изменяются от одного значения к другому скачкообразно и не допускают промежуточных значений.

**Компьютерная модель.** Модель, реализованная средствами вычислительной техники.

**Концептуальная модель.** Формулировка содержательного описания, которое составляет концепцию модели. Она включает в явном виде логику, алгоритмы, предположения и ограничения.

**Масштабная модель.** Материальная физическая модель, подобная данному объекту в определенном масштабе.

**Математическая модель.** Математический объект, например, система уравнений, которая отображает количественные меры свойств моделируемого объекта и их взаимозависимость.

**Модель.** Объект произвольной природы, который отображает, воспроизводит определенные свойства объекта-оригинала, важные для решения поставленной задачи.

**Моделирование.** Построение модели или исследование свойств объекта по его модели.

**Модель структурная.** Модель, отражающая состав и взаимодействие элементов системы.

**Модель типа «черный ящик».** Модель, которая отражает в формальном виде реакцию объекта на входное внешнее воздействие. Внутренне описание объекта неизвестно.

**Модель статическая.** Модель системы, в которой не происходит изменения состояния с течением времени.

**Непрерывная модель.** Модель, параметры которой изменяются непрерывным образом.

**Оптимизационная модель.** Модель, на основе которой определяются наилучшие (в определенном смысле) параметры объекта.

**Познавательная модель.** Модель, предназначенная для отображения поведения или свойств существующей системы или объекта с целью их изучения.

**Прагматическая модель.** Модель, отображающая требуемое поведение или желаемые свойства вновь создаваемой системы.

**Прогностическая модель.** Модель, которая предсказывает (с определенной вероятностью) будущие

состояния объекта или системы. Например, модель, которая предсказывает погоду на основе значений температуры, влажности, скорости ветра и т.д. в различных регионах.

**Материальная модель.** Модель, в которой, по крайней мере, один из компонентов является материальным объектом.

**Регулирование.** Частный случай управления, предполагает обеспечение желаемого значения параметров объекта регулирования.

**Система.** Множество взаимодействующих элементов, организованных для выполнения определенных функций.

**Событие.** Изменение свойств объекта, взаимодействие между объектами, которое связано с конкретным моментом времени или условием.

**Стохастическая модель.** Модель, в которой используются случайные величины или случайные события для учета неопределенности процесса.

**Управление.** Целенаправленное воздействие на объект управления с целью обеспечить его оптимальное состояние или поведение.

**Управление автоматическое.** Управление, которое осуществляется без участия оператора (человека).

**Эксперимент вычислительный.** Исследование свойств объекта путем проведения экспериментов с его компьютерной моделью.



## Библиографический список

### Основная научная литература

1. Введение в математическое моделирование / под ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2007. – 440с.
2. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н.Голованов. – М.: Изд-во физ. – мат. лит., 2002. – 472с.
3. Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике: в 2ч. / Х.Гулд, Я.Тобочник. – М.: Мир, 1990.
4. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем: введение в моделирование с AnyLogic / Ю.Г. Карпов. – СПб.: БХВ–Петербург, 2009. – 400с.
5. Голованов Н.Н. Компьютерная геометрия / Н.Н.Голованов, Д.П.Ильютко, Г.Н.Носовский, А.Т.Фоменко – М.: Изд. центр «Академия», 2006. – 512с.
6. Неуймин Я.Г. Модели в науке и технике / Я.Г.Неуймин. – Л.: Наука, 1984. – 283с.
7. Острейковский В.А. Теория систем / В.А.Острейковский. – М.: Высш. шк., 1997. – 240с.
8. Перегудов Ф.И. Введение в системный анализ / Ф.И.Перегудов, Ф.П.Тарасенко. – М.: Высш. шк., 1989. – 367с.
9. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А.Самарский, А.П.Михайлов. – М.: Физматлит, 2007. – 320с.
10. Советов Б.Я. Моделирование систем / Б.Я.Советов, С.А.Яковлев. – М.: Высш. шк., 2007. – 343с.

### Основная учебная литература

11. Бенькович Е.С. Практическое моделирование динамических систем / Е.С.Бенькович, Ю.Б.Колесов, Ю.Б.Сенюченков. – СПб.: БХВ–Петербург, 2002. – 464с.
12. Богуславский А.А. Си++ и компьютерная графика / А.А.Богуславский. – М.: КомпьютерПресс, 2003. – 352с.
13. Дьяконов В.П. Simulink–4: спец. справ. / В.П.Дьяконов. – СПб: Питер, 2002. – 528с.
14. Казиев В.М. Введение в анализ, синтез и моделирование систем / В.М.Казиев. – М.: Интернет–университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 244с.
15. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel / Б.Я.Курицкий.–СПб.: ВHV–Санкт–Петербург, 1997. – 384с.
16. Кудрявцев Е.М. КОМПАС–3D V6: основы работы в системе / Е.М.Кудрявцев. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 528с.
17. Потемкин А.М. Трехмерное твердотельное моделирование в системе КОМПАС–3D / А.М.Потемкин. – СПб.: БХВ–Петербург, 2004. – 512с.
18. Теория автоматического управления / под ред. Ю.М.Соломенцева, – М.: Высш. шк., 2002. – 573с.
19. Угринович Н.Д. Исследование информационных моделей. элективный курс: учеб. пособие / Н.Д.Угринович. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 183с.
20. Фридланд А.Я. Информатика: процессы, системы, ресурсы / А.Я.Фридланд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 232с.
21. Юревич Е.И. Теория автоматического управления / Е.И.Юревич. – СПб.: ВHV, 2007. – 378с.

### Дополнительная литература

22. Алямовский А.А. SolidWorks / CosmoWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов / А.А.Алямовский. – М.: ДМК Пресс, 2004. –432с.
23. Блехман И.И. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики / И.И.Блехман, А.Д.Мышкис, Я.Г.Пановко. – М.: Наука, 1983. – 328с.
24. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П.Бусленко.– М.: Наука, 1988. – 427с.
25. Веников В.А. Теория подобия и моделирование / В.А.Веников, Г.В.Веников.— М.: Высш. шк., 1984. – 345с.
26. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике / В.С.Зарубин. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 496с.
27. Колесов Ю.Б. Объектно–ориентированное моделирование сложных динамических систем / Ю.Б.Колесов. СПб.: Изд–во СПбГТУ, 2004. – 240с.
28. Колесов Ю.Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы / Ю.Б.Колесов, Ю.Б.Сениченков. – СПб.: БХВ–Петербург, 2006. – 224с.
29. Колесов Ю.Б. Моделирование систем. Объектно–ориентированный подход / Ю.Б.Колесов, Ю.Б.Сениченков. – СПб.: БХВ–Петербург, 2006. – 192с.
30. Колесов Ю.Б. Моделирование систем: Практикум по компьютерному моделированию / Ю.Б.Колесов, Ю.Б.Сениченков. – СПб.: БХВ–Петербург, 2007. – 352с.
31. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент: введение в информатику с позиций математического моделирования / под ред. А.А.Самарского. – М.: Наука, 1988. – 176с.
32. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А.В.Леоненков.– СПб.: БХВ–Петербург, 2005. – 704с.

33. Макарова Н.В. Статистика в Excel / Н.В.Макарова, В.Я.Трофимец. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368с.
34. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 488с.
35. Налимов В.В. Теория эксперимента / В.В.Налимов. – М.: Наука, 1971. – 208с.
36. Половинкин А.И. Основы инженерного творчества / А.И.Половинкин. – М.: Машиностроение, 1988. – 368с.
37. Реклейтис Г. Оптимизация в технике: в 2 кн. / Г.Реклейтис.– М.: Мир, 1986.
38. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике / Л.И.Седов.– М.: Наука, 1967. – 428с.
39. Хернитер М.Е. Multisim: современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств / М.Е.Хернитер. – М.: ДМК пресс, 2006. – 492с.
40. Холодниок М. Методы анализа нелинейных математических моделей / М.Холодниок, А.Клич, М.Кубичек, М.Марек.– М.: Мир, 1991. – 368с.

### **Ресурсы InterNet**

41. Образовательный сайт компании Ascon [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.edu-ascon.ru>, свободный. – Яз. рус.
42. Образовательный математический сайт [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.exponenta.ru>, свободный. – Яз. рус.
43. Образовательный сайт имитационного моделирования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.matlab.ru>, свободный. – Яз. рус.

44. Сайт компании Mathworks [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mathworks.ru>, свободный. – Яз. англ.
45. Сайт компании MVStadium Group [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mvstadium.com>, свободный. – Яз. рус.
46. Образовательный сайт «VisSim в России» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.vissim.com>, свободный. – Яз. рус.
47. Сайт компании Экс Джей Текнолоджис [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.xjtek.ru>, свободный. – Яз. рус.

Учебное издание

**Королев Александр Леонидович**

Компьютерное моделирование технических систем

Учебное пособие  
для студентов высших учебных заведений

Редактор В.И. Антонова

ISBN 978-5-85716-803-5

Подписано в печать 17.11.2009

Формат 60×84/16

Объем 6,16 уч.–изд. л.

Заказ № 415

Тираж 110 экз.

Челябинский государственный педагогический университет  
454080 Челябинск, пр. Ленина, 69

Отпечатано в типографии ЧГПУ  
с готового оригинал-макета