

**А.Л. Королев**  
**Компьютерное моделирование**  
**Лабораторный практикум**

Челябинск  
2019

Лабораторный практикум является дополнением к учебнику: Королев А.Л. Компьютерное моделирование и содержит лабораторные работы по курсу «Компьютерное моделирование». В лабораторных работах описано построение математических, геометрических, имитационных моделей и т.д. Лабораторные работы содержат теоретическое введение, постановку задачи моделирования и рекомендации по построению модели. Практикум построен на доступном программном обеспечении. Реализация моделей не требует применения, какой либо системы программирования. Построение моделей выполняется средствами специальных программных комплексов моделирования, таких как MVS, Simulink, КОМПАС (учебные версии) или в среде электронных таблиц. Большинство лабораторных работ может быть использовано учителями информатики.

Практикум предназначен для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности «Информатика», а также для студентов, обучающихся по направлению «Физико-математическое образование». Практикум может быть использован по направлению «Физико-математическое образование» в курсе «Информатика».

Для дисциплины «Компьютерное моделирование» содержание практикума соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент</b>	<b>6</b>
1.1. Модель физиологического состояния человека	
1.2. Моделирование осциллятора	
1.3. Моделирование связанных осцилляторов	
1.4. Моделирование движения в среде с сопротивлением	
1.5. Идентификация параметров математической модели	
1.6. Моделирование движения по баллистической траектории	
1.7. Тепловое взаимодействие тела с окружающей средой	
1.8. Моделирование полета ИСЗ по околоземной орбите	
1.9. Создание модели с виртуальным экспериментальным стендом	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>2. Компьютерное моделирование систем</b>	<b>35</b>
2.1. Знакомство с технологией построения Simulink - моделей	
2.2. Моделирование производственного цикла	
2.3. Моделирование одноразрядного двоичного сумматора	
2.4. Моделирование многоразрядного двоичного сумматора	
2.5. Моделирование электрических цепей	
2.6. Динамически управляемая MVS-модель электрической цепи	
2.7. Моделирование системы управления	
2.8. Моделирование системы стабилизации электродвигателя	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>3. Построение оптимизационных моделей</b>	<b>59</b>
3.1. Поражение цели с заданными координатами	
3.2. Модель оптимального распределения ресурсов	
3.3. Модель оптимального плана перевозок	
3.4. Оптимальное проектирование	
3.5. Оптимальная компоновка	
3.6. Поиск критического пути на графе	
3.7. Сетевая транспортная задача	
3.8. Многокритериальная оптимизация	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>4. Графическое 3D моделирование</b>	<b>77</b>
4.1. Введение в трехмерное моделирование	
4.2. Построение конуса, призмы, пирамиды, параллелепипеда	
4.3. Построение тел вращения	
4.4. Построение детали по сечениям	
4.5. Применение кинематической операции	
4.6. Построение сечений тела плоскостью	
4.7. Использование операций приклеивания и вырезания	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>5. Имитационное и стохастическое моделирование</b>	<b>117</b>
5.1. Построение регрессионной модели	
5.2. Построение модели на основе корреляционного анализа	
5.3. Построение модели на основе плана полного факторного эксперимента	
5.4. Имитационное моделирование на основе клеточных автоматов	
5.5. Моделирование случайных событий	
5.6. Моделирование случайного блуждания	
5.7. Имитационная модель транспортного предприятия	
5.8. Метод Монте-Карло	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>6. Моделирование процессов с распределенными параметрами</b>	<b>139</b>
6.1. Моделирование процессов переноса	
6.2. Моделирование процессов теплопроводности	

6.3. Моделирование ламинарного течения жидкости	
6.4. Моделирование совместного протекания переноса и теплопроводности	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>7. Моделирование социальных и экономических процессов</b>	<b>151</b>
7.1. Моделирование механизма рыночного ценообразования	
7.2. Моделирование взаимодействия новых и старых отраслей экономики	
7.3. Модель распространения инноваций	
7.4. Определение налога на прибыль	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>8. Моделирование экологических систем</b>	<b>163</b>
8.1. Моделирование развития популяции	
8.2. Моделирование межвидовой конкуренции	
8.3. Моделирование системы «хищник-жертва»	
8.4. Уточненная модель системы «хищник-жертва»	
8.5. Моделирование дискретного развития популяции	
Задачи для самостоятельного решения	
<b>Список литературы</b>	<b>170</b>

## Введение

Цель практикума - дать представление о современных методах построения моделей. Углубить теоретические знания студентов в области моделирования; познакомить на практике с методологией компьютерного моделирования. Практически освоить технологии моделирования в среде современных программных комплексов. Научить студентов применять методы моделирования для решения конкретных задач. Сформировать навыки в области моделирования процессов, объектов и систем различного назначения.

Задачи лабораторного практикума:

- Познакомить студентов с современными методами и технологиями построения компьютерных моделей и проведения модельных экспериментов.
- Подготовить студентов к самостоятельной практической работе в области компьютерного моделирования.
- Ознакомить студентов с возможностями современных программных комплексов компьютерного моделирования.

Практикум охватывает следующие направления: математическое моделирование и вычислительный эксперимент; компьютерное моделирование систем; оптимизационное моделирование; графическое 3D моделирование в среде пакета «КОМПАС»; имитационное и стохастическое моделирование; моделирование процессов с распределенными параметрами; моделирование социальных и экономических процессов; моделирование экологических систем.

Основная концепция практикума – моделирование без программирования на основе универсальных инструментальных программных комплексов моделирования (или электронных таблиц). Содержание практикума соответствует Государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования по специальности 050202 «Информатика» и по направлению 540200 «Физико-математическое образование».

Лабораторный практикум подготовлен по материалам учебного курса, который читается автором для студентов специальности «Информатика» по дисциплине «Компьютерное моделирование» в Челябинском государственном педагогическом университете.

Ряд лабораторных работ могут быть использованы в курсе «Информатика» для студентов направления «Физико-математическое образование». Большинство лабораторных работ могут быть использованы на занятиях в рамках школьного курса «Информатика» при изучении соответствующего раздела курса. Практикум построен на основе доступного программного обеспечения (учебные версии), которое свободно распространяется разработчиками [27-31].

Автор выражает благодарность преподавателям кафедры информатики и методики преподавания информатики Челябинского государственного педагогического университета: Лапиковой Н.В., Дмитриевой О.А., Бабиковой И.Ю., Паршуковой Н.Б. и Речкаловой Л.В., которые работали в разные годы моими ассистентами по курсу «Компьютерное моделирование» и способствовали улучшению практикума.

# I. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

## 1.1. Модель физиологического состояния человека

**Теоретическое введение.** В данной работе мы познакомимся с моделью, которая построена исключительно на основе обработки данных наблюдений. Теории биоритмов около ста лет. Ее авторами являются Герман Свобода, Вильгельм Флисс, Фридрих Тельчер. Герман Свобода, анализируя поведение своих пациентов, заметил, что их мысли, идеи, импульсы к действию повторяются с определенной периодичностью. Герман Свобода начал анализировать развитие болезней, особенно цикличность сердечных и астматических приступов. Результатом этих исследований стало открытие ритмичности физических (22 дня) и психических (27 дней) процессов.

Доктор Вильгельм Флисс, который работал в Берлине, заинтересовался сопротивляемостью организма человека болезням. Он заметил, что дети с одинаковыми диагнозами в одно время выздоравливают, а в другое умирают. Собрал данные о начале болезни и смерти, он связал их с датой рождения. Расчеты показали, что изменения иммунитета можно прогнозировать с помощью 22-дневного физического и 27-дневного эмоционального биоритмов.

Преподаватель из Инсбрука Фридрих Тельчер заметил, что способность студентов воспринимать, систематизировать и использовать информацию, генерировать идеи время от времени изменяется, т.е. имеет ритмический характер. Сопоставив даты рождений студентов, даты экзаменов и их результаты экзаменов, он открыл интеллектуальный ритм с периодом 32 дня. В результате изучения жизни творческих людей он нашел «ритм» нашей интуиции - 37 дней.

От рождения до смерти мы подвержены влиянию интеллектуального, эмоционального, физического и интуитивного биоритмов. Физический цикл равен 22 дням. Он определяет энергию человека, его силу, выносливость, координацию движения. Эмоциональный цикл равен 27 дням и обуславливает состояние нервной системы и настроение. Интеллектуальный цикл (32 дня) определяет творческую способность личности. Интуитивный ритм имеет период 37 дней и отвечает за творческое вдохновение, восприятие неосознанных импульсов, т.е. собственно интуицию.

Интеллектуальный минимум характеризуется снижением умственной активности, мышления, ухудшением памяти. Эмоциональный минимум приносит упадок душевных сил, желаний, заторможенность, апатию, раздражительность. Наихудший день для людей творческих, когда не хватает чувств и эмоций для работы. Физический минимум дает снижение физической активности, повышается утомляемость и вероятность заболеваний. В этот период следует снизить или исключить физические нагрузки. В период интуитивного минимума решения, принятые интуитивно могут оказаться ошибочными. Отсутствует вдохновение, особенно для творческой работы. Максимумы дают возможность осознать и реализовать свои способности и таланты. Это период напряженной работы.

Интеллектуальный максимум позволяет решить самые сложные вопросы и даже создать нечто новое. Это время удачно для принятия решений, ведения переговоров, подписания контрактов. Эмоциональный максимум дает чувство полноты жизни, душевный подъем, желание действовать, созидать, любить. Обостренные чувства резко реагируют на дисгармонию и отчуждение. В период физического максимума организм полон энергии, работа не утомляет, можно заняться спортом и т.п. Интуитивный максимум: интуиция работает на грани ясновидения, что позволяет принимать правильные решения. Периоды всех биоритмов разные, поэтому могут совпадать три-четыре минимума и наступают «черные дни» или бывают «светлые» полосы, когда все удается.

	A	B	C	D	E	F
1	Дата рождения	10.07.1984	Таблица изменения биоритмов			
2	Значения биоритмов					
3	Дата	R <sub>ф</sub>	R <sub>э</sub>	R <sub>и</sub>	R <sub>т</sub>	X-число прожитых дней
4	01.07.2005	0,990	-0,998	0,556	0,333	7661
5	02.07.2005	0,990	-0,985	0,383	0,488	7662
6	03.07.2005	0,910	-0,918	0,195	0,628	7663
7	04.07.2005	0,756	-0,802	0,000	0,751	7664
8	05.07.2005	0,541	-0,643	-0,195	0,852	7665
9	06.07.2005	0,282	-0,449	-0,383	0,928	7666
10	07.07.2005	0,000	-0,231	-0,556	0,978	7667
11	08.07.2005	-0,282	0,000	-0,707	0,999	7668
12	09.07.2005	-0,541	0,231	-0,831	0,992	7669
13	10.07.2005	-0,756	0,449	-0,924	0,956	7670
14	11.07.2005	-0,910	0,643	-0,981	0,893	7671
15	12.07.2005	-0,990	0,802	-1,000	0,804	7672
16	13.07.2005	-0,990	0,918	-0,981	0,692	7673
17	14.07.2005	-0,910	0,985	-0,924	0,560	7674
18	15.07.2005	-0,756	0,998	-0,831	0,412	7675
19	16.07.2005	-0,541	0,958	-0,707	0,252	7676
20	17.07.2005	-0,282	0,866	-0,556	0,085	7677
21	18.07.2005	0,000	0,727	-0,383	-0,085	7678
22	19.07.2005	0,282	0,550	-0,195	-0,252	7679
23	20.07.2005	0,541	0,342	0,000	-0,412	7680
24	21.07.2005	0,756	0,116	0,195	-0,560	7681
25	22.07.2005	0,910	-0,116	0,383	-0,692	7682
26	23.07.2005	0,990	-0,342	0,556	-0,804	7683
27	24.07.2005	0,990	-0,550	0,707	-0,893	7684
28	25.07.2005	0,910	-0,727	0,831	-0,956	7685

Рис. 1.1. Фрагмент таблицы расчета биоритмов

**Постановка задачи моделирования.** Модель, которую предстоит построить, относится к классу математических моделей, построенных путем идентификации. Ее адекватность можно проверить, сопоставив свое собственное состояние в прошлом или будущем с результатами моделирования.

В среде электронных таблиц составить прогноз изменения собственных биоритмов. Период прогноза от текущего дня до конца учебного года. По результатам моделирования установить «критические» и «черные» дни. Прогноз удобнее выполнить поэтапно на 100 дней вперед.

**Порядок выполнения работы.** Для выполнения задания потребуется составить таблицу, в которой необходимо рассчитать изменение собственных биоритмов по зависимостям:

$$R_{\phi} = \sin\left(\frac{2\pi x}{22}\right), \quad R_{\varepsilon} = \sin\left(\frac{2\pi x}{27}\right), \quad R_{и} = \sin\left(\frac{2\pi x}{32}\right), \quad R_{т} = \sin\left(\frac{2\pi x}{37}\right).$$

Здесь  $R$  - значение биоритма,  $x$  – количество прожитых дней на текущий момент времени. Таблица должна содержать информацию о вашем дне рождения и 6 колонок: «Дата», «Физическое состояние», «Эмоциональное состояние», «Интеллектуальное состояние», «Творческие возможности», «Количество прожитых дней». В колонке «Дата» вычисляются даты прогнозируемого периода, в остальных колонках соответствующие биоритмы и количество прожитых дней – разность текущей даты и даты дня рождения. В отдельную ячейку внесите информацию о дате своего рождения.

Составить таблицу изменения биоритмов (рис. 1.1). Построить график изменения биоритмов (рис. 1.2). Результат прогноза состояния представить в виде графика на отдельном листе электронной таблицы, при этом использовать тип диаграммы «точечная».

**Анализ результатов моделирования.** Проанализировать заданный период, определить «черные» дни. Проверить адекватность прогноза на основе прожитого периода. Проанализировать предыдущий период, сопоставить результаты моделирования и собственных ощущений.

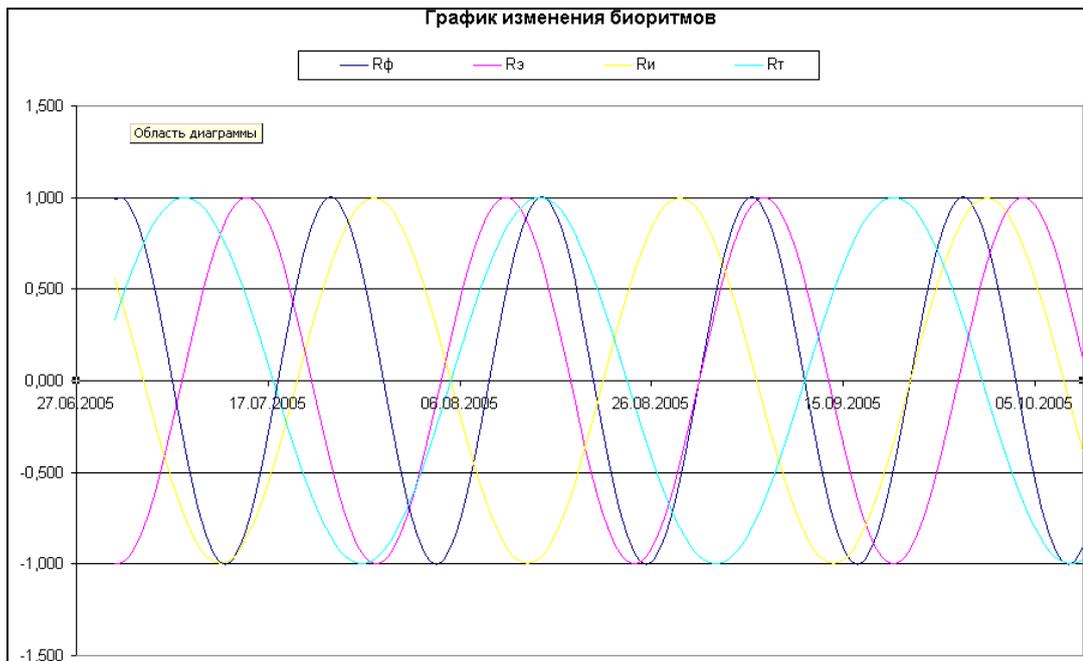


Рис. 1.2. График биоритмов

## 1.2. Моделирование осциллятора

**Теоретическое введение.** Моделируемая система представляет собой тело, прикрепленное к невесомой пружине, другой конец которой жестко закреплен (рис. 1.3). На тело действует сила упругости пружины и сила трения. Примером подобной системы может служить амортизатор автомобиля. Первоначально система выведена из состояния равновесия (рис. 1.3). Далее система будет совершать затухающие колебания.

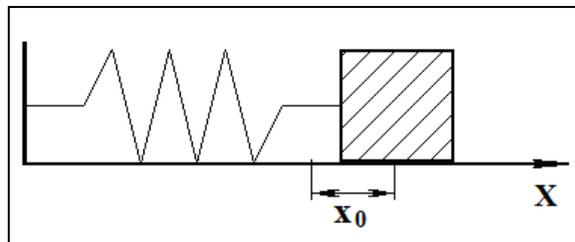


Рис. 1.3. Схема объекта моделирования.  
Начальное состояние – пружина растянута

Исходная размерная модель динамики колебаний, записанная в виде системы дифференциальных уравнений, имеет следующий вид:

$$m \frac{dV}{dt} = -c \cdot x - k \cdot V; \quad \frac{dx}{dt} = V$$

$$x(t=0) = x_0, \quad V(t=0) = 0,$$

где  $m$  – масса тела,  $x$  – координата тела,  $V$  – скорость движения тела,  $c$  – жесткость пружины,  $k$  – коэффициент трения. Значение координаты  $x=0$  соответствует положению равновесия.

В безразмерной форме система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -\bar{x} - \bar{k} \cdot \bar{V}, \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}.$$

Здесь  $\bar{k} = \frac{k}{\sqrt{mc}}$  - безразмерный параметр (безразмерный коэффициент трения).

Начальные условия:  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 1$ ,  $\bar{V}(\bar{t} = 0) = 0$ . Безразмерная форма математической модели получена методом неопределенных масштабов.

**Постановка задачи моделирования.** Средствами MVS построить модель системы и исследовать влияние значения параметра  $\bar{k}$  на ее свойства.

#### Порядок выполнения лабораторной работы.

**Создание проекта.** После запуска MVS нажмите кнопку  или выполните команду главного меню **Проект\Новый...** (рис. 1.4). В окне «Новый проект» выберите путь к папке проекта. Введите имя проекта и нажмите кнопку «Создать». В данной папке будет создан файл базы данных проекта «Осциллятор.mvb» (рис. 1.5). На рис. 1.5 для создания проекта выбрана папка WORK на диске D:, имя проекта – «Осциллятор». При создании модели выберите доступный вам на запись диск.

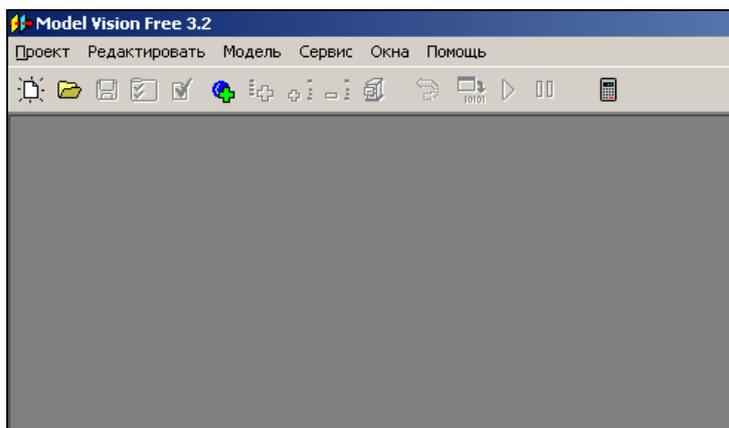


Рис. 1.4. Система MVS при первоначальном запуске

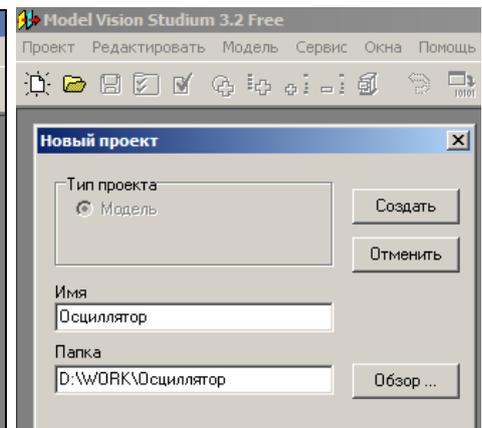


Рис. 1.5. Пример создания нового проекта

После создания «заготовки» проекта в среде MVS появятся окна (рис. 1.6):

- **Окно проекта**, которое содержит составляющие проекта.
- **Окно виртуального стенда**, которое содержит структурную схему моделируемой системы, блоки и связи между ними. По умолчанию в виртуальный стенд помещен экземпляр класса «Осциллятор» с именем «Осциллятор\_1».
- **Окно класса** содержит **дерево составляющих класса**. Данный блок предполагается непрерывным, по умолчанию в него добавлена пустая система уравнений с именем «Система\_уравнений\_1».
- **Окно системы уравнений «Система\_уравнений\_1»**.

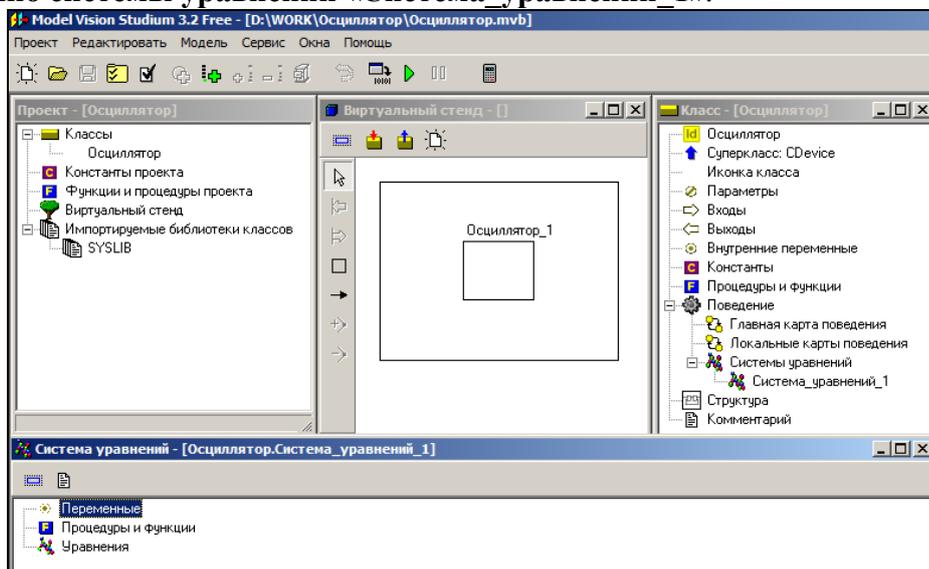


Рис. 1.6. «Заготовка» проекта

Модель «**Осциллятор**» - это модель непрерывной системы. Для ее построения подходит **класс**, создаваемый по умолчанию при открытии нового проекта. В этот класс необходимо добавить соответствующие переменные, параметры, константы и уравнения.

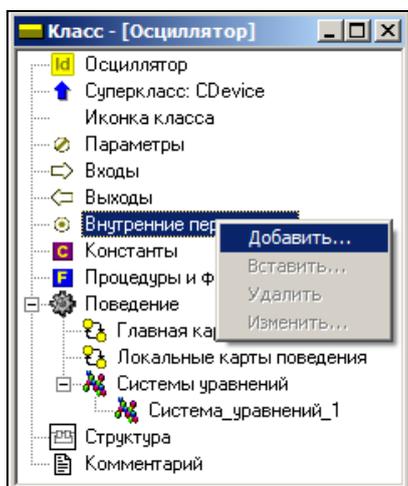


Рис. 1.7. Добавление параметра

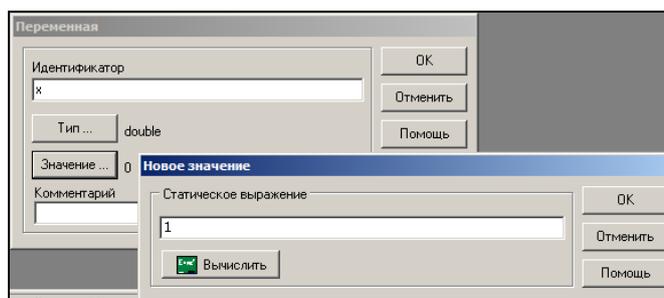


Рис. 1.8. Задание имени и значения переменной

**Ввод переменных и параметров.** В окне класса «Осциллятор», выделяем в дереве объектов узел «**Внутренние переменные**», вызовем контекстное меню и выполним команду «Добавить» (рис. 1.7). В появившемся окне вводим имя переменной  $x$ , оставляем заданный по умолчанию тип `double`, задаем начальное значение: 1 (рис. 1.8). Напоминаем, что MVS различает строчные и прописные буквы и не признает пробелов. Любые имена должны начинаться с буквы.

Аналогичным образом добавляем другие переменные и параметры (рис. 1.9). Можно изменить или удалить введенные определения с помощью команд контекстного меню.

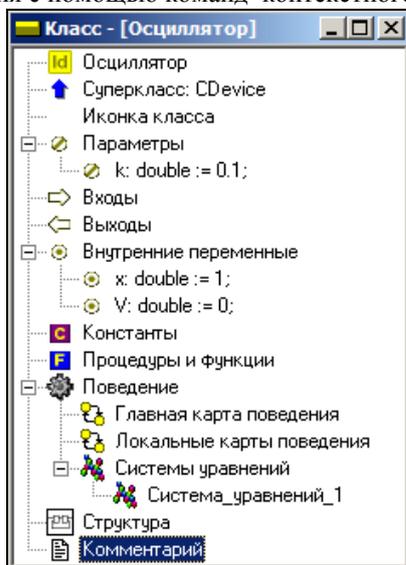


Рис. 1.9. Заполненное окно класса «Осциллятор»

**Ввод уравнений модели.** В окне класса с помощью двойного щелчка мыши на узле «Уравнения» или команды «Изменить» контекстного меню вызываем редактор формул, который позволяет вводить математические выражения в виде, который близок к математической форме записи. С помощью редактора вводим необходимые

уравнения (рис. 1.10). Специальный знак производной  $\frac{d}{dt}$  вводится с помощью кнопок на панели инструментов (рис. 1.10). После редактирования система уравнений примет следующий вид (рис. 1.10-1.11).

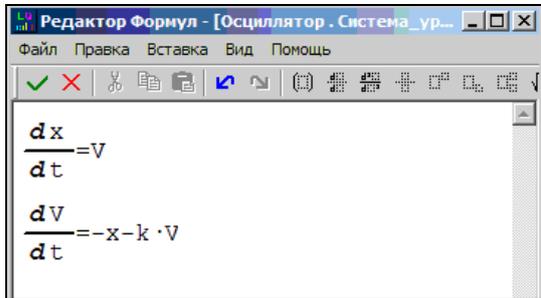


Рис. 1.10. Редактирование уравнений

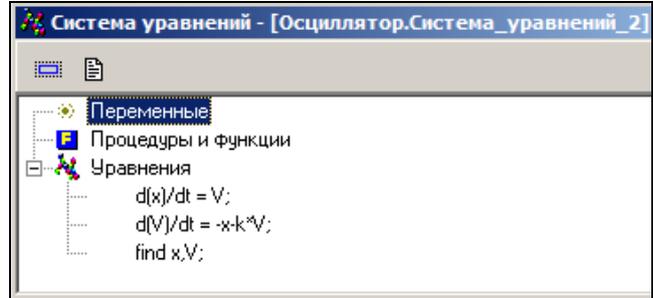


Рис. 1.11. Окончательный вид системы уравнений

**Создание выполняемой модели.** Запуск модели производится с помощью кнопки  (рис. 1.6).

**Эксперименты с визуальной моделью.** На рис. 1.12 показано главное окно визуальной модели после первого запуска. В левой части инструментальной панели отображается текущее значение модельного времени (начальное значение равно нулю). В левом верхнем углу расположено окно виртуального стенда, которое отражает структуру модели. Для блока «Осциллятор\_1», автоматически открывается окно переменных. Обратите внимание на то, что после создания экземпляра этого устройства его параметры приняли указанные значения и фазовые переменные инициализированы заданными выражениями.

**Запуск и рестарт модели.** Запустим выполнение модели с помощью кнопки  (рис. 1.12). При этом начнет изменяться модельное время и значения переменных. Останов выполнения модели производится с помощью кнопки . Возврат модели в начальное состояние производится с помощью кнопки «Рестарт» . В результате этих действий данный экземпляр испытываемой системы будет уничтожен и создан новый, снова с начальными значениями переменных. Модельное время снова будет равно 0.

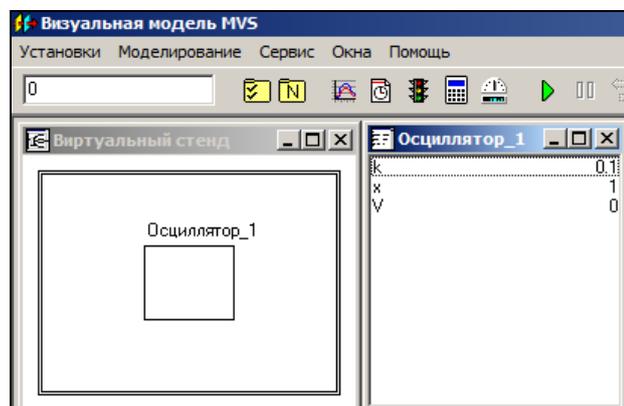


Рис. 1.12. Главное окно визуальной модели

**Построение временной и фазовой диаграмм.** С помощью кнопки Новая диаграмма -  создадим окно диаграммы (по умолчанию это будет временная диаграмма, т.е. по оси абсцисс будут откладываться значения модельного времени).

Методом «drag-and-drop» «перетащим» в окно «Временная диаграмма» из окна переменных «Осциллятор\_1» переменные  $x$  и  $V$ . Запустим модель и получим следующий график (рис. 1.13).

Несложные уравнения решаются достаточно быстро. С помощью кнопки  вызовите диалоговое окно редактирования установок. Переключите параметр «Соотношение модельного и реального времени» из положения «так быстро как можно» в положение «число» (по умолчанию это 1, то есть моделирование в **реальном времени**). Изменяя это число, вы можете ускорять или замедлять прогон модели (рис. 1.14). Здесь же можно задать время останова прогона модели и другие установки.

Теперь построим **фазовую диаграмму**, т.е. график зависимости  $V(x)$ . Для этого создадим **новую диаграмму**, перетащим в нее те же самые переменные, а затем правой клавишей мыши откроем на ней контекстное меню и выполним команду «Настройка». В появившемся диалоге настроек укажем с помощью двойного щелчка мышью в поле X, что по оси абсцисс откладываются значения переменной  $x$  (рис. 1.15). В этом же окне можно задать и другие параметры диаграммы. Запустив модель, получим следующий график (рис. 1.16) – **фазовую диаграмму**.

**3D-анимация.** Для моделей механических систем, можно получить больше информации из непосредственного наблюдения поведения трехмерного изображения моделируемой системы. В визуальной модели для этого предназначено окно 3D-анимации. Создать его можно с помощью команды главного меню «Окна» - «Новая 3D-анимация».

Окно 3D-анимации позволяет строить динамические трехмерные модели, используя совокупность трехмерных примитивов (линия, шар, цилиндр, конус и т.д.), параметры, которых связываются со значениями соответствующих переменных модели.

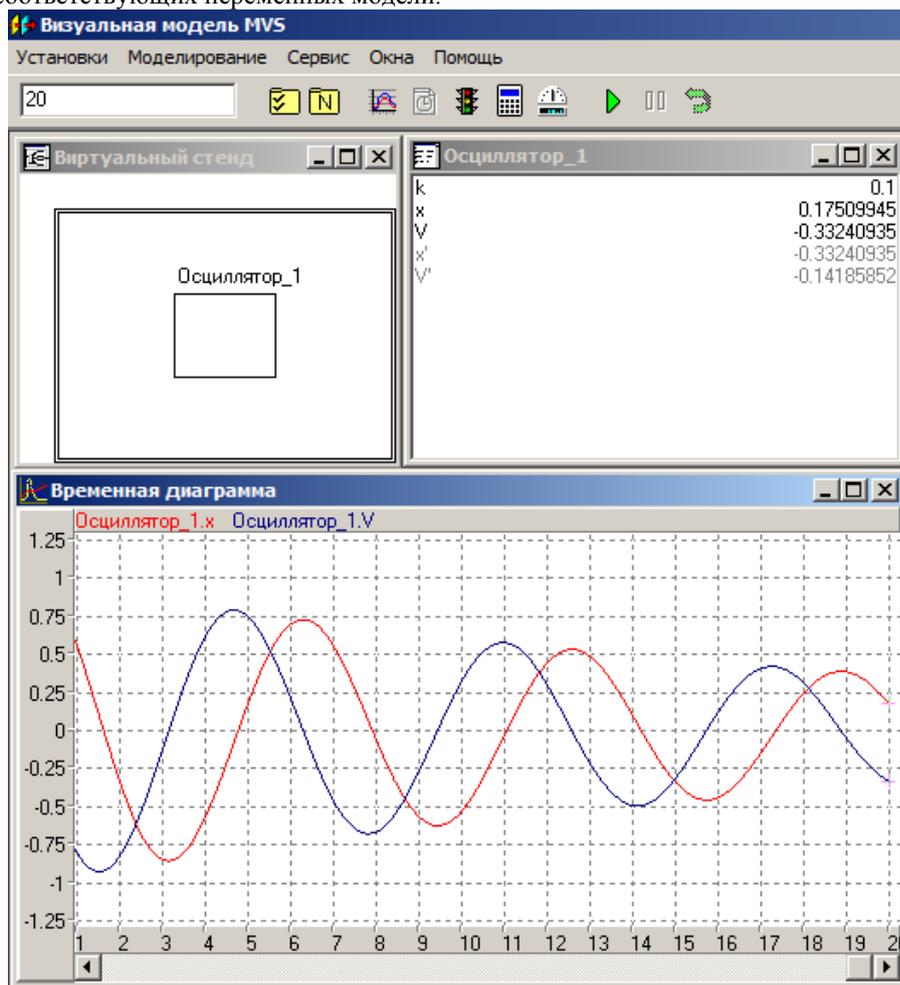


Рис. 1.13. Модель и временная диаграмма процесса

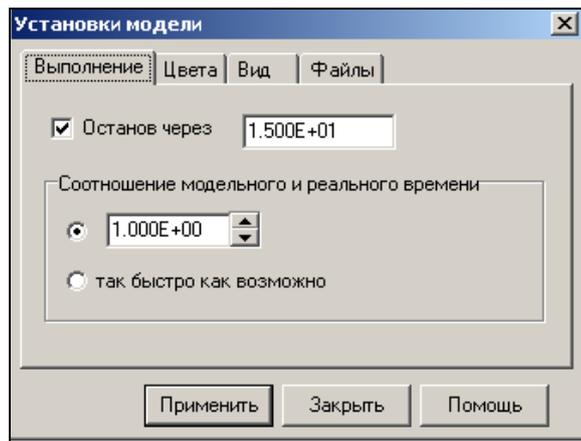


Рис. 1.14. Окно «Установки модели»

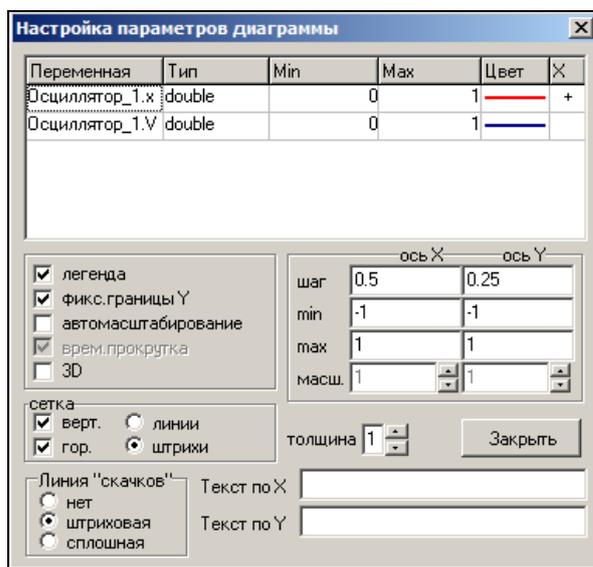


Рис. 1.15. Настройка параметров диаграммы

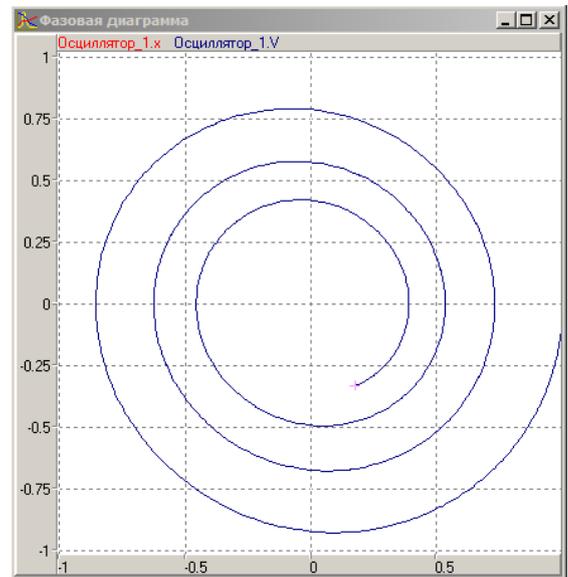


Рис. 1.16. Фазовая диаграмма

С помощью команды «Свойства» контекстного меню, вызовем диалог редактирования свойств 3D-анимации. В данной модели нам понадобится только два стандартных объекта – пружина (**spring**) и сфера (**sphere**, рис. 1.17).

Один конец пружины должен всегда находиться в фиксированной точке (параметры  $x1=-3$ ,  $y1=0$ ,  $z1=0$ ), а координаты второго конца (параметр  $x2$ ) должны изменяться в соответствии со значением переменной  $X$ . Для задания этого соответствия «перетащим» необходимые переменные из **окна переменных** и «бросим» их в колонке «Переменная» соответствующих параметров пружины (рис. 1.17). Аналогичным образом свяжем координаты центра сферы (параметр  $x1$ ) с переменной  $X$ .

После чего достаточно запустить модель и вы увидите осциллятор (рис. 1.18). В любой момент вы можете изменить точку наблюдения, нажав левую клавишу мыши и перемещая ее с прижатой клавишей. Таким образом, вы можете рассматривать колебания осциллятора сверху, снизу и т.д.

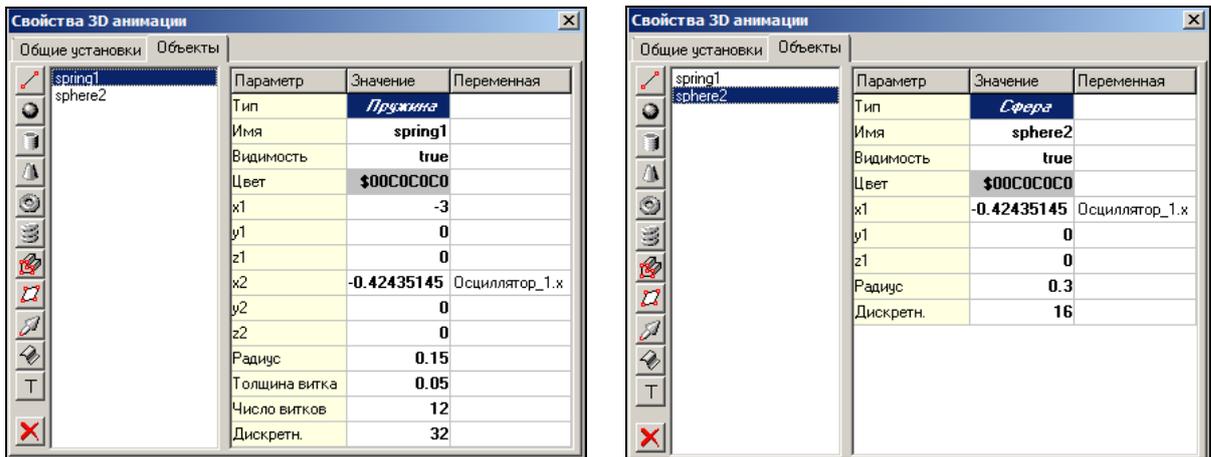


Рис. 1.17. Параметры 3D-объектов

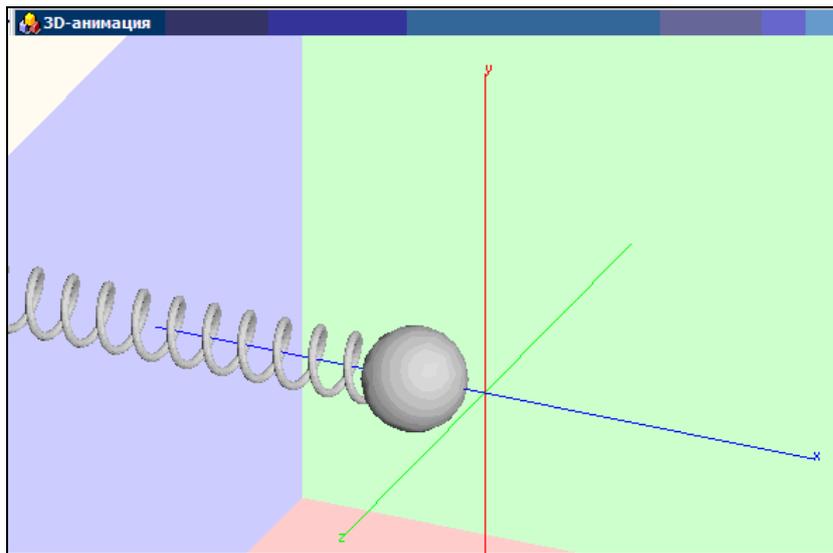


Рис. 1.18. Представление результатов моделирования средствами 3D-анимации

**Анализ результатов моделирования.** Установить влияние параметра  $k$ . Первоначальное значение параметра  $k$  задать равным нулю. Установите время затухания колебаний до уровня 5% от начальной амплитуды. Значение параметра  $k$  можно изменять в среде визуальной модели (рис. 1.19) через контекстное меню. Новое значение параметра будет действовать в одном эксперименте с моделью.

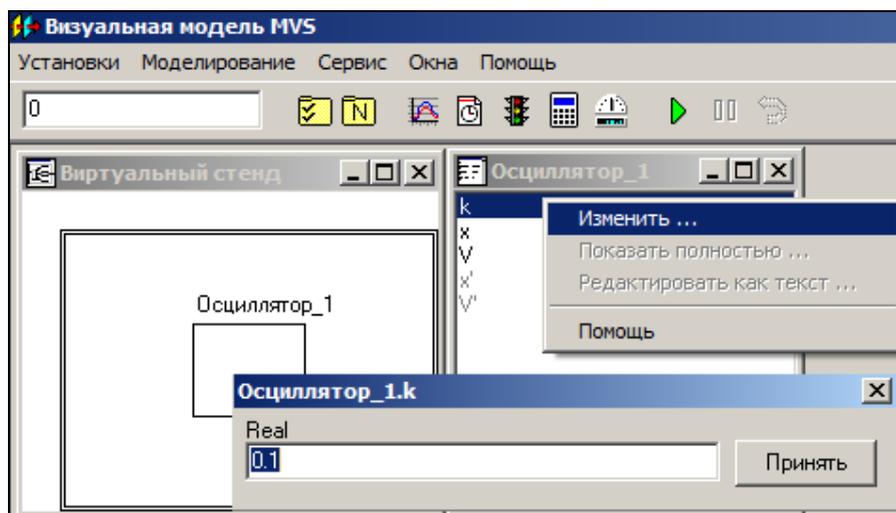


Рис. 1.19. Изменение значения параметра

**Дополнительное задание.** Постройте модель на основе исходных размерных уравнений:  $m=1$ ,  $x_0=1$ ,  $v_0=0$ ,  $c=1$ ,  $k=0.1$ . Переработайте модель для начальных условий по рис. 1.20.

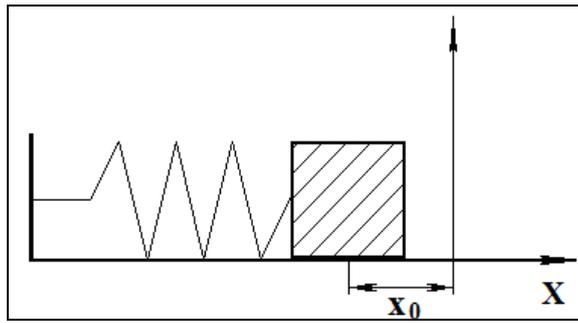


Рис. 1.20. Начальное состояние – пружина сжата

### 1.3. Моделирование связанных осцилляторов

**Теоретическое введение.** Моделируемый объект представляет собой систему связанных осцилляторов (рис. 1.21). Первоначально система выведена из состояния равновесия (рис. 1.21). Далее система будет совершать затухающие колебания.

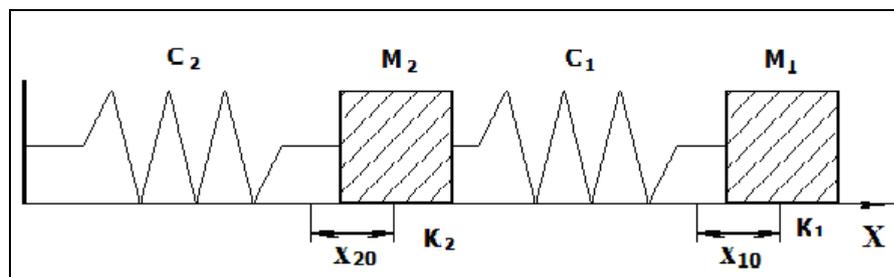


Рис. 1.21. Схема системы двух осцилляторов.  
Начальное состояние – пружины растянуты

Исходная размерная модель динамики колебаний, записанная в виде системы дифференциальных уравнений, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 \frac{dV_1}{dt} = -c_1 \cdot (x_1 - x_2) - k_1 \cdot V_1; & \frac{dx_1}{dt} = V_1 \\ m_2 \frac{dV_2}{dt} = c_1 \cdot (x_1 - x_2) - c_2 \cdot x_2 - k_2 \cdot V_2; & \frac{dx_2}{dt} = V_2 \end{cases}$$

$$x_1(t=0) = x_{10}, \quad x_2(t=0) = x_{20}, \quad V_{1,2}(t=0) = 0,$$

где  $m$  – масса тела,  $x$  – координата тела (отклонение от положения равновесия),  $V$  – скорость движения тела,  $c$  – жесткость пружины,  $k$  – коэффициент трения. Значение координаты  $x = 0$  соответствует положению равновесия. Модель строится в размерной форме.

**Постановка задачи моделирования.** Средствами MVS построить модель системы из двух осцилляторов. Построить временную и фазовую диаграммы для координат. Построить 3D анимацию модели. Значения параметров системы осцилляторов можно взять из табл. 1.1.

Таблица 1.1

N	$x_0$	$c$	$k$	$m$
1	5.25	2.75	0.02	1.5
2	1	1.25	0.05	2.5

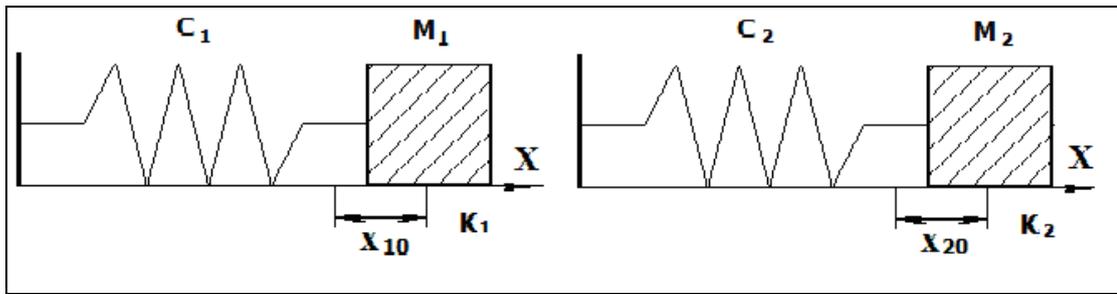


Рис. 1.22. Независимые осцилляторы

**Анализ результатов моделирования.** Установить влияние параметров на свойства системы путем варьирования их значений. Построить модели для каждого осциллятора (рис. 1.22).

#### 1.4. Моделирование движения тела в среде с сопротивлением

**Теоретическое введение.** В данной работе предстоит построить модель движения тела в среде с сопротивлением. В силу принятых допущений тело рассматривается как материальная точка.

Модель движения тела построена на основе второго закона механики. Система безразмерных дифференциальных уравнений, описывающая движение тела и начальные условия имеют вид:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = 1 - k\bar{V}; \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{V}$$

$$\bar{x}(\bar{t} = 0) = 0, \quad \bar{V}(\bar{t} = 0) = 1.$$

Модель движения тела представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Подобная задача может быть решена аналитически, но в данной работе применяются численные методы. Выбираем самый простой метод решения - неявный метод Эйлера.

Применив необходимые расчетные формулы, получим следующие вычислительные аналоги уравнений:

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{\tau} = 1 - kV_{n+1}, \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = \frac{1}{2}(V_{n+1} + V_n).$$

Все переменные величины с индексом  $n$ , (т.е. для момента времени  $t=t_n$ ) считаются известными. Требуется определить значения переменных с индексом  $n+1$ , (т.е. для момента времени  $t=t_n+\tau$ ). Простейшие преобразования разностных эквивалентов уравнения движения и кинематического уравнения дают расчетные зависимости:

$$V_{n+1} = \frac{\tau + V_n}{1 + k\tau}; \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\tau(V_{n+1} + V_n)$$

**Постановка задачи моделирования.** Построить модель, на основании которой определить характер изменения скорости движения тела  $V(t)$  и координаты  $X(t)$  как функций времени. Объяснить влияние сопротивления на закономерности движения.

**Порядок выполнения работы.** Построить электронную таблицу для расчета изменения скорости и координаты во времени. Пример таблицы представлен на рис. 1.23.

В ячейке A2 вводится значение шага интегрирования  $\tau$ . Ячейка A4 содержит значение коэффициента сопротивления  $k$ . В ячейку B3 вводится формула расчета текущего времени, которая затем копируется по колонке до тех пор, пока не будет получено конечное значение времени движения

тела. В ячейки C3 и D3 вводятся формулы расчета скорости и координаты, которые представлены выше. Эти формулы затем копируются по столбцам для получения итоговой таблицы.

	A	B	C	D
1	$\tau$	$t$	$V(t)$	$x(t)$
2	0,05	0	1	0
3	$k$	=B2+\$A\$2		
4	2			

Рис. 1.23. Таблица для решения задачи моделирования

Пример расчета показан на рис. 1.24. По результатам расчета на отдельных листах электронной таблицы построить графики  $V(t)$  и  $x(t)$  (рис. 1.25).

	A	B	C	D
1	$\tau$	$t$	$V(t)$	$X(t)$
2	0,05	0,00	1,000	0,000
3	$k$	0,05	0,977	0,988
4	1,5	0,10	0,955	1,954
5		0,15	0,935	2,899
6		0,20	0,916	3,825
7		0,25	0,899	4,733
8		0,30	0,883	5,623
9		0,35	0,868	6,498
10		0,40	0,854	7,359
11		0,45	0,841	8,206
12		0,50	0,828	9,040
13		0,55	0,817	9,863
14		0,60	0,807	10,675
15		0,65	0,797	11,477
16		0,70	0,788	12,269
17		0,75	0,779	13,053
18		0,80	0,771	13,828
19		0,85	0,764	14,596
20		0,90	0,757	15,357
21		0,95	0,751	16,111
22		1,00	0,745	16,859

Рис. 1.24. Пример таблицы расчета

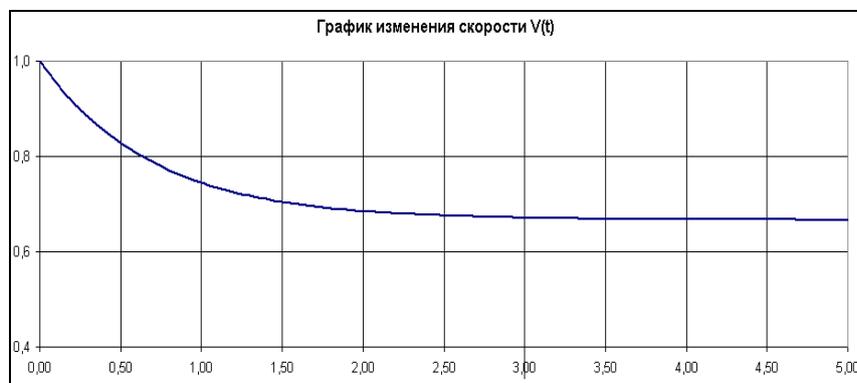


Рис. 1.25. График изменения скорости во времени

**Анализ результатов моделирования.** Установить качественный характер влияния сопротивления на движение тела. Представить сравнительный расчетный анализ влияния значения коэффициента сопротивления  $k$  на закономерность изменения скорости во времени. На одном и том же листе диаграммы в одной системе координат построить три графика изменения скорости во времени  $V(t)$  для  $k=2; 4; 8$ . Интегрирование уравнений провести на интервале  $t=[0, 2]$  с шагом  $\tau=0,1$ .

Аналогично выполнить анализ изменения координаты во времени  $x(t)$  в зависимости от значения коэффициента сопротивления  $k$ .

Пример моделирования движения для различных коэффициентов сопротивления представлен на рис. 1.26.

**Дополнительное задание 1.** Следуя рис. 1.27-1.28, построить модель движения тела средствами MVS. Результаты моделирования отобразить в виде временной диаграммы и 3D анимации (рис. 1.28).

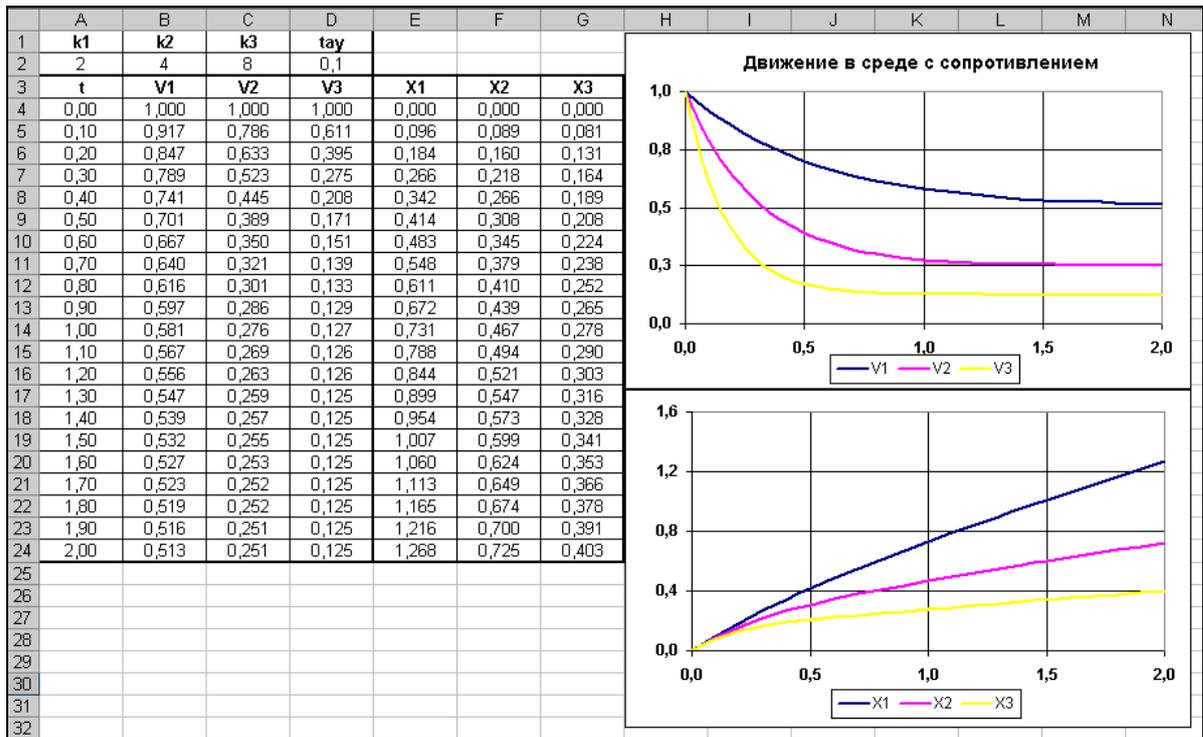


Рис. 1.26. Результаты моделирования

**Дополнительное задание 2.** Переработайте модель для квадратичного закона сопротивления. В этом случае система уравнений движения тела будет иметь вид:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k |V| \cdot V; \quad \frac{dx}{dt} = V$$

$$x(t = 0) = 0, \quad V(t = 0) = V_0.$$

Самостоятельно проведите преобразования модели к безразмерному виду.

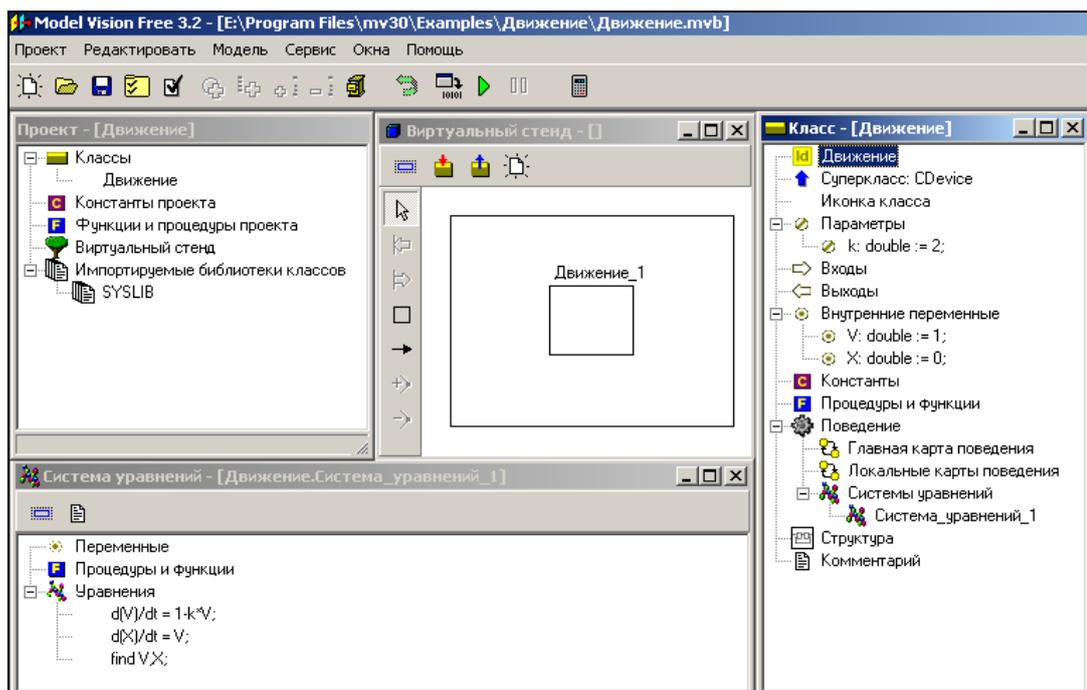


Рис. 1.27. MVS-модель движения тела в среде с сопротивлением

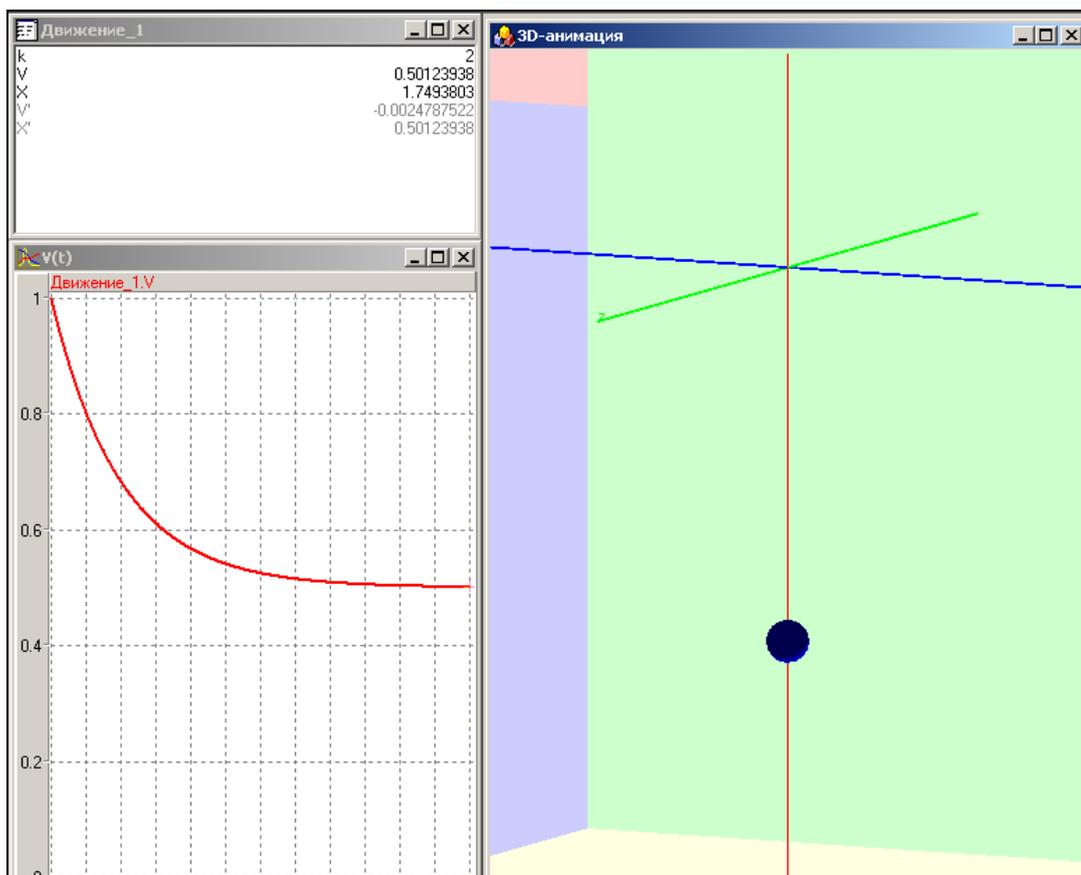


Рис. 1.28. Представление результатов моделирования в виде временной диаграммы и средствами 3-D анимации

### 1.5. Идентификация параметров математической модели

**Теоретическое введение.** При построении математических моделей обычно выбирается класс математических объектов, которые в принципе могут отражать количественные характеристики свойств моделируемого объекта. Один из способов построения математических моделей основан на использовании законов, в математической форме (в виде уравнений) описывающих процессы в объекте.

При этом значения лишь некоторых параметров математической модели могут быть определены путем прямых измерений свойств объекта моделирования. Таким способом можно, например, определить массу или размеры объекта. Однако далеко не все параметры процессов допускают прямые измерения, некоторые из них могут быть определены только косвенно по данным экспериментов. Если не заданы значения параметров, то математическая модель остается неопределенной и не пригодной для исследования свойств объекта моделирования. Вопрос об определении значений параметров модели является одним из важнейших в математическом моделировании.

В настоящей работе определяются параметры модели движения тела в среде с сопротивлением на основе данных измерений. Модель движения тела под действием силы тяжести и силы сопротивления имеет вид:

$$m \frac{dV}{dt} = mg - kV, \quad \frac{dx}{dt} = V,$$

начальные условия:  $V(t=0) = 0$ ;  $x(t=0) = 0$ .

Здесь:  $m$  - масса тела,  $V$  - скорость движения тела,  $x$  - координата тела,  $g$  - ускорение свободного падения,  $k$  - коэффициент сопротивления движению,  $t$  - время. Тело считается материальной точкой. При построении модели принят линейный закон зависимости силы сопротивления от скорости.

**Постановка задачи моделирования.** Для данной модели необходимо определить значение параметра  $k$  по данным измерений параметров движения тела. Пусть результаты измерений представлены в виде массива значений координаты  $\tilde{x}$ , полученных в определенные моменты времени  $t_n$ . Причем  $t_n = t_{n-1} + \tau$ , где  $\tau$  - шаг по времени (табл. 1.2).

Задача идентификации решается в среде электронных таблиц (рис. 1.29). Численная реализация математической модели проводится неявным методом Эйлера по следующим расчетным формулам:

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{\tau} = g \cdot \left(1 - \frac{k}{mg} V_{n+1}\right), \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = \frac{1}{2} (V_{n+1} + V_n)$$

$$V_{n+1} = \frac{\tau g + V_n}{1 + \frac{k}{m} \tau}, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} \tau \cdot (V_{n+1} + V_n)$$

Здесь  $V_n = V(t_n)$ ,  $x_n = x(t_n)$ ,  $V_{n+1} = V(t_{n+1})$ ,  $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ ,  $t_{n+1} = t_n + \tau$ . При расчетах по данным формулам в момент времени  $t_n$  значения переменных считаются известными. Значение параметра  $k$  определяется методом наименьших квадратов с помощью надстройки электронных таблиц «Поиск решения» (рис. 1.30). При этом целевой функцией, минимум которой необходимо определить, (**В9 - целевая ячейка**) является сумма квадратов разностей расчетных значений координаты  $x_n$  и данных измерений  $\tilde{x}$ :  $\sum (x_n - \tilde{x})^2$ .

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\tau$	0,5	t	V(t)	X(t)	Xэксп	(X-Xэксп)^2
2			0,00	0,00	0,00	0,0	0,0000
3	k	2,50	0,50	2,18	0,55	0,3	0,0601
4			1,00	3,15	1,88	2,0	0,0150
5	g	9,81	1,50	3,58	3,56	3,9	0,1155
6			2,00	3,77	5,40	5,5	0,0103
7	m	1	2,50	3,86	7,31	7,1	0,0423
8			3,00	3,90	9,24	9,5	0,0656
9	$\Sigma(X-Xэксп)^2$	0,9061	3,50	3,91	11,20	11,0	0,0382
10			4,00	3,92	13,15	12,5	0,4269
11			4,50	3,92	15,11	15,4	0,0819
12			5,00	3,92	17,08	17,3	0,0503

Рис. 1.29. Электронная таблица решения задачи идентификации

Требуется найти такое значение параметра  $k$  (**ячейка В3**), при котором сумма квадратов разностей экспериментальных (табл. 1.2) и расчетных значений координаты  $x$  имеет минимальное значение. В задаче имеется одно естественное ограничение:  $k \geq 0$ . Ограничение задается в специальном окне (кнопка «Добавить», рис. 1.31). Задача поиска оптимального значения  $k$  решается методом итераций, поэтому следует задать некоторое начальное значение этого параметра. Решение задачи будет найдено автоматически (кнопка «Выполнить», рис. 1.30). Результат решения задачи представлен на рис. 1.32.

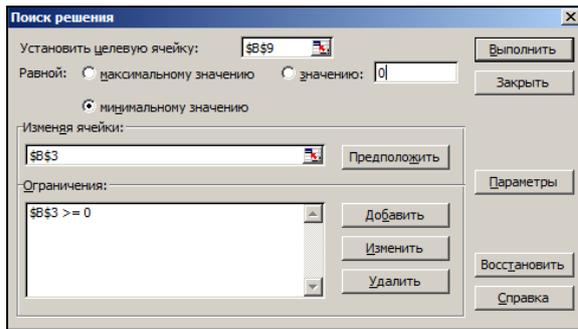


Рис. 1.30. Окно надстройки «Поиск решения»

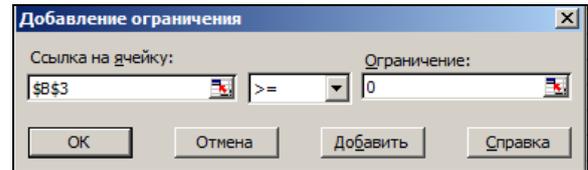


Рис. 1.31. Окно «Добавление ограничения»

Таблица 1.2.

t	Хэкср
0,00	0,0
0,50	0,3
1,00	2,0
1,50	3,9
2,00	5,5
2,50	7,1
3,00	9,5
3,50	11,0
4,00	12,5
4,50	15,4
5,00	17,3

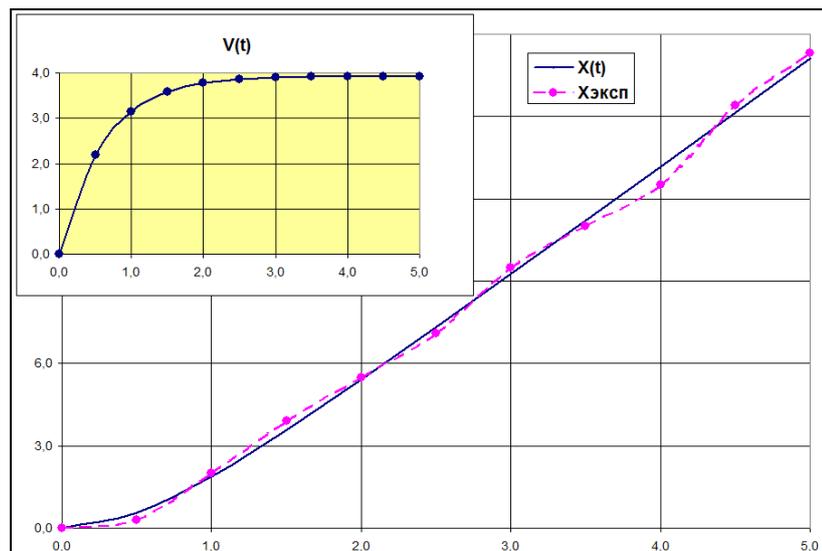


Рис. 1.32. Результат решения задачи

## 1.6. Моделирование движения тела по баллистической траектории

**Теоретическое введение.** В начальный момент времени тело находится в точке с координатами:  $x(t=0)=0, y(t=0)=0$ . Тело начинает движение под углом  $\alpha$  (рис. 1.33) со скоростью  $V_0$ . Модель построена на основе второго закона механики и кинематических уравнений.

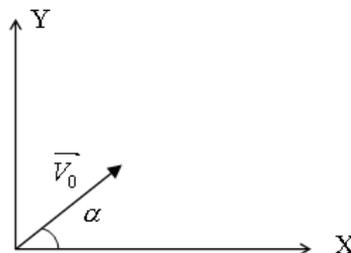


Рис.1.33. Схема начала движения

В безразмерном виде уравнения модели суть следующее:

$$\frac{d\bar{V}_y}{dt} = -1 - \bar{k}\bar{V}_y; \quad \frac{d\bar{V}_x}{dt} = -\bar{k} \cdot \bar{V}_x \quad \bar{V}_x(\bar{t} = 0) = \cos(\alpha); \quad \bar{V}_y(\bar{t} = 0) = \sin(\alpha)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{V}_x; \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{V}_y \quad \bar{x}(\bar{t} = 0) = 0; \quad \bar{y}(\bar{t} = 0) = 0$$

Вычислительный аналог для системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид (далее все величины безразмерные):

$$\frac{V_y^{n+1} - V_y^n}{\tau} = -1 - kV_y^{n+1}; \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{2}(V_y^{n+1} + V_y^n)$$

$$\frac{V_x^{n+1} - V_x^n}{\tau} = -kV_x^{n+1}; \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = \frac{1}{2}(V_x^{n+1} + V_x^n)$$

**Постановка задачи моделирования.** Целью моделирования является построение траектории движения в прямоугольной системе координат и выявление влияния сопротивления на траекторию движения. Полученным результатам необходимо дать качественное объяснение.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. По аналогии с задачей о линейном движении необходимо подготовить таблицу, на основе которой построить в координатах  $x$ - $y$  траекторию движения тела. Пример таблицы представлен на рис. 1.34.

Провести вычислительный эксперимент для ряда значений коэффициента сопротивления, в первую очередь для  $k=0$ . В этом случае ( $k=0$ ) траекторией будет парабола. Этот результат можно использовать для проверки численной модели.

**Анализ результатов моделирования.** По результатам моделирования установить и объяснить на качественном уровне влияние сопротивления на вид траектории движения тела.

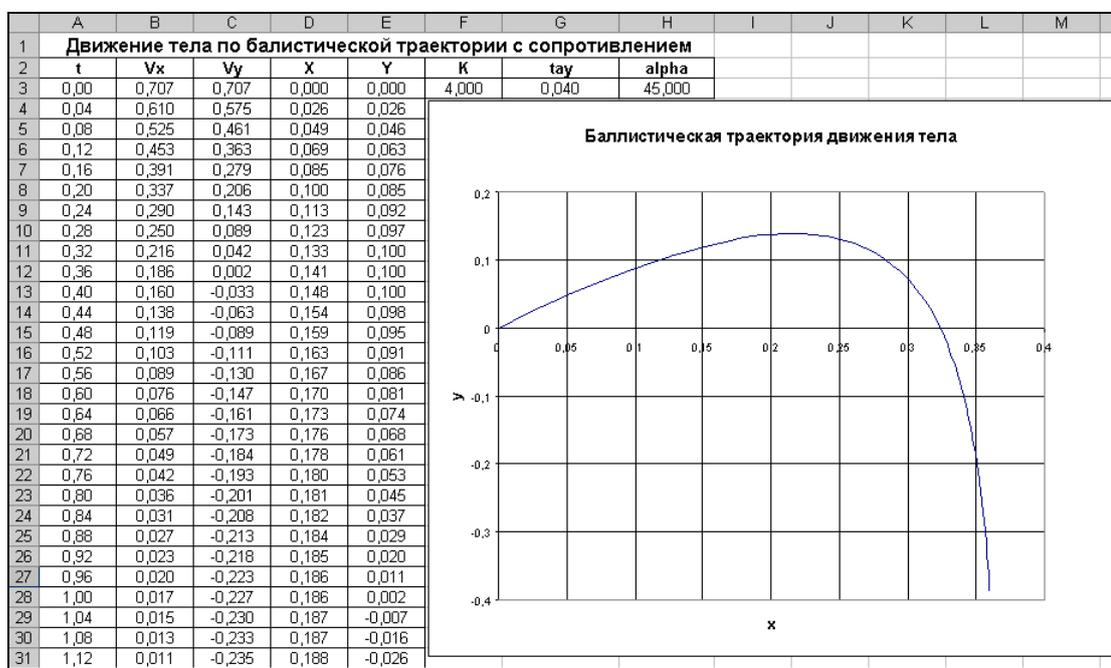


Рис. 1.34. Таблица для расчета баллистической траектории

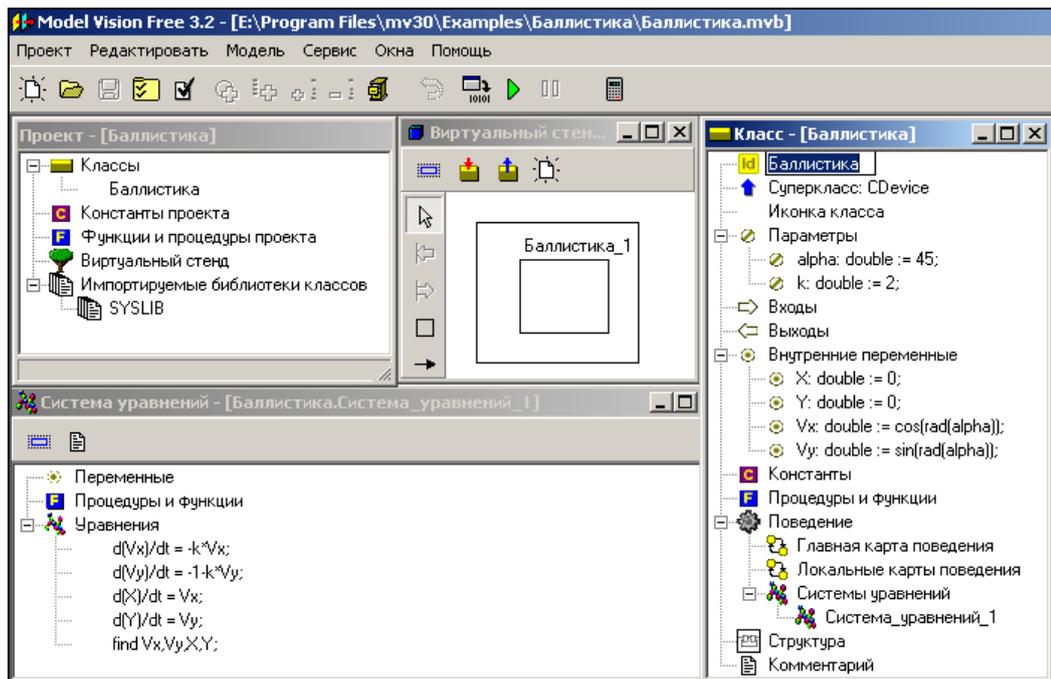


Рис. 1.35. MVS-модель движения тела по баллистической траектории

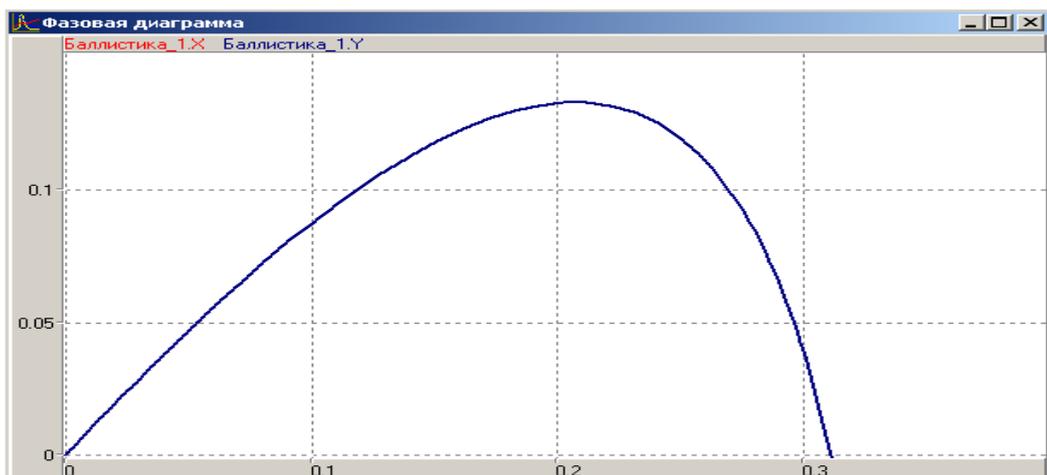


Рис. 1.36. Траектория движения тела

**Дополнительное задание.** Следуя рис. 1.35-1.36, построить MVS-модель.

### 1.7. Тепловое взаимодействие тела с окружающей средой

**Теоретическое введение.** Пусть в начальный момент времени температура тела равна заданной величине:  $T(t=0)=T_1$ ,  $T_1>T_0$ , где  $T_0$  – температура окружающей среды:  $T_0=const$ . При взаимодействии нагретого тела с более холодной окружающей средой происходит его остывание. Модель процесса строится на основе закона сохранения энергии в форме уравнения теплового баланса. В безразмерном виде модель процесса охлаждения имеет вид:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = -\bar{T}; \quad \bar{T}(\bar{t} = 0) = 1; \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}.$$

Данная безразмерная модель не содержит параметров. Таким образом, все процессы охлаждения тел, которые удовлетворяют принятым допущениям, подобны друг другу и для их анализа достаточно одного решения для безразмерной модели.

Если выполнить численную реализацию модели охлаждения на основе неявного метода Эйлера, тогда вычислительный аналог уравнения примет вид:

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{\tau} = -T_{n+1} \quad \text{или} \quad T_{n+1} = \frac{T_n}{1 + \tau}.$$

Решение задачи методом Эйлера-Коши на каждом шаге по времени состоит из двух этапов:

1.  $\tilde{\tau} = \tau \cdot T_n$
2.  $T_{n+1} = T_n - \frac{\tilde{\tau}}{2} \cdot (T_n + \tilde{\tau})$

**Постановка задачи моделирования.** Построить компьютерную модель процесса охлаждения нагретого тела (рис. 1.37). Установить характер изменения температуры тела во времени  $T(t)$  в процессе охлаждения.

**Порядок выполнения работы.** В среде ЭТ создать таблицу для расчета процесса охлаждения тела на основе представленных соотношений. Пример таблицы представлен на рис. 1.37. Расчет выполняется на интервале времени  $t=[0;5]$  с шагом по времени  $\tau=0,1$ . По результатам расчета построить график  $T(t)$ .

**Анализ результатов моделирования.** Оценить величину времени охлаждения тела до температуры окружающей среды. Оценить влияние численного метода на точность решения задачи. Провести сравнение результатов решения задачи по неявному методу Эйлера, по методу Эйлера-Коши и точного аналитического решения задачи:  $T(t) = \exp(-t)$ .

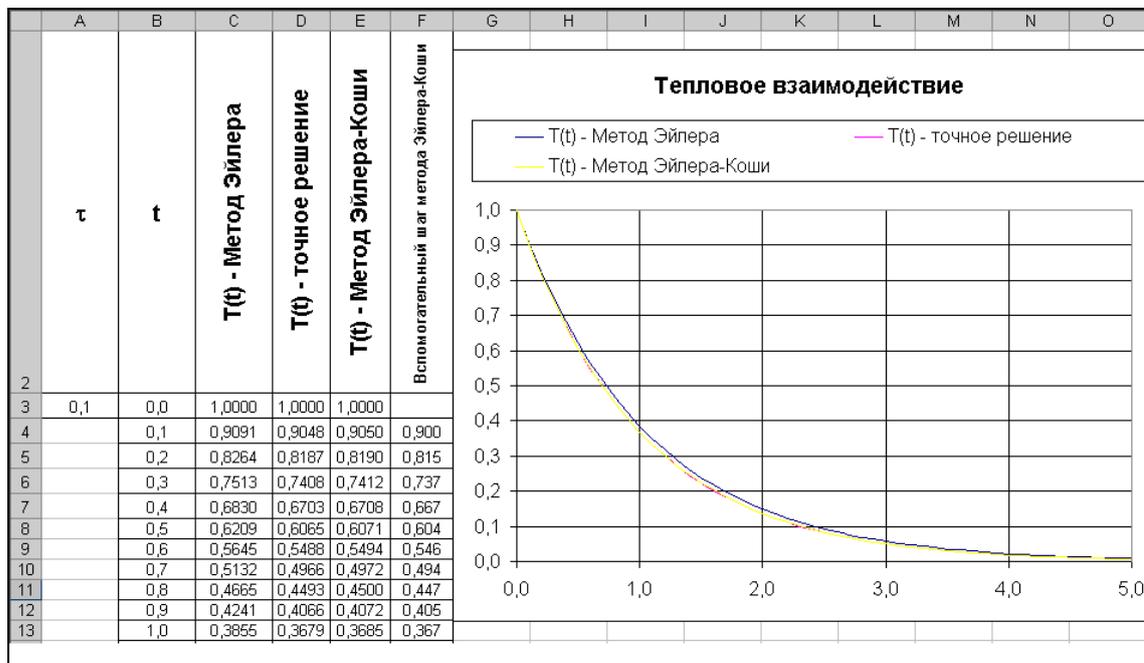


Рис. 1.37. Пример расчета

## 1.8. Моделирование полета КЛА по околоземной орбите

**Теоретическое введение.** Модель построена на основе закона всемирного тяготения и второго закона механики. Расчетная схема представлена на рис. 1.38. Будем

считать, что в начальный момент времени космический летательный аппарат (КЛА) находится на высоте  $H$  от поверхности Земли. Именно так и выводятся спутники на орбиту. Сначала ракета-носитель доставляет спутник на заданную высоту, затем он разгоняется по орбите до требуемой скорости. Примем следующие начальные условия:  $t = 0, V_{0y}=0, V_{0x}=V_0, X=0, Y=R+H$ , где  $R$  – радиус Земли.

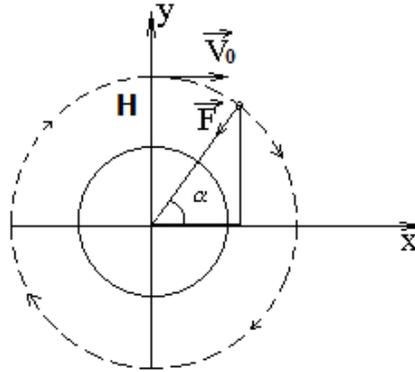


Рис. 1.38. Расчетная схема движения КЛА

Модель движения в прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{dV_x}{dt} = -(g \cdot R^2) \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{dV_y}{dt} = -(g \cdot R^2) \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad \frac{dy}{dt} = V_y$$

$$t = 0, \quad V_y = 0, \quad V_x = V_0, \quad X = 0, \quad Y = R + H, \quad R = 6378000 \text{ м.}$$

**Постановка задачи моделирования.** Путем интегрирования уравнений движения построить траекторию движения КЛА по околоземной орбите, исследовать влияние начальных условий на вид и форму траектории.

**Порядок выполнения лабораторной работы.** Работа выполняется в среде MVS. Создадим новый проект с именем «КЛА». В окне редактирования класса создадим необходимые переменные, параметры и константы (рис. 1.39):  $x, y, V_x, V_y, k, g, R$ .

Начальные значения задайте в соответствии с рис. 1.39. Все физические величины представлены в системе СИ. После создания всех необходимых параметров и переменных в окне класса создадим систему уравнений движения КЛА (рис. 1.30).

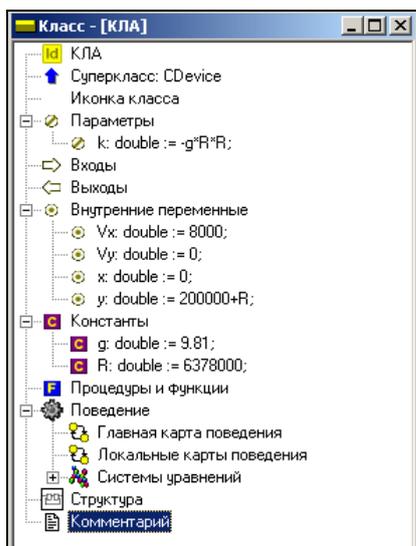


Рис. 1.39. Класс КЛА

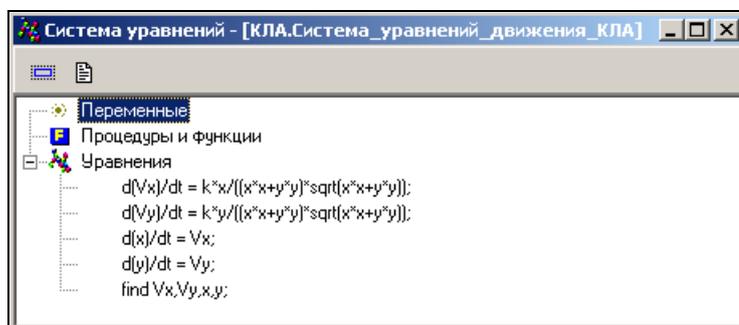


Рис. 1.40. Система уравнений, описывающая полет КЛА

Запустим модель . В окне визуальной модели создайте фазовую диаграмму для отображения траектории полета в координатах  $x$ - $y$  (рис. 1.41).

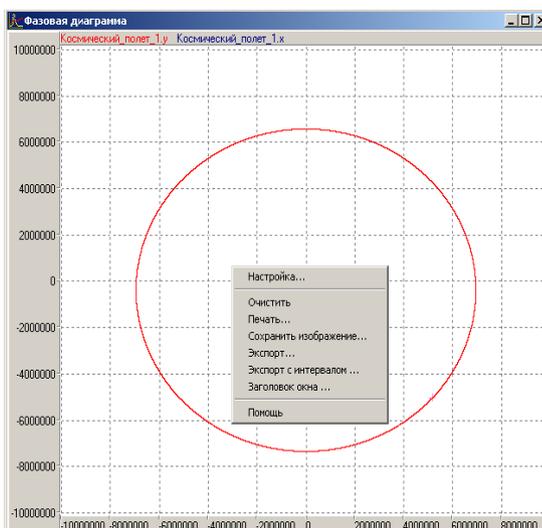


Рис. 1.41. Траектория полета

Для правильного отображения траектории настройте свойства диаграммы в соответствии с рис. 1.41. Включите режим «Автомасштабирование». Проведите эксперимент с различными начальными значениями параметров.

**Анализ результатов моделирования.** С помощью построенной модели выполните старт с высоты 1000 км. С начальными скоростями 8000-10000м/сек. Установите время полного витка по орбите. Установите характер изменения формы траектории при изменении начальных условий старта.

## 1.9. Создание модели с виртуальным экспериментальным стендом

**Теоретическое введение.** В данной работе построим модель «Орудие». Модель артиллерийского орудия будет содержать элементы управления экспериментом, которые позволят изменять значения параметров в компьютерном эксперименте и проводить их многократно.

Каждый выстрел характеризуется начальной скоростью снаряда и углом наведения орудия. Выстрел выполняется по команде «Огонь». По команде «Отбой» орудие заканчивает участие в сражении. Таким образом, модель является гибридной, т.к. поведение объекта в процессе экспериментов существенно различается.

Создадим компьютерную модель, которая позволяла бы задать конкретные параметры стрельбы, подавать команды, менять угол стрельбы и наблюдать траекторию полета снаряда.

С точки зрения динамики полета, снаряд, в первом приближении, будем считать материальной точкой, брошенной под углом  $\alpha$  к горизонту с заданной начальной скоростью. Действием сопротивления пренебрегаем. Последнее допущение позволяет использовать простые зависимости, которые хорошо известны из школьного курса физики:

$$x(t) = x_0 + V_x \cdot t; \quad y(t) = y_0 + V_y \cdot t$$
$$V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha); \quad V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$$

Угол стрельбы выбирается наводчиком, то есть при каждом залпе может быть задано новое конкретное значение.

**Постановка задачи моделирования.** Построить MVS - модель орудийного выстрела, в которой предусмотрены средства управления огнем и отображается траектория полета снаряда.

**Порядок выполнения работы.** Для описания полета снаряда понадобятся переменные – угол стрельбы (**alpha**), координата **x**, координата **y**, горизонтальная скорость (**Vx**), вертикальная скорость (**Vy**), начальная скорость (**V0**). Полный набор констант, параметров и переменных проекта представлен в табл. 1.3 (размерность всех величин в системе СИ).

Переменные **K\_огонь** и **K\_отбой** (типа boolean) необходимы для организации управления экспериментом. Для этой же цели необходима переменная «команда» перечислимого типа со значениями команда={нет\_команды, Огонь, Отбой}.

Константы в экспериментах не меняют своего значения, а параметры будут оставаться неизменными только на протяжении одного эксперимента и далее в исполняемой модели могут быть изменены. Естественно, что значение переменной **alpha** должно быть задано в радианах, поэтому используется вспомогательная переменная **alpha0**, значение которой задается в градусах.

Запустите MVS и создайте новый проект с помощью команд основного меню - **Проект/ Новый**. Напоминаем, что для проекта необходимо выбрать папку, доступную для записи. Имя проекта - «**Орудие**». После чего откроется основное окно проекта с четырьмя стандартными окнами: «**Проект**», «**Класс**», «**Уравнения**», «**Виртуальный стенд**», в котором автоматически размещен один экземпляр класса. Задано имя класса - «**Орудие**». После заполнения всех полей окна **класса «Орудие»**, должно быть получено следующее описание (рис. 1.42).

Уравнения задаются с помощью **редактора формул**, который инициализируется в окне «**Система уравнений**» (поставить пункт «**Уравнения**» и выполнить команду «**Изменить**»). Напоминаем, что система MVS различает строчные и прописные буквы и не признает пробелы в именах.

Используя редактор, введем уравнения модели (рис. 1.43). Переменной **alpha** задано начальное значение **rad(alpha0)**. Так как **alpha0** в экспериментах с моделью будет меняться, следовательно, должны пересчитываться все переменные, зависящие от **alpha**.

Таблица 1.3

Константы	Значение
g	9.81
Параметры	Значение
x0	0
y0	0
V0	100
Переменные	Начальное значение
команда	Нет_команды
X	x0
Y	y0
Vx	V0 cos(Alpha)
Vy	V0 sin(Alpha)
Alpha	Rad(Alpha0)
Alpha0	45
K_огонь	false
K_отбой	false

В уравнениях используется переменная **LocalTime**, ранее не описанная. В пакете MVS для глобального модельного времени используется предопределенная переменная **Time**, которая и отображается в специальном окне при исполнении модели. Как только вы запустите модель (начнете эксперимент), переменная **Time** начнет непрерывно изменяться.

Для моделирования полета отдельного снаряда не играет роли абсолютное время подачи очередной команды «**Огонь**», уравнения полета написаны для локального (относительного) времени. Начало отсчета **LocalTime** совпадает со временем подачи команды «**Огонь**».

Рассмотрим поведение объекта. Модель, которую предстоит построить, будет отображать сложное (гибридное) поведение. Полет снаряда начинается по команде «**Огонь**», заканчивается **приземлением** снаряда, после чего орудие **произвольно долго** ожидает либо новой команды «**Огонь**» и повторяет залп, либо команды «**Отбой**», и заканчивает сражение.

Таким образом, поведение орудия состоит из **ожидания команды**, выстрела и окончания сражения. **Полет** снаряда продолжается до момента приземления (условие приземления:  $y \leq 0$  и  $V_y < 0$ ). При полете снаряда переменные  $x$ ,  $y$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  меняют свои значения, подчиняясь указанным выше законам движения.

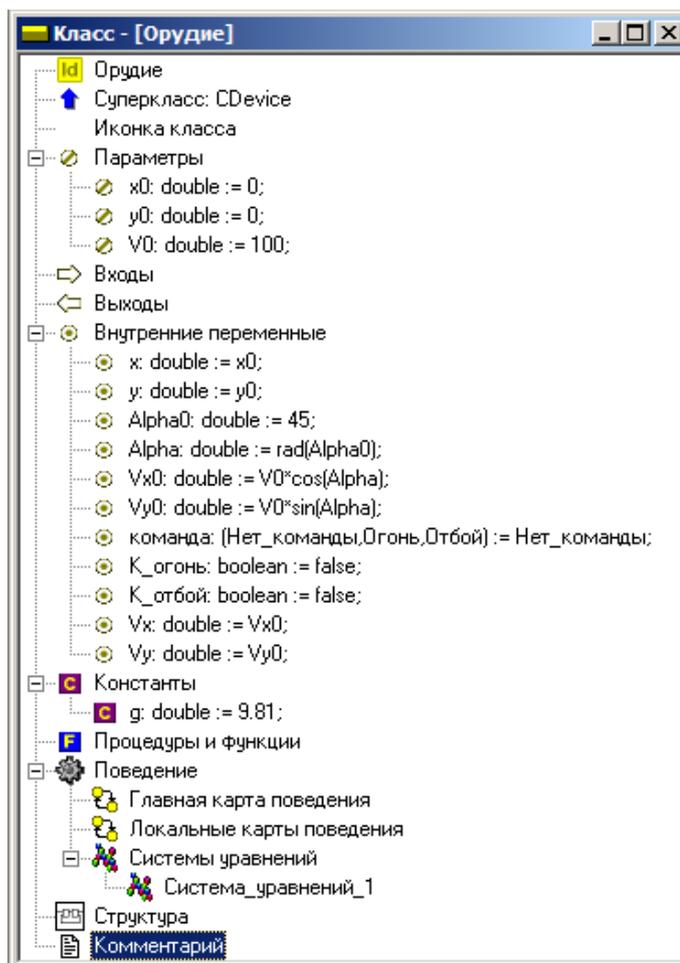


Рис. 1.42. Класс «Орудие»

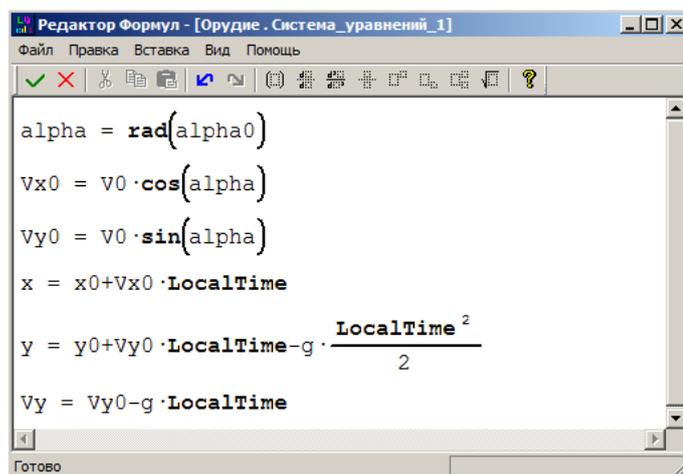


Рис. 1.43. Система уравнений класса «Орудие»

Гибридное поведение орудия можно отобразить с помощью **карты поведения**. **Карта поведения** – это схема (граф), на которой длительные действия изображаются в виде узлов. Стрелки указывают последовательность изменения поведения (рис. 1.44).

Длительные действия (узлы) поименованы: «**Полет**», «**Ожидание**», «**Конец**», рядом со стрелками переходов записаны условия срабатывания перехода, т.е. окончания длительных действий и действия, выполняемые в переходах.

Условия окончания длительных действий и все подготовительные операции, необходимые для начала новых действий представлены на рис. 1.44.

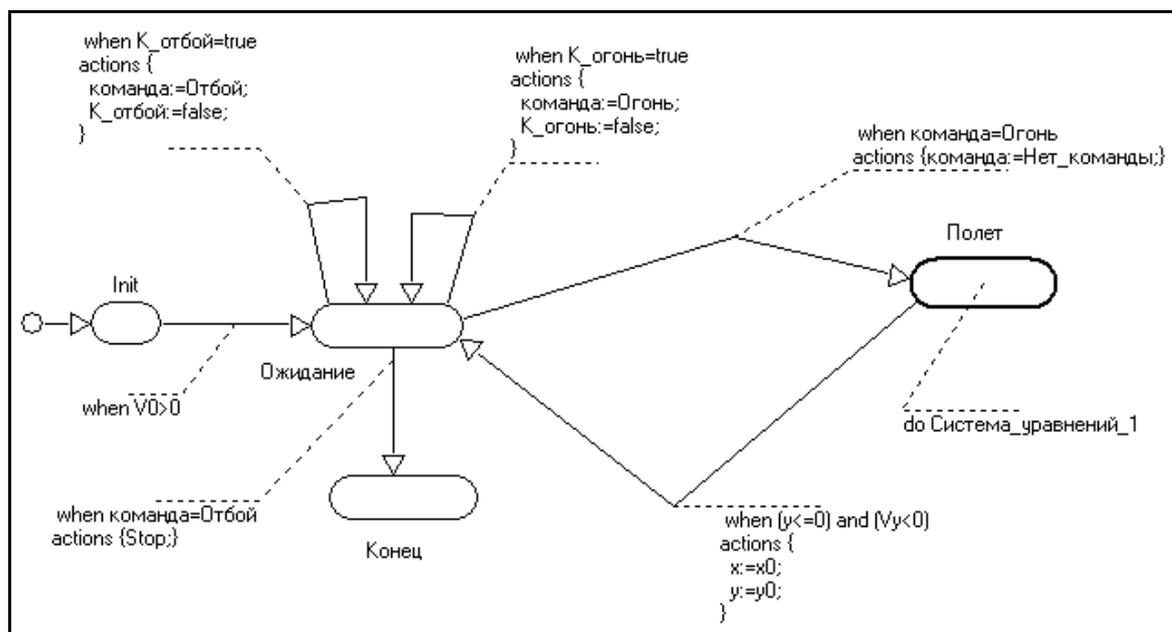


Рис. 1.44. Карта поведения

Используя рис. 1.44, создайте **главную карту поведения** объекта моделирования. Создание карты поведения выполняется в окне класса (рис. 1.42). Карта поведения состоит из узлов: начальный узел **Init** (создается автоматически), узел **Ожидание**, узел **Полеет** и узел **Конеч**. Узлы соединены переходами, которые имеют соответствующие условия срабатывания и действия, выполняемые в переходе. С узлом **Полеет** необходимо связать (перетаскиванием) **Систему\_уравнений\_1**. Начальному узлу **Init** следует задать «**Пустое поведение**».

Структура карты поведения создается с помощью кнопок окна редактирования карты поведения (табл. 1.4) или контекстного меню. Задание условий срабатывания переходов и мгновенных действий в переходе показано на рис. 1.45-1.46.

Теперь нужно компилировать модель. При этом откроется окно исполняемой модели (рис. 1.47), которое содержит окно виртуального стенда, окно параметров и переменных класса «Орудие\_1» и окно карты поведения.

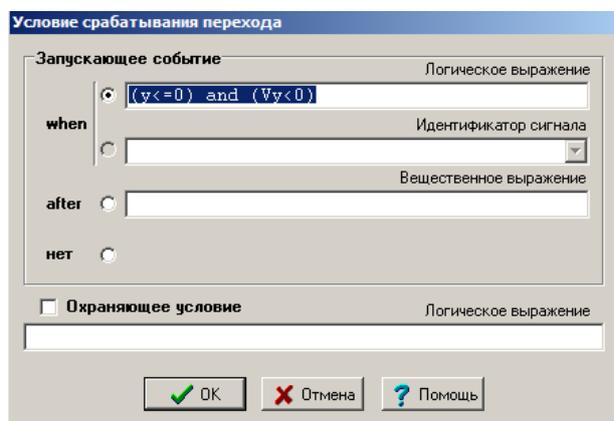


Рис. 1.45. Задание условия срабатывания перехода

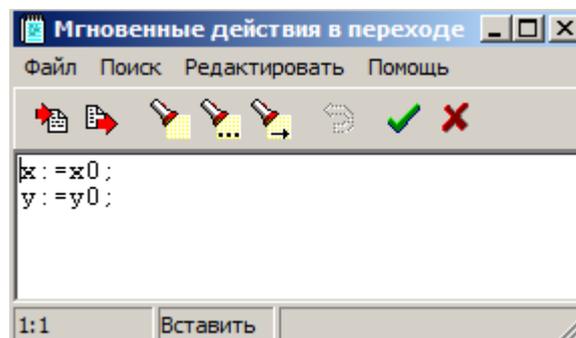


Рис. 1.46. Редактор действий в переходе

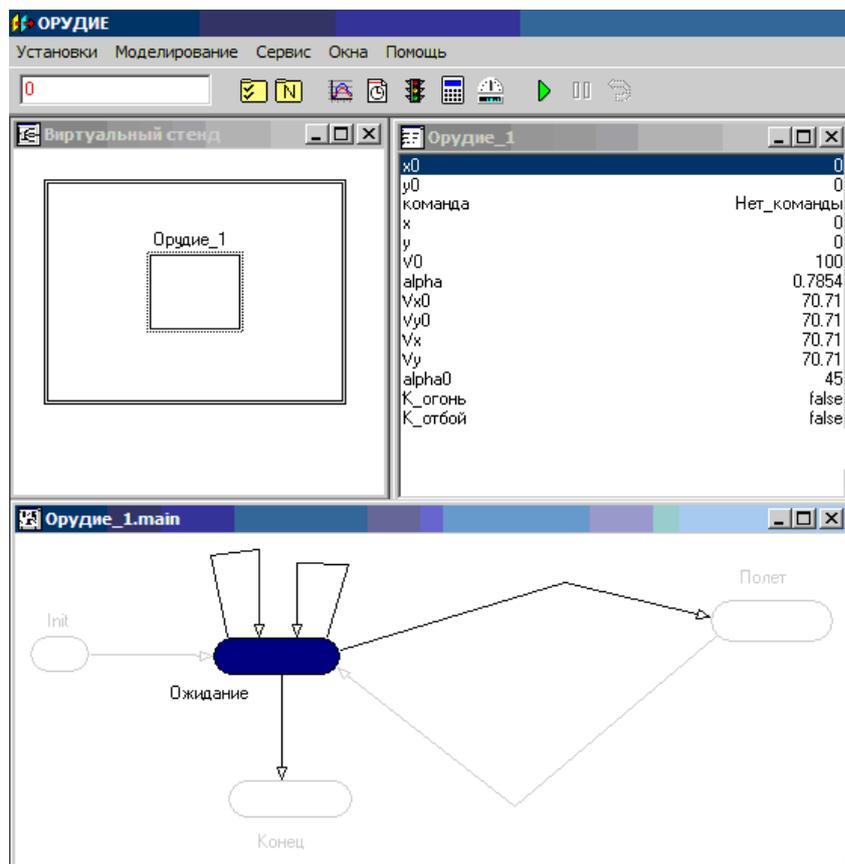


Рис. 1.47. Окно исполняемой модели

Таблица 1.4

Кнопка	Назначение
	Переход в диалог редактирования имени объекта.
	Переход в диалог редактирования пояснительного текста для карты поведения.
	Редактирование локальных переменных, функций и процедур карты поведения.
	Переход в диалог редактирования условия срабатывания выделенного перехода.
	Переход в диалог редактирования последовательности мгновенных действий в выделенном переходе.
	Переход в диалог редактирования последовательности входных действий выделенного узла.
	Переход в диалог редактирования последовательности выходных действий выделенного узла.
	Перехода в окно редактирования поведения, приписанного выделенному узлу.
	Приписывание выделенному узлу пустого поведения.
	Режим выделения
	Создание нового узла
	Создание нового перехода
	Добавить опорную точку
	Удалить опорную точку
	Показать имя узла

В данном состоянии орудие находится в состоянии **Ожидание**. Изменим переменную **команда** и зададим ей значение **Огонь** (рис. 1.48).

Теперь при нажатии кнопки «Пуск»  орудие совершит только один выстрел. Закончить работу модели можно с помощью кнопок «Стоп»  и «Рестарт»  на панели управления **Испытательным стендом** (рис. 1.47), после чего переменная «команда» примет первоначальное значение **Нет\_команды**.

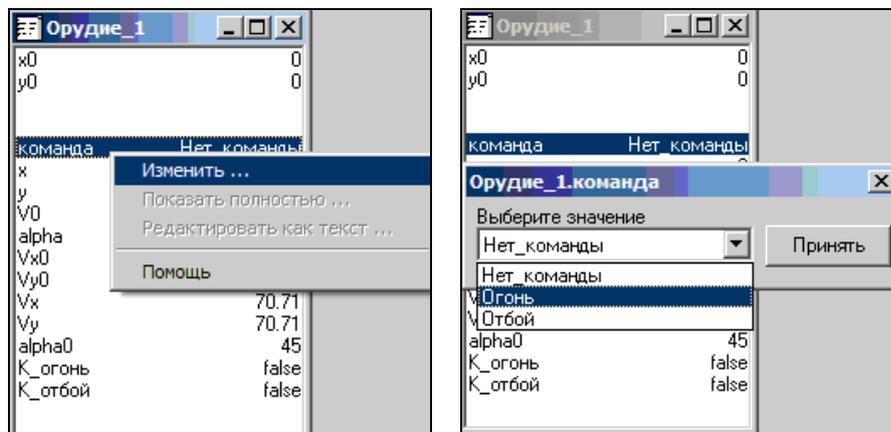


Рис. 1.48. Изменение начального значения переменной

В данной модели подавать команды орудью пока невозможно. Управление стрельбой можно создать средствами 2D анимации – **кнопками** (рис. 1.49). Нажатие кнопки будет имитировать подачу соответствующей команды. Изменение угла наведения орудия можно осуществлять с помощью компонента **Ползунок**. Для отображения траектории полета снаряда создадим фазовую диаграмму (рис. 1.50).

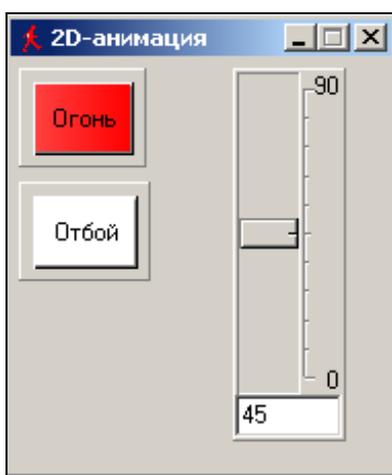


Рис. 1.49. Панель управления стрельбой орудия

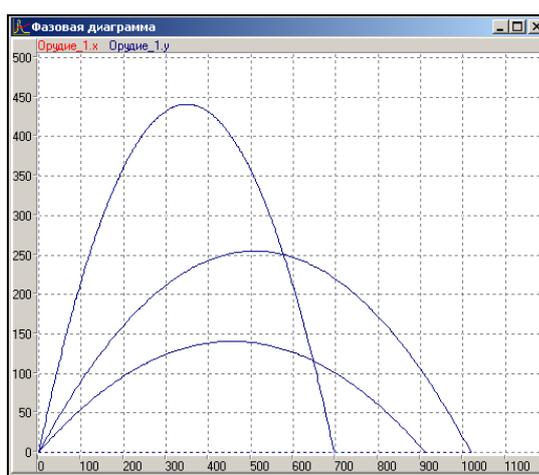


Рис. 1.50. Результат моделирования

Создадим окно для 2D-анимации. В пункте меню **Окна** выберем подпункт **Новая 2D-анимация**. В меню **Сервис** выберем **Стандартные 2D-компоненты**. Появится окно (рис. 1.51):

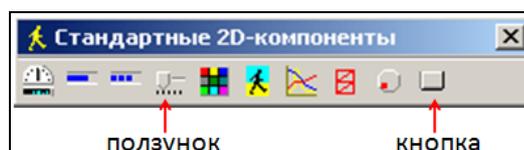


Рис. 1.51. Окно 2D-компонентов

Стенд управления проектом (рис. 1.49) собирается в окне «Новая 2D анимация» с использованием стандартных 2D-компонент MVS: «Кнопка» и «Ползунок» (рис. 1.51). Компоненты «перетаскиваются» на поле 2D-анимации (рис. 1.49).

Щелчок правой кнопкой над любым 2D-компонентом, выбор пункта меню **Надпись**, позволяет подписать элементы в окне 2D-анимации. Аналогичным образом изменяется цвет кнопок, и настраиваются параметры ползунка (рис. 1.52-1.53).

Путем перетаскивания из окна переменных свяжем переменные **К\_огонь** и **К\_отбой** с соответствующими кнопками. Переменную **alpha0** перетащим на ползунок в окне 2D-анимации (рис. 1.49). Запустим модель. Теперь нажатие кнопки **Огонь** вызывает выстрел, ползунок позволяет изменить угол стрельбы, кнопка **Отбой** вызывает окончание эксперимента. При закрытии окна исполняемой модели на вопрос: «Сохранить текущие установки?» ответить **Да**.

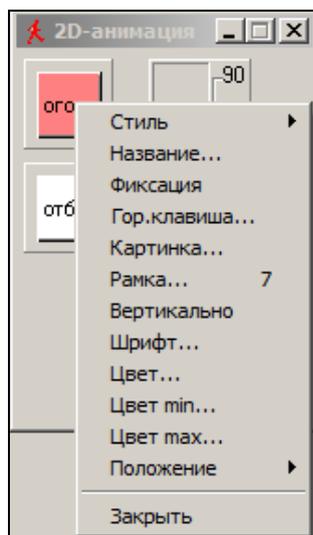


Рис. 1.52. Изменение параметров кнопок

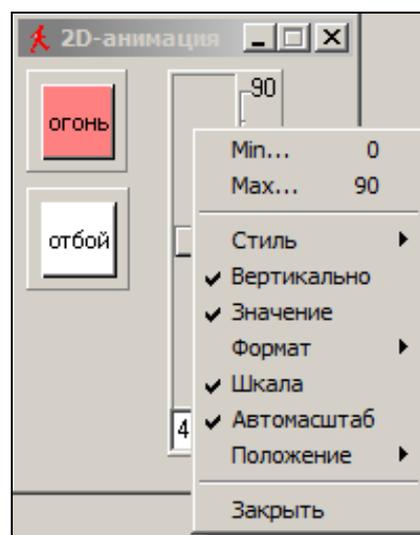


Рис. 1.53. Изменение параметров ползунка

**Анализ результатов моделирования.** Проведите эксперименты с моделью, изменяя с помощью ползунка начальный угол стрельбы **alpha0**.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить MVS-модель нелинейной химической реакции: аттрактор Реслера. Результаты моделирования отобразить в виде временной диаграммы.

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z); \quad \frac{dy}{dt} = x + a \cdot y; \quad \frac{dz}{dt} = a + z \cdot (x - b)$$

$$X(t=0)=1; \quad Y(t=0)=1; \quad Z(t=0)=1; \quad a=-0.2; \quad b=-2$$

2. Построить MVS-модель вынужденных колебаний математического маятника под действием внешней периодической силы. Результаты моделирования отобразить в виде временной диаграммы и фазовой диаграммы для  $X$  и  $Y$ . Построить 3D анимацию.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega; \quad \frac{d\omega}{dt} = -g \cdot \frac{\sin \alpha}{L} - F \cdot \sin(\theta \cdot t)$$

$$X = L \cdot \sin(\alpha); \quad Y = -L \cdot \cos(\alpha)$$

$$\omega(t=0) = 0; \quad \alpha(t=0) = \pi / 2; \quad F = 1.5; \quad L = (A + B \cos(\theta \cdot t))$$

$$A = 2; \quad B = 1; \quad \theta = 0.5; \quad g = 9.81$$

3. В среде MVS построить модель нелинейной химической реакции типа брюсселятор. Результаты моделирования отобразить в виде временной диаграммы.

$$\frac{dX}{dt} = A - (B+1) \cdot X + X^2 \cdot Y; \quad \frac{dY}{dt} = B \cdot X - X^2 \cdot Y$$

$$X(t=0)=4; Y(t=0)=1; A=0.25; B=0.75$$

4. В среде MVS построить модель аттрактора Лоренца. Результат моделирования отобразить фазовой диаграммой  $Z(Y)$ .

$$\frac{dX}{dt} = \sigma \cdot (X - Z); \quad \frac{dY}{dt} = -X \cdot Z + r \cdot X - Y; \quad \frac{dZ}{dt} = X \cdot Y - b \cdot Z$$

$$X(t=0)=20; Y(t=0)=1; Z(t=0)=1; \sigma=1; b=2.66; r=28$$

5. В среде MVS построить модель маятника Фуко. Результаты моделирования отобразить в виде фазовой диаграммы для  $x$  и  $y$ .

$$\frac{dV_x}{dt} = 2 \cdot V_y \cdot \omega + \omega^2 \cdot x - g \frac{x}{L}; \quad \frac{dV_y}{dt} = -2 \cdot V_x \cdot \omega + \omega^2 \cdot y - g \frac{y}{L}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x; \quad \frac{dy}{dt} = V_y$$

$$L = 50; \quad \omega = 0.04; \quad g = 9.81$$

$$x(t=0)=1; \quad y(t=0)=0; \quad V_x(t=0)=0; \quad V_y(t=0)=0$$

6. Построить модель полета КЛА (п.1.8), учитывающую возможность его падения на Землю при недостаточной начальной скорости. Результаты моделирования отобразить в виде фазовой диаграммы.
7. Построить модель осциллятора (п.1.2). Условия: в начальный момент пружина сжата и зафиксирована; груз с пружиной жестко не соединен и может продолжить движение независимо от нее; пружина начинает движение при нажатии виртуальной кнопки. Допущение: пружина массы не имеет. Результат отобразить в виде временной диаграммы и создать 3D анимацию.

Дополнительную информацию по теме «Математическое моделирование и вычислительный эксперимент» можно найти на сайтах и в публикациях: [2], [5], [8], [11-12], [21-22], [25], [31].

## II. Компьютерное моделирование систем

### 2.1. Знакомство с технологией построения Simulink-моделей

**Теоретическое введение.** Целью данной работы является знакомство с возможностями инструментальной системы моделирования Simulink, приемами построения моделей и содержанием библиотек пакета.

Программный комплекс Simulink является надстройкой к математическому пакету MATLAB. При моделировании на основе пакета Simulink реализуется принцип визуального моделирования. Simulink является достаточно самостоятельной частью пакета MATLAB. Однако доступ к функциям MATLAB открыт и их можно использовать в Simulink-моделях. Модель исследуемой системы составляется в виде структурно-функциональной блок-схемы с использованием готовых библиотечных блоков. Simulink обеспечивают интерактивную среду моделирования и отображения его результатов. При построении модели пользователю не требуется программировать и владеть численными методами. Достаточно самых общих знаний, требующихся при работе на компьютере и, естественно, знаний предметной области, в которой создаются модели процессов и систем.

В состав библиотеки Simulink входят несколько разделов (рис. 2.1).

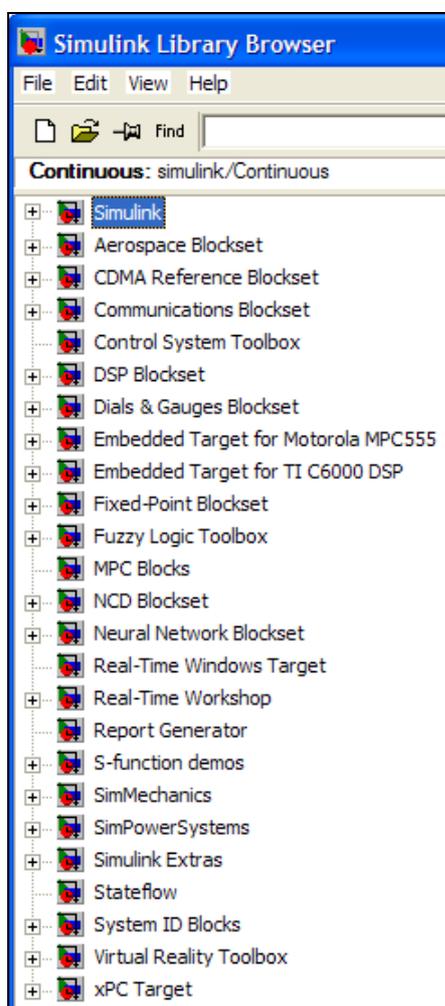


Рис. 2.1. Библиотеки пакета Simulink

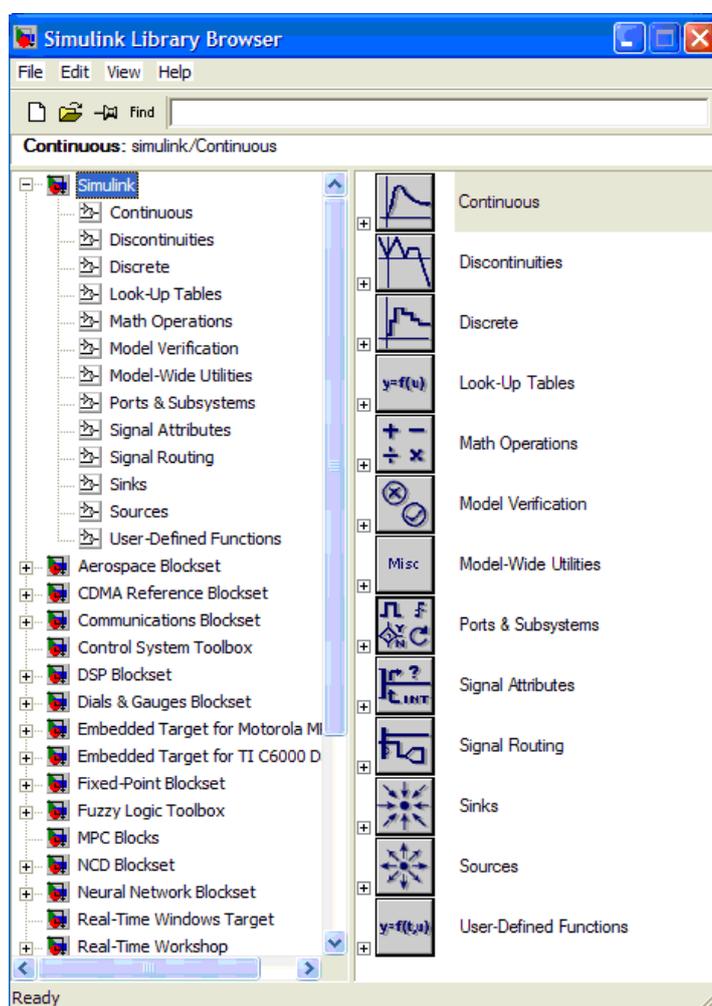


Рис. 2.2. Окно обозревателя разделов библиотеки Simulink

Собственная библиотека подсистемы Simulink (рис. 2.2) включает в себя обширный набор блоков (непрерывные элементы, дискретные элементы, математические функции, нелинейные элементы, источники сигналов, средства отображения и т.д.), которые можно использовать для построения моделей. Блоки могут быть объединены в подсистемы, что позволяет использовать блочно-иерархический подход при построении модели.

При построении модели необходимо открыть необходимый раздел библиотеки. В этом случае в правой части окна отображается его содержимое (рис. 2.3).

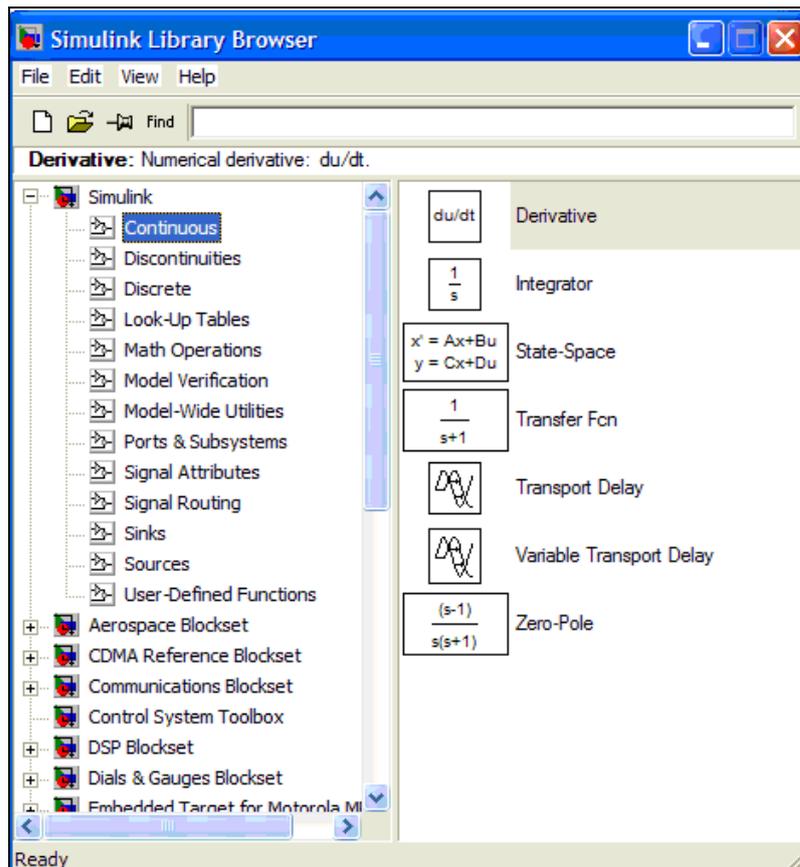


Рис. 2.3. Окно обозревателя с набором блоков раздела библиотеки

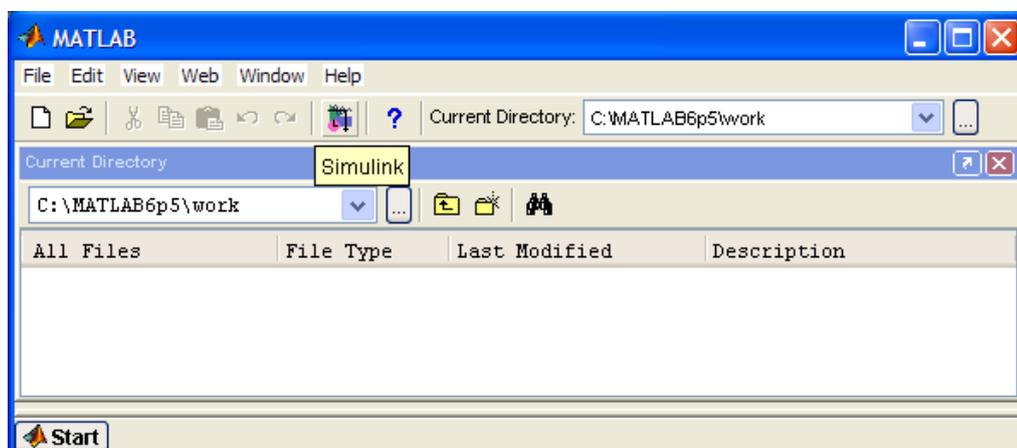


Рис. 2.4. Основное окно программы MATLAB

Для запуска программы Simulink необходимо запустить пакет MATLAB. Основное окно пакета MATLAB показано на рис. 2.4. После открытия основного окна программы MATLAB необходимо запустить Simulink, нажав кнопку  (Simulink) на панели инструментов окна MATLAB.

Построение модели производится согласно технологии визуального программирования. Блоки из библиотек перетаскиваются мышкой, между ними прорисовываются линии связей. Связи отображают движение материальных, энергетических и информационных потоков. Каждый типовой блок является объектом со своими свойствами и выполняет определенное преобразование входного сигнала в выходной. Каждый блок по терминологии объектно-ориентированного программирования является классом. При переносе блока из библиотеки в окно построения модели создается экземпляр данного класса. Экземпляр может иметь свои значения параметров.

Построенные модели могут иметь иерархическую структуру, т.е. включать целые подсистемы, представленные одним блоком на общей схеме. Система позволяет оперативно отображать результаты моделирования с помощью стандартных блоков «графопостроитель» XYGraph и «осциллограф» Scope.

Создание модели в среде Simulink - это последовательное выполнение ряда действий:

1. Создать новый файл модели, используя кнопку  на панели инструментов (рис. 2.5).

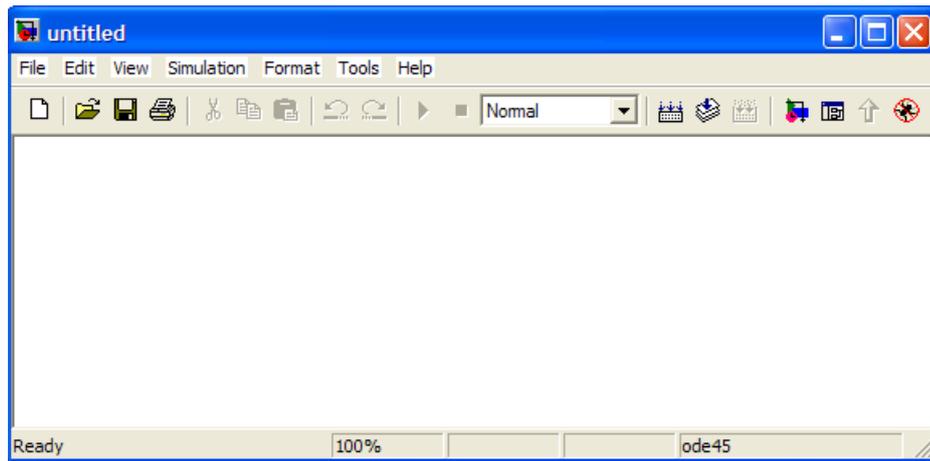


Рис. 2.5. Пустое окно модели

2. Разместить блоки в окне модели путем их «перетаскивания» в окно модели (рис. 2.6).

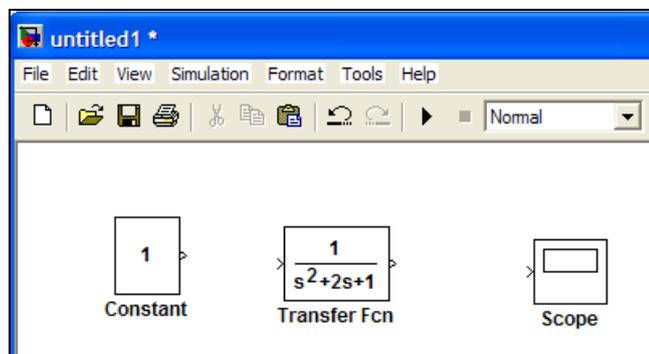


Рис. 2.6. Окно модели, содержащее блоки

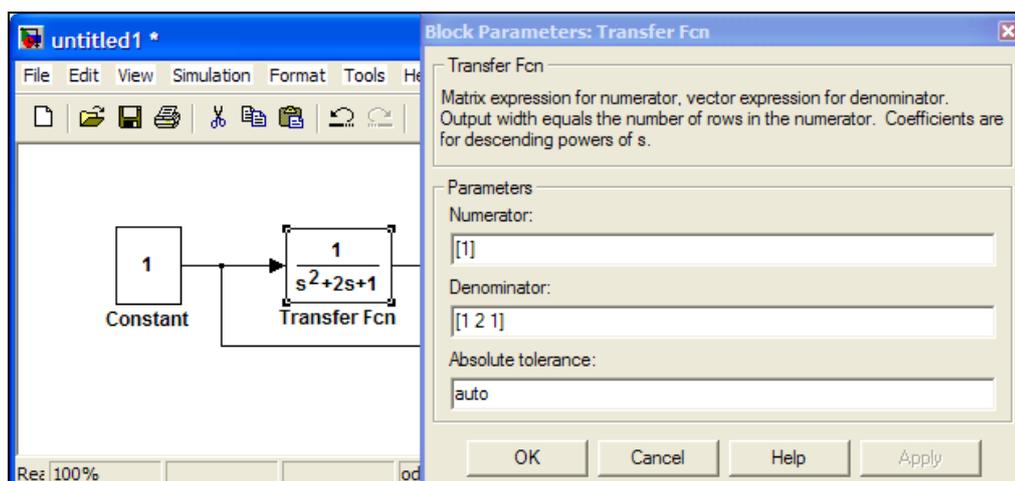


Рис. 2.7. Окно параметров блока Transfer Fcn

3. Установить параметры блоков, для этого дважды щелкнуть левой клавишей «мыши» по блоку. При этом откроется окно редактирования параметров данного блока. На рис. 2.7 показан блок, моделирующий передаточную функцию (Transfer Fcn), и окно параметров данного блока.

4. Соединить элементы в блок-схему. Для соединения блоков необходимо указать курсором на «выход» блока, а затем, с нажатой левой кнопки «мыши», провести линию к входу другого блока. Для удаления линии требуется выделить линию и нажать клавишу Delete на клавиатуре. Схема модели, в которой выполнены соединения между блоками, показана на рис. 2.8.

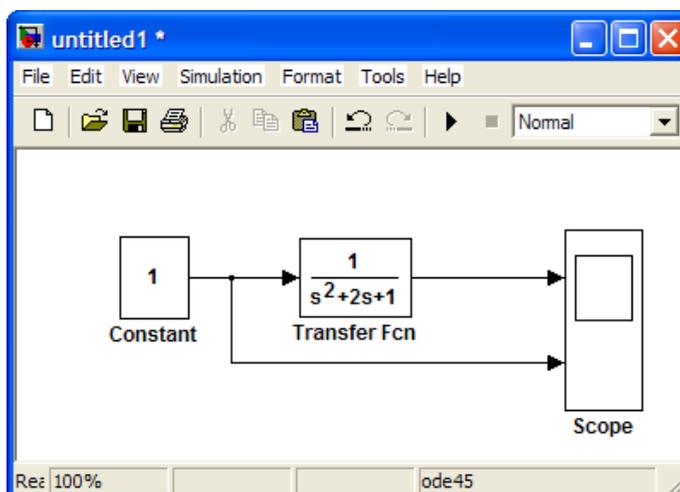


Рис. 2.8. Блок-схема модели

5. После составления модели необходимо сохранить ее в виде файла на диске, выбрав пункт меню File/Save As... в окне модели. Имя файла не должно превышать 32-х символов, должно начинаться с буквы и не может содержать символы кириллицы и спецсимволы.

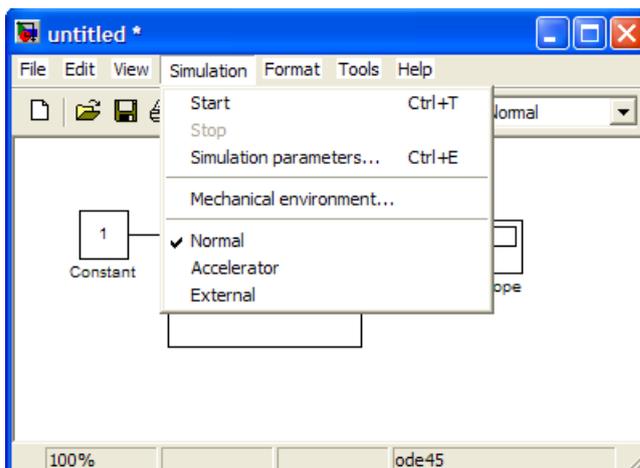


Рис. 2.9. Панель управления

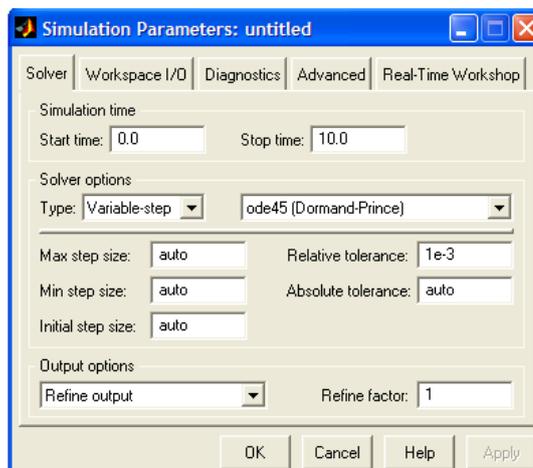


Рис. 2.10. Параметры моделирования

Задание параметров расчета выполняется в панели управления меню **Simulation/Parameters**. Вид панели управления приведен на рис. 2.9. Установка параметров моделирования выполняется на вкладке Solver (рис. 2.10): Simulation time (Интервал моделирования или время расчета). Время расчета задается указанием начального (Start time) и конечного (Stop time) значений времени расчета. Начальное время, как правило, задается равным нулю. Величина конечного времени задается исходя из условий решаемой задачи.

Запуск вычислений выполняется с помощью кнопки  на панели инструментов. Процесс расчета можно завершить досрочно кнопкой .

**Задание по работе.** Познакомьтесь с содержанием библиотеки Simulink. Постройте модель по рис. 2.8 и проведите модельный эксперимент с изменением параметров блока Transfer Fcn.

## 2.2. Моделирование производственного цикла

**Теоретическое введение.** Экономика подвержена циклам роста и падения производства. Экономисты считают, что причина кризисов перепроизводства связана с запаздыванием в производственной системе. Пусть промышленность выпускает некоторое оборудование. Действительно, с момента принятия заказа до его выполнения должно пройти определенное время, необходимое на выполнение работ, связанных с производством. Кроме того, выработав свой ресурс, оборудование через некоторое время потребует замены. Это еще один фактор запаздывания. В настоящей лабораторной работе исследуем подобные процессы в производственных системах.

**Постановка задачи моделирования.** В среде Simulink построить модель производственной системы по представленной схеме (рис. 2.11) и исследовать условия развития кризисов.

**Порядок выполнения работы.** Потребность в парке оборудования на схеме задана блоками **Constant** и **Integrator**. Данная группа блоков на выходе порождает линейное изменение потребности в оборудовании во времени. Предполагается, что существует постоянная потребность в данном оборудовании, величина которой линейно растет во времени.

Блок модели **Saturation** отражает ограниченные возможности промышленности. То есть промышленность может выполнить заказ только в таком объеме, который позволяют ее производственные мощности.

Будем считать, что производство выполнит заказ через определенное время, которое необходимо для производства оборудования. Эта временная задержка учитывается блоком **Transport Delay**.

Выпущенное оборудование накапливается (блок **Integrator1**) и образует парк нового оборудования. Естественно, оборудование имеет определенный срок службы, по истечении которого оно выводится из эксплуатации. Будем считать, что через некоторое время (срок службы оборудования задается в блоке **Transport Delay1**) оборудование, которое выводится из эксплуатации (блоки **Integrator1** и **Sum1**) полностью заменяется новым. Таким образом, необходимость замены старого оборудования увеличивает потребный объем нового оборудования.

Количество устаревшего оборудования, выводимого из эксплуатации, вычитается из количества произведенного оборудования в блоке **Sum1**. Промышленность в первую очередь компенсирует естественную убыль оборудования, происходящую за счет морального и физического старения.

Оставшаяся часть оборудования идет на удовлетворение потребности рынка (в блоке **Sum** производится вычитание, результат которого образует неудовлетворенную потребность). Неудовлетворенная потребность в оборудовании это заказ для производства. Далее цикл повторяется.

Осциллограф **Scope** будет отображать изменение уровня производства оборудования во времени. Естественно, что данная модель имеет приближенный характер. Однако на ее примере мы сможем исследовать механизм, порождающий колебания в простейшей системе.

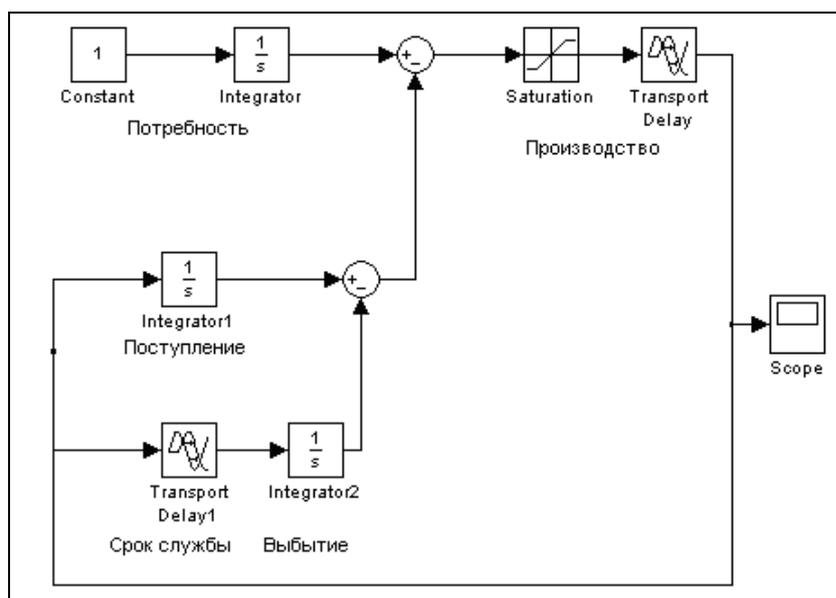


Рис. 2.11. Simulink-модель производственной системы

**Анализ результатов моделирования.** Исследовать влияние на поведение производственной системы длительности производства оборудования, срока его службы, размера производственных мощностей и величины потребности в оборудовании. Исследовать характер изменения сигнала в

различных частях схемы. Для этого необходимо переработать модель, добавив в неё новые блоки типа **Scope**.

### Блоки, использованные при построении модели

1. Источник постоянного сигнала **Constant**. Задаёт постоянный по уровню сигнал. Параметры блока (рис. 2.12): **Constant value** – значение постоянной величины.

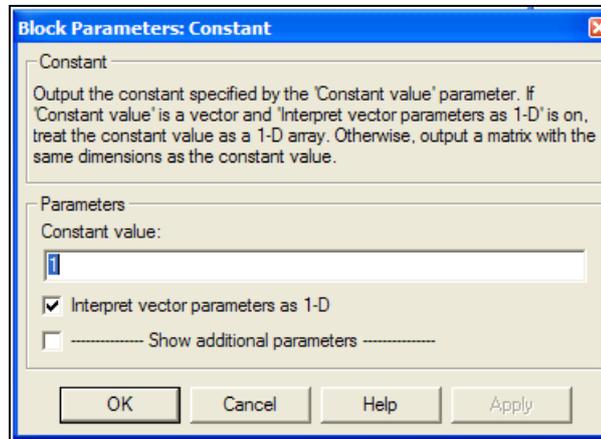


Рис. 2.12. Окно параметров блока **Constant**

2. Интегрирующий блок **Integrator**. Выполняет интегрирование входного сигнала. На рис. 2.13 показан пример работы интегратора при подаче на его вход ступенчатого сигнала. Начальное условие принято равным нулю.

3. Блок фиксированной задержки сигнала **Transport Delay**. Обеспечивает задержку входного сигнала на заданное время. Параметры блока: **Time Delay** — Время задержки сигнала (рис. 2.14).

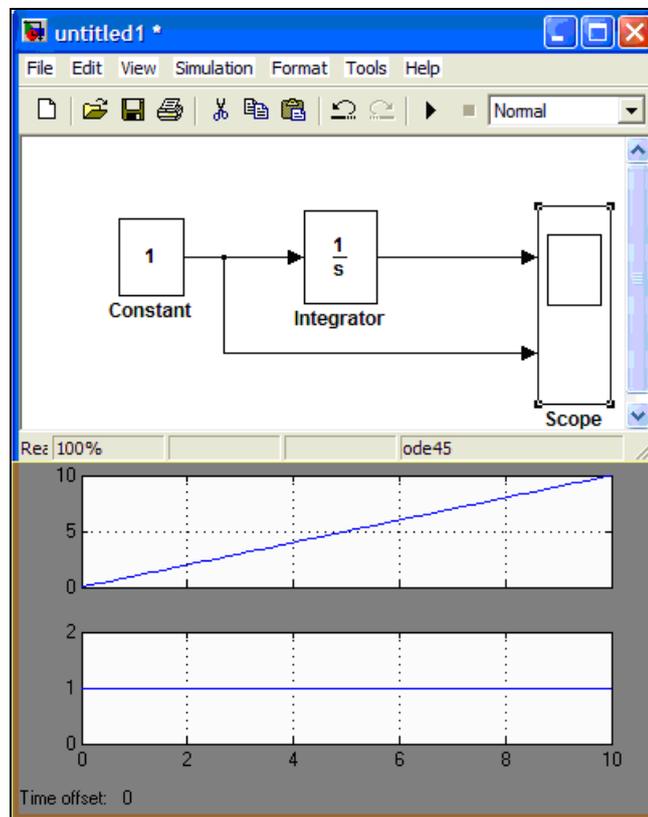


Рис. 2.13. Интегрирование ступенчатого сигнала

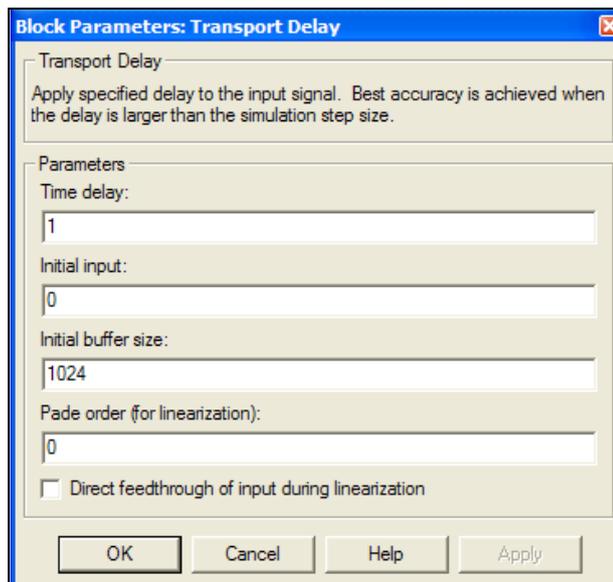


Рис. 2.14. Окно параметров блока **Transport Delay**

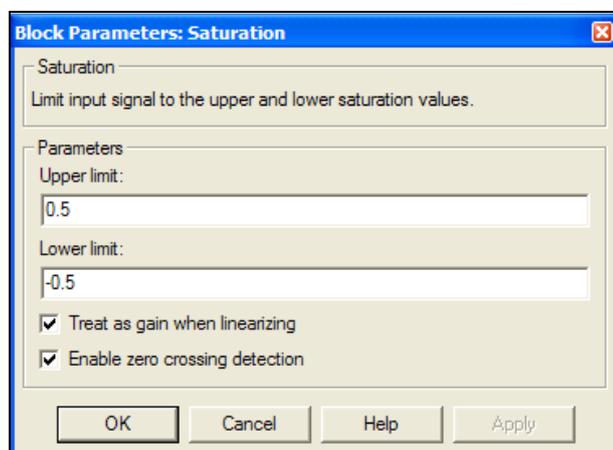


Рис. 2.15. Параметры блока **Saturation**

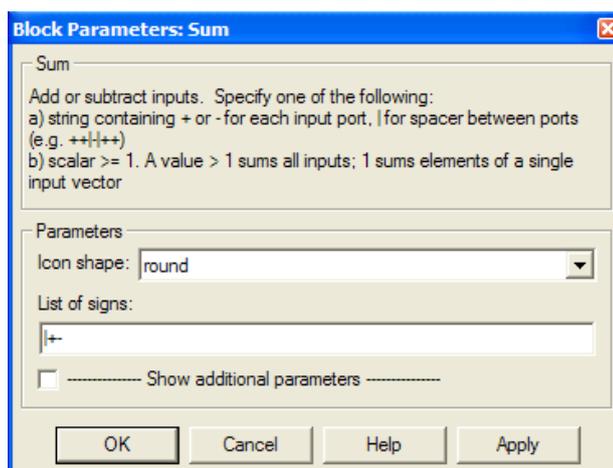


Рис. 2.16. Параметры блока **Sum**

4. Блок ограничения **Saturation**. Выполняет ограничение величины сигнала. Параметры блока: **Upper limit** - верхний порог ограничения. **Lower limit** - нижний порог ограничения. Выходной сигнал блока равен входному сигналу, если его величина не выходит за порог ограничения. По достижении входным сигналом уровня ограничения выходной сигнал блока перестает изменяться и остается равным порогу (рис. 2.15).

5. Блок вычисления суммы **Sum** (рис. 2.16). Параметры блока: **List of sign** – Список знаков. В списке можно использовать следующие знаки: + (плюс), - (минус) и | (разделитель знаков).

### 2.3. Моделирование одноразрядного двоичного сумматора

**Теоретическое введение.** В данной работе строится модель логической схемы одноразрядного двоичного сумматора. Результат сложения двух одноразрядных двоичных чисел представлен в табл. 2.1:

Таблица 2.1

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>M</i>	<i>S</i>	<i>P</i>
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1

Здесь: *A*, *B* - одноразрядные двоичные числа (слагаемые), *M* – перенос из младшего двоичного разряда, *S* – сумма, *P* – перенос в старший двоичный разряд. Логическая схема сумматора представлена на рис. 2.17.

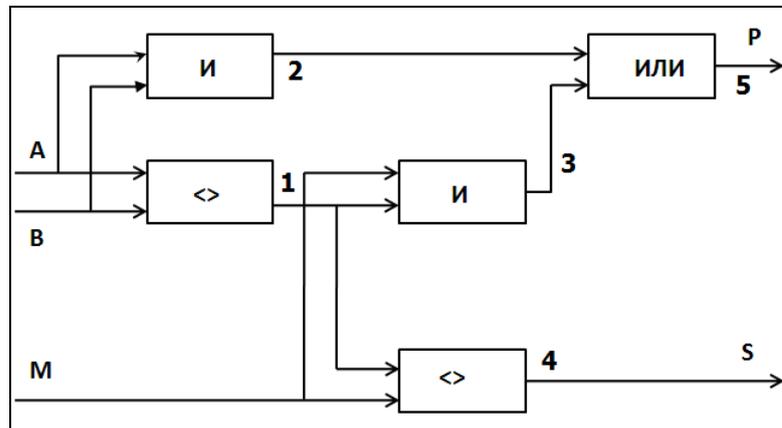


Рис. 2.17. Логическая схема одноразрядного двоичного сумматора

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	a	b	m	A	B	M	1	2	3	4	5	S	P
2	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	1	0	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	0

Рис. 2.18. Фрагмент электронной таблицы модели одноразрядного сумматора

**Постановка задачи моделирования.** Первоначально средствами электронной таблицы по схеме (рис. 2.17) построить модель сумматора. В электронной таблице по рис. 2.18: **A, B, M** – исходные данные; **a, b, m** – значения **A, B, M** в формате логических переменных (используется функция ЕСЛИ). Аналогично, **S, P** – цифровые аналоги результата выполнения операций 4 и 5 (используется функция ЕСЛИ). Операции необходимо производить с данными в логическом формате.

Затем реализовать эту же модель средствами Simulink. При построении модели использовать блоки: Logical Operator, Constant, Display. Блоки Constant – источники сигналов **A, B, M**. Результат выполнения операций отобразить с помощью блоков Display. Далее построить вторую Simulink-модель одноразрядного сумматора с использованием блока SubSystem (рис. 2.19).

**Анализ результатов моделирования.** Используя построенные модели, проверить результаты по табл. 2.1.

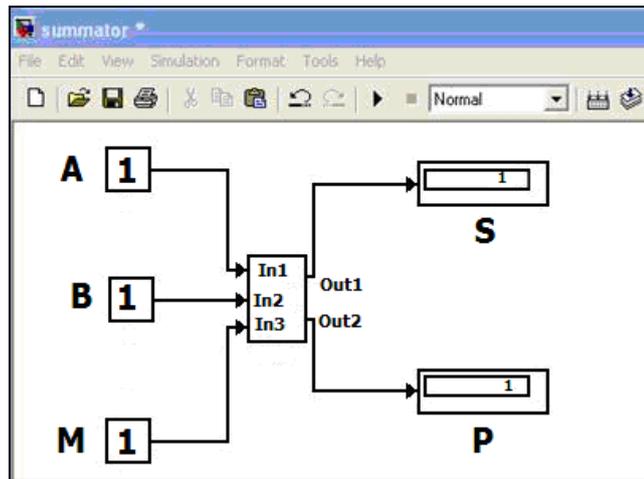


Рис. 2.19. Модель сумматора с использованием блока SubSystem

**Дополнительное задание.** Создать модель одноразрядного сумматора средствами MVS. Модель должна допускать ввод исходных значений слагаемых, индикацию результатов и исходных данных, также многократный ввод исходных значений и выполнение вычислений (рис. 2.20-2.23).

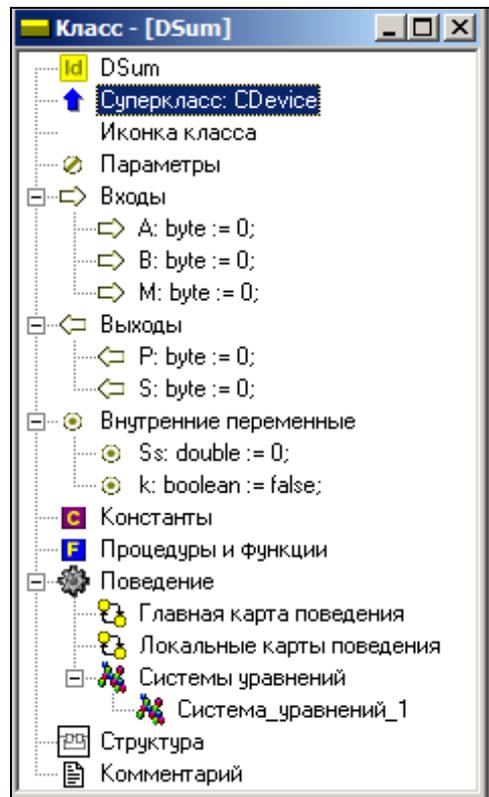


Рис. 2.20. Окно класса DSum

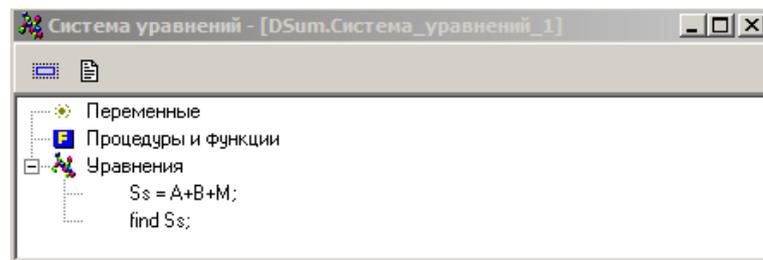


Рис. 2.21. Система уравнений проекта

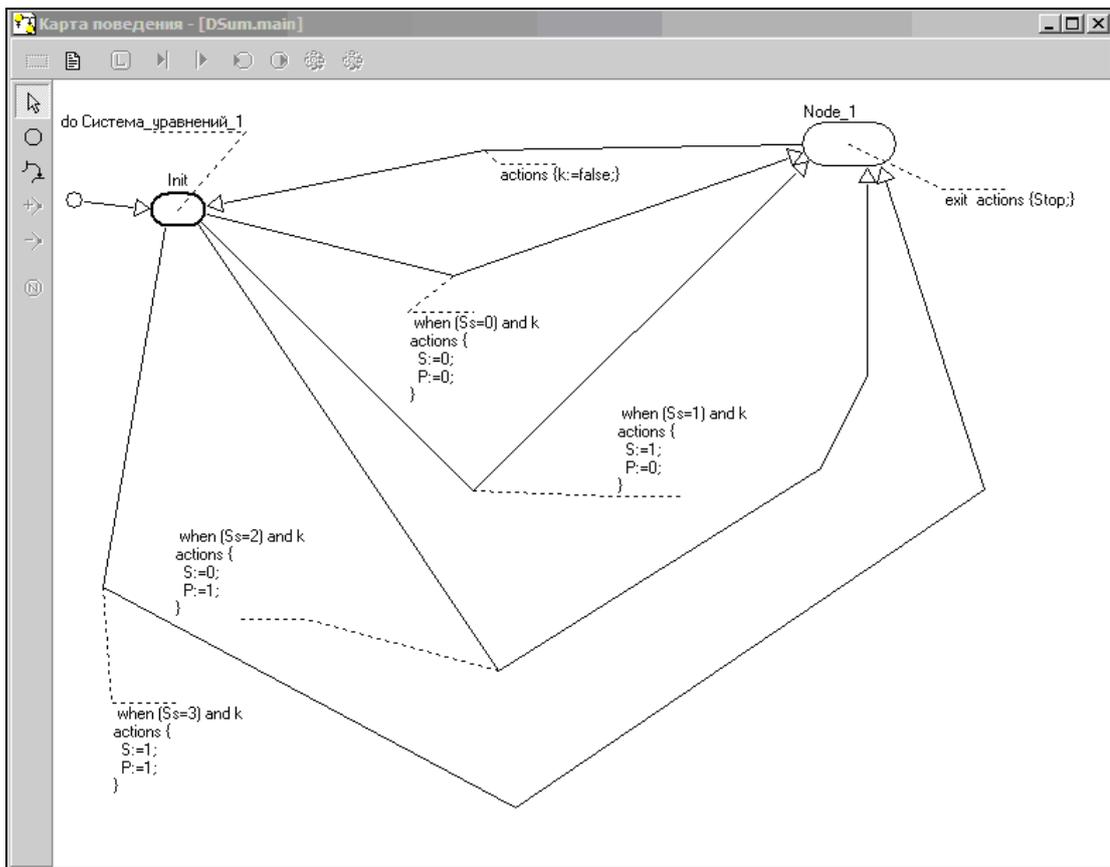


Рис. 2.22. Карта поведения проекта

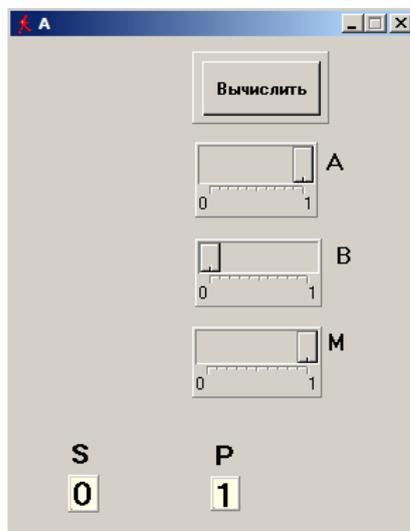


Рис. 2.23. Стенд управления проектом



Рис. 2.24. Окно 2D-компонентов

Стенд управления проектом (рис. 2.23) собирается в окне «Новая 2D анимация» с использованием стандартных 2D-компонент MVS: «Кнопка», «Цифровой индикатор», «Ползунок» (рис. 2.24). Переменные проекта путем «перетаскивания» необходимо связать с соответствующими 2D-компонентами.

## 2.4. Моделирование многоразрядного двоичного сумматора

**Теоретическое введение.** В данной работе строится модель логической схемы многорядного двоичного сумматора. Схема одноразрядного сумматора представлена на рис. 2.25. Здесь:  $A, B$  – одноразрядные двоичные числа (слагаемые),  $M$  – перенос из младшего разряда,  $S$  – сумма,  $P$  – перенос в старший разряд.

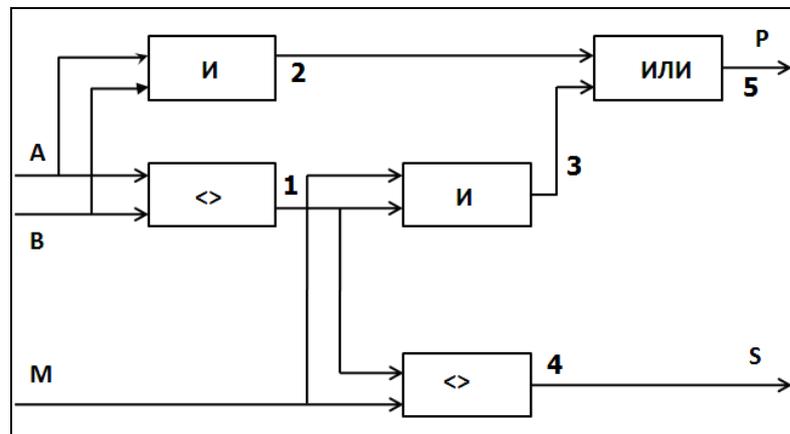


Рис. 2.25. Логическая схема одноразрядного двоичного сумматора

**Постановка задачи моделирования.** Средствами электронных таблиц построить модель сумматора для сложения восьмиразрядных двоичных чисел. При построении модели использовать логические операции. Обеспечить связь при переносе значений в следующий разряд (рис. 2.26).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	a	b	m	A	B	M	1	2	3	4	5	S	P
2	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	1	0	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	0
3	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	1	0	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	0
4	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	0
5	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	0
6	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	1	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	0	1
7	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	1	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	0	1
8	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	0	1
9	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	0	1
10												1	

Рис. 2.26. Таблица суммирования

Каждая строка таблицы – одноразрядный двоичный сумматор. В таблице  $A, B$  – исходные данные. В ячейках D2 и E2 младшие разряды слагаемых.  $a, b, m$  – значения  $A, B, M$  – в формате логических переменных (используется функция ЕСЛИ). Аналогично,  $S, P$  – цифровые аналоги операций 4 и 5 (используется функция ЕСЛИ).

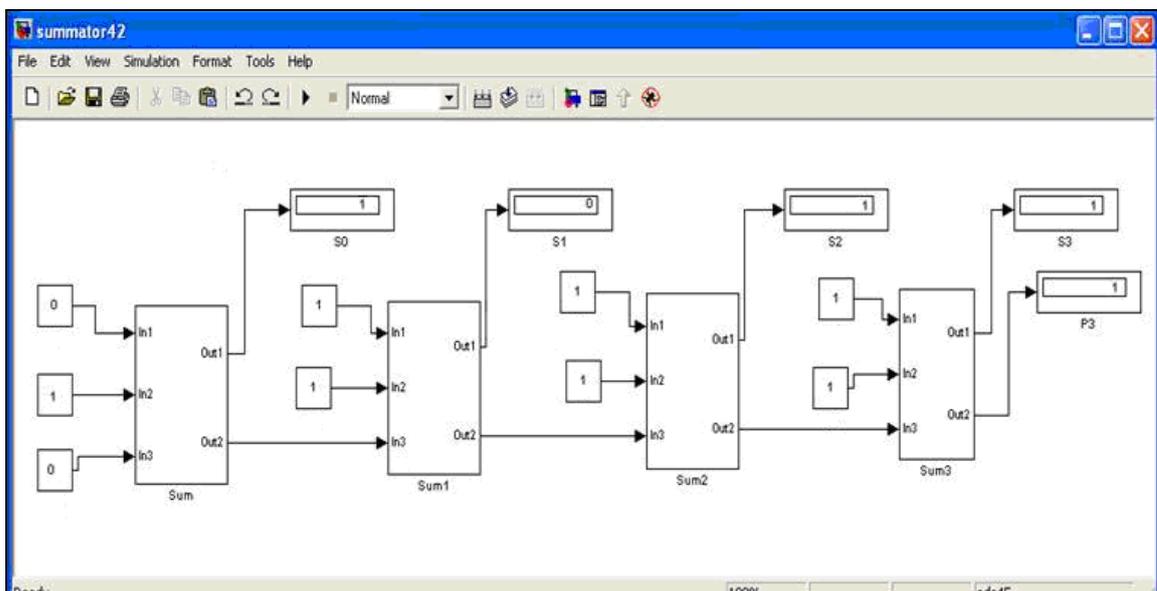


Рис. 2.27. Многоразрядный сумматор, Simulink-модель

**Анализ результатов моделирования.** Используя построенную модель, выполнить сложение двух произвольных восьмиразрядных двоичных чисел. Выполнить операцию для нескольких вариантов. Проверить результаты путем сложения двоичных чисел в стандартной программе «Калькулятор».

**Дополнительное задание.** В среде Simulink, используя блок Subsystem, построить многоразрядный сумматор (рис. 2.27). Результат работы модели проверить с помощью стандартной программы «Калькулятор».

## 2-5. Моделирование электрических цепей

**Теоретическое введение.** Методику построения моделей электрических цепей рассмотрим на примере расчета переходных процессов в электрическом контуре. Задача заключается в нахождении тока протекающего в электрической цепи и напряжения на конденсаторе  $C$  после замыкания ключа. Схема цепи показана на рис. 2.28. Начальные условия полагаем нулевыми (ток в цепи отсутствует, и конденсатор не заряжен).

Модели элементов данной системы (цепи) являются моделями типа «черный ящик». Эти модели связывают входное воздействие (напряжение) и реакцию элемента (электрический ток). Процессы в элементах не рассматриваются.

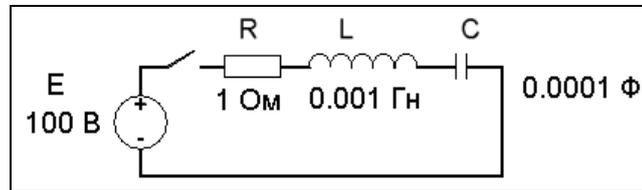


Рис. 2.28. Расчетная электрическая схема

Математические модели элементов цепи (закон Ома):

$$u_R = R \cdot i, \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}, \quad C \cdot \frac{du_C}{dt} = i.$$

Связь между элементами системы описывается соотношением (закон Кирхгоффа):

$$E = u_R + u_L + u_C.$$

Математическая модель электрической цепи, суть следующее:

$$\frac{di}{dt} = (E - u_R - u_C) / L; \quad \frac{du_C}{dt} = i / C; \quad u_R = R \cdot i$$

$$i(t = 0) = 0, \quad u_C(t = 0) = 0.$$

Здесь  $i$  - ток в цепи,  $u_C$  - напряжение на конденсаторе,  $u_L$  - напряжение на индуктивности,  $u_R$  - напряжение на активном сопротивлении,  $R$  - величина активного сопротивления,  $L$  - индуктивность катушки,  $C$  - емкость конденсатора.

**Постановка задачи моделирования.** Средствами MVS построить модель RLC-цепи (рис. 2.28). Средствами MVS построить модель электрических цепей (рис. 2.29-2.31). Построить временную диаграмму переходного процесса.

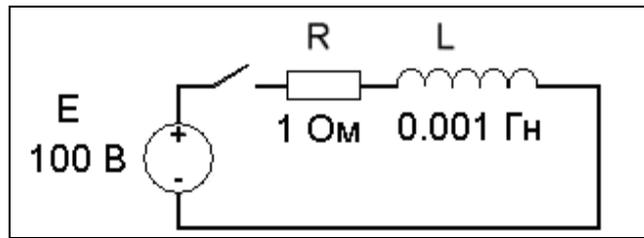


Рис. 2.29. RL-цепь

Для данной цепи математическая модель имеет вид:

$$u_R = R \cdot i; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \quad E = u_R + u_L$$

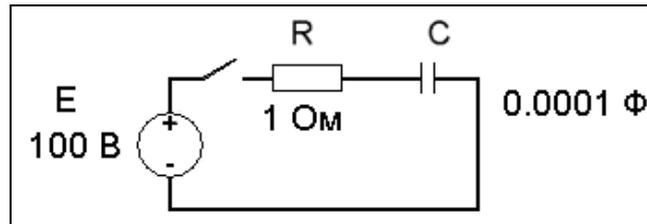


Рис. 2.30. RC-цепь

Соответственно, для RC-цепи математическая модель имеет вид:

$$u_R = R \cdot i; \quad C \cdot \frac{du_C}{dt} = i; \quad E = u_R + u_C$$

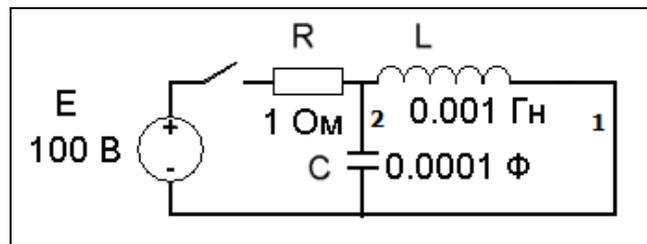


Рис. 2.31. Электрический контур

Математическая модель контура (рис. 2.31), суть следующее:

$$u_R = R \cdot i, \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{u_L}{L}, \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i_2}{C}, \quad i = i_1 + i_2, \quad u_C = E - u_R, \quad u_L = u_C.$$

**Дополнительное задание.** Самостоятельно составить математическую модель и построить MVS-модель для цепи по рис. 2.32. Параметры выбрать самостоятельно.

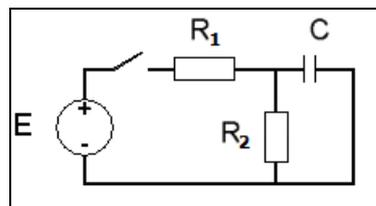


Рис. 2.32. Электрическая цепь

## 2.6. Динамически управляемая MVS-модель электрической цепи

**Теоретическое введение.** Имеется схема электрической цепи (рис. 2.33), состоящая из конденсатора (емкости), индуктивности, активных сопротивлений и лампочки. При замыкании

выключателя образуется замкнутая электрическая цепь, которая, определенным образом реагирует на напряжение батареи. По цепи течет ток.

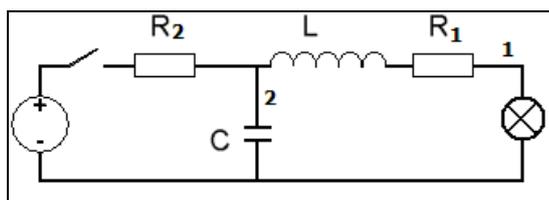


Рис. 2.33. Электрическая цепь

Математические модели элементов цепи (законы Ома) имеют вид:

$$u_R = R \cdot i; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt}; \quad C \cdot \frac{du_C}{dt} = i.$$

Связь между элементами в замкнутой цепи описывается соотношениями (законы Кирхгофа):

$$E = u_{R1} + u_{R2} + u_L; \quad E = u_{R2} + u_C; \quad i = i_1 + i_2.$$

В разомкнутой цепи связь между элементами суть следующее:

$$u_C = u_{R1} + u_L; \quad i_1 + i_2 = 0.$$

Математическая модель электрической цепи при первоначальном замыкании выключателя суть следующее:

$$u_{R1} = R \cdot i_1; \quad u_{R2} = R \cdot i; \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{u_L}{L}; \quad i_2 = C \cdot \frac{du_C}{dt};$$

$$i = i_1 + i_2; \quad u_L = E - u_{R1} - u_{R2}; \quad u_C = E - u_{R2}.$$

$$i_1(t=0) = 0; \quad i_2(t=0) = 0; \quad u_C(t=0) = 0; \quad u_L(t=0) = 0; \quad u_{R1}(t=0) = 0 \quad u_{R2}(t=0) = 0.$$

Здесь  $i_{1,2}$  – ток в соответствующей ветви цепи (рис. 2.33),  $u_C$  – напряжение на конденсаторе,  $u_L$  – напряжение на индуктивности,  $u_{R1}$ ,  $u_{R2}$  – напряжения на активных сопротивлениях,  $R_1$ ,  $R_2$  – величина сопротивлений,  $L$  – индуктивность катушки,  $C$  – емкость конденсатора.

При размыкании цепи ее математическую модель составляют зависимости:

$$u_{R1} = R \cdot i_1; \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{u_L}{L}; \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i_2}{C}; \quad i_2 = -i_1; \quad u_L = u_C - u_{R1}.$$

Начальное состояние, в этом случае, соответствует состоянию цепи в момент размыкания выключателя. При дальнейшем замыкании или размыкании выключателя начальное состояние цепи определяется ее предыдущим состоянием.

**Постановка задачи моделирования.** Построить MVS-модель электрической цепи, управляемую выключателем. Изменение напряжений в цепи отобразить временной диаграммой.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде MVS. Создать проект и поместить его в доступную для записи папку, например, D:\WORK (рис. 2.34).

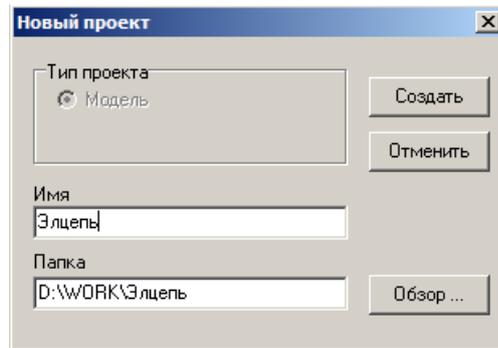


Рис. 2.34. Создание нового проекта

В главном окне появятся окна проекта **Элцель** (рис. 2.34). В окне **класса Элцель** добавить **внутренние переменные** и **параметры** (рис. 2.35-2.36). Для добавления переменной, в окне **класса** следует щелкнуть правой кнопкой мыши по пункту **Внутренние переменные** и в контекстном меню выбрать пункт: **Добавить**. Аналогичным образом добавляются параметры.

Параметр в отличие от переменной, не меняется в процессе работы модели, но его можно изменить до запуска модели. Напоминаем: MVS различает строчные и прописные буквы в именах переменных, и не «признает» пробелов.

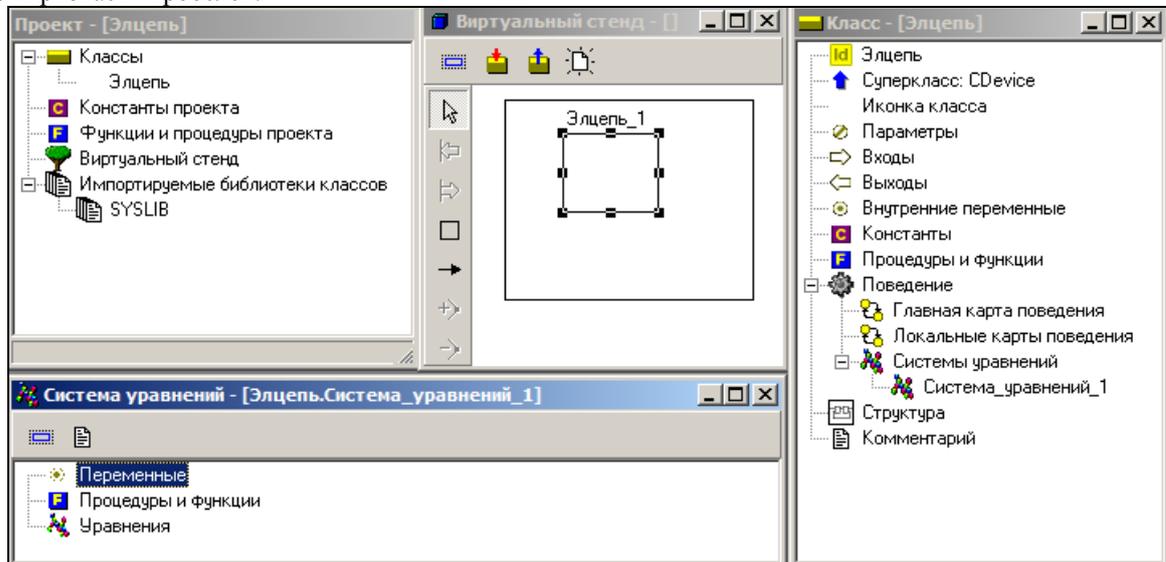


Рис. 2.35. Окна проекта

Переменная **ON** (булевского типа) играет роль выключателя (ON=true – цепь замкнута; ON=false – цепь разомкнута). При задании переменной **ON**, нажать кнопку **Тип** и в окне **Выберите тип** выбрать тип **boolean** (рис. 2.37):

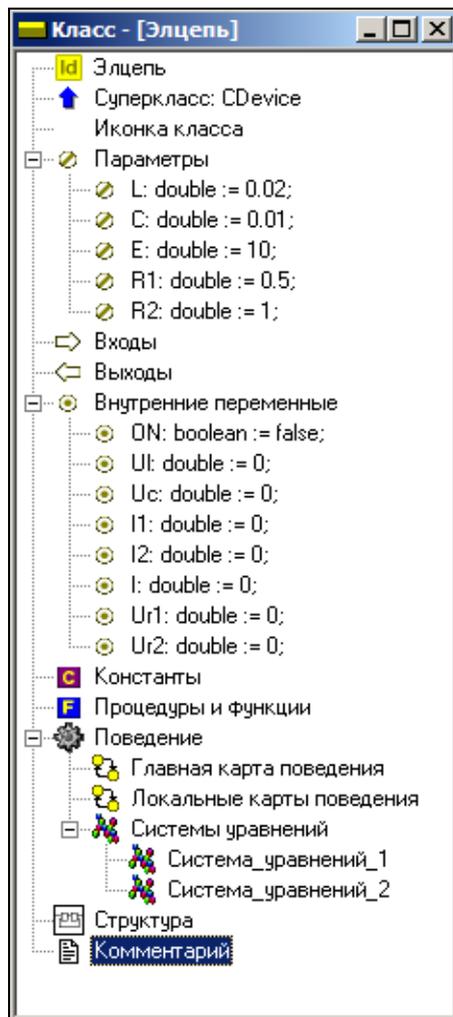


Рис. 2.36. Переменные и параметры проекта

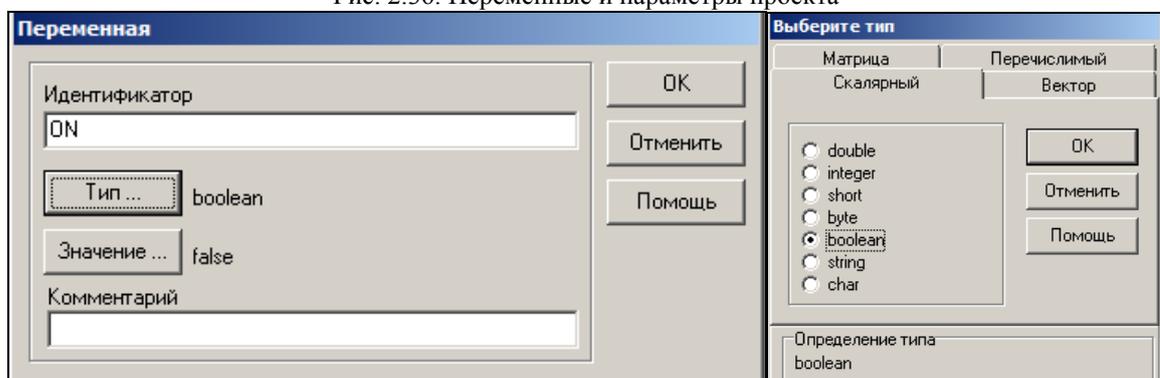


Рис. 2.37. Задание переменной **ON** и ее типа **boolean** с исходным значением **false**

Создадим математическую модель электрической цепи. Новая модель будет отражать изменение электрических параметров цепи во времени. Модель должна учитывать то, обстоятельство, что при выключении цепи, поведение системы меняется. Изменение поведения отображается с помощью карты поведения.

Введем уравнения, описывающее изменение переменных проекта с течением времени при замыкании цепи. Для этого нужно открыть окно **Система уравнений\_1**, в окне **Система уравнений\_1** щелкнуть правой кнопкой по пункту **Уравнения** и в контекстном меню выбрать пункт **Изменить** (рис. 2.38).

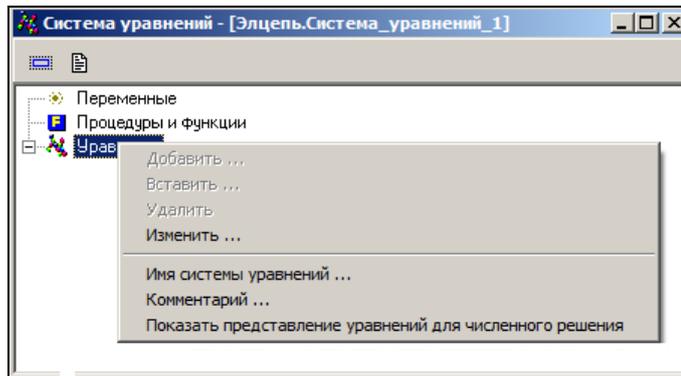


Рис. 2.38. Открытие редактора формул

В окне **Редактор Формул** ввести уравнения для замкнутой цепи (рис. 2.39).

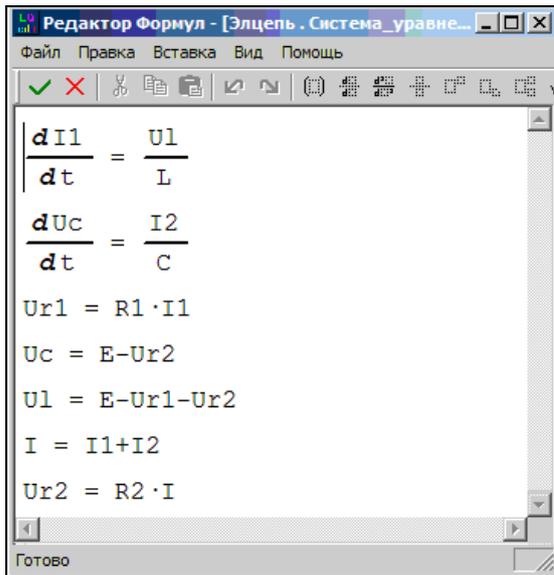


Рис. 2.39. Уравнения замкнутой цепи

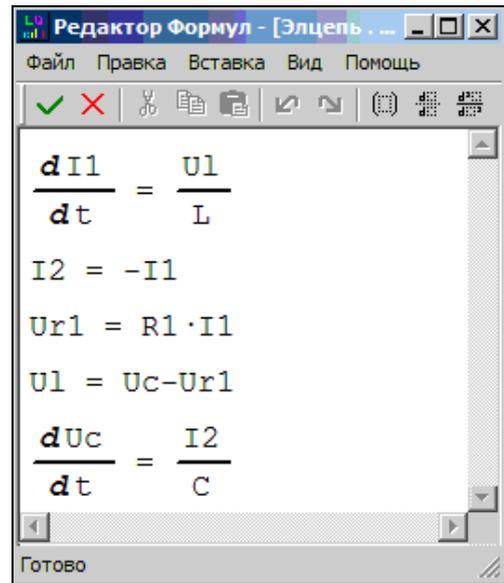


Рис. 2.40. Уравнения разомкнутой цепи

После чего щелкнуть по кнопке  - **Сохранить и выйти**. Далее необходимо щелкнуть по пункту **Системы уравнений** класса **Элцепь** и добавить **Систему уравнений\_2**. Эта система уравнений (рис. 2.40) описывает процессы в разомкнутой электрической цепи.

Решение задачи управления электрической цепью состоит в том, что для класса «**Элцепь**» (рис. 2.36) необходимо создать карту поведения, которая обеспечит смену поведения модели цепи при ее замыкании и размыкании. Требуется создать **Главную карту поведения**, которая в законченном виде представлена на рис. 2.41.

Карта поведения состоит из узлов: начальный узел **Init** (создается автоматически), узел **Цепь\_разомкнута** и узел **Цепь\_замкнута**. Узлы соединены переходами, которые имеют соответствующие условия срабатывания. С узлами необходимо связать **Систему уравнений\_1** и **Систему уравнений\_2**. Начальному узлу **Init** следует задать «**Пустое поведение**». Структура карты поведения создается с помощью кнопок окна редактирования карты поведения (рис. 2.41).

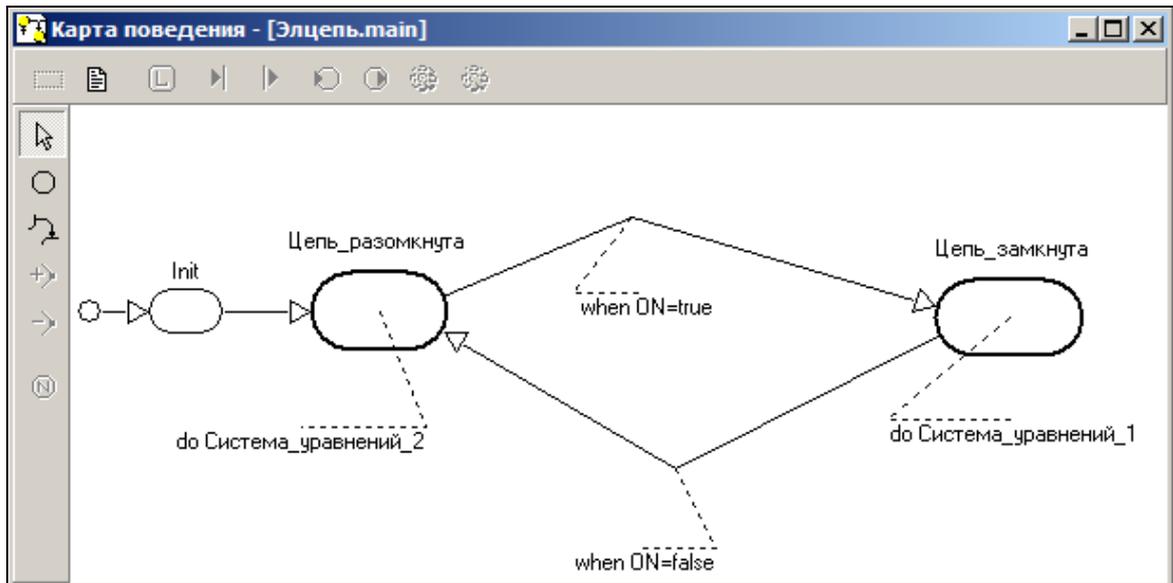


Рис. 2.41. Готовая карта поведения

Структура карты поведения создается с помощью кнопок окна редактирования карты поведения (табл. 2.2) или контекстного меню. Задание условий срабатывания переходов показано на рис. 2.42.

Создадим модель. Для этого нужно, как и ранее, нажать на кнопку  - **Запустить модель** в главном окне проекта. В результате появится окно **Виртуального стенда** и окно переменных и параметров (рис. 3.43).

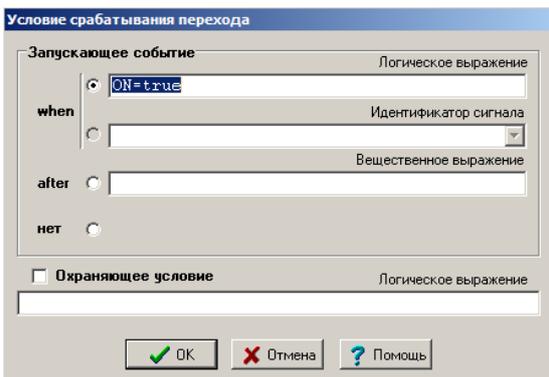


Рис. 2.42. Задание условия срабатывания перехода

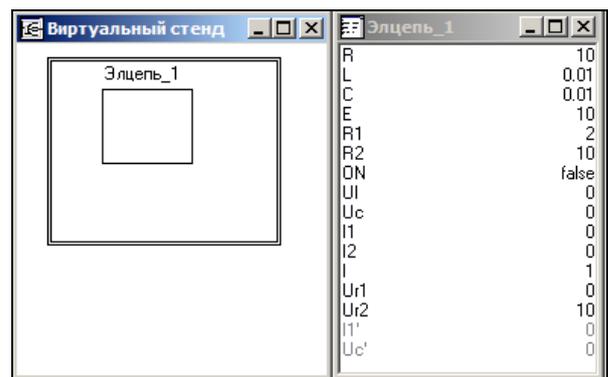


Рис. 2.43. Окно Виртуального стенда.

Таблица 2.2

Кнопка	Назначение
	Переход в диалог редактирования имени объекта.
	Переход в диалог редактирования пояснительного текста для карты поведения.
	Редактирование локальных переменных, функций и процедур карты поведения.
	Переход в диалог редактирования условия срабатывания выделенного перехода.
	Переход в диалог редактирования последовательности мгновенных действий в выделенном переходе.
	Переход в диалог редактирования последовательности входных действий выделенного узла.
	Переход в диалог редактирования последовательности выходных действий выделенного узла.
	Перехода в окно редактирования поведения, приписанного выделенному узлу.
	Приписывание выделенному узлу пустого поведения.
	Режим выделения
	Создание нового узла

	Создание нового перехода
	Добавить опорную точку
	Удалить опорную точку
	Показать имя узла

В окне переменных среди прочих указана переменная ON и ее исходное значение false (рис. 2.43). Создадим окно для 2D-анимации. В пункте меню Окна выберем подпункт Новая 2D-анимация. В меню Сервис выберем Стандартные 2D-компоненты. Появится окно (рис. 2.44):



Рис. 2.44. Окно 2D-компонентов

Стенд управления проектом (рис. 2.45) собирается в окне «Новая 2D анимация» с использованием стандартных 2D-компонент MVS: «Кнопка» и «Ползунок» (рис. 2.44). Переменную ON необходимо связать с кнопкой путем «перетаскивания». Теперь при нажатии кнопки переменная ON будет менять свое значение, и карта поведения будет менять состояние электрической цепи (замыкать и размыкать).

Запустите модель (кнопка ). При нажатии кнопки переменная ON изменит свое значение, и цепь перейдет в новое состояние (рис. 2.46). Аналогичным образом добавьте в окно 2D-анимация линейный индикатор и свяжите его с переменной ON. Теперь при нажатии кнопки (замыкание цепи) индикатор будет менять цвет, что соответствует свечению лампочки.

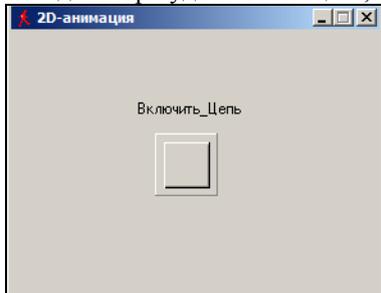


Рис. 2.45. Стенд управления

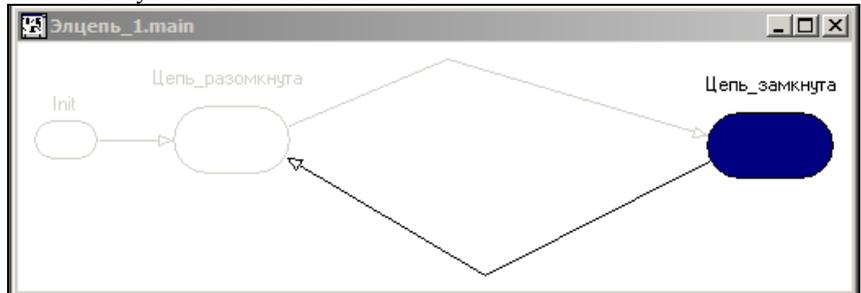


Рис. 2.46. Поведение цепи

Далее необходимо добавить временные диаграммы, которые будут отражать изменение переменных I1, I2 и UI, Uc во времени (рис. 2.47-2.48).

**Анализ результатов моделирования.** На основе созданной модели исследуйте свойства электрической цепи в зависимости от ее параметров ( $R_1$ ,  $R_2$ , C, L).

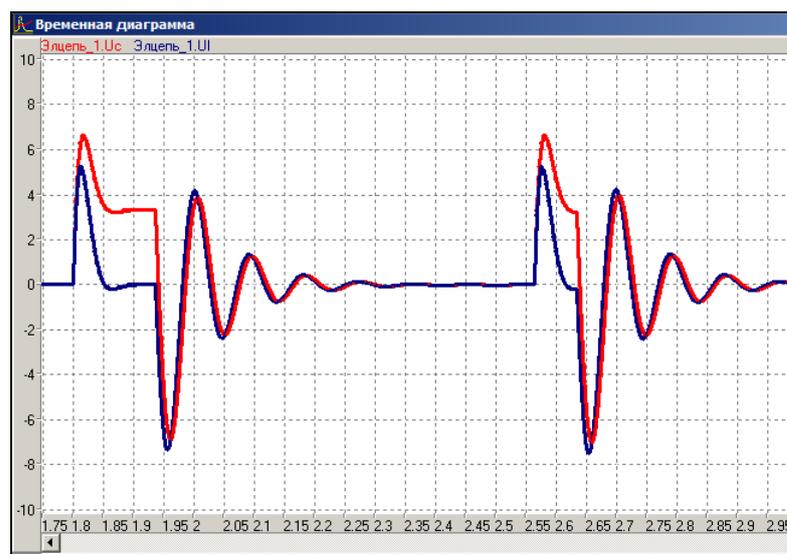


Рис. 2.47. Временная диаграмма изменения напряжения



Рис. 2.48. Временная диаграмма изменения тока

## 2.7. Моделирование системы управления

**Теоретическое введение.** Системы управления предназначены для поддержания определенного режима функционирования объекта или его заданного состояния. Системы управления с обратной связью учитывают состояние объекта при регулировании (рис. 2.49).

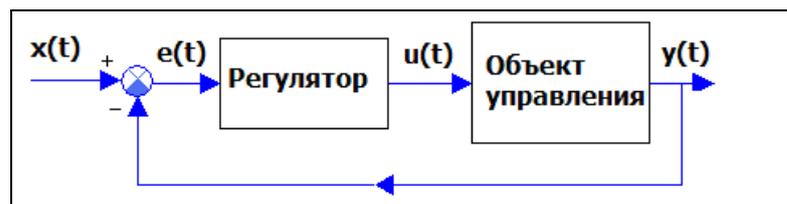


Рис. 2.49. Схема системы управления с обратной связью

Здесь:  $x(t)$  – управляющее воздействие,  $e(t)=x(t)-y(t)$ ,  $u(t)$  – воздействие регулятора на объект управления,  $y(t)$  – регулируемый параметр.

Пусть математическая модель объекта управления имеет вид:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = k \cdot u(t).$$

Модель регулятора суть следующее:

$$u(t) = u_0 \cdot \text{sign}(x(t) - y(t)).$$

Модель всей системы управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy(t)}{dt} = V(t); \quad \frac{dV(t)}{dt} = -b \cdot y(t) - a \cdot V(t) + k \cdot u(t); \quad u(t) = u_0 \cdot \text{sign}(x(t) - y(t))$$

$$y(t=0) = 0; \quad V(t=0) = 0.$$

**Постановка задачи моделирования.** Средствами MVS построить модель системы управления (рис. 2.49). Построить временную диаграмму переходного процесса для переменной  $y(t)$  и воздействия регулятора  $u(t)$ . Построить MVS-модель объекта управления, на который не действует управление.

Первоначальное значение параметров:  $a=1$ ;  $b=5$ ;  $k=5$ ;  $u_0=1$ ;  $x=1$ .

**Анализ результатов моделирования.** Выявить результат применения управления. Исследовать влияние значения параметра  $k$  на поведение системы. Выявить роль параметра  $x$ .

**Дополнительное задание.** Реализовать модель средствами Simulink (рис. 2.50). Модель объекта управления соответствует блоку *Transfer Fcn* вида  $\frac{1}{s^2 + a \cdot s + b}$ .

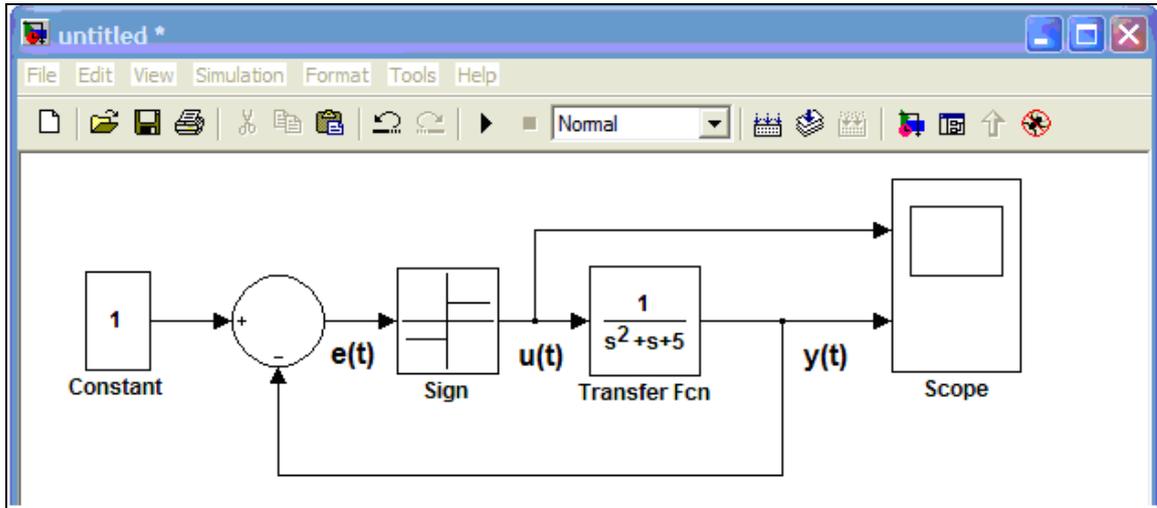


Рис. 2.50. Simulink-модель системы управления

## 2.8. Моделирование системы стабилизации электродвигателя

**Теоретическое введение.** Системы стабилизации предназначены для поддержания определенного состояния объекта. Рассмотрим систему стабилизации частоты вращения электродвигателя (рис. 2.51). Задача системы – стабилизация частоты вращения двигателя при его включении или при действии внешней механической нагрузки.

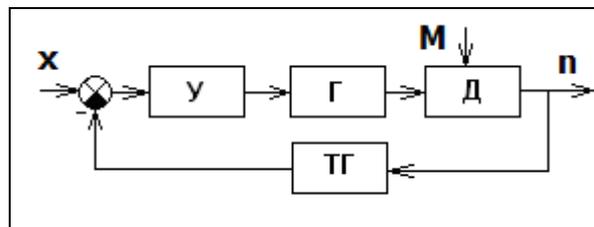


Рис. 2.51. Схема системы стабилизации

Здесь  $U$  – усилитель;  $\Gamma$  – генератор постоянного тока;  $D$  – двигатель постоянного тока;  $TГ$  – тахогенератор (устройство, которое генерирует напряжение, пропорциональное частоте вращения);  $M$  – момент внешней нагрузки на вал двигателя;  $n$  – частота вращения вала двигателя,  $X$  – внешнее электрическое воздействие при включении двигателя.

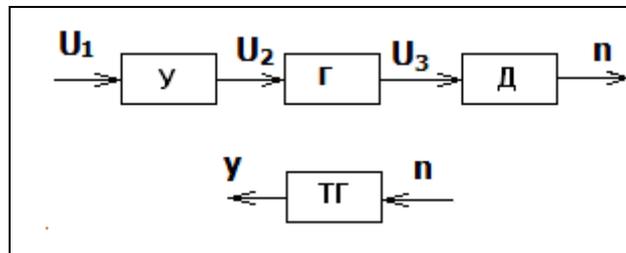


Рис. 2.52. Схема взаимодействия элементов системы

Математическая модель усилителя (рис. 2.52) представляется следующей зависимостью:

$$U_2 = k_u \cdot U_1.$$

В свою очередь, математическая модель генератора имеет вид:

$$a_g \frac{dU_3}{dt} + b_g \cdot U_3 = k_g \cdot U_2.$$

Математическая модель двигателя постоянного тока, описывающая поведение двигателя при изменении питающего напряжения, суть следующая:

$$a_d \cdot \frac{d^2 n}{dt^2} + b_d \cdot \frac{dn}{dt} + c_d \cdot n = k_d \cdot U_3.$$

Модель, описывающая поведение двигателя при изменении момента механической нагрузки на валу имеет вид:

$$a_d \cdot \frac{d^2 n}{dt^2} + b_d \cdot \frac{dn}{dt} + c_d \cdot n = k_m \cdot \left( a_m \frac{dM}{dt} + b_m \cdot M \right).$$

В итоге, с учетом принципа суперпозиции, для двигателя будем иметь:

$$a_d \cdot \frac{d^2 n}{dt^2} + b_d \cdot \frac{dn}{dt} + c_d \cdot n = k_d \cdot U_3 + k_m \cdot \left( a_m \frac{dM}{dt} + b_m \cdot M \right).$$

Модель тахогенератора имеет вид:  $y = k_t \cdot n$ . Тогда  $U_1 = x - y$ .

В данной работе строится единая математическая модель в виде общей системы уравнений, которая включает уравнения для всех элементов системы и соотношения для связей между элементами (рис. 2.53). Параметры системы регулирования представлены на рис. 2.53.

**Постановка задачи моделирования.** Построить MVS-модель системы стабилизации (рис. 2.53-2.54). Построить временные диаграммы переходных процессов при включении двигателя; для включенного двигателя при возникновении нагрузки на двигатель.

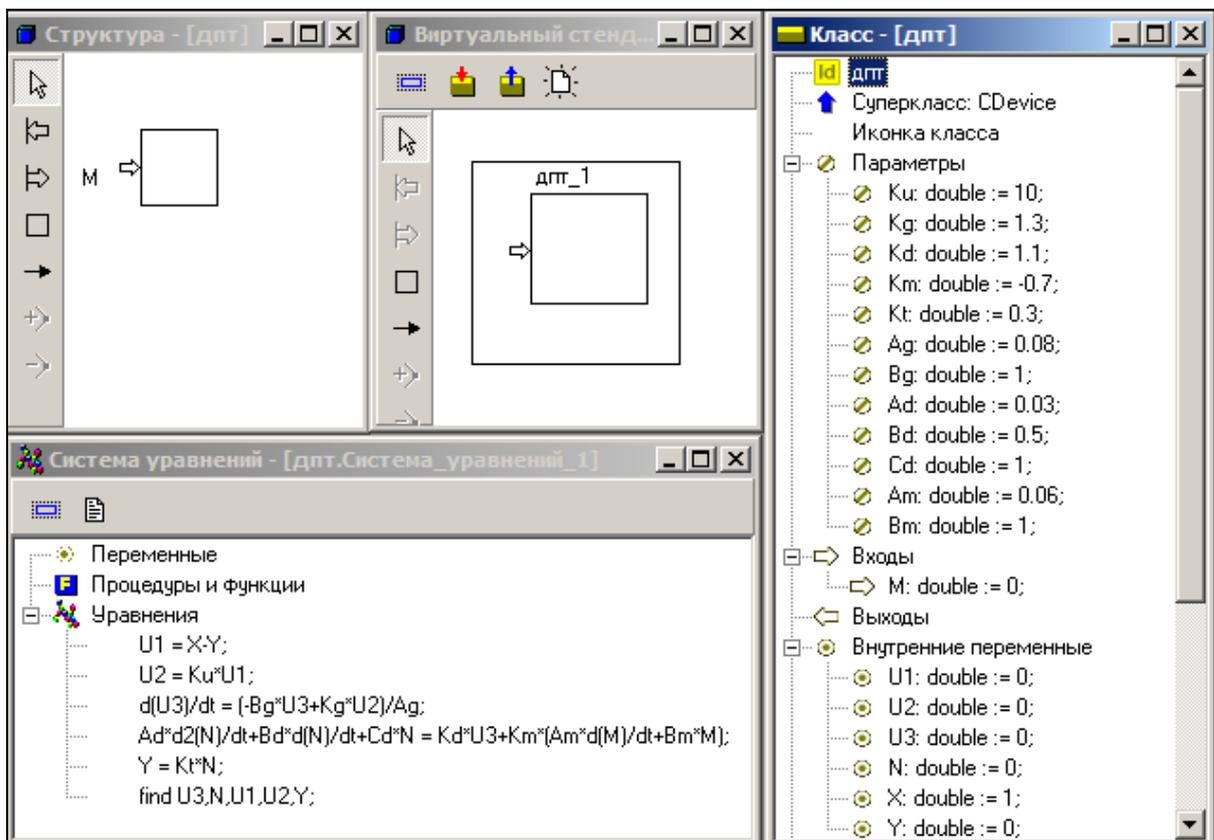


Рис. 2.53. MVS-модель системы стабилизации

**Анализ результатов моделирования.** Выявить влияние обратной связи на поведение системы.

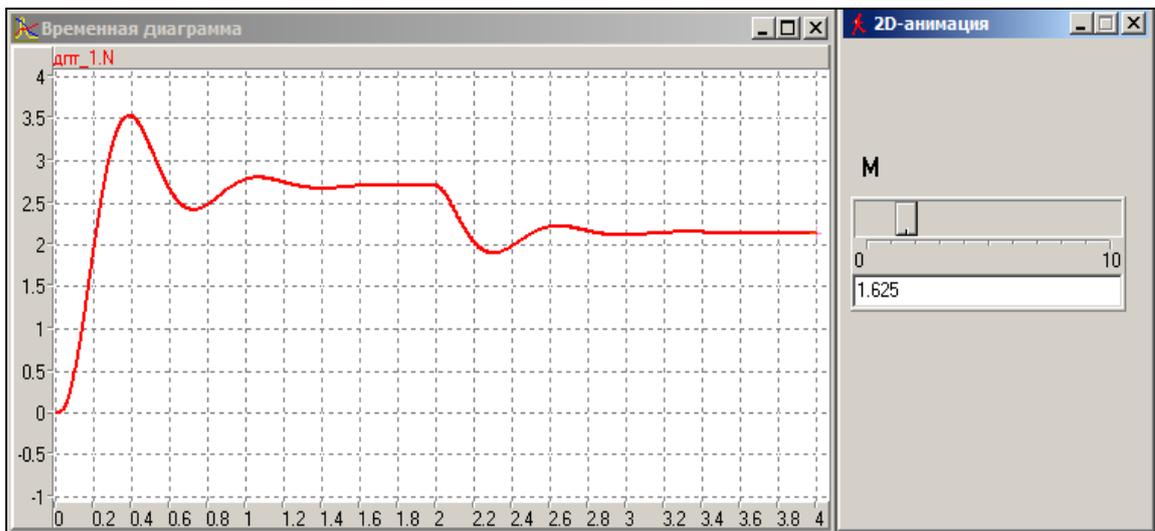


Рис. 2.54. Временная диаграмма и элементы управления экспериментом  
**Дополнительное задание.** Построить модель средствами Simulink (рис. 2.55).

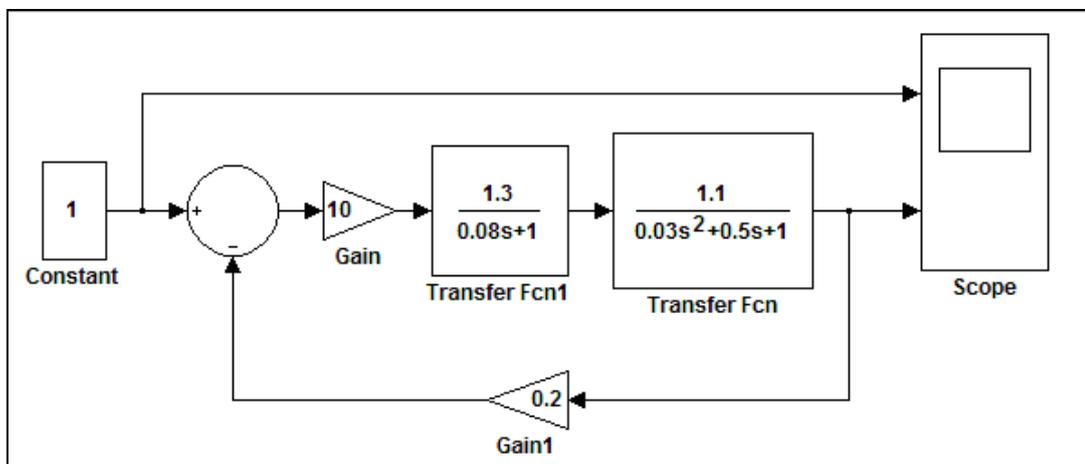


Рис. 2.55. Simulink-модель системы стабилизации

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить Simulink-модель логических схем (рис. 2.56):

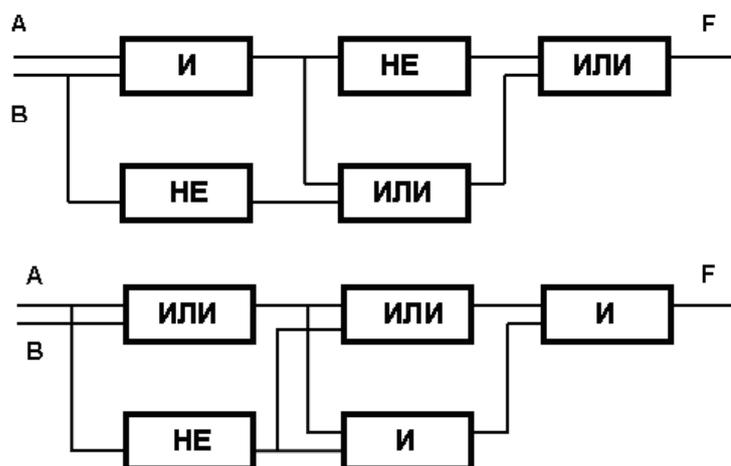


Рис. 2.56.

2. Построить математическую модель и MVS-модель электрического фильтра, представленного на схеме (рис. 2.57):

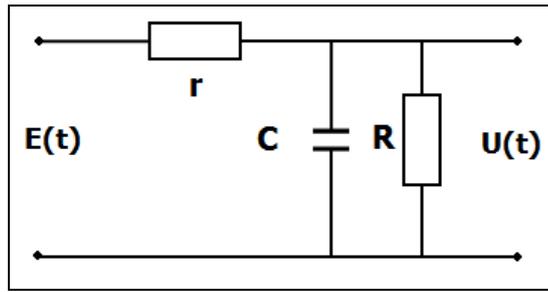


Рис. 2.57.

$$E(t) = \text{abs}(E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)); \quad U(t=0) = 0. \quad E_0 = 10; \quad \omega = 100; \quad R = 20.$$

Результат моделирования отобразить в виде временной диаграммы:  $E(t)$ ;  $U(t)$ . По результатам моделирования подобрать значения  $r$  и  $C$ , обеспечивающие сглаживание пульсаций входного напряжения  $E(t)$ .

3. Построить Simulink-модель системы стабилизации (рис. 2.58). Исследовать переходный процесс при включении двигателя.

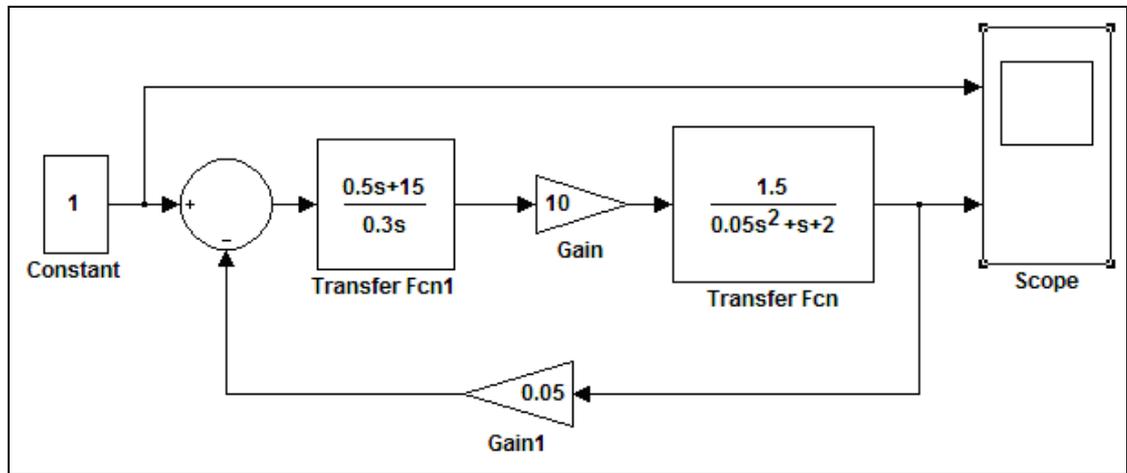


Рис. 2.58.

4. Построить MVS-модель системы термостатирования объекта, математическая модель которой суть следующее:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = -\bar{T} + \bar{q}; \quad \bar{T}(\bar{t} = 0) = 1.$$

Здесь  $\bar{T}$  - температура объекта,  $\bar{q}$  - мощность обогревателя (все величины – безразмерные). Первоначально  $\bar{q} = 0$ . При охлаждении объекта до температуры  $T_{\min}$  включается обогрев ( $\bar{q} > 0$ ). Обогрев продолжается до достижения температуры  $T_{\max}$  и затем выключается, т.е.  $\bar{q} = 0$ . Результат моделирования отобразить в виде временной диаграммы.

Дополнительную информацию по теме «Компьютерное моделирование систем» можно найти на сайтах и в публикациях: [2], [4], [9], [10-12], [23], [25], [29-30].

### III. Построение оптимизационных моделей

#### 3.1. Поражение цели с заданными координатами

**Теоретическое введение.** В данной работе используется математическая модель, аналогичная той, которую мы применяли при построении баллистической траектории (п. 1.6). Эта модель в безразмерном виде представлена ниже:

$$\frac{d\bar{V}_y}{dt} = -1 - k\bar{V}_y; \quad \frac{d\bar{V}_x}{dt} = -k \cdot \bar{V}_x;$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{V}_x; \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{V}_y.$$

$$\bar{x}(\bar{t} = 0) = 0, \quad \bar{y}(\bar{t} = 0) = 0, \quad \bar{V}_x(\bar{t} = 0) = \cos(\alpha); \quad \bar{V}_y(\bar{t} = 0) = \sin(\alpha);$$

**Постановка задачи моделирования.** Целью моделирования является определение значения угла  $\alpha$ , которое обеспечит попадание тела в точку с координатами  $x = a$ ,  $y = b$  или максимально возможное приближение траектории к данной точке. Примерно такая задача стоит перед расчетом артиллерийского орудия.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде пакета MVS. Первоначально средствами MVS необходимо построить модель движения тела (рис. 3.1), подобную модели из работы 1.6.

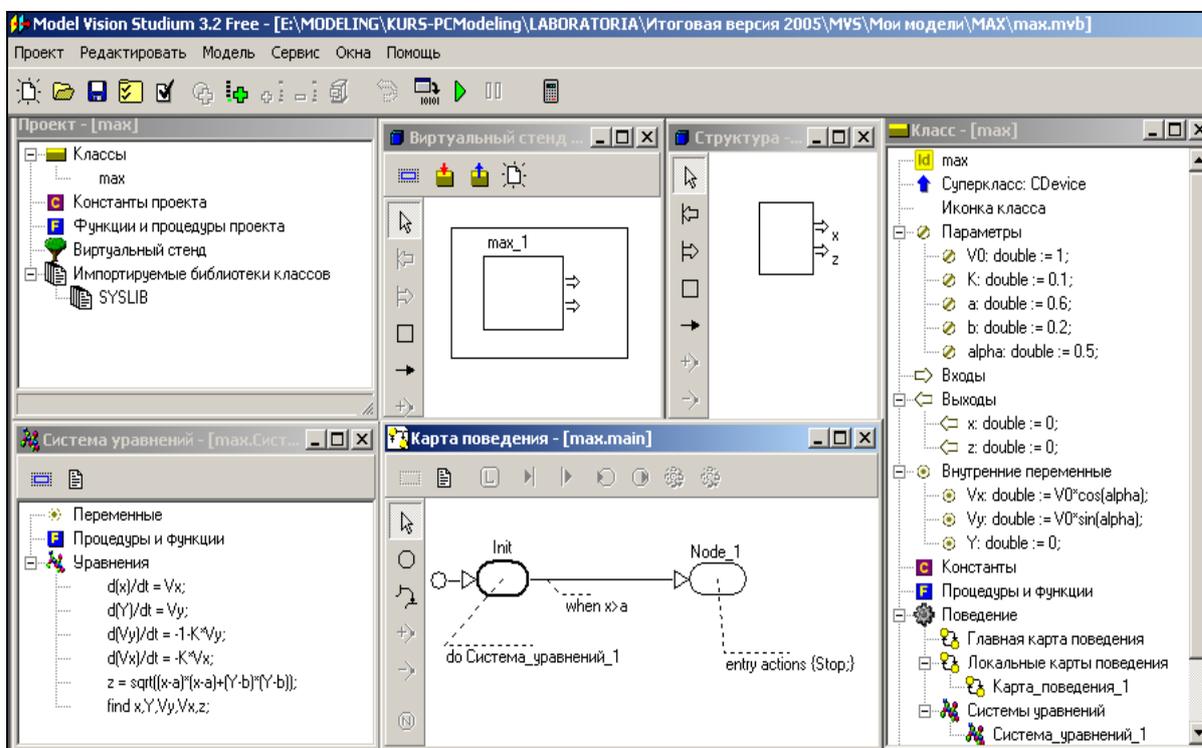


Рис. 3.1. Модель движения тела

Для данной модели переменная  $x$  объявляется как **выходная переменная**. В систему уравнений должна быть добавлена переменная  $z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  - расстояние до заданной точки, которая

объявляется **выходной** переменной. С данными переменными будет взаимодействовать пакет оптимизации MVS. Дополнительное окно «**Структура**» появится автоматически после объявления переменных  $x$  и  $z$ .

Для решения данной задачи необходимо построить карту поведения и предусмотреть останов полета, если выполняется условие:  $x > a$ . Именно для этого момента в подсистеме оптимизации MVS будет определяться расстояние до заданной точки.

Далее выполним запуск модели , дополним модель фазовой диаграммой и проведем эксперимент с начальными значениями параметров по рис. 3.1. Его результат представлен на рис. 3.2. Очевидно, что при первоначально выбранном значении параметра  $\alpha = 0.5$  попадания в цель не происходит.

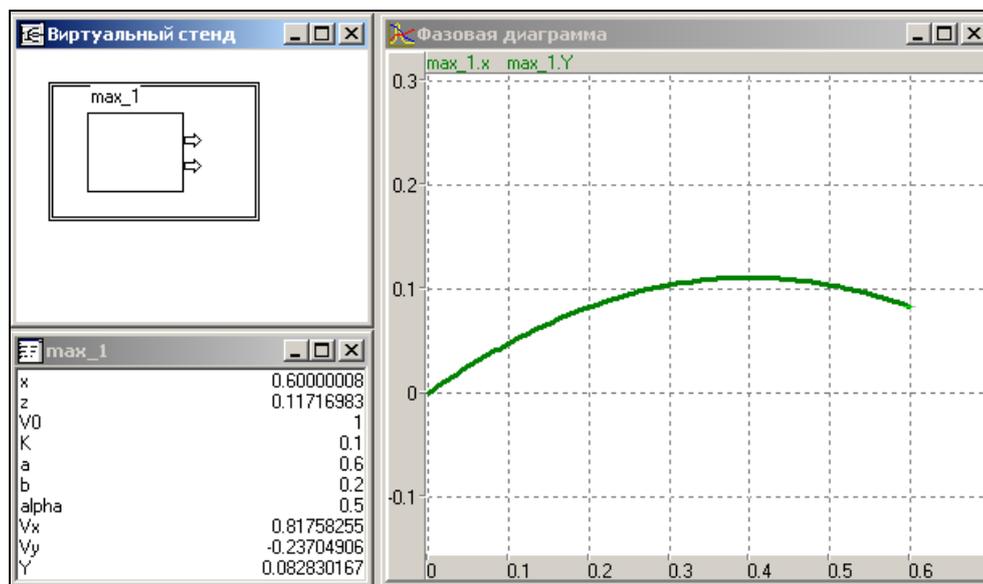


Рис. 3.2. Результат моделирования для начальных значений параметров

После проведения данного эксперимента необходимо закрыть окно визуальной модели по схеме: «**Рестарт**»-«**Установки**»-«**Выход**». На вопрос о сохранении изменений модели необходимо ответить: «**Да**».

После выполнения указанных действий можно приступить к решению задачи определения значения угла  $\alpha$ , которое обеспечит попадание в цель. При решении задачи будем использовать пакет оптимизации MVS. Для применения пакета оптимизации в окне проекта (рис. 3.1) выполним действия: пункт меню «**Сервис**» - «**Оптимизация**».

В результате откроется окно подсистемы оптимизации (рис. 3.3), поля которого: «**Параметры**», «**Функционал**», «**Ограничения**», «**Вычислять функционал в момент...**»; необходимо заполнить с использованием метода перетаскивания в соответствии с рис. 3.3.

Решение задачи поиска **минимального значения**  $z$  (расстояние до заданной точки) будет выполнено после нажатия кнопки . Предварительно в пункте меню «**Установки**» необходимо выбрать метод оптимизации «**Random search**» (рис. 3.4).

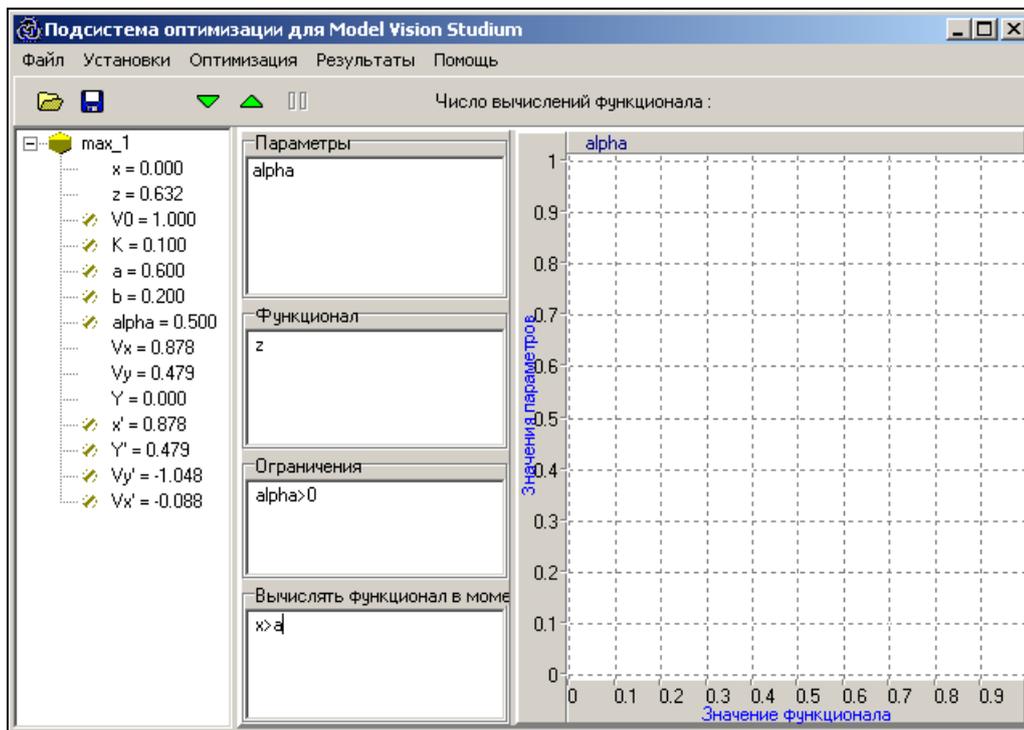


Рис. 3.3. Подсистема оптимизации

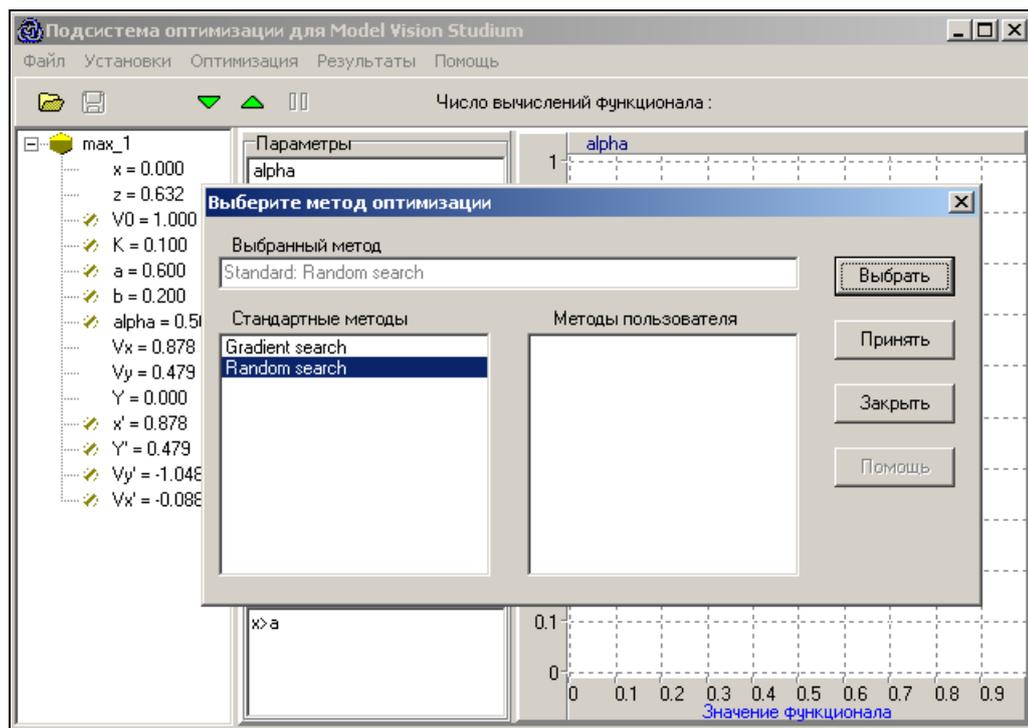


Рис. 3.4. Выбор метода оптимизации

Подсистема оптимизации пакета MVS определит такое значение параметра  $\alpha$ , при котором значение переменной  $z$  будет минимально. Результат поиска оптимального решения представлен на рис. 3.5.

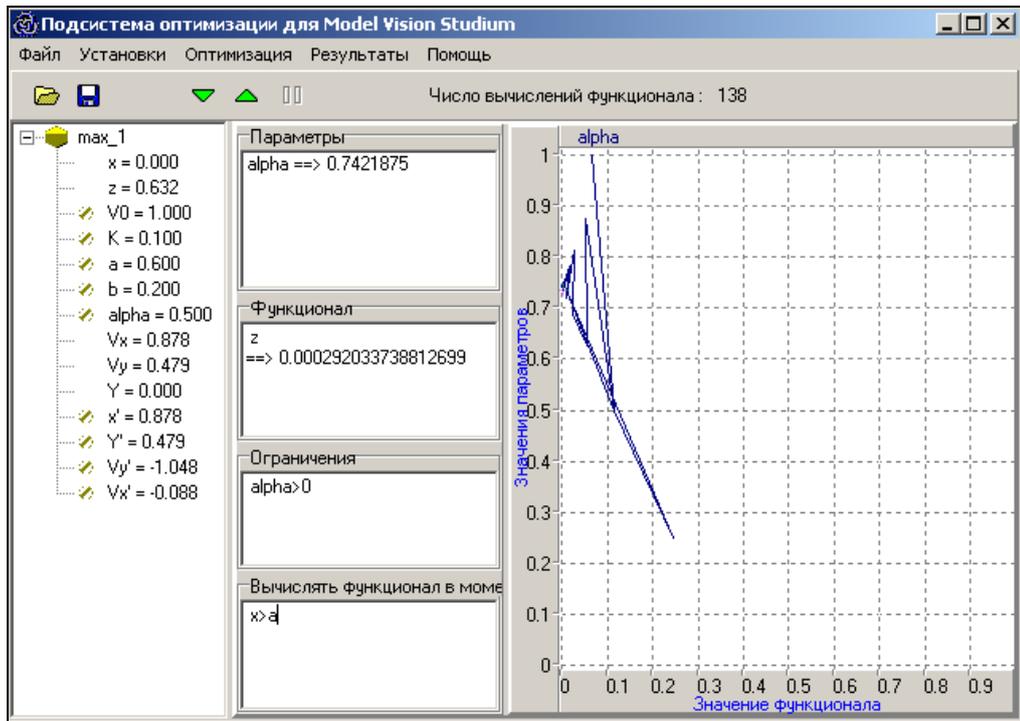


Рис. 3.5. Результат поиска оптимального значения угла  $\alpha$

**Анализ результатов моделирования.** Необходимо задать найденное значение параметру  $\alpha$  и провести моделирование движения тела повторно. Результат, представленный на рис. 3.6, свидетельствует о том, что попадание в цель действительно происходит.

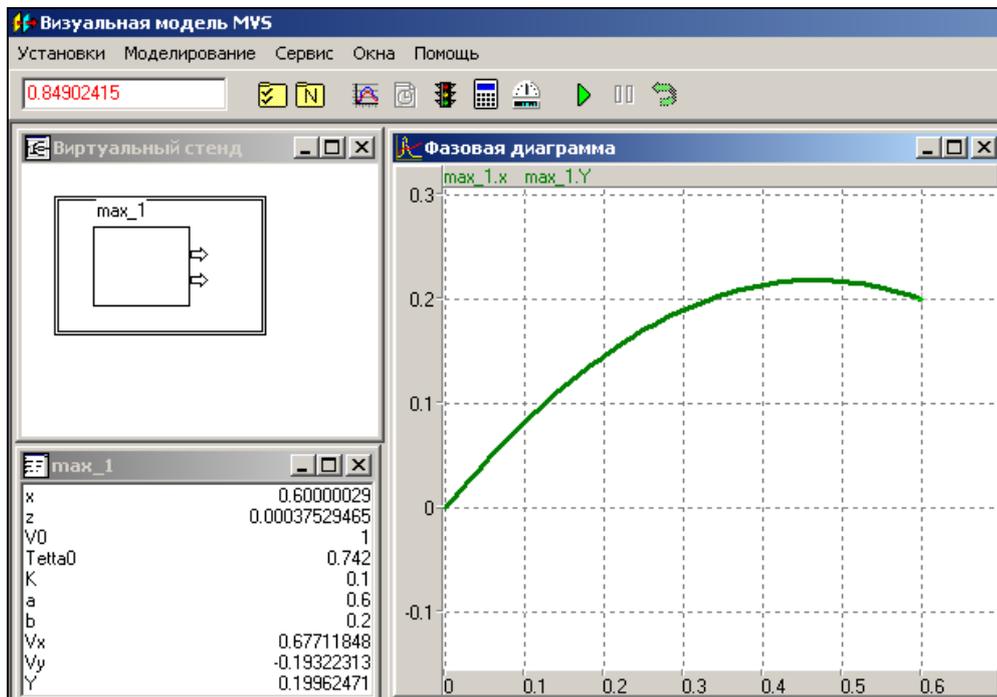


Рис. 3.6. Траектория движения тела при оптимальном значении угла  $\alpha$

Если попадание в заданную точку невозможно, то пакет оптимизации определит значение угла  $\alpha$ , при котором траектория полета пройдет максимально близко от заданной точки. Попробуйте в экспериментах с моделью задать координаты: точки  $a = 0.4$ ,  $b = 0.4$  и решить задачу оптимизации.

### 3.2. Оптимальное использование ресурсов

**Теоретическое введение.** Пусть предприятие может выпускать 4 вида продукции, для изготовления которой требуется сырье одного и того же типа. Например, продукцией является мебель. Известен расход трудовых, сырьевых и финансовых ресурсов потребный для выпуска единицы каждого вида продукции. Известна прибыль, которая будет получена при реализации единицы каждого вида продукции. Естественно, что ресурсы предприятия ограничены. Требуется спланировать производство таким образом, чтобы получить максимальную прибыль от реализации продукции.

В качестве **целевой функции**  $F$  выберем прибыль, которую можно вычислить по формуле:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \Rightarrow Max.$$

Здесь  $x_j$  - количество единиц  $j$ -го вида продукции,  $c_j$  - прибыль, которая будет получена при ее реализации.

Общее количество продукции, которое может выпускать предприятие, ограничено количеством работников, производительностью труда, мощностью оборудования и т.п. Все это составляет трудовые ресурсы предприятия. Предприятие имеет определенные запасы сырья, из которого может быть произведены разные виды продукции. Финансовые ресурсы каждого предприятия также ограничены. Производство единицы каждого вида продукции требует различного рода затрат, например, в виде зарплаты рабочим. Таким образом, все эти факторы являются ограничениями для выпуска продукции.

Будем считать, что затраты всех ресурсов линейно зависят от количества произведенной продукции. Тогда указанные ограничения можно задать в виде неравенств:

$$T_p = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1$$

$$C_p = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2$$

$$\Phi_p = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq b_3$$

где  $T_p$  - расход трудовых ресурсов,  $C_p$  - расход сырьевых ресурсов,  $\Phi_p$  - расход финансовых ресурсов,  $b_i$  - имеющийся запас  $i$ -го ресурса,  $a_{ij}$  - величина  $i$ -го ресурса, необходимая для производства единицы  $j$  вида продукции. Кроме того, могут быть заданы явные ограничения на количество единиц каждого вида продукции в виде граничных условий:

$$e_j \leq x_j \leq d_j.$$

Такие ограничения появляются, например, при выполнении предприятием заказа по контракту. Естественной нижней границей для каждого вида продукции является **нулевое** значение, так как предприятие производит продукцию.

В ряде случаев произведенная продукция должна иметь законченный вид. Действительно, вряд ли найдется покупатель, например, на 0,36 телевизора или 0,75 автомобиля. Тогда в задаче оптимизации необходимо указать **целочисленный** тип допустимых значений переменных  $x_j$ .

Таким образом, задача оптимального использования ресурсов сводится к задаче **линейной оптимизации** или к задаче **целочисленной линейной оптимизации**.

**Постановка задачи моделирования.** Определить оптимальный план производства исходя из заданных ограничений при условии получения максимума прибыли.

**Порядок выполнения работы.** Для решения задачи оптимизации средствами электронных таблиц предварительно требуется создать таблицу, представленную на рис. 3.7.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2		x1	x2	x3	x4		
3	Значение	0	0	0	0		
4	Нижняя граница	0	0	0	0		
5	Верхняя граница	4	5	8	8	Прибыль	
6	Прибыль от реализации единицы продукции	80	95	125	150	0	
7	Вид ресурса	Потребное количество ресурса для производства единицы продукции				Использование ресурса	Запас ресурса
8	Трудовые	2	3	3	4	0	80
9	Сырьевые	5	7	7	6	0	140
10	Финансовые	12	10	12	15	0	250

Рис. 3.7. Таблица для решения задачи оптимального размещения ресурсов

Все формулы (вычисления прибыли и объема использованных ресурсов) одинаковы по своей структуре. Каждая формула представляет собой сумму произведений заданных коэффициентов и переменных  $x_j$ . Например, общая прибыль от реализации всех видов продукции вычисляется как сумма произведений объема каждого вида продукции на величину прибыли от продажи единицы продукции. При вводе этих формул рекомендуется использовать функцию Excel «СУММПРОИЗВ» (рис. 3.8).

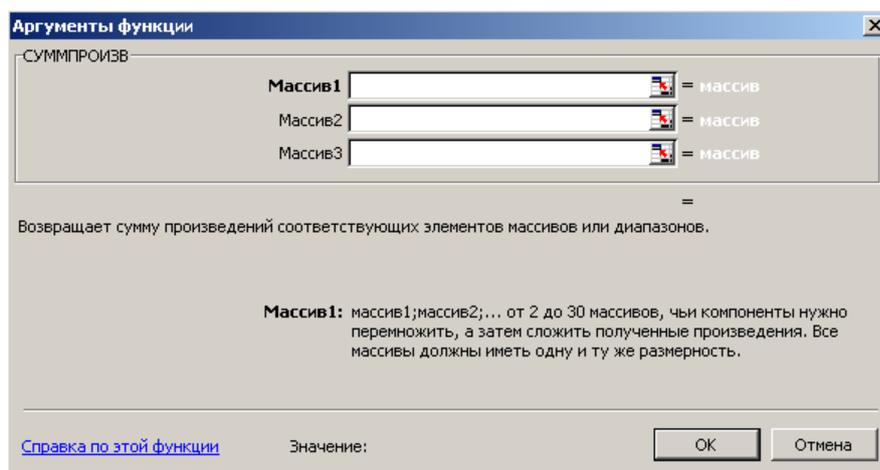


Рис. 3.8. Диалоговое окно функции «СУММПРОИЗВ»

В ячейки **B6-E6** вводятся данные о прибыли при реализации единицы конкретного вида продукции - коэффициенты  $C_j$  целевой функции. В ячейку **F6** вводится формула вычисления прибыли от реализации всего объема произведенной продукции всех видов.

В ячейки **F9-F11** вводятся формулы вычисления трудовых, сырьевых и финансовых затрат. В ячейки **G9-G11** вводятся значения коэффициентов  $b_i$  - запасы ресурсов, которыми располагает предприятие.

В ячейки **B9-E11** вводятся данные о затратах ресурсов на производство единицы каждого вида продукции – коэффициенты  $a_{ij}$ . В ячейках **B4-E5** задаются граничные значения для каждого вида продукции (если они заданы в задаче). Диапазон ячеек **B3-E3** является **изменяемым**. В эти ячейки будет помещено решение задачи.

В представленной таблице исходные данные выделены красным цветом, ячейки с формулами синим, а результат решения задачи выделен зеленым цветом. После создания таблицы, ее заполнения исходными данными и формулами, следует вызвать надстройку «Поиск решения» и создать собственно оптимизационную модель.

В открывшемся диалоговом окне «Поиск решения» (рис. 3.9) указывается **адрес целевой ячейки** (ячейка с формулой вычисления прибыли); **вид оптимизационной задачи** (поиск максимума); **диапазон**

изменяемых ячеек, где будет помещено найденное оптимальное решение; и, наконец, задаются ограничения.

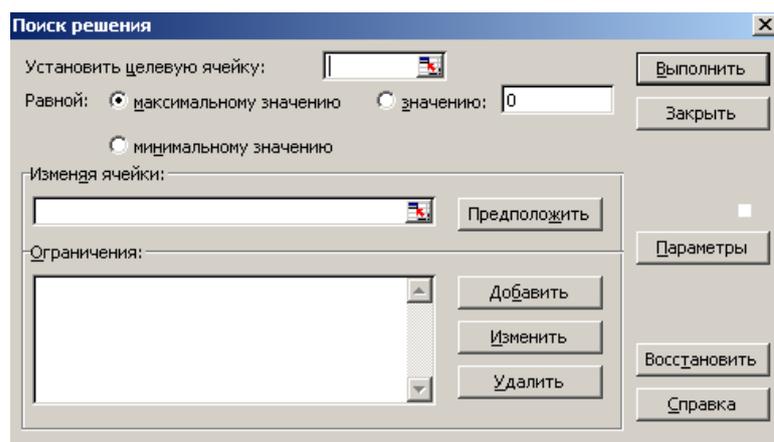


Рис. 3.9. Диалоговое окно «Поиск решения»

Ввод и редактирование ограничений осуществляется с помощью кнопок диалогового окна «Поиск решения»: «Добавить», «Изменить», «Удалить». При добавлении ограничения открывается одноименное диалоговое окно, где указываются ссылки на ячейки и вид соотношения в ограничении (рис. 3.10).

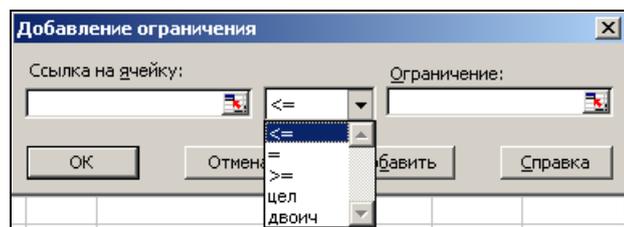


Рис. 3.10. Диалоговое окно «Добавление ограничений»

При решении задач линейной оптимизации необходимо по команде «Параметры» в окне «Поиск решения» выбрать вид модели «Линейная модель» (рис. 3.11).

В этом случае для решения задачи используется симплекс-метод. Поиск решения производится по команде «Выполнить». Если все условия задачи выполнены, следует сообщение о найденном решении (рис. 3.12) и оно размещается в изменяемых ячейках. В противном случае следует сообщение о причине неудачной попытки решения.

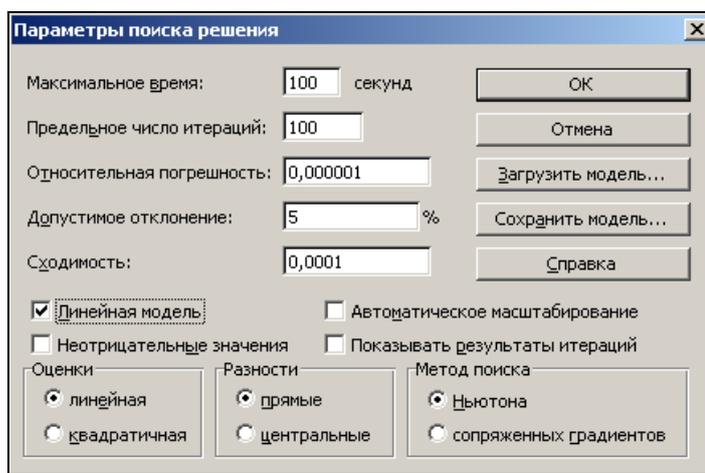


Рис. 3.11. Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

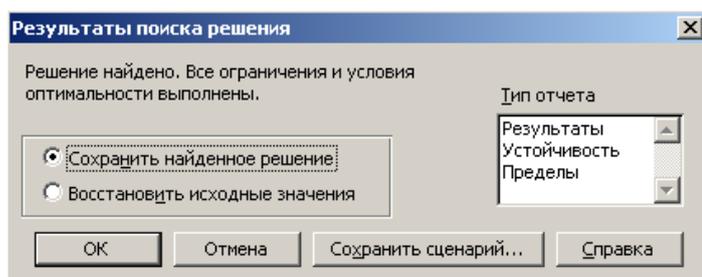


Рис. 3.12. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

**Задание по работе.** Решить задачу для заданного на рис. 3.7 варианта исходных данных и определить оптимальный план производства исходя из ограничений и максимума прибыли без учета верхней границы. Найти оптимальное решение при заданных значениях верхней границы по каждому виду продукции и ограничении целочисленности результатов.

Решите задачу с ограничениями по количеству каждого вида продукции:  $2 \leq x_1 \leq 6$ ;  $4 \leq x_2 \leq 8$ ;  $0 \leq x_3 \leq 4$ ;  $3 \leq x_4 \leq 8$ . Определить производственный план исходя из ограничений и максимума прибыли на рубль финансовых затрат.

### 3.3. Определение оптимального плана перевозок

**Теоретическое введение.** Имеется ряд заводов-производителей некоторой продукции. Имеется ряд потребителей этой продукции. Известна мощность заводов – количество производимой ими продукции (ячейки **B11-B13**, рис. 3.13). Для каждого потребителя известна его заявка на продукцию заводов (ячейки **C8-G8**). Задана стоимость перевозки (тариф) единицы продукции от каждого производителя к каждому потребителю (ячейки **C10-G10**). В представленной ниже таблице эти исходные данные выделены красным цветом (рис. 3.13).

**Целевая функция** – общие затраты на перевозки. **Изменяемые ячейки (C2:G5)** – объемы перевозок от каждого производителя к каждому потребителю.

**Ограничения задачи:** план поставок для каждого завода-производителя не может превышать его мощности; заявки потребителей должны быть удовлетворены полностью; количество перевезенной продукции не может быть отрицательным.

**Постановка задачи моделирования.** Требуется определить оптимальный план поставок, обеспечивающий минимум общих затрат на перевозки.

**Порядок выполнения работы.** Задача оптимизации решается с помощью надстройки «Поиск решения» (пункт меню «Сервис»). Первоначально необходимо создать электронную таблицу по представленному примеру (рис. 3.13) и внести в нее исходные данные (выделены красным цветом). Для создания оптимизационной модели необходимо в соответствующие ячейки ввести формулы расчета значения целевой функции и других величин, которые потребуются для ограничений (ячейки выделены синим цветом).

Формулу расчета целевой функции введем в ячейку **B16**. В ячейках **B3-B5** размещаются формулы для вычисления планируемого объема поставок с каждого завода всем потребителям. Например, объем поставок с завода в А определяется как сумма объемов поставок всем потребителям – ячейки **C3-G3**. Для остальных заводов план поставок вычисляется аналогично. В ячейку **B6** помещена формула вычисления общего объема поставок со всех заводов.

В ячейках **C8-G8** размещаются формулы вычисления суммарного количества продукции, полученной каждым потребителем от разных производителей. В ячейках **C16-G16** размещаются формулы вычисления затрат на перевозки для каждого потребителя. Общий объем затрат на перевозки (ячейка **B16**) вычисляется как сумма затрат на перевозки к каждому потребителю. В примере, результаты вычислений по этим формулам выделены, синим цветом.

Результаты решения задачи (план поставок каждому потребителю от данного производителя) представлены в ячейках **C3-G5** для справки. Они выделены зеленым цветом. Это так называемые изменяемые ячейки и их значения определяются в ходе решения задачи.

После создания таблицы и ее заполнения исходными данными, формулами вызываем надстройку «Поиск решения» и создаем собственно оптимизационную модель. В открывшемся диалоговом окне указываем адрес **целевой ячейки** (ячейка с формулой вычисления целевой функции); **вид оптимизационной задачи** (поиск минимума); указываем **диапазон изменяемых ячеек**, где будет помещено найденное оптимальное решение; и, наконец, задаем **ограничения**.

	A	B	C	D	E	F	G
1			Потребители				
2	Заводы-производители:	План поставок	I	II	III	IV	V
3	A	305	0	0	70	185	50
4	B	280	0	200	80	0	0
5	C	300	160	0	0	0	140
6	Итого Заказано:	885					
7			Поставлено каждому потребителю				
8			160	200	150	185	190
9		Заявки потребителей	160	200	150	185	190
10	Мощность заводов		Тариф на перевозку единицы продукции				
11	A	320	10	9	6	5	6
12	B	280	8	6	4	8	10
13	C	300	5	8	6	5	4
14	Общая мощность заводов:	900					
15		Общие затраты	Стоимость перевозок к потребителю				
16		4525	800	1200	740	925	860

Рис. 3.13. Таблица определения оптимального плана перевозок

Ввод и редактирование ограничений осуществляется с помощью кнопок диалогового окна «Поиск решения»: «Добавить», «Изменить», «Удалить». При добавлении ограничения открывается одноименное диалоговое окно, где задаются ссылки на ячейки и вид соотношения в ограничении.

При решении задач линейной оптимизации необходимо на вкладке «Параметры» выбрать вид модели: «Линейная модель». В этом случае для решения задачи используется симплекс-метод. Поиск решения производится по команде «Выполнить». Если все условия задачи выполнены, следует сообщение о найденном решении, и оно размещается в **изменяемых ячейках**. В противном случае следует сообщение о причине неудачной попытки решения. Напоминаем, что при решении задачи необходимо внимательно читать эти сообщения.

**Задание по работе.** Для варианта исходных данных по рис. 3.13 определить оптимальный план перевозок продукции. На основе данных о потребности в продукции найти оптимальное размещение производственных мощностей на заводах с целью минимизировать общие затраты на перевозки. Для решения данной задачи необходимо самостоятельно переработать первоначальную оптимизационную модель.

### 3.4. Оптимальное проектирование

**Теоретическое введение.** Каждый объект имеет определенные свойства, которые поддаются измерению, например, масса, стоимость, производительность и т.п. Количественные характеристики объекта представляются параметрами. Параметры могут быть заданы, например, в техническом задании на проектирование объекта. Ряд параметров необходимо определить исходя из некоторых условий.

**Задание на проектирование.** Требуется спроектировать бак для жидкости, имеющий форму параллелепипеда. Бак имеет днище и четыре боковые стенки. Требуется определить размеры бака: **длину, ширину и высоту**. Эта задача может быть сформулирована в нескольких вариантах:

1. Определить размеры бака заданного **объема**, изготовление которого потребует **минимум** материала.
2. Определить размеры бака, **стоимость** изготовления которого не должна превышать **заданной величины**, а **объем** должен быть **максимальным**.
3. Определить размеры бака заданного **объема** с минимальной **стоимостью** изготовления.

Для расчета параметров бака используем следующие формулы:

$$V = a \cdot b \cdot h, \quad S = a \cdot b + 2 \cdot (a + b) \cdot h, \quad L = 2 \cdot (a + b) + 4 \cdot h$$

Здесь  $a$  и  $b$  стороны основания (размеры днища),  $h$  - высота бака,  $V$  – объем бака,  $S$  - площадь необходимого листового материала (площадь боковой поверхности бака + площадь днища),  $L$  - длина сварных швов, соединяющих листы заготовок в единую конструкцию. Максимально допустимую стоимость бака обозначим  $C_{max}$ . Фактическую стоимость изготовления бака обозначим через  $C$ ,

стоимость единицы площади листового материала для изготовления бака обозначим через  $k$ , стоимость единицы длины сварного шва обозначим через  $p$ . Тогда ограничение по стоимости изготовления выразится следующим соотношением:

$$C = k \cdot S + p \cdot L; \quad C \leq C_{\max}.$$

**Порядок выполнения работы.** Для решения задач, которые представлены выше, необходимо в среде Excel создать таблицу по рис. 3.14. Таблица пригодна для решения всех вариантов задач (для некоторых случаев потребуются не все параметры).

Поиск решения по нелинейной модели производится методом итераций. Так как решается задача нелинейной оптимизации, то в ячейки **B3-D3** предварительно необходимо ввести начальные значений переменных более или менее правдоподобные. В эти ячейки (изменяемые ячейки) автоматически будет помещено найденное решение. В ячейках **E3** и **E5** задаются значения параметров  $k$  и  $p$ .

	A	B	C	D	E
1	Переменные				Параметры
2		a	b	h	K
3	Значения переменных				
4					P
5		Обозначения	Формулы	Значения	
6	Объем бака	V			
7	Площадь листа	S			
8	Длина сварного шва	L			
9	Стоимость изготовления	C			

Рис. 3.14. Таблица для решения задачи проектирования

В ячейки **C8 - C11** по правилам электронных таблиц вводятся формулы расчета объема бака, площади его поверхности, длины сварного шва, стоимости изготовления бака. В ячейку **E8** вводится значение объема бака, если он задан по условиям задачи. Максимально допустимая стоимость бака задается в ячейке **E11**. Напоминаем, что решение конкретных вариантов задачи проектирования бака требуют не всех данных и ограничений, представленных в таблице.

Для построения оптимизационной модели в диалоговом окне «Поиск решения» (рис. 3.15) необходимо задать адрес **целевой ячейки**, вид определяемого значения **целевой функции**, адреса **изменяемых ячеек** и **ограничения**.

Параметры поиска решения, задаваемые по умолчанию, обеспечивают решение задачи в подавляющем большинстве случаев, и менять их нет необходимости.

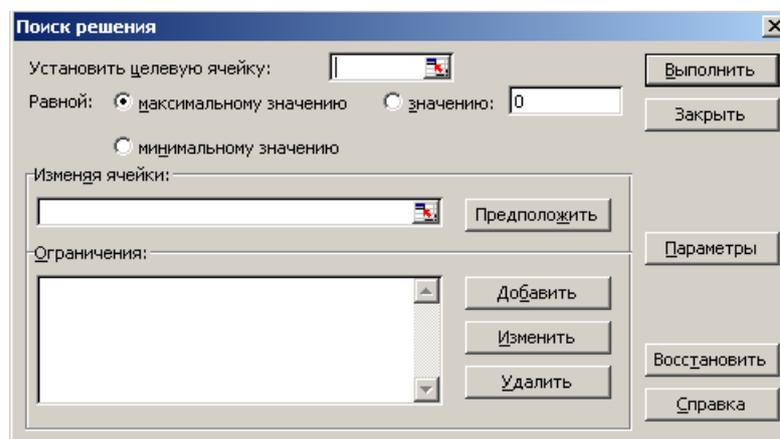


Рис. 3.15. Диалоговое окно «Поиск решения»

**Задание по работе.** Решить все варианты задачи проектирования бака. Конкретные значения параметров для всех вариантов задач задает преподаватель.

### 3.5. Оптимальная компоновка контейнера

**Теоретическое введение.** В данной работе решается типовая задача оптимизации. В содержательной постановке она формулируется следующим образом. Пусть, например, имеется контейнер заданного объема. Имеется ряд предметов, которыми необходимо загрузить этот контейнер. Каждый предмет имеет свою массу и объем. Заранее известно, что все предметы в контейнер не

поместятся. Требуется выбрать такой набор предметов, чтобы максимально загрузить контейнер, т.е. поместить в контейнер (скомпоновать) набор предметов **максимальной суммарной массы**. Варианты задачи могут иметь и другую содержательную постановку, что не меняет ее сути. Данная задача является оптимизационной. Целевую функцию зададим соотношением для вычисления массы контейнера:

$$M = \sum_{j=1}^n c_j m_j \Rightarrow \text{Max.}$$

Здесь  $m_j$  - масса  $j$ -го предмета,  $n$  – общее количество имеющихся предметов. Коэффициенты целевой функции  $c_j$  могут принимать одно из двух значений:  $c_j = 1$  - предмет загружается в контейнер,  $c_j = 0$  - предмет не попадает в число загружаемых. Задача относится к классу целочисленных задач линейной оптимизации. Этот факт необходимо учесть при задании ограничений. Диалоговое окно «**Добавление ограничений**» позволяет это сделать, если в поле выбора вида отношения назначить значение «**двоич**» (рис. 3.16).

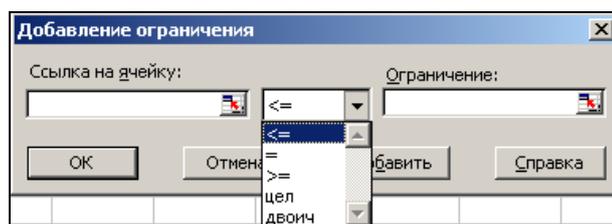


Рис. 3.16. Диалоговое окно добавления ограничений

Главным ограничением в задаче является заданный объем контейнера  $V_k$ . Данное ограничение зададим следующим соотношением:

$$V = \sum_{j=1}^n c_j V_j \leq V_k,$$

где  $V_j$  - объем  $j$ -го предмета,  $V_k$  - объем контейнера.

**Постановка задачи моделирования.** Определить такой набор значений коэффициентов  $c_j$ , который с учетом ограничения по объему контейнера, даст максимум целевой функции – массы контейнера.

**Порядок выполнения работы.** Необходимо создать таблицу, подобную тем, которые создавались при решении других задач. Примерная таблица представлена на рис. 3.17. Затем построить оптимизационную модель с помощью надстройки «Поиск решения».

Таблица должна содержать следующие исходные данные: объем контейнера  $V_{\text{max}}$ , массивы значений масс и объемов загружаемых предметов  $M_i$ ,  $V_i$  (на рисунке исходные данные выделены красным цветом).

Отдельный диапазон ячеек необходимо зарезервировать для значений коэффициентов  $C_i$  - это изменяемые ячейки (выделено зеленым цветом). Напоминаем, что значения коэффициентов  $C_i$  будут определены в ходе решения задачи. Эти значения не являются исходными данными, и задавать их при построении таблицы не следует.

В соответствующие ячейки ввести формулы вычисления **целевой функции** (масса контейнера  $M$ ) и объема загруженных предметов  $V$  (ячейки выделены синим цветом). При вводе этих формул рекомендуется использовать функцию Excel «СУММПРОИЗВ». На рис. 3.17 в строке 22 для справки представлены контрольные суммы масс и объемов.

Далее необходимо создать оптимизационную модель. Среди ограничений (диалоговое окно «Добавление ограничений», рис. 3.16), задается двоичный тип значений искомым коэффициентов  $C_i$ .

Результатом решения является набор значений  $C_i$  (на рис. 3.17 представлен зеленым цветом), который дает оптимальную загрузку контейнера. Найденное значение целевой функции это максимально возможное значение массы контейнера для данного исходного набора предметов.

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Ci</b>	<b>Mi</b>	<b>Vi</b>	<b>V</b>	<b>Vmax</b>	<b>M</b>
2	0	10	10	200	200	510
3	1	20	10			
4	1	25	10			
5	0	15	20			
6	1	45	25			
7	0	30	30			
8	1	50	10			
9	0	35	25			
10	0	25	50			
11	1	40	25			
12	1	60	10			
13	1	45	25			
14	1	50	25			
15	1	15	10			
16	0	20	15			
17	1	35	20			
18	1	55	15			
19	1	45	10			
20	0	30	30			
21	1	25	5			
22	<b>Σ</b>	<b>675</b>	<b>380</b>			

Рис. 3.17. Таблица для решения задачи оптимальной компоновки контейнера

### 3.6. Поиск критического пути на графе

**Теоретическое введение.** Структурные модели широко используются менеджерами в виде моделей сетевого планирования. Подобные модели представляют собой ориентированный граф взаимосвязей выполнения различных работ при реализации какого-либо проекта.

Основными элементами сетевой модели планирования являются: событие, работа, путь. Работа характеризует действия, требующие использования ресурсов. Графически работа отображается стрелкой (дуга графа), которая соединяет два события. Каждая работа имеет определенную продолжительность.

Событием называется результат выполнения одной или нескольких работ. События в сетевой модели - это вершины графа. Всегда имеется начальное событие (начало работы по реализации проекта) и конечное событие (полное завершение проекта). Работы, выходящие из некоторого события, не могут начинаться, пока не будут завершены все работы, входящие в это событие. Путь – это цепочка работ, соединяющих начальную и конечную вершины сетевой модели.

Сетевая модель позволяет установить последовательность работ, которая имеет наибольшую длительность (критический путь), и определяет сроки выполнения всего проекта. Несвоевременное выполнение работ, составляющих критический путь, ведет к срыву выполнения всего проекта.

**Постановка задачи моделирования.** Определить критический путь реализации проекта по рис. 3.18.

**Порядок выполнения работы.** Для решения задачи оптимизации средствами Excel предварительно требуется создать таблицу по рис. 3.18. В таблице представлены работы и события. Для каждой работы задана ее продолжительность, а также номера узлов графа сетевой модели (рис. 3.18), с которыми связана данная работа. Исходные данные представлены красным цветом, расчеты по формулам – синим, результат решения – зеленым.

Решением задачи является значения ячеек из диапазона В4:В17 (Дуга), которые могут принимать значения: 1 или 0 (двоичные). Значение Дуга=1 – работа включена в критический путь. Таким образом, диапазон ячеек В4:В17 является диапазоном изменяемых ячеек. Длина пути (ячейка М13) рассчитывается по формуле: =СУММПРОИЗВ(Дуга; Длительность). **Требуется найти путь, длина которого → max.** Таким образом, ячейка М13 является целевой.

Для каждого узла, включенного в путь, должно выполняться условие сохранения баланса потоков: для начального узла: Выход – Вход = 1 (узел имеет только выход); для промежуточных узлов: Выход – Вход = 0 (узел имеет один вход и один выход); для конечного узла: Выход – Вход = -1 (узел имеет только вход). Необходимо задать значения ограничений для баланса потоков. Эти значения обеспечивают построение цепочки событий (построение пути от начального узла к конечному узлу), с выполнением для каждого узла баланса потоков.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Поиск критического пути</b>											
2	<b>Работы</b>					<b>События</b>						
3	Работа	Дуга	Начало	Конец	Длительность	Вершина	Вход	Выход	Баланс	Ограничение баланса потоков		
4	A	1	1	2	3	1	0	1	1	1		
5	B	1	2	3	8	2	1	1	0	0		
6	C	0	2	4	5	3	1	1	0	0		
7	D	1	3	4	5	4	1	1	0	0		
8	E	0	3	6	6	5	1	1	0	0		
9	F	1	4	5	9	6	1	1	0	0		
10	G	1	5	6	3	7	1	1	0	0		
11	H	0	5	7	2	8	1	1	0	0		
12	I	0	5	9	5	9	1	0	-1	-1		
13	J	1	6	7	4	<b>Длина критического пути</b>				<b>48</b>		
14	K	0	6	8	7							
15	L	1	7	8	6							
16	M	0	7	9	5							
17	N	1	8	9	10							

Рис. 3.18. Электронная таблица для решения задачи

В таблице для каждой вершины графа необходимо определить входящий (Вход) и выходящий (Выход) поток, их баланс (Выход-Вход). Для вычисления потока в узлах необходимо использовать функцию вычисления суммы величин, которые удовлетворяют определенному условию. В Excel такую процедуру выполняет функция =СУММЕСЛИ() (познакомьтесь со справкой по функции). Например, входящий поток для узла определяется формулой =СУММЕСЛИ(Диапазон концов дуг; Номер узла; Диапазон коэффициентов «Дуга»), то есть, суммируются потоки по тем дугам, включенным в путь, концы которых соединены с заданной вершиной. Выходящий поток определяется аналогично.

При создании оптимизационной модели в окне «Поиск решения» (рис. 3.19) следует задать целевую ячейку, диапазон изменяемых ячеек и ограничения. На вкладке «Параметры» следует указать тип модели «Линейная».

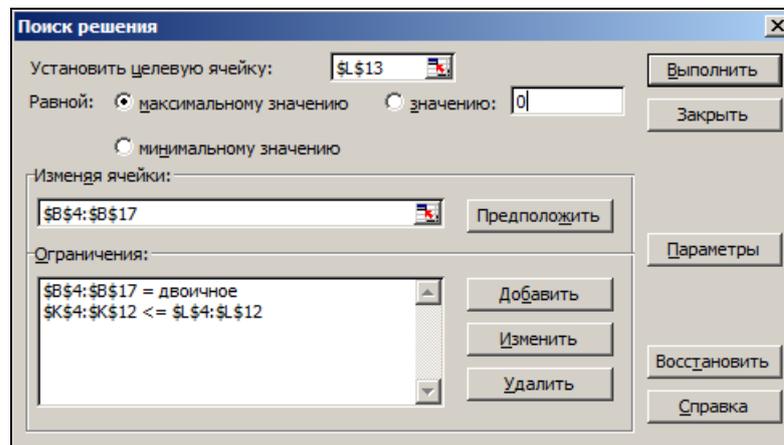


Рис. 3.19. Оптимизационная модель

**Анализ результатов моделирования.** Для заданных исходных данных установить критический путь. Построить граф по данным рис. 3.18 и выделить критический путь.

### 3.7. Сетевая транспортная задача

**Теоретическое введение.** Реальные перевозки грузов осуществляются по транспортным (железнодорожным или автомобильным) сетям. Модель транспортной сети представляет собой граф, включающий пункты отправления или приема грузов и участки между этими пунктами. Типичные примеры подобных перевозок: обеспечение топливом электростанций, обеспечение сырьем заводов, доставка зерна на элеваторы. Для каждого участка между пунктами транспортной сети известны тарифы

на перевозку грузов. Таким образом, решение транспортной задачи актуально и в сетевой постановке, где для построения математической модели необходим аппарат теории графов.

**Постановка задачи моделирования.** В некотором регионе необходимо осуществить перевозки продукции от производителей к потребителям оптимальным способом. Критерий оптимальности – минимум общих затрат на перевозку. Заданы пункты производства продукта и пункты, где продукт необходим потребителям. Необходимо построить оптимальный план транспортировки продукта, используя существующую транспортную сеть и данные о тарифах на перевозки.

**Порядок выполнения работы.** На рис. 3.20 представлена электронная таблица решения сетевой транспортной задачи. В таблице красным цветом обозначены исходные данные. Синим цветом выделены результаты расчетов, зеленым цветом обозначены результаты поиска решения. В правой части таблицы представлены данные о структуре транспортной сети и тарифах на перевозки грузов. Поле «Поток» содержит данные об оптимальном плане перевозок по указанной ветви (дуге) транспортной сети, которые определяются при решении задачи. В левой части таблицы представлены данные о пунктах производства продукта (ячейки В4:В8) и о пунктах потребления продукта (ячейки В9:В15).

Ограничения задачи (рис. 3.21): все потоки – положительные величины; остаток для пунктов производства продукта – положительная величина; потребности потребителей продукта удовлетворяются полностью; потребности потребителей не превосходят объемы производства продукта.

В таблице по рис. 3.20 для всех узлов необходимо вычислить входящие (Вход) и выходящие (Выход) потоки, их сумму (Выход-Вход). Для вычисления потока в узлах используют функцию вычисления суммы величин, координаты которых удовлетворяют определенным условиям. В Excel такую процедуру исполняет функция =СУММЕСЛИ(). Например, сумма входящих потоков узла определяется формулой =СУММЕСЛИ(Все концы дуг; Узел; Все потоки). Таким образом, суммируются потоки по тем дугам, концы которых подключены к данному узлу. Выходящие потоки вычисляются аналогично.

Сетевая транспортная задача											
Узлы							Дуги				
Узел	Произв./Спрос	Вход	Выход	Сумма	Остаток	Поток	Начало	Конец	Тариф	Затраты	
1	100	0	0	0	100	0	1	6	4	0	
2	50	0	50	50	0	0	1	7	6	0	
3	100	0	100	100	0	0	1	8	4	0	
4	50	0	29	29	21	50	6	10	3	150	
5	100	29	129	100	0	100	7	10	2	200	
6	-5	129	124	-5	0	0	10	7	2	0	
7	-40	40	0	-40	0	0	2	1	5	0	
8	-60	92	32	-60	0	0	7	8	6	0	
9	-17	17	0	-17	0	0	7	3	6	0	
10	-100	150	50	-100	0	29	8	2	3	87	
11	-25	25	0	-25	0	129	2	3	3	387	
12	-32	32	0	-32	0	84	3	5	4	336	
Итого	121	514	514	0	121	40	3	4	3	120	
						8	10	5	6	48	
						17	10	9	5	85	
						25	10	11	8	200	
						0	5	9	4	0	
						32	5	12	4	128	
						0	4	12	8	0	
						0	9	11	4	0	
						0	12	11	5	0	
						0	11	12	3	0	
Общие затраты=										1741	

Рис. 3.20. Электронная таблица решения транспортной задачи

**Анализ результатов моделирования.** Для заданных исходных данных установить оптимальный план транспортировки. Построить схему транспортной сети (рис. 3.20) и полученное оптимальное решение.

**Дополнительное задание.** Установить оптимальное распределение производства продукта для заданного потребления.

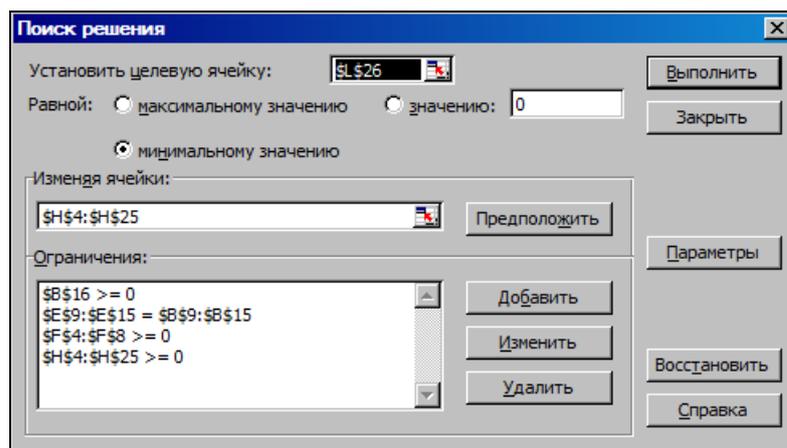


Рис. 3.21. Оптимизационная модель в окне «Поиск решения»

### 3.8. Многокритериальная оптимизация

**Теоретическое введение.** Для решения многокритериальной задачи оптимизации построим **интегральный критерий** качества (целевую функцию) объекта. И так, система характеризуется рядом частных критериев, каждый из которых отражает одно из ее свойств. Для построения интегрального критерия необходимы весовые коэффициенты, которые учитывают степень важности, «вес» каждого частного критерия. Сумма весовых коэффициентов должна быть равна единице. После определения весовых коэффициентов конструируется интегральная (обобщенная) целевая функция:

$$F_{\Sigma} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \frac{F_k}{F_k^{норм}} \Rightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^m \alpha_k = 1.$$

где  $F_k$  - целевая функция, соответствующая  $k$ -му частному критерию,  $m$  – число частных критериев (целевых функций),  $\alpha_k$  - коэффициент веса  $k$ -й целевой функции,  $F_k^{норм}$  - нормирующее значение  $k$ -й целевой функции.

Для обобщенного критерия решается задача поиска максимума, при этом значения весовых коэффициентов частных критериев, которые соответствуют максимизируемым свойствам, берутся со знаком плюс, минимизируемые – со знаком минус. В качестве нормирующих величин следует взять максимальные значения частных критериев, если эти качества надо увеличивать, и минимальные, если эти качества необходимо уменьшать.

**Постановка задачи моделирования.** Требуется найти план производства, который даст минимум использования финансовых ресурсов (**Целевая Функция 1**), при максимуме прибыли от реализации продукции (**Целевая Функция 2**).

**Порядок выполнения работы.** Первоначально необходимо решить задачу поиска минимума по **Целевой Функции 1** с учетом всех ограничений. На этом этапе определяется нормирующее значение **ЦФ1-min**. Необходимую таблицу разместим на Листе 1 (рис. 3.22).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2		x1	x2	x3	x4		
3	Значение	0	0	0	0		
4	Нижняя граница	0	0	0	0		
5	Верхняя граница	4	5	8	8	Целевая функция 1	
6	Прибыль от реализации единицы продукции	80	95	125	150	0	
7	Вид ресурса	Потребное количество ресурса для производства единицы продукции				Использование ресурса	Запас ресурса
8	Трудовые	2	3	3	4	0	80
9	Сырьевые	5	7	7	6	0	140
10	Финансовые	12	10	12	15	0	250

Рис. 3.22. Таблица решения задачи для Целевой функции 1

Затем с учетом всех ограничений следует решить задачу поиска максимального значения по **Целевой Функции 2**. На этом этапе определяется нормирующее значение **ЦФ2-max**. Необходимую таблицу разместим на Листе 2 (рис. 3.23).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2		x1	x2	x3	x4		
3	Значение	0	0	0	0		
4	Нижняя граница	0	0	0	0		
5	Верхняя граница	4	5	8	8	Целевая функция 2	
6	Прибыль от реализации единицы продукции	80	95	125	150	0	
7	Вид ресурса	Потребное количество ресурса для производства единицы продукции				Использование ресурса	Запас ресурса
8	Трудовые	2	3	3	4	0	80
9	Сырьевые	5	7	7	6	0	140
10	Финансовые	12	10	12	15	0	250

Рис. 3.23. Таблица решения задачи для Целевой функции 2

Затем на Листе 3 необходимо построить таблицу, которая представлена на рис. 3.24. В этой таблице для каждого критерия заданы значения весовых коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а также нормирующие значения критериев:  $F_1^{\min}$  (ЦФ1-min),  $F_2^{\max}$  (ЦФ2-max), которые были определены на предыдущих этапах. Необходимо построить ссылки на соответствующие ячейки. В ячейке F6 задается формула вычисления интегрального критерия (обобщенная целевая функция):

$$F_{\Sigma} = -\alpha_1 \frac{F_1}{F_1^{\min}} + \alpha_2 \frac{F_2}{F_2^{\max}}.$$

Решается задача поиска максимального значения обобщенной целевой функции.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные				$\alpha 1$	ЦФ1-min
2		x1	x2	x3	x4	0.3	0
3	Значение	0	0	0	0	$\alpha 2$	ЦФ2-max
4	Нижняя граница	0	0	0	0	0.7	0
5	Верхняя граница	4	5	8	8	Обобщенная целевая функция	
6	Прибыль от реализации единицы продукции	80	95	125	150	0	
7	Вид ресурса	Потребное количество ресурса для производства единицы продукции				Использование ресурса	Запас ресурса
8	Трудовые	2	3	3	4	0	80
9	Сырьевые	5	7	7	6	0	140
10	Финансовые	12	10	12	15	0	250

Рис. 3.24. Таблица решения задачи для обобщенной целевой функции

**Задание по работе.** Для заданного варианта исходных данных определить **оптимальный план** производства продукции.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти оптимальные значения параметров для следующих моделей:

$$F = 12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \leq 18 \\ x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 \leq 30 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,6 \cdot x_1 + 0,8 \cdot x_2 + 0,6 \cdot x_3 + 0,4 \cdot x_4 \leq 840 \\ 0,1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,4 \cdot x_3 + 0,1 \cdot x_4 \leq 180 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 2 \end{cases}$$

2. Построить оптимизационную модель и найти решение транспортной задачи:

Поставщики	Потребители	Запасы на складах поставщиков
	Стоимость перевозки единицы продукции	

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	22	14	16	28	30	350
$A_2$	19	17	26	36	36	205
$A_3$	37	30	31	39	41	300
$A_4$	30	35	23	19	21	230
Заявки потребителей	170	240	205	195	245	

3. Фирма изготавливает шапки и подстежки из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице. Спрос на шапки составляет не более 600 шт. в месяц, а подстежек – не более 450 шт. в месяц. Определить оптимальный план производства, который обеспечит наибольшую прибыль при реализации.

Сырье	Расход сырья на производство		Запас сырья
	шапка	подстежка	
Мех	25	160	65600
Ткань	1,8	33	25000
Оптовая цена, руб./шт.	440	850	

4. Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-часов в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-час, для производства одной детали типа В – 2 чел.-часа. Производственные мощности позволяют выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг металла, а для производства одной детали типа В – 4 кг полимерного материала и 3 кг металла. Ежедневные запасы каждого материала 10000 кг. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продажи одной детали типа А и В составляет соответственно 1,1 руб. и 1,5 руб.
5. Решите задачу 4 при условии, что число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 500 и не более 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю на 1 рубль затрат, если доход от продажи одной детали типа А и В составляет соответственно 1,8 руб. и 2,5 руб.
6. Найти оптимальные значения параметров для минимизации (максимизации) целевой функции:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \Rightarrow \text{Min (Max)} .$$

$$\text{Ограничения задачи: } 1 - x_3 / x_2 \geq 0; \quad x_1 - x_3 \geq 0; \quad x_1 - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - 4 = 0;$$

$$0 \leq x_1 \leq 5; \quad 0 \leq x_2 \leq 3; \quad 0 \leq x_3 \leq 3$$

Дополнительную информацию по теме «Построение оптимизационных моделей» можно найти на сайтах и в публикациях: [12-13], [15], [25], [31].

## IV. Графическое 3D моделирование

### 4.1. Введение в трехмерное моделирование

**Теоретическое введение.** В данной лабораторной работе мы начинаем знакомство с системой трехмерного твердотельного моделирования КОМПАС. В системах твердотельного трехмерного моделирования построение моделей производится с помощью последовательного создания трехмерных объектов и выполнения с ними типовых операций. Эти объекты создаются пользователем при построении модели. Создание трехмерных объектов связано с перемещением плоских фигур (**эскизов**) в пространстве. Эскиз может быть построен в одной из стандартных плоскостей (**XY, ZX, ZY**), на плоской грани существующего тела или на дополнительной плоскости, которая построена пользователем. Эскизы создаются средствами плоского черчения.

Основные операции, которые можно выполнять с эскизами при построении трехмерного объекта суть следующие: **операция выдавливания** – выдавливание перпендикулярно плоскости эскиза; **операция вращения** – вращение эскиза вокруг оси, лежащей в плоскости эскиза; **кинематическая операция** – перемещение эскиза вдоль направляющей; **операции по сечениям** – построение объемного элемента по нескольким эскизам, которые располагаются в нескольких параллельных плоскостях.

Создание трехмерной модели аналогично созданию реальной детали. Действительно, сначала выбирается (создается) заготовка, затем от нее отсекается лишнее или добавляются необходимые части. Процесс создания трехмерной модели заключается в многократном добавлении (приклеивании) или вычитании (вырезании) дополнительных трехмерных объектов, каждый из которых, образован при помощи вышеперечисленных операций над плоским эскизом. Порядок применения и параметры операций отражается в **дереве модели**.

Лабораторные работы выполняются в среде пакета КОМПАС 3D LT (рис. 4.1), который поддерживает создание одного трехмерного объекта.

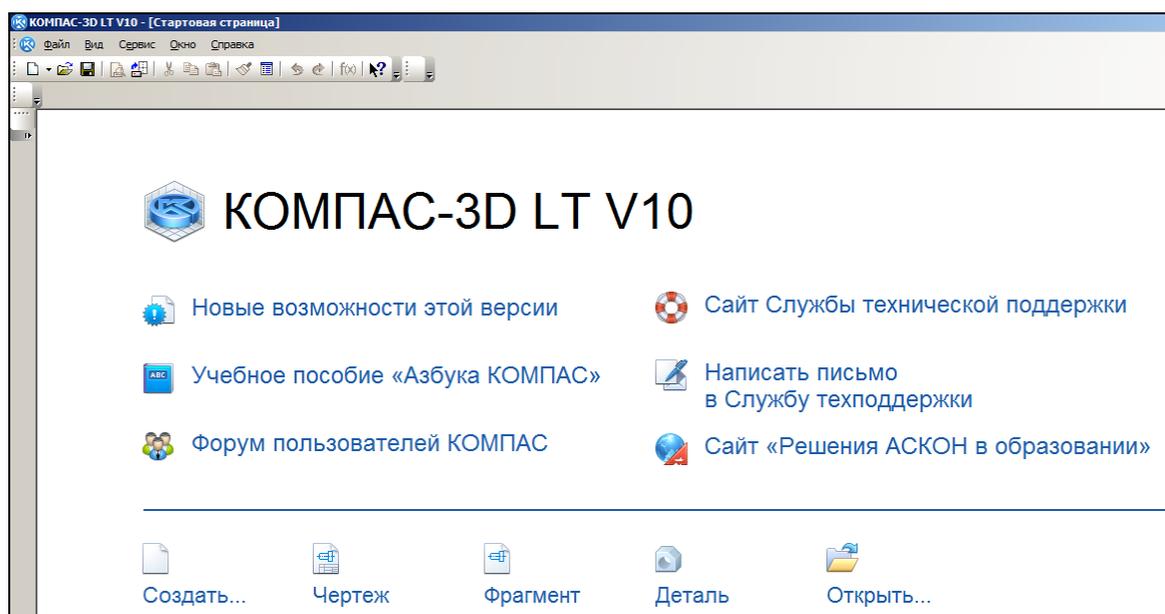


Рис. 4.1. Интерфейс системы КОМПАС после запуска

**Постановка задачи моделирования.** Построить трехмерную модель цилиндра, диаметр основания 70мм, высота 80мм. Цилиндр (рис. 4.2) имеет одно продольное и два поперечных сквозных отверстия диаметром 30мм.

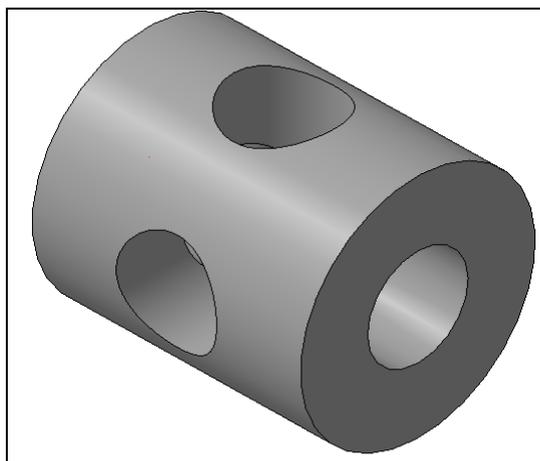


Рис. 4.2. Деталь

**Порядок выполнения лабораторной работы.** Первым шагом построения трехмерной модели является запуск подсистемы трехмерного моделирования, который производится при нажатии кнопки **Создать...** Деталь на стартовой странице (рис. 4.1). В результате откроется окно построения трехмерной модели (рис. 4.3). Первоначально познакомимся с функциональными кнопками подсистемы трехмерного моделирования. Обратите внимание на кнопку интерактивной справки , которая позволяет оперативно получить справку о любой команде.

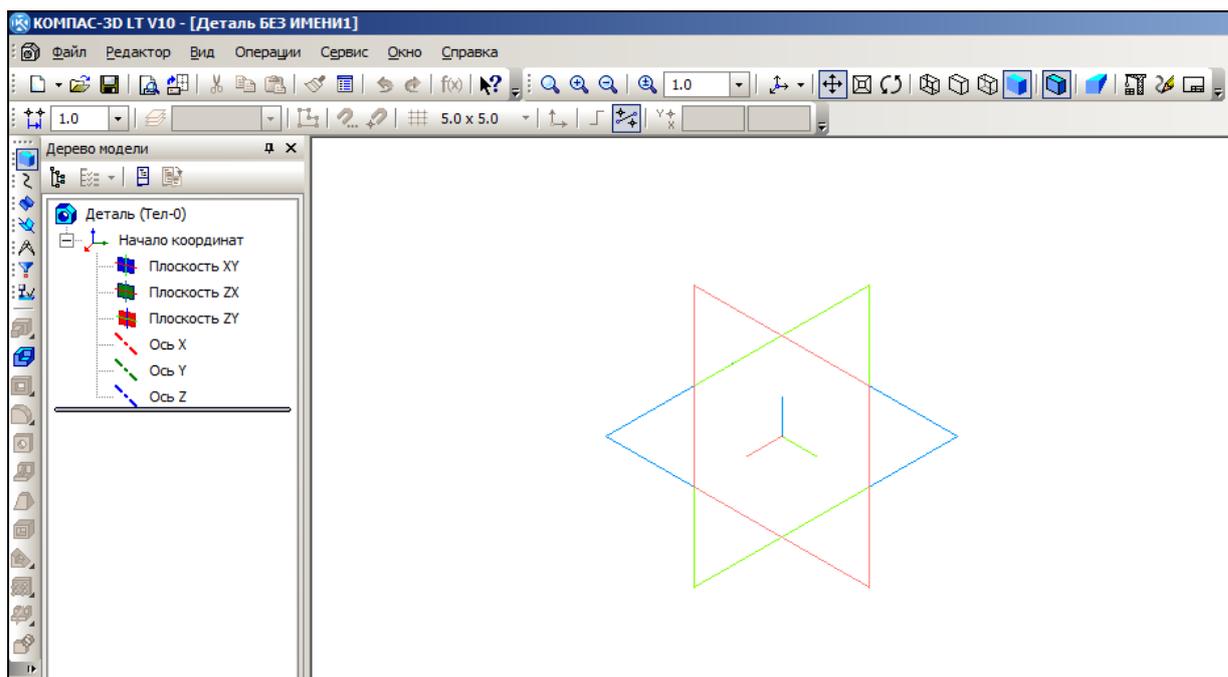


Рис. 4.3. Окно построения трехмерной модели (детали)

Первоначально, в **дереве модели** (рис. 4.3) имеются система координат и три системные плоскости. Теперь следует выбрать одну из системных плоскостей (**XY**, **ZX**, **ZY**) для построения первого эскиза (рис. 4.4-4.6). Выберем плоскость **XY**.

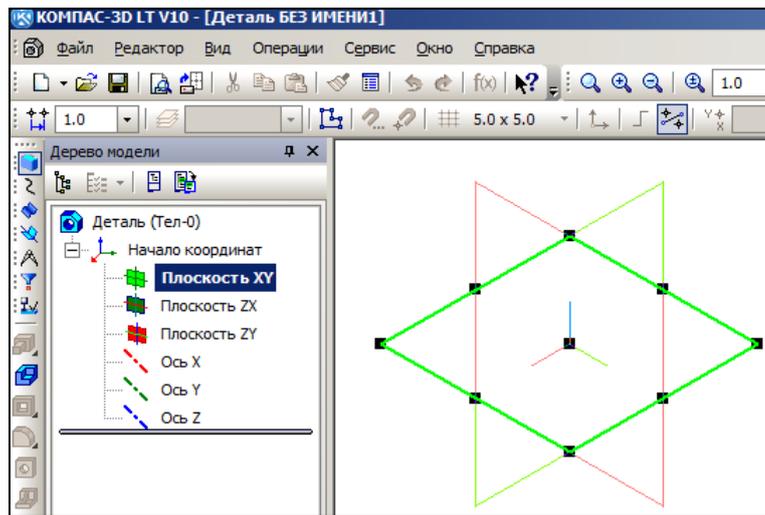


Рис. 4.4. Выделена плоскость XY

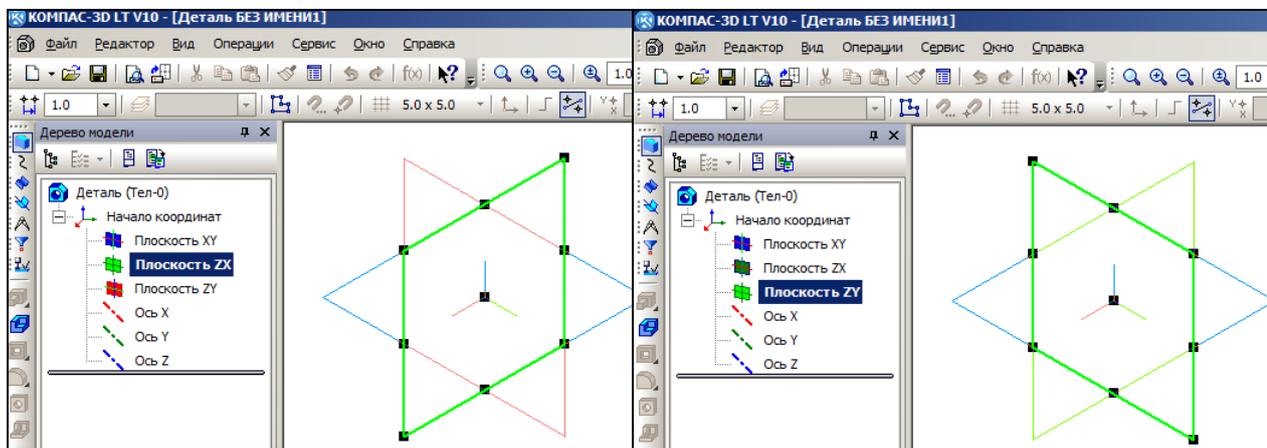


Рис. 4.5. Выделена плоскость ZX

Рис. 4.6. Выделена плоскость ZY

Далее следует задать ориентацию выделенной плоскости (рис. 4.7). Выберем вариант **Нормально к...**. Новое положение выделенной плоскости представлено на рис. 4.8.

Теперь необходимо создать плоский эскиз. Для этого следует включить **режим редактирования эскиза** (рис. 4.9). Содержание интерфейса изменилось, стали доступны **операции построения плоского эскиза** (рис. 4.10). Необходимо включить режим отображения сетки (рис. 4.11). По умолчанию шаг сетки 5 мм.

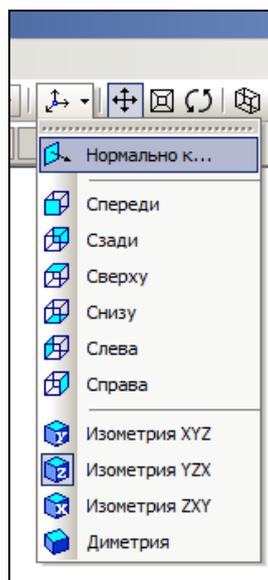


Рис. 4.7. Выбор ориентации плоскости эскиза

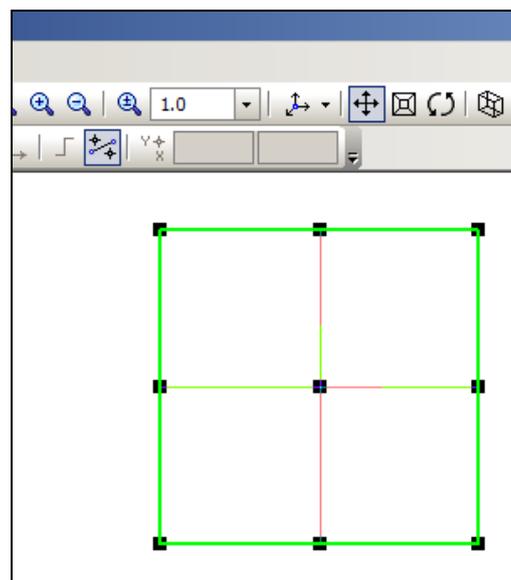


Рис. 4.8. Положение плоскости после выполнения команды **Нормально к...**

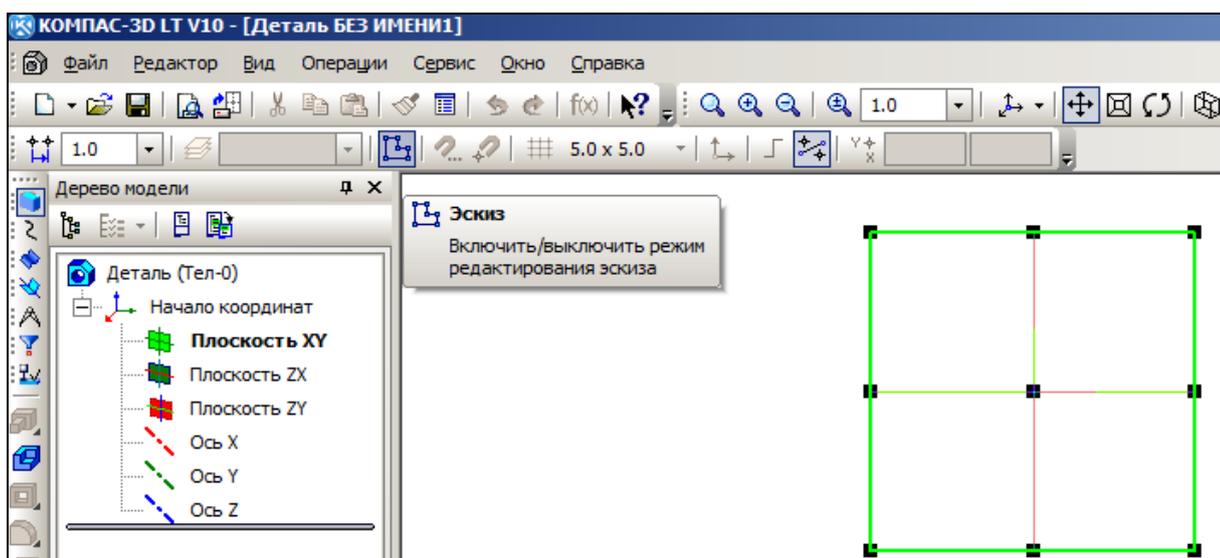


Рис. 4.9. Выполнение команды **Включить/выключить режим редактирования эскиза**

Далее для точного построения эскиза установим режим привязок (рис. 4.12) **По сетке**. Приступим к построению первого эскиза. Это будет окружность – основание цилиндра диаметром 70мм. Выберем вариант построения: центр окружности - точка на окружности (рис. 4.13). Центр окружности привяжем к началу координат. Эскиз представлен на рис. 4.14.

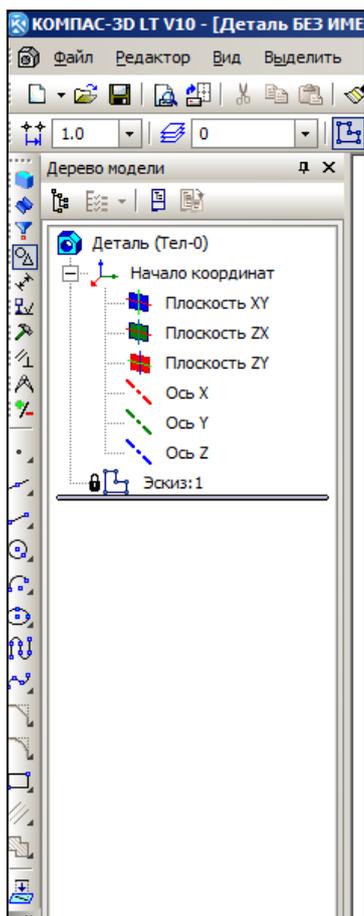


Рис. 4.10. Режим плоского черчения

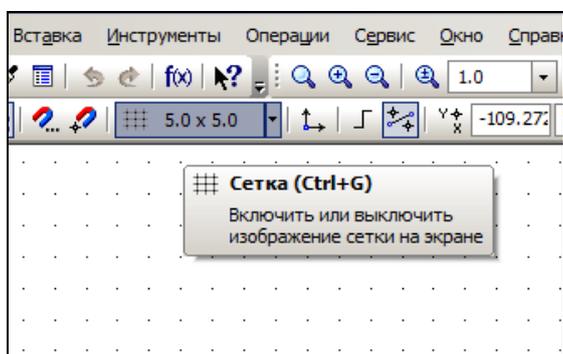


Рис. 4.11. Включение отображения сетки

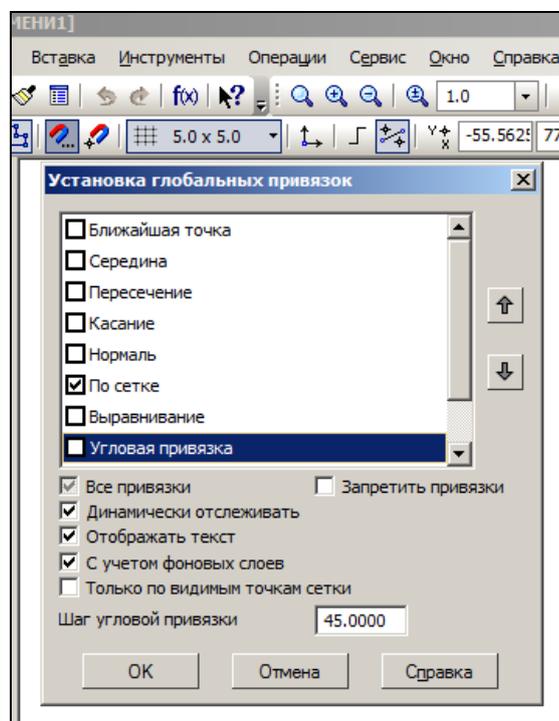


Рис. 4.12. Установка привязок

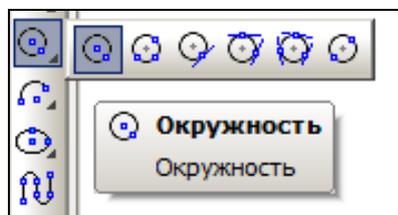


Рис. 4.13. Выбор способа построения окружности

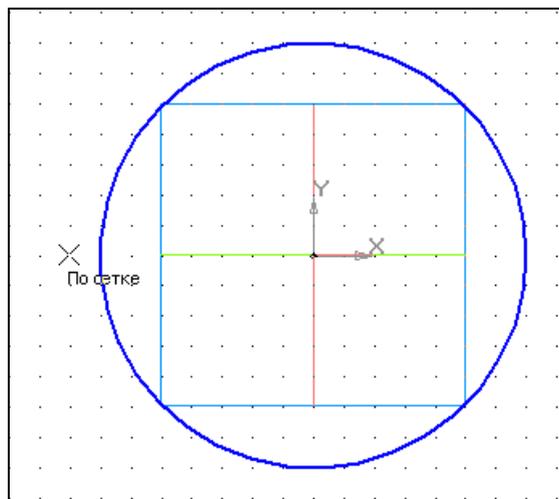


Рис. 4.14. Первый эскиз – окружность диаметром 70мм

Далее закончим редактирование эскиза и зададим его ориентацию **Изометрия XYZ** (рис. 4.15). Выполним операцию выдавливания . Расстояние выдавливания 80мм. На рис. 4.16 представлены параметры операции и ее фантом.

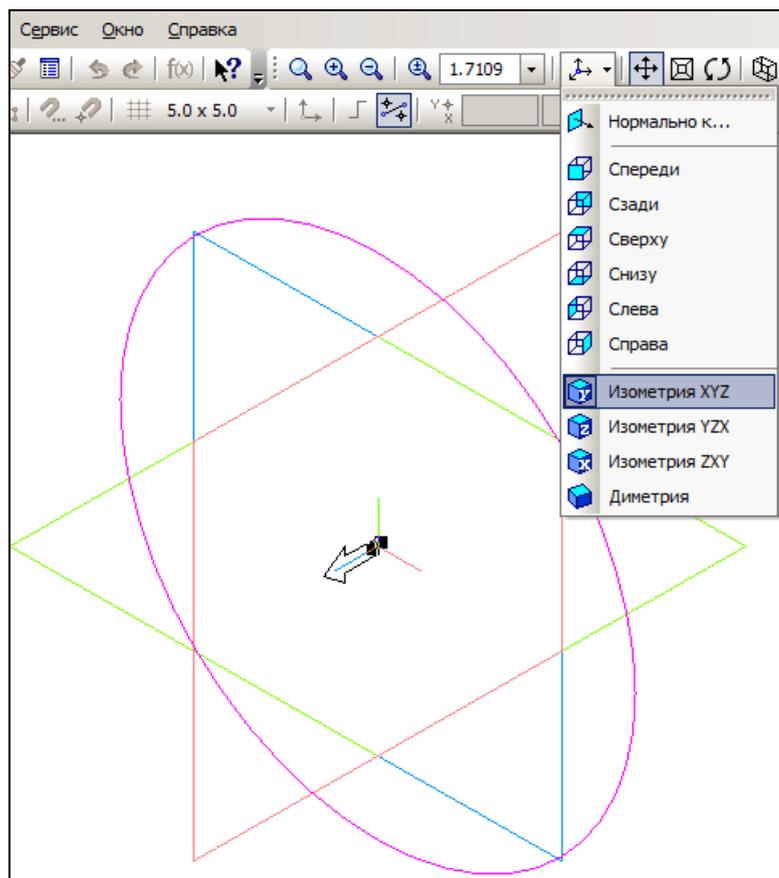


Рис. 4.15. Выбор ориентации эскиза **Изометрия XYZ**

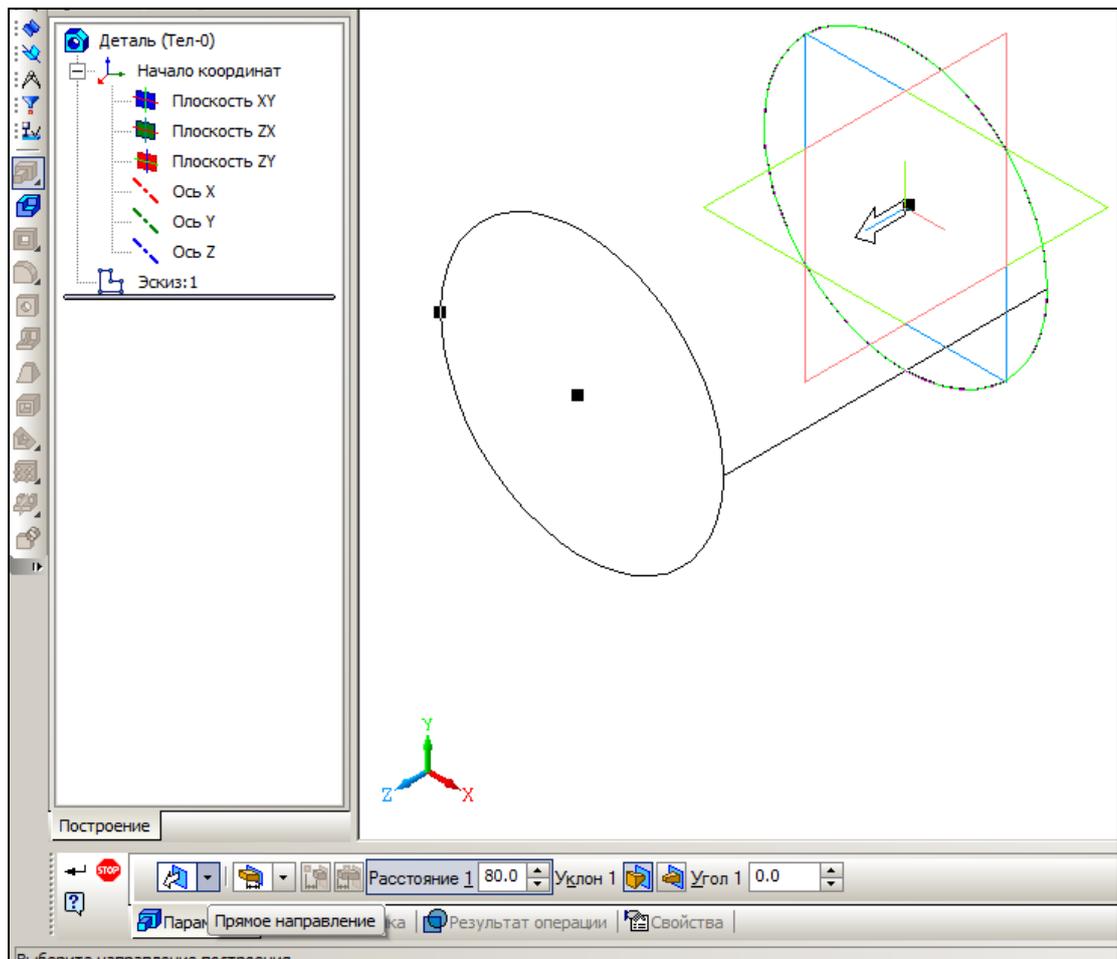


Рис. 4.16. Выполнение операции **Выдавливание**

Выполнение операции происходит при нажатии кнопки **Создать** . Результат показан на рис. 4.17.

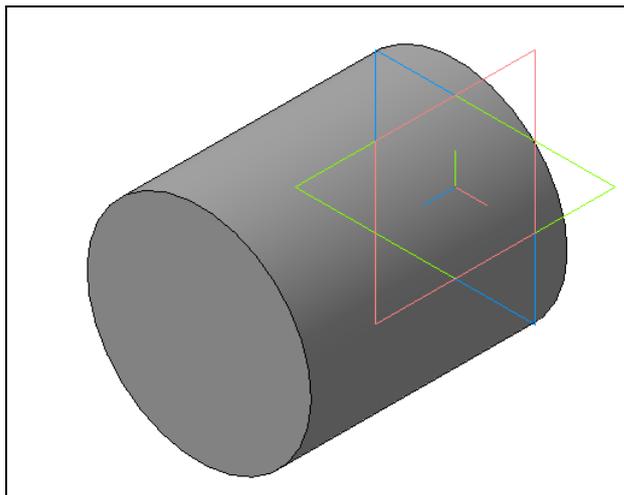


Рис. 4.17. Результат выполнения операции **Выдавливание**

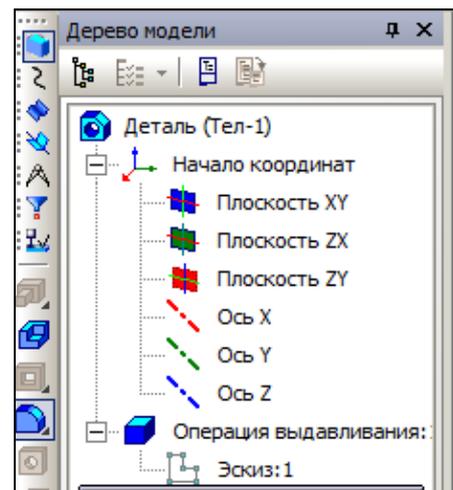


Рис. 4.18. Дерево модели

Выполнение операции приведет к изменению дерева модели (рис. 4.18). Таким образом, заготовка для будущей детали построена. Продолжим создание детали. Теперь необходимо вырезать в детали продольное отверстие диаметром 30мм.

Выделим плоскость **XY** (рис 4.4). Выберем ее ориентацию **Нормально к...** (рис. 4.7). Включим режим редактирования эскиза (рис. 4.9). Сетка и привязки по сетке уже установлены. Создадим новый эскиз (рис. 4.19) – окружность диаметром 30мм.

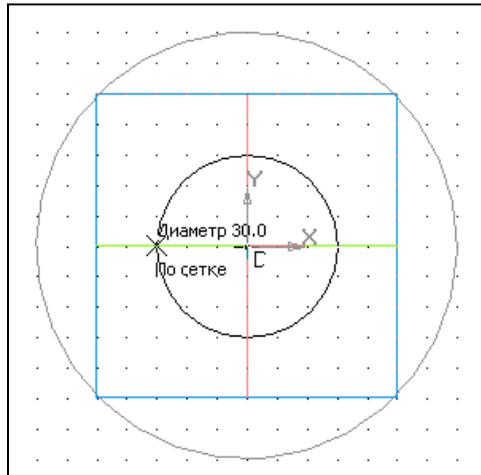


Рис. 4.19. Новый эскиз – окружность диаметром 30мм

Завершим редактирование эскиза и зададим для него ориентацию **Изометрия XYZ** (рис. 4.15). Выполним операцию **Вырезать выдавливанием** (рис. 4.20-4.21). Обращаем внимание: необходимо правильно выбрать направление вырезания, иначе отверстие не будет вырезано. Расстояние вырезания следует задать несколько больше, чем длина детали. После выполнения операции деталь примет вид, представленный на рис. 4.22.

Вид детали на экране может быть задан в нескольких вариантах: каркас, каркас без невидимых линий, невидимые линии тонкие, полутонное (рис. 4.22), полутонное с каркасом. Режимы переключаются кнопками . Заметим, что режимы каркас, каркас без невидимых линий удобны при построении новых эскизов. Различие режимов представления детали выявите самостоятельно путем переключения.

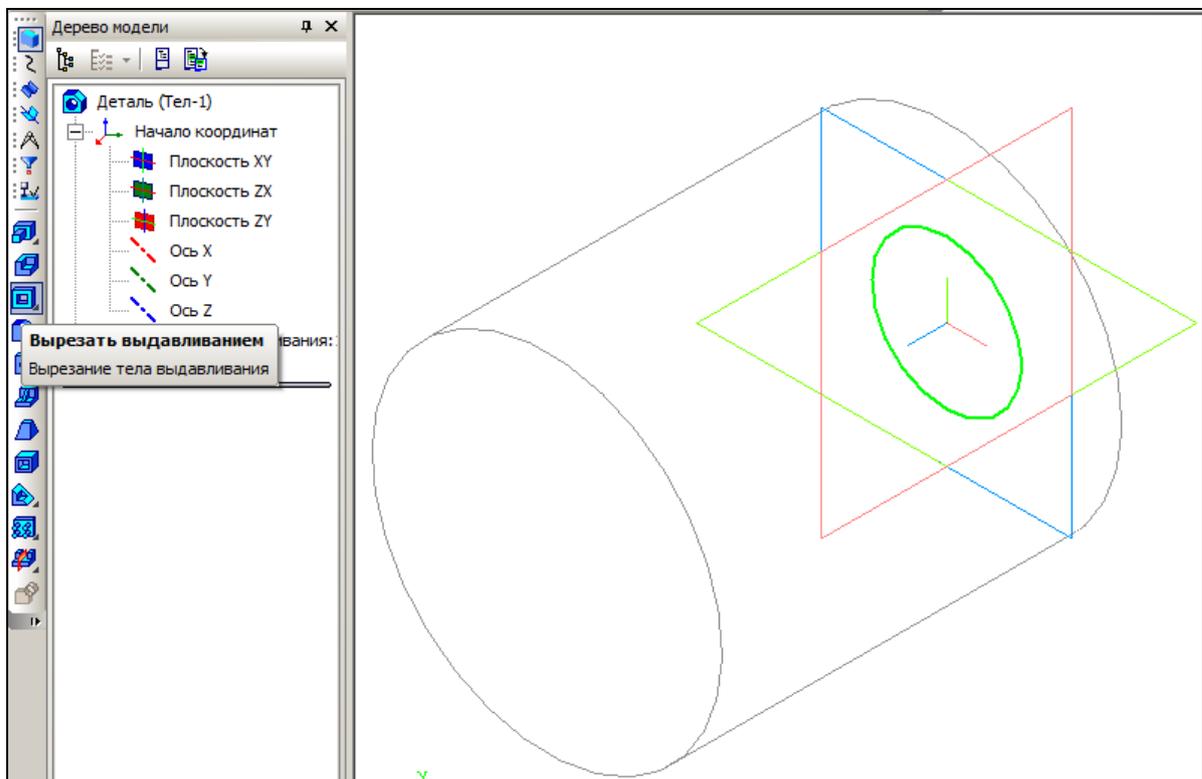


Рис. 4.20. Операция **Вырезать выдавливанием**

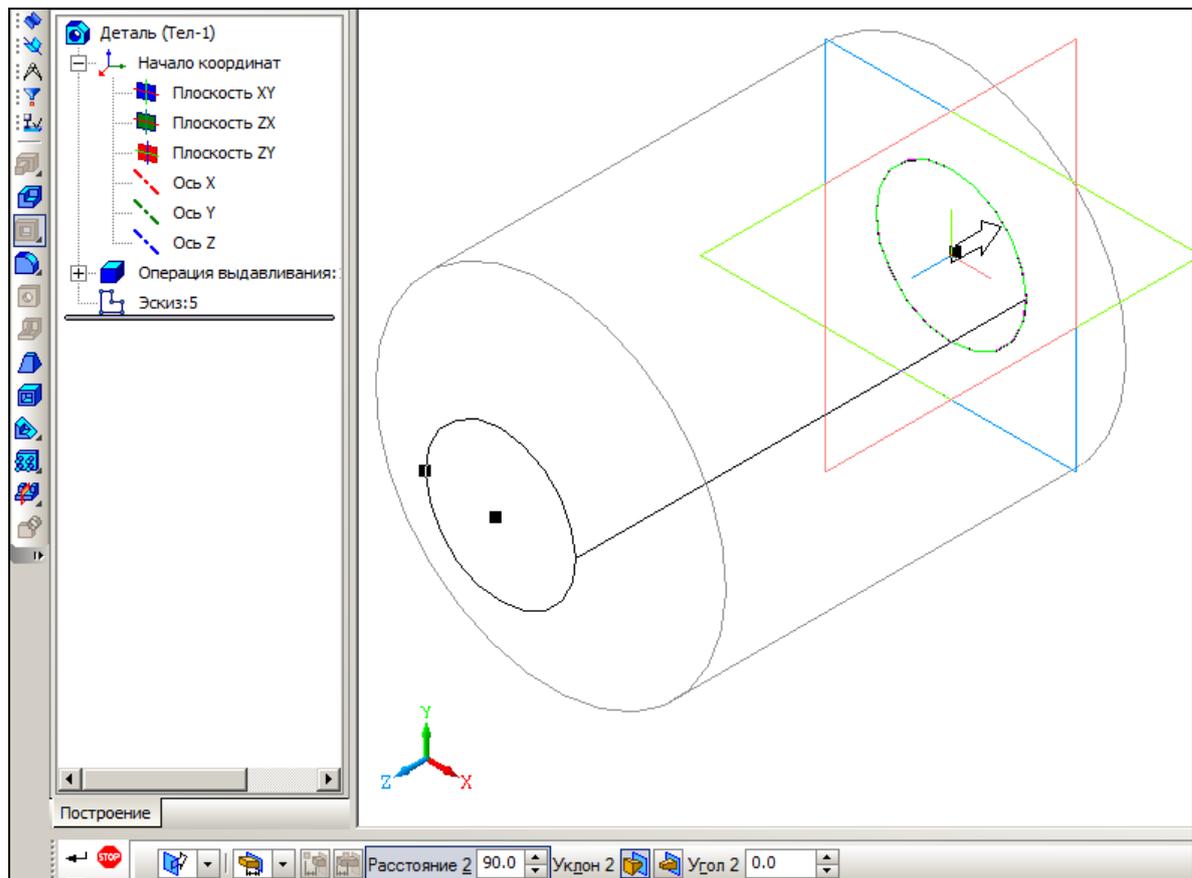


Рис. 4.21. Выполнение операции **Вырезать выдавливанием**

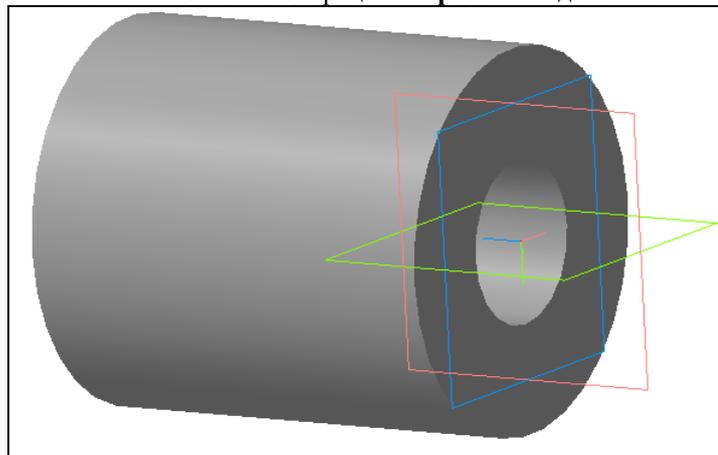


Рис. 4.22. Результат выполнения операции **Вырезать выдавливанием**

Теперь вырежем по центру детали поперечные отверстия диаметром 30мм. Для построения эскиза следует выбрать плоскость ZX. При выполнении операции следует выбрать режим **Два направления** (рис. 4.23) и задать расстояния, достаточные для создания сквозного отверстия.

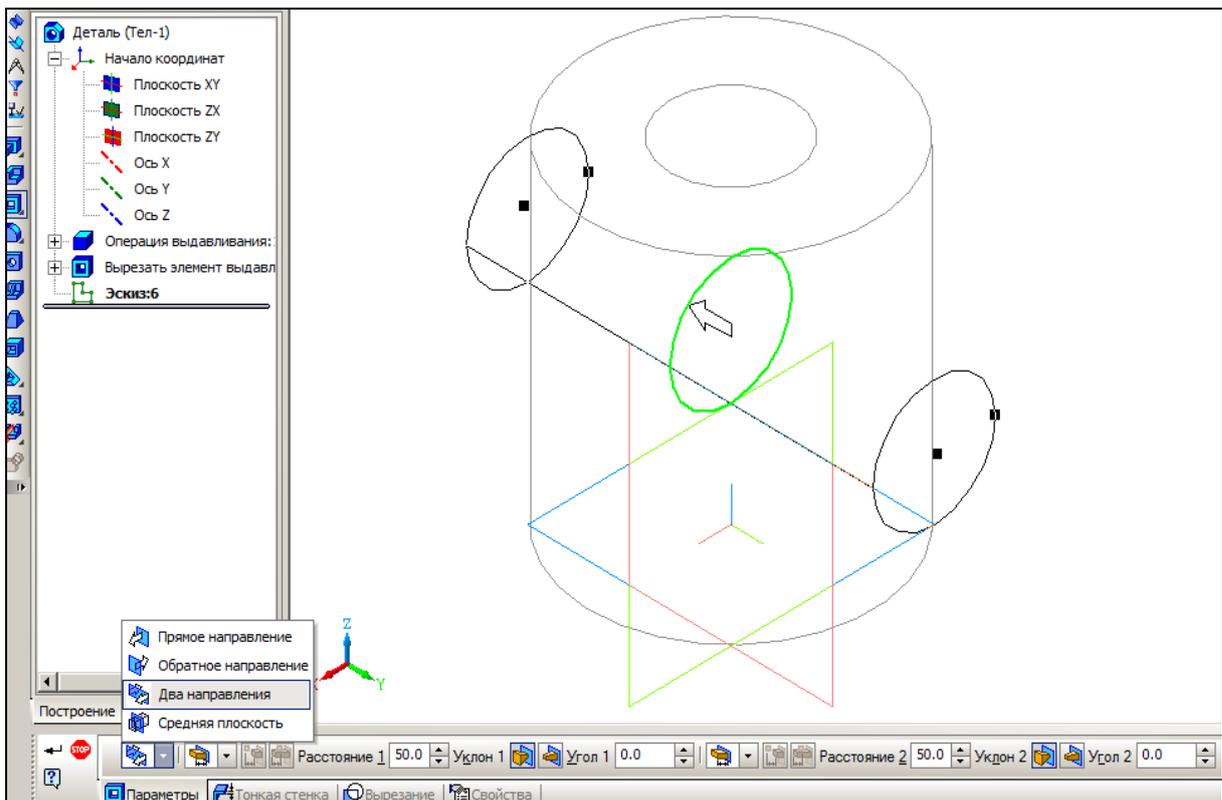


Рис. 4.23. Вырезание поперечного отверстия

Самостоятельно создайте второе поперечное отверстие с тем же диаметром (рис. 4.24). Отображение системных плоскостей и координатных осей можно скрыть, если в дереве детали в контекстном меню каждой плоскости задать соответствующий режим (рис. 4.25).

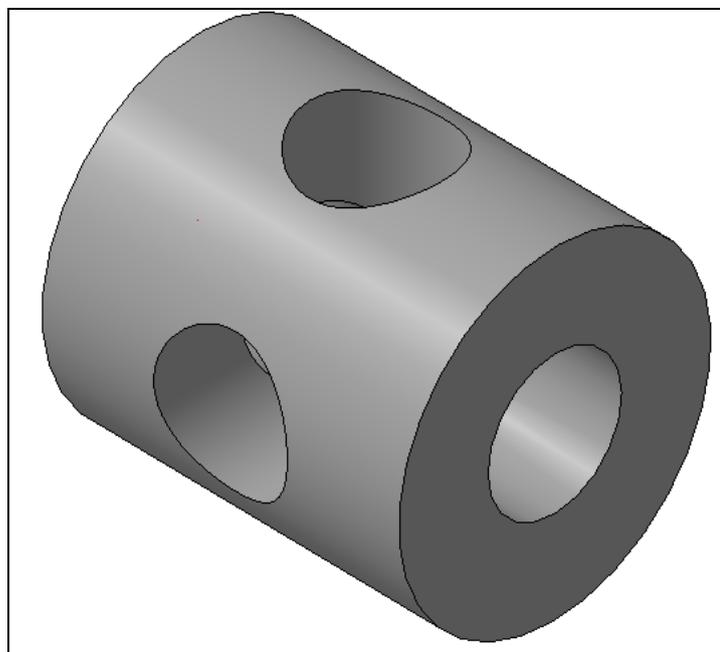


Рис. 4.24. Готовая деталь

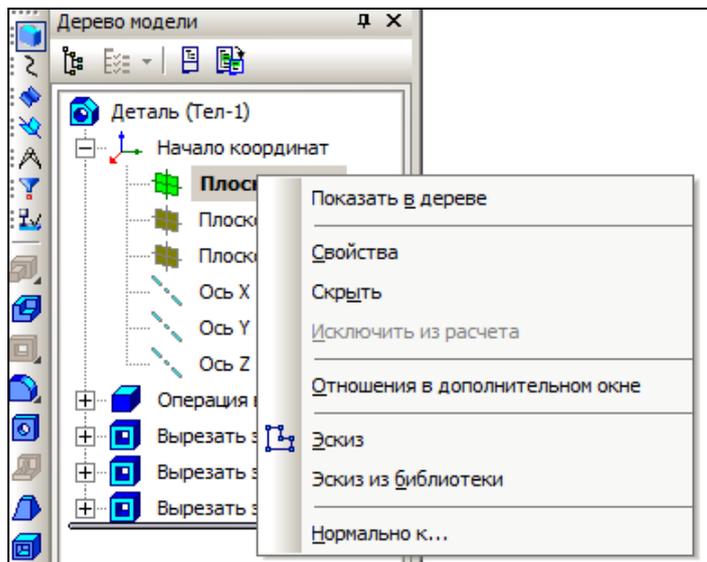


Рис. 4.25. Задание режима отображения системных плоскостей

Цвет и оптические свойства детали (рис. 4.24) установлен по умолчанию. Изменить эти параметры можно, выбрав в контекстном меню детали пункт свойства (рис. 4.26).

В заключение построим сечение тела плоскостью ZX. В дереве модели выделим плоскость ZX. Выполним операцию **Сечение поверхностью** (рис. 4.27).

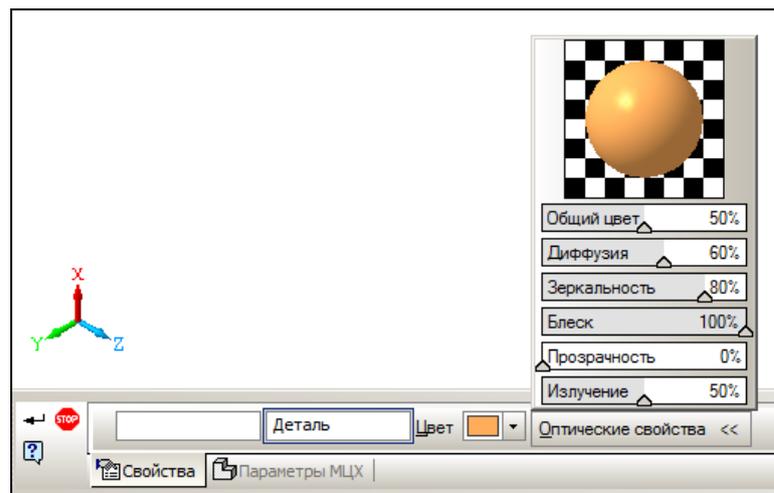


Рис. 4.26. Изменение цвета и оптических свойств детали

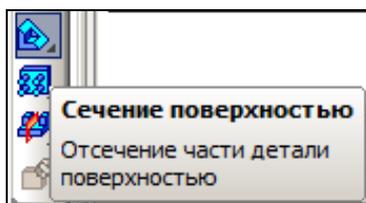


Рис. 4.27. Операция **Сечение поверхностью**

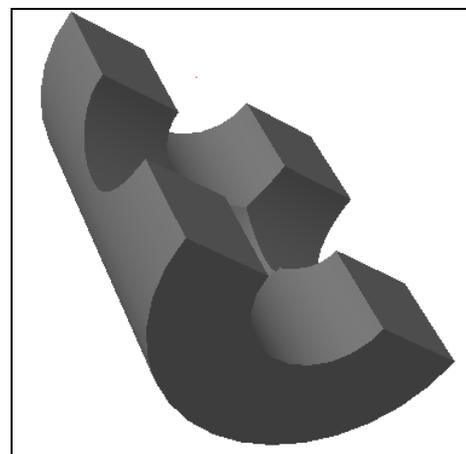


Рис. 4.28. Сечение детали

В результате применения операции деталь примет вид (рис. 4.28). На сечении ясно видно, что деталь является моделью твердого тела.

## 4.2. Построение конуса, призмы, пирамиды, параллелепипеда

**Теоретическое введение.** В данной работе построим несколько моделей с использованием операций: Выдавливание, Вырезать выдавливанием, Приклеить выдавливанием. Будут построены простейшие геометрические тела - призма, пирамида, конус, которые используются для построения более сложных моделей.

**Постановка задачи моделирования 1.** Создать модель усеченного конуса. Диаметр основания конуса 60мм. Высота конуса 40мм.

**Порядок выполнения работы.** Запустим систему трехмерного моделирования. В дереве модели выделим плоскость **XY**. Зададим ориентацию выделенной плоскости **Нормально к...** Включим режим редактирования эскиза и режим отображения сетки. Установим привязки - **По сетке**. Это типовые операции, которые выполняются всегда при построении трехмерной модели.

Создадим первый эскиз – окружность диаметром 60мм (рис. 4.29).

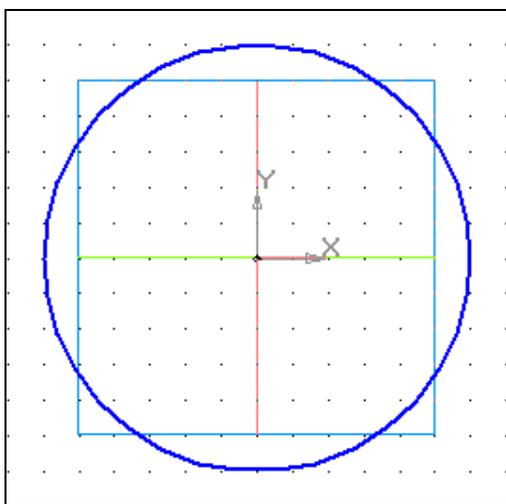


Рис. 4.29. Первый эскиз – окружность

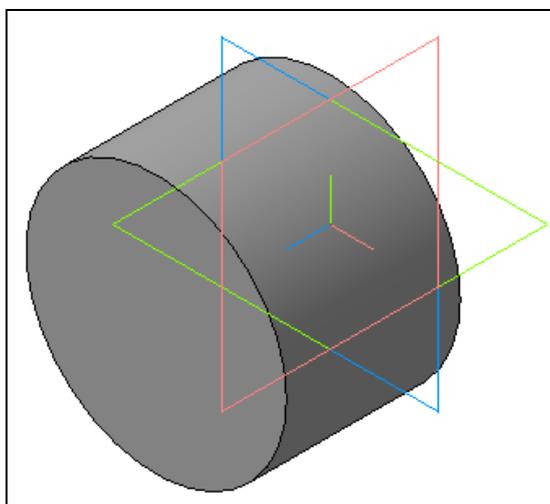


Рис. 4.30. Заготовка детали

Закончим редактирование эскиза и зададим ориентацию эскизу **Изометрия XYZ**. Далее выполним операцию Выдавливания, расстояние выдавливания 40мм (рис. 4.30).

В дереве построения выделим операцию выдавливания и выберем пункт контекстного меню **Редактировать** (рис. 4.31). В этом режиме становятся доступны параметры операции (рис. 4.32), которые можно изменить.

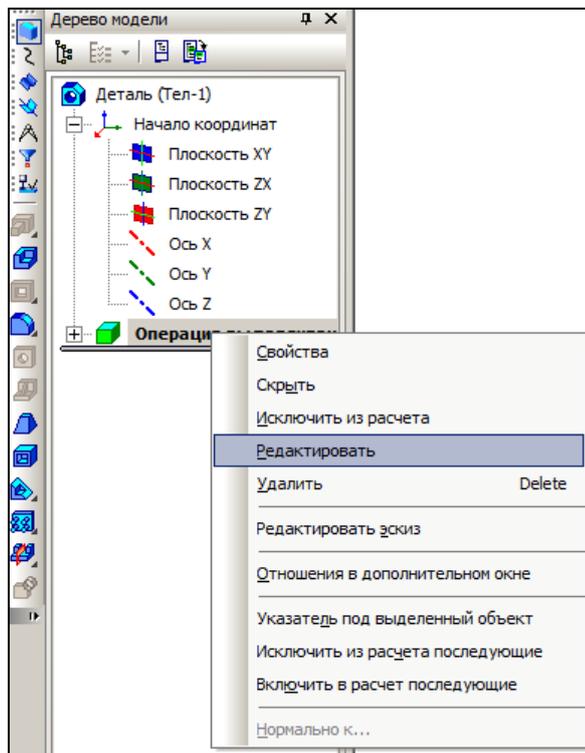


Рис. 4.31. Включение режима редактирования операции

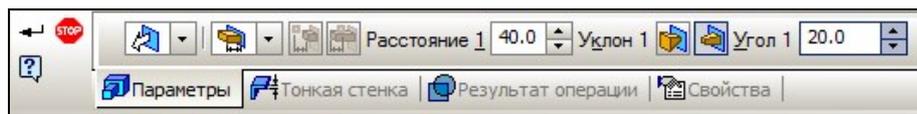


Рис. 4.32. Панель свойств операции

На панели свойств зададим режим **Уклон внутрь** и величину угла уклона 20 градусов (рис. 4.32). Фантом операции представлен на рис. 4.33.

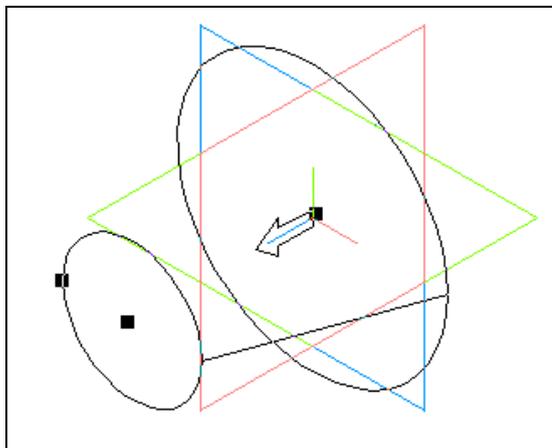


Рис. 4.33. Фантом цилиндра с уклоном

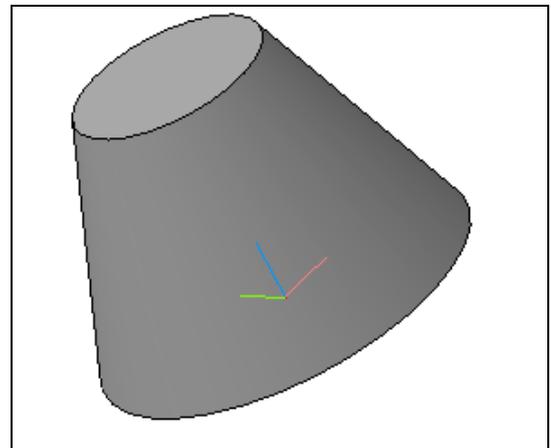


Рис. 4.34. Усеченный конус

В результате выполнения операции получим готовую деталь (рис. 4.34). Подбором угла уклона можно получить не усеченный конус. Для конуса по рис. 4.34 такой угол составляет 36.7 градуса.

**Постановка задачи моделирования 2.** Аналогичным способом построим пирамиду. Основание пирамиды – правильный шестиугольник с радиусом вписанной окружности 60мм.

**Порядок выполнения работы.** Выполним все типовые операции, которые описаны выше. Для построения эскиза – шестиугольника, выберем инструмент **многоугольник** (рис. 4.35).



Рис. 4.35. Выбор инструмента многоугольник

На панели свойств многоугольника (рис. 4.36) выбираем число вершин и способ построения – **По вписанной окружности**. При построении многоугольника его центр привяжем к началу координат. Радиус окружности отображается при построении шестиугольника (рис. 4.37).

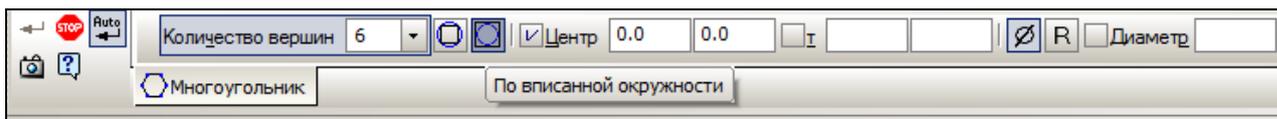


Рис. 4.36. Панель свойств многоугольника

После создания эскиза выполним операцию выдавливания на расстояние 100мм (рис. 4.38). Зададим уклон внутрь и угол 16.5 градуса. После выполнения операции получим пирамиду (рис. 4.39).

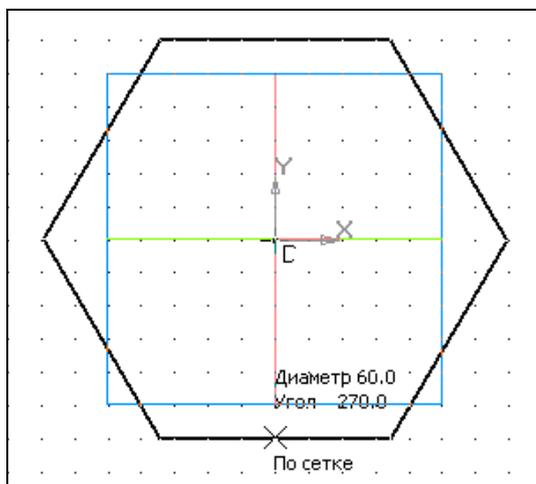


Рис. 4.37. Построение шестиугольника

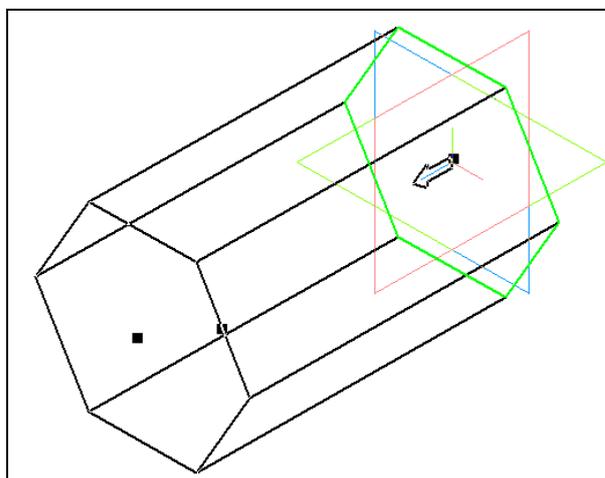


Рис. 4.38. Выполнение операции выдавливания

Эскиз детали можно изменить. В дереве модели выделим эскиз операции выдавливания и выберем пункт контекстного меню: **Редактировать** (эскиз). Затем удалим шестиугольник и построим восьмиугольник с теми же параметрами. После завершения редактирования деталь автоматически будет перестроена (рис. 4.40).

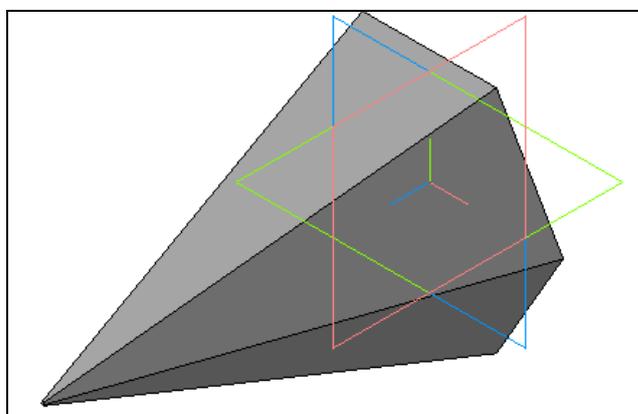


Рис. 4.39. Готовая деталь – пирамида

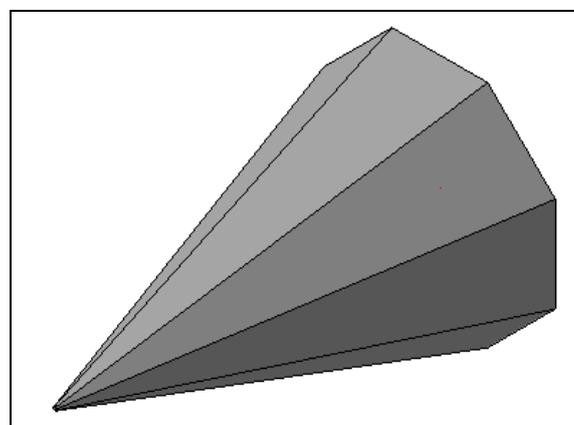


Рис. 4.40. Преобразованная пирамида

В дереве модели в контекстном меню для операции выдавливания выделим пункт: **Редактировать**. На панели параметров операции (рис. 4.41) установим режим: **Два направления**. Для второго направления зададим значения параметров одинаковые с первым направлением. Результат операции представлен на рис. 4.42.

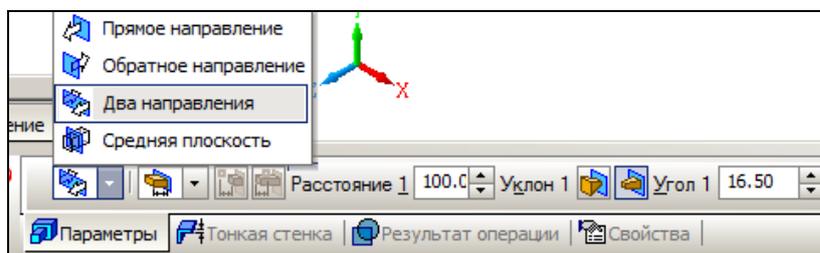


Рис. 4.41. Режим выдавливания: Два направления

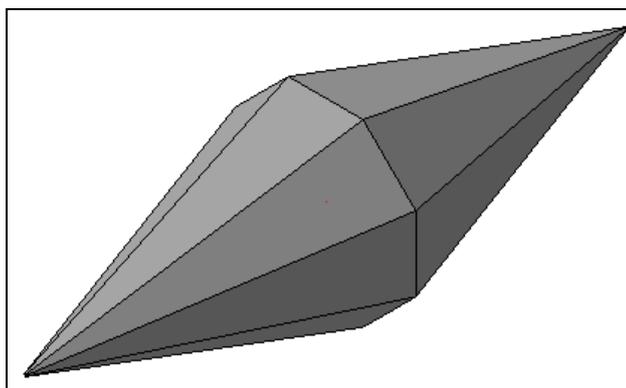


Рис. 4.42. Новая деталь

**Постановка задачи моделирования 3.** Построить модель тонкостенного параллелепипеда. В основании параллелепипеда квадрат со стороной 80мм, высота параллелепипеда 100мм. Толщина стенок 2мм.

**Порядок выполнения работы.** Модель может быть построена разными способами. Первый вариант связан с построением полнотелой заготовки и вырезанием внутреннего объема. Этот способ является чисто виртуальным и не имеет реальной аналогии. Первоначально создадим эскиз основания параллелепипеда (рис. 4.43). Выполним все необходимые типовые операции. Эскиз основания построим операцией **Прямоугольник по центру и вершине** , которая входит в группу операций построения многоугольников .

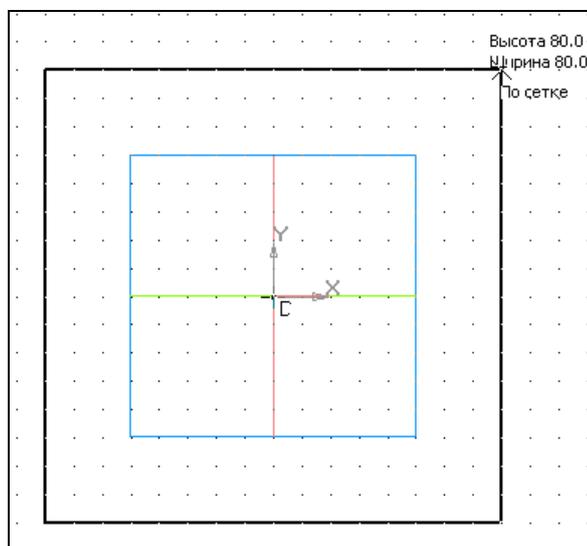


Рис. 4.43. Эскиз основания параллелепипеда

Закончим редактирование эскиза, установим его ориентацию **Изометрия XYZ** и выполним операцию выдавливания. Выберем режим выдавливания: Два направления. Расстояние выдавливания в каждом направлении 50мм (рис. 4.44). Фантом модели представлен на рис. 4.45.

Повторно выберем системную плоскость XY в качестве базовой. Установим ее ориентацию **Нормально к...**, включим режим редактирование эскиза. Установим режим отображения модели: **Каркас**.

Для построения нового эскиза настроим параметры сетки (рис. 4.46). Установим шаг сетки 2мм. Построим второй эскиз – квадрат со стороной 76мм. Таким образом, будет обеспечена толщина стенки 2мм. Новый эскиз представлен на рис. 4.47.

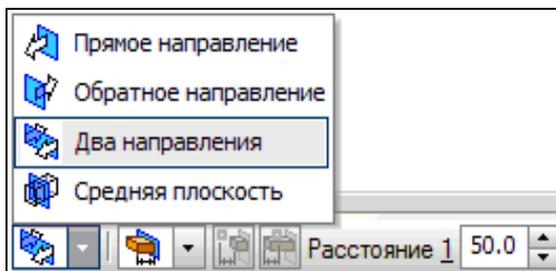


Рис. 4.44. Выбор режима выдавливания

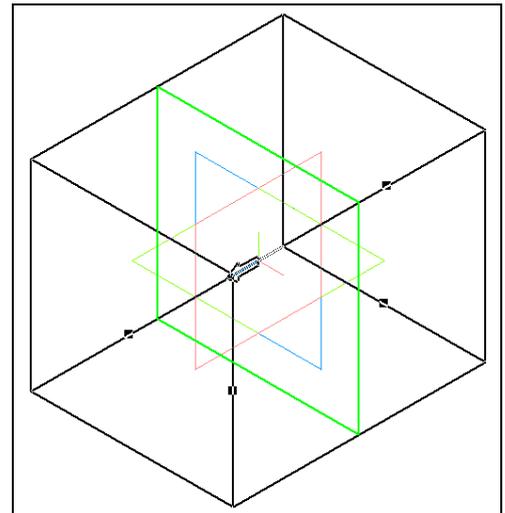


Рис. 4.45. Фантом параллелепипеда

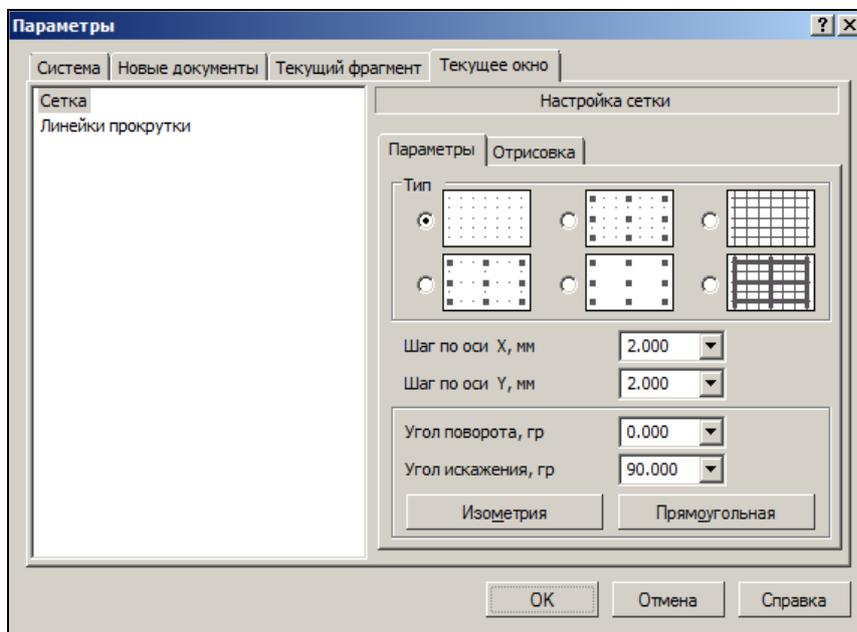


Рис. 4.46. Параметры сетки

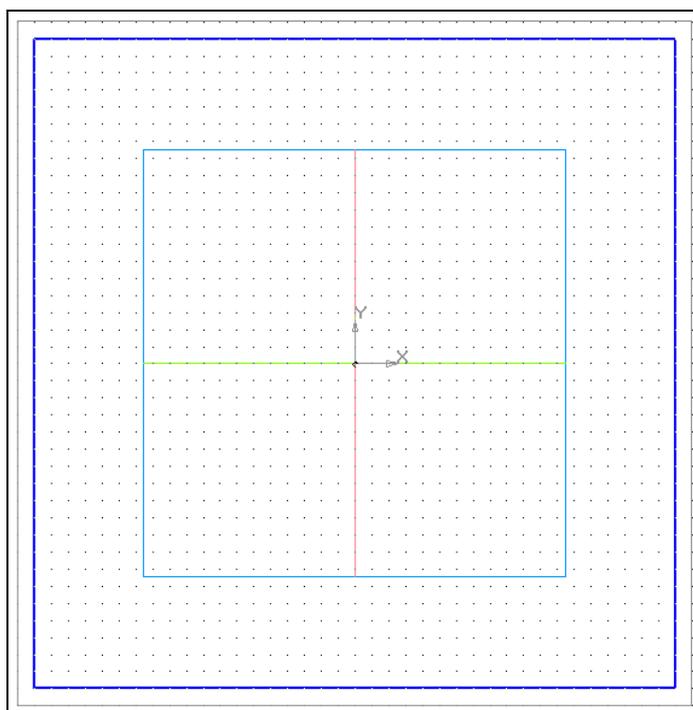


Рис. 4.47. Квадрат со стороной 76мм

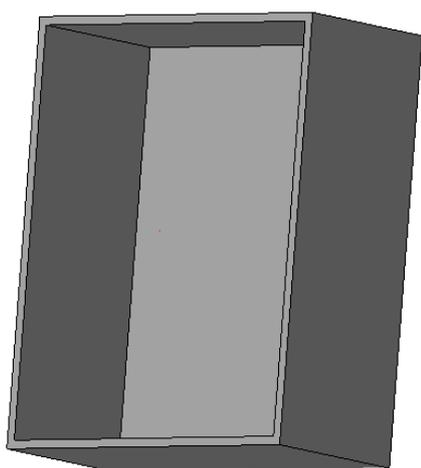


Рис. 4.48. Сечение плоскостью ZX

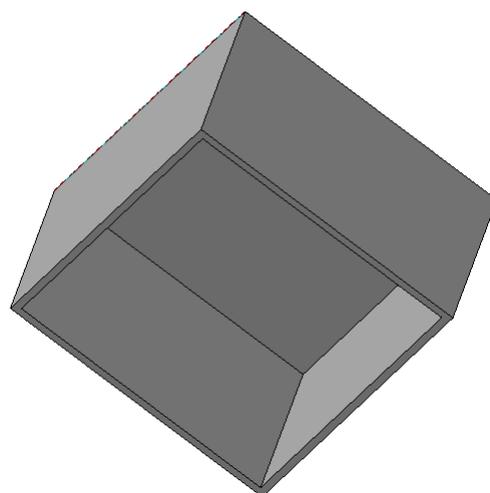


Рис. 4.49. Сечение плоскостью XY

Для второго эскиза выполним операцию: **Вырезать выдавливанием**; режим выдавливания: **Два направления**. Расстояния выдавливания: по 48мм в каждом направлении. Модель построена за две операции.

В дереве модели выделим плоскость ZX и выполним операцию: **Сечение поверхностью** . Результат представлен на рис. 4.48-4.49 – это сечения детали плоскостями ZX и XY. Действительно, построен тонкостенный параллелепипед.

Второй вариант построения той же модели состоит в следующем. Первоначально операцией выдавливания создается заготовка – полнотельный параллелепипед с заданным основанием и высотой 98мм. Затем в заготовке образуется внутренний пустой объем с помощью операции: **Вырезать выдавливанием**. Получится деталь типа «коробка» с квадратным основанием. Затем к полученной «коробке», с помощью операции **Выдавливание**, добавляется «крышка» толщиной 2мм. По второму варианту модель строится за три операции. При построении модели по второму варианту обратите внимание на выбор базовой плоскости и направления выдавливания, вырезания и приклеивания. Этот вариант построения модели реализуйте самостоятельно.

Существует и третий вариант построения заданной модели с использованием команды **Оболочка** (построение оболочки существующей детали) . Выполнение команды позволяет преобразовать деталь в тонкостенную оболочку. При создании оболочки все тело детали исключается из расчетов, а к ее граням добавляется слой «материала», образующий оболочку. Если материал добавлять ко всем граням

детали, то получится пустотелая (полая) деталь. Эта функция доступна в профессиональной версии пакета КОМПАС. В КОМПАС-3D LT построение такой детали не допускается. Для создания оболочки требуется исключить одну или несколько граней, к которым не должен добавляться материал. Эти грани превратятся в отверстия (или отверстие) в получившейся оболочке. Познакомиться с особенностями этой операции можно с помощью справки .

### 4.3. Построение тел вращения

**Теоретическое введение.** В данной работе познакомимся с операцией **Вращение**. В работе представлена технология построения тел, которые можно получить с помощью вращения эскиза вокруг заданной оси.

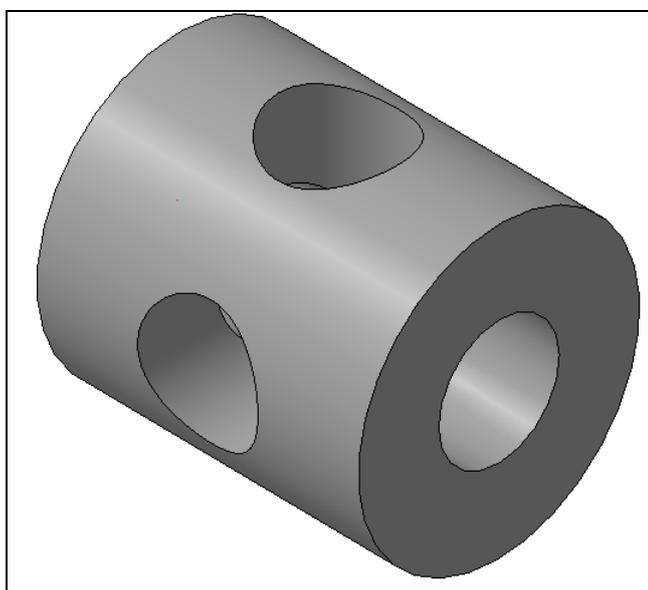


Рис. 4.50. Цилиндр с отверстиями

**Постановка задачи моделирования.** Построить трехмерную модель цилиндра, диаметр основания 70мм, высотой 80мм. Цилиндр (рис. 4.50) имеет одно продольное и два поперечных сквозных отверстия диаметром 30мм. Подобный цилиндр был построен в предыдущей работе с помощью операции Выдавливание. В данной работе все действия при построении цилиндра с отверстиями будут выполняться с помощью операции **Вращение**.

**Порядок выполнения лабораторной работы.** Запустим систему трехмерного моделирования. Выполним все предварительные действия и создадим первый эскиз в плоскости XY. Эскиз состоит из образующей цилиндра - отрезок прямой, и оси вращения. Отрезки создаются соответствующим инструментом (рис. 4.51). Длина отрезка образующей равна высоте цилиндра - 80 мм, тип линии – **основная**. Отрезок необходимо провести симметрично оси X. Ось вращения (отрезок): тип линий – **осевая**, но не **осевая основная**. Переключение типа линии производится на панели свойств отрезка (рис. 4.52). Длина этого отрезка особой роли не играет. Важно, чтобы ось вращения была создана одним отрезком. Первый эскиз представлен на рис. 4.53.

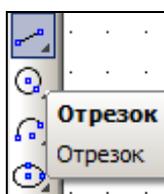


Рис. 4.51. Инструмент **Отрезок**

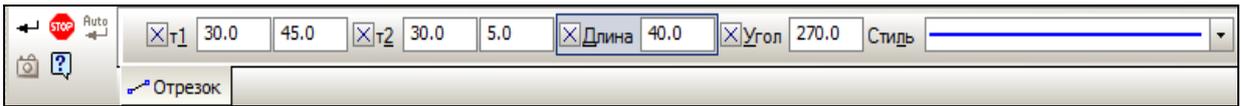


Рис. 4.52. Панель свойств отрезка-образующей

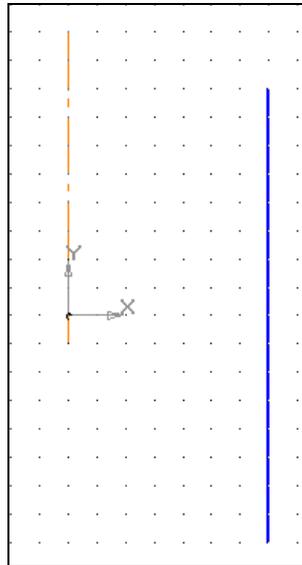


Рис. 4.53. Эскиз для операции **Вращение**

Закончим редактирование эскиза, установим его ориентацию – изометрия, и выберем команду **Операция вращения** (рис. 4.54). На панели трехмерных операций данная операция «скрыта» за кнопкой операции **выдавливания**. Для активизации операции следует «прижать» мышкой кнопку операции **выдавливания** и перейти на операцию **вращения**. Панель параметров этой операции имеет вид по рис. 4.55.



Рис. 4.54. Выбор операции вращения

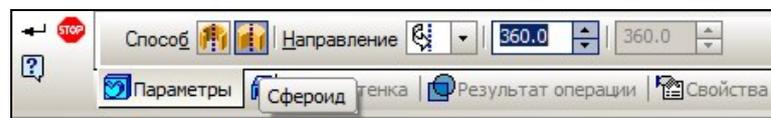


Рис. 4.55. Панель свойств операции вращения

Операция **вращения** может быть выполнена способом **Тороид** или **Сфероид**. Способом Тороид создается тонкостенная оболочка (тонкостенная труба). В режиме Сфероид получается сплошной полнотелый цилиндр. Однако в этом случае необходимо отключить образование тонкой стенки (рис. 4.56).

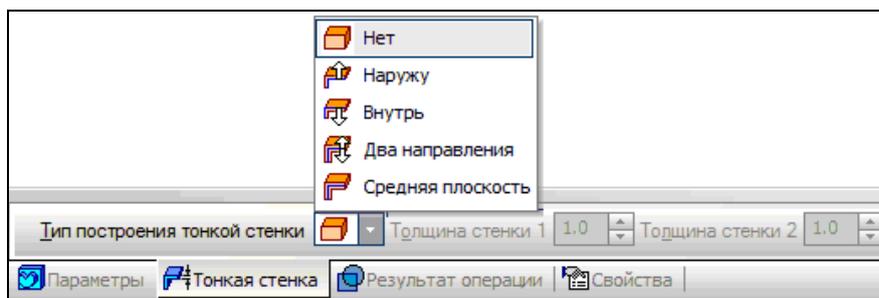


Рис. 4.56. Установка параметров тонкой стенки

Результат выполнения операции вращения отрезка представлен на рис. 4.57.

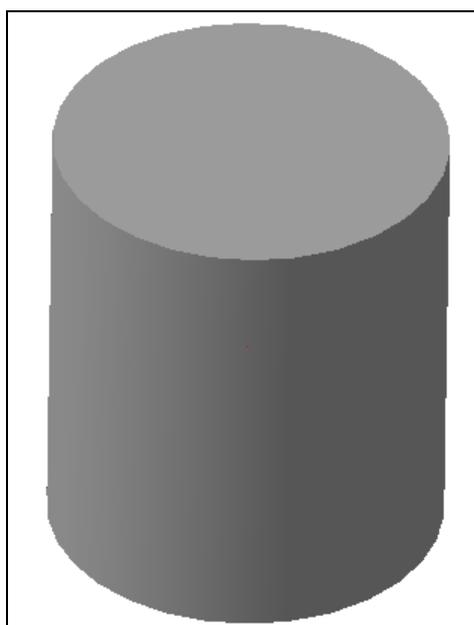


Рис. 4.57. Цилиндр

Создадим продольное отверстие, которое является цилиндрическим. На рис. 4.58 представлен эскиз для создания продольного отверстия (плоскость XY). Закончим редактирование эскиза и выполним операцию: **Вырезать вращением**. Данная операция, как и другие трехмерные операции, доступна в пункте меню: **Операции** (рис. 4.59). Впрочем, эта операция доступна и на компактной панели в группе операций Вырезать: 

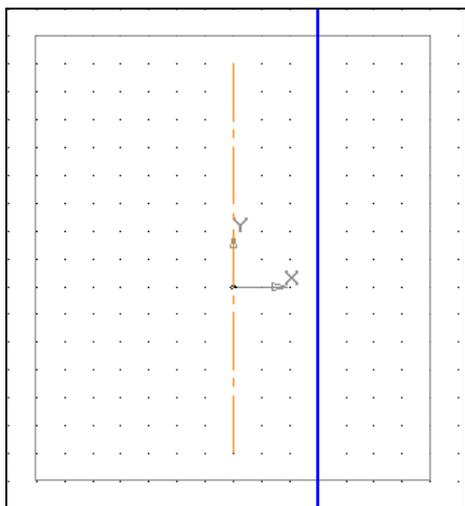


Рис. 4.58. Эскиз для создания продольного отверстия

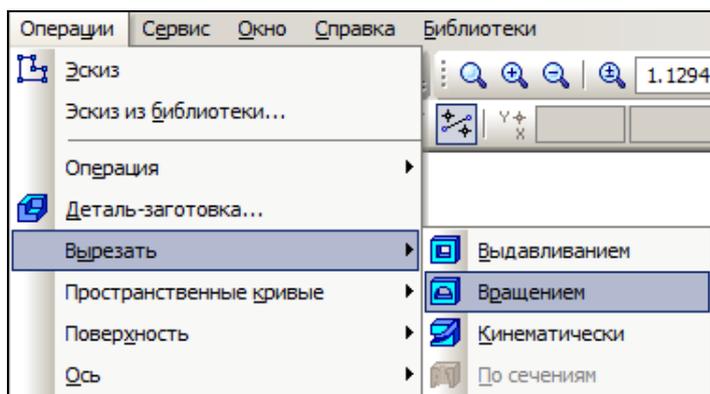


Рис. 4.59. Реализация операции: Вырезать вращением

Для этой операции также необходимо установить режим: **Сфероид** и отключить создание **тонкой стенки** (рис. 4.55-4.56). Результат выполнения операции: вырезать вращением, представлен на рис. 4.60.

Для создания поперечного отверстия выделим плоскость ZX. В этой плоскости создадим эскиз для создания поперечного отверстия (рис. 4.61). Выполним операцию **Вырезать вращением**.

Эскиз для второго поперечного отверстия создается в плоскости ZY (рис. 4.62). Операция выполняется аналогичным образом.

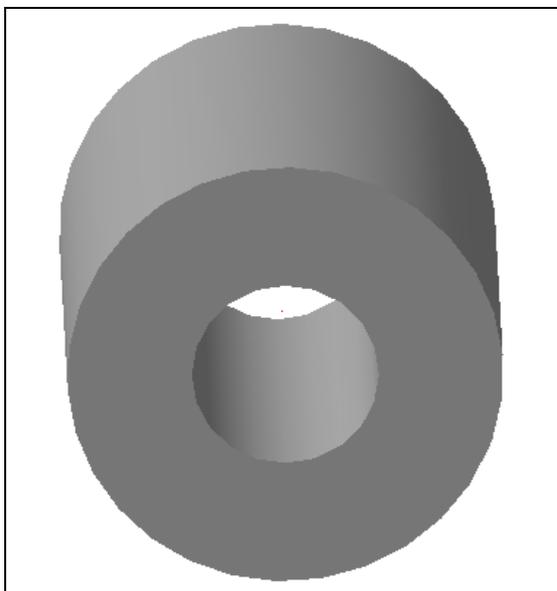


Рис. 4.60. Результат выполнения операции

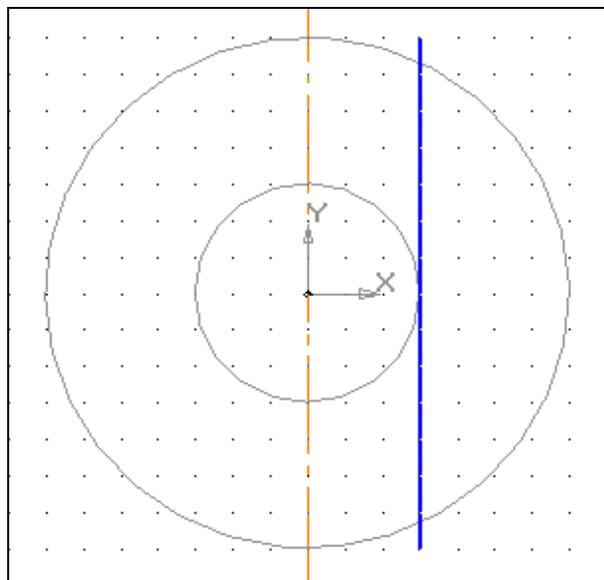


Рис. 4.61. Эскиз для создания поперечного отверстия

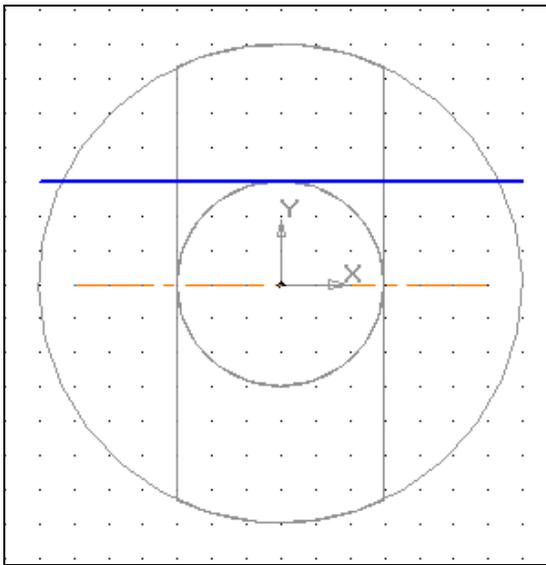


Рис. 4.62. Эскиз для создания второго отверстия

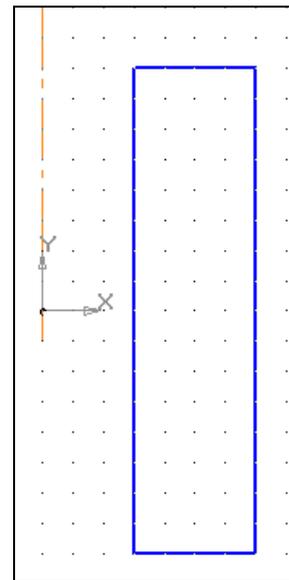


Рис. 4.63. Эскиз-прямоугольник

При построении этой модели (рис. 4.50) две первые операции можно объединить, если первый эскиз будет прямоугольник (рис. 4.63).

Напомним правила для операции вращения: в эскизе должна быть только одна ось; эскиз не должен пересекать ось вращения; тип осевой линии – осевая; тип линий эскиза, образующей тело вращения фигуры – основная; недопустимо пересечение контуров.

**Дополнительное задание.** С помощью операции Вращение построить модели: конуса, усеченного конуса, тонкостенного цилиндрического «стакана», сферы и тора. Эскизы для данных моделей представлены на рис. 4.64-4.68. Проведите построение моделей в режимах Торoid и Сфероид.

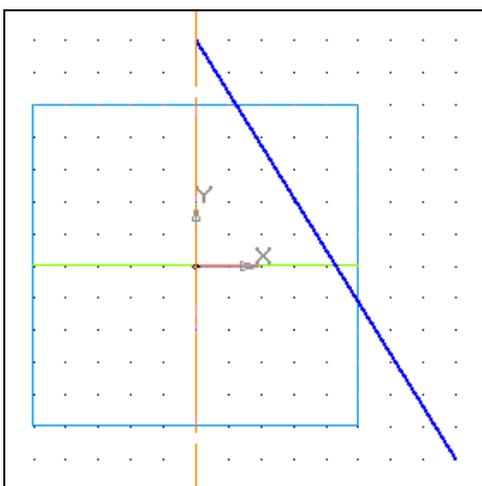


Рис. 4.64. Эскиз конуса

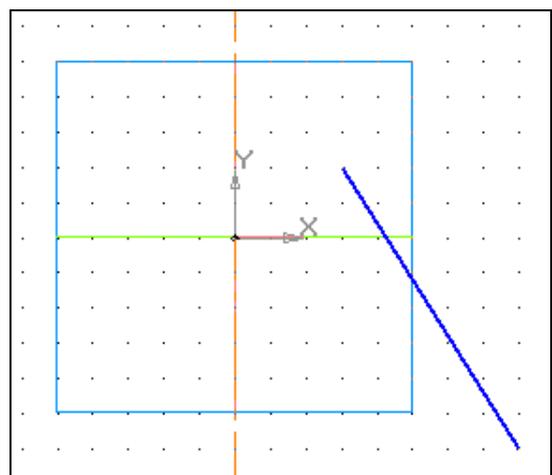


Рис. 4.65. Эскиз усеченного конуса

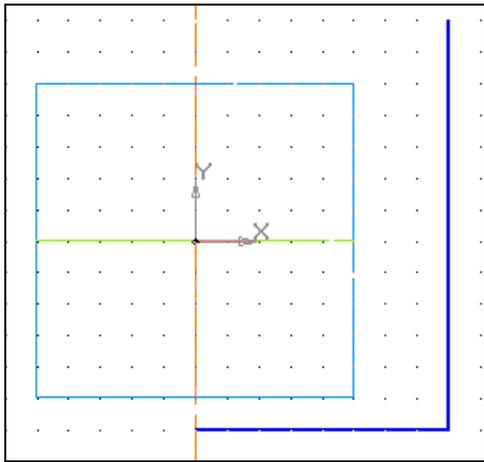


Рис. 4.66. Эскиз «стакана»

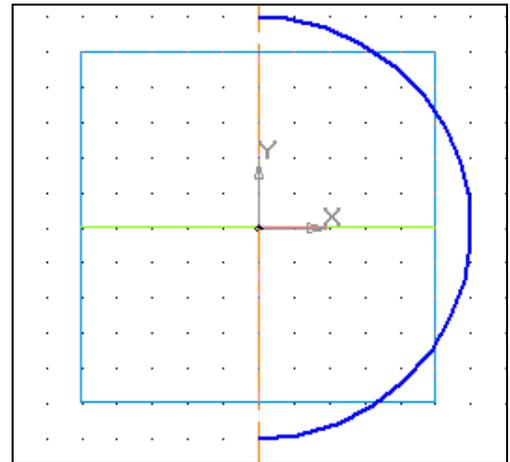


Рис. 4.67. Эскиз сферы

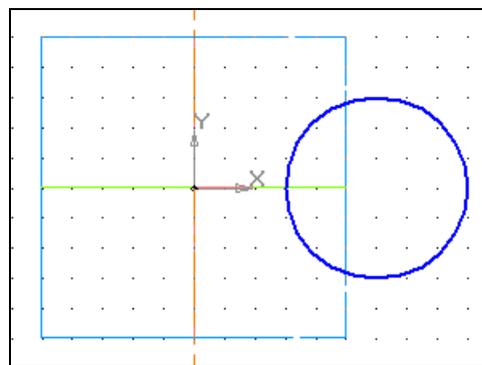


Рис. 4.68. Эскиз тора

#### 4.4. Построение трехмерной модели по сечениям

**Теоретическое введение.** В системе графического моделирования КОМПАС-3D имеется возможность создания дополнительных плоскостей, смещенных относительно заданной плоскости трехмерного пространства. Такой заданной плоскостью может быть системная плоскость (XY, ZX, ZY) или плоскость тела, заданная пользователем. Такая плоскость называется **Смещенная плоскость**.

На смещенной плоскости можно создать эскиз, т.е. плоскую фигуру, по которой будет построена трехмерная модель. Если создать несколько плоскостей и построить на них эскизы, то с помощью операции: - **По сечениям**, может быть создана трехмерная модель. При этом происходит гладкое сопряжение эскизов. На практике аналогичным образом создается, например, корпус корабля. Предварительно создается каркас, который затем обшивается стальным листом.

Технология создания смещенной плоскости состоит в следующем. Выделяется плоскость, например, базовая плоскость XY (рис. 4.69).

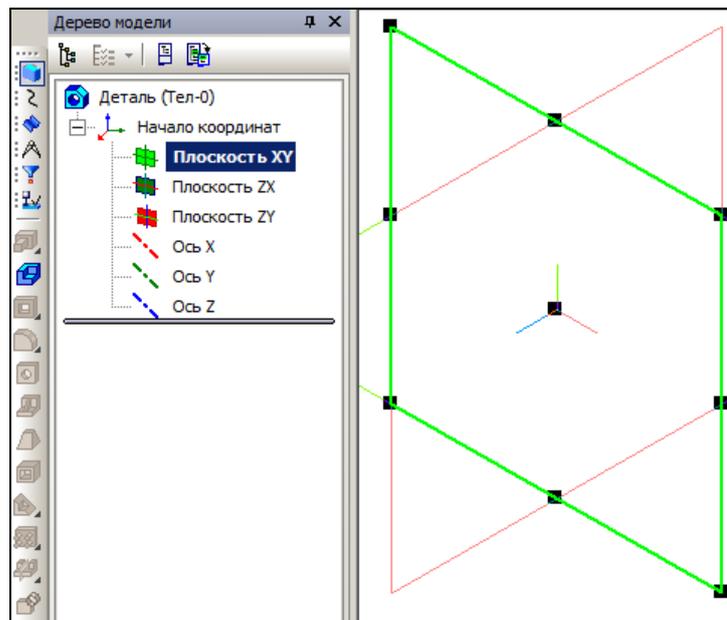


Рис. 4.69. Выделена плоскость XY

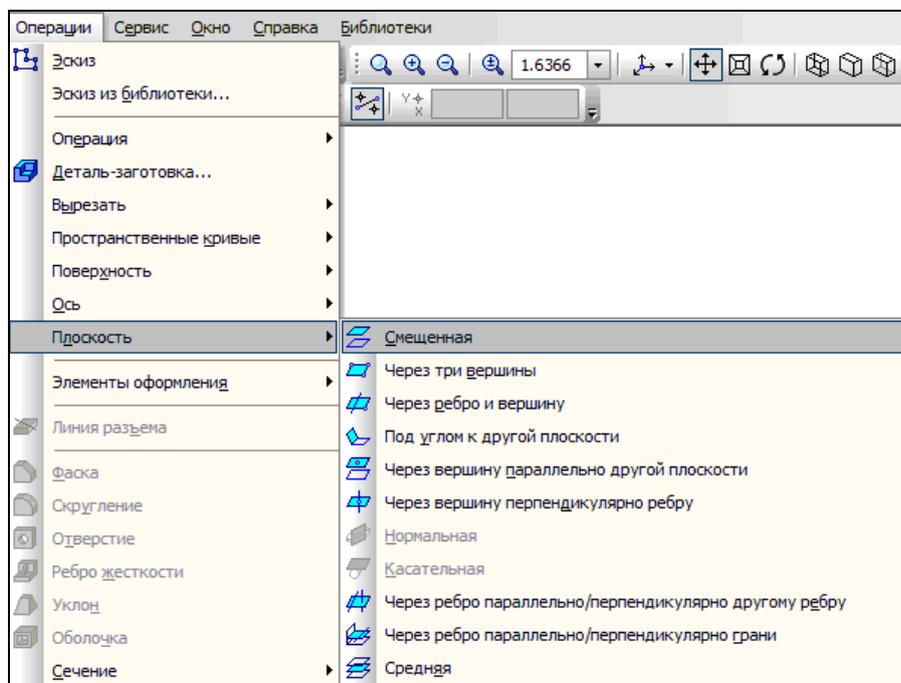


Рис. 4.70. Создание смещенной плоскости

Затем инициализируем операцию создания смещенной плоскости (рис. 4.70). Из рисунка видно, что имеется возможность построения дополнительных плоскостей различными способами. В пункте верхнего меню **Операции**, выберем подпункт **Плоскость – Смещенная** (рис. 4.70). Задание параметров смещенной плоскости выполняется на панели параметров (рис. 4.71), которая становится доступной при инициализации операции.

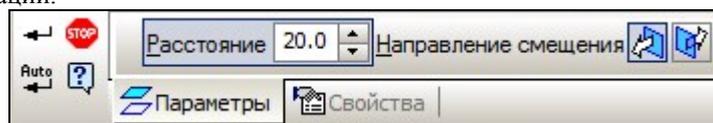


Рис. 4.71. Панель параметров смещенной плоскости

Собственно создание смещенной плоскости заключается в указании расстояния от выделенной плоскости, направления смещения и нажатия кнопки **Создать объект**  (рис. 4.72).

Далее на каждой плоскости необходимо создать эскиз и создать модель операцией: - **По сечениям** (группа операций Выдавливание).

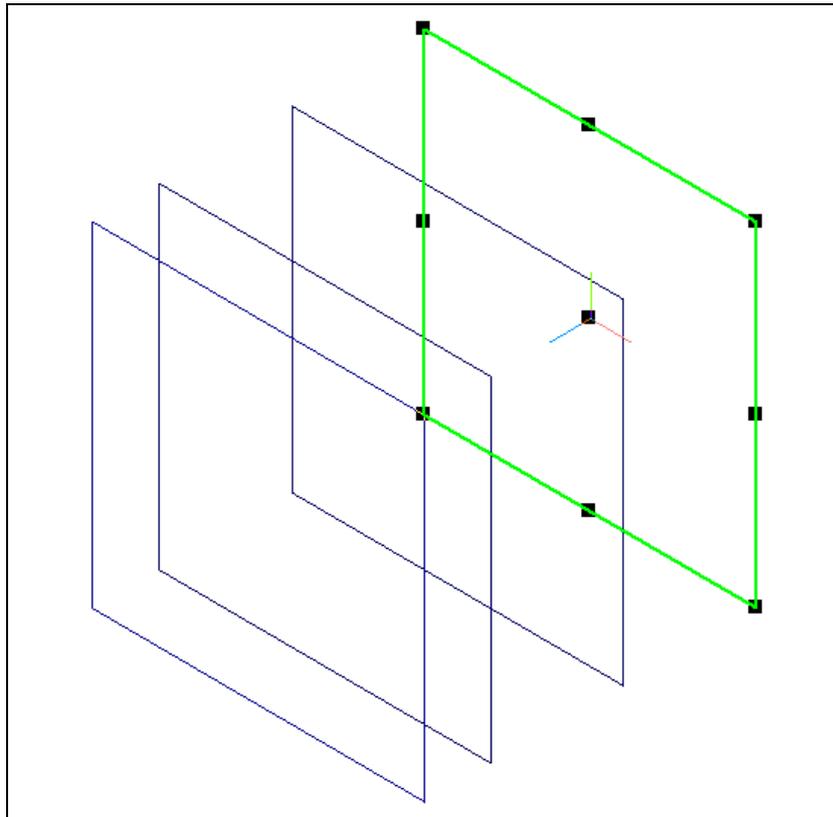


Рис. 4.72. Система дополнительных смещенных (относительно XY, плоскость выделена) плоскостей

**Постановка задачи моделирования.** Создать модель объекта по рис. 4.73.

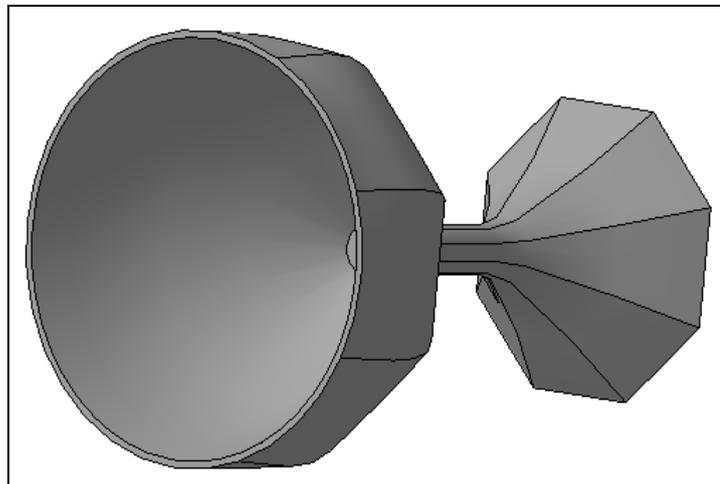


Рис. 4.73. Деталь

**Порядок выполнения работы.** Первоначально необходимо создать систему смещенных плоскостей (рис. 4.74). Дополнительные плоскости (рис. 4.74) имеют смещение относительно плоскости XY: 40мм, 75мм, 100мм, 140мм. В плоскости XY создадим первый эскиз (рис. 4.75) – восьмиугольник с диаметром вписанной окружности 60мм:

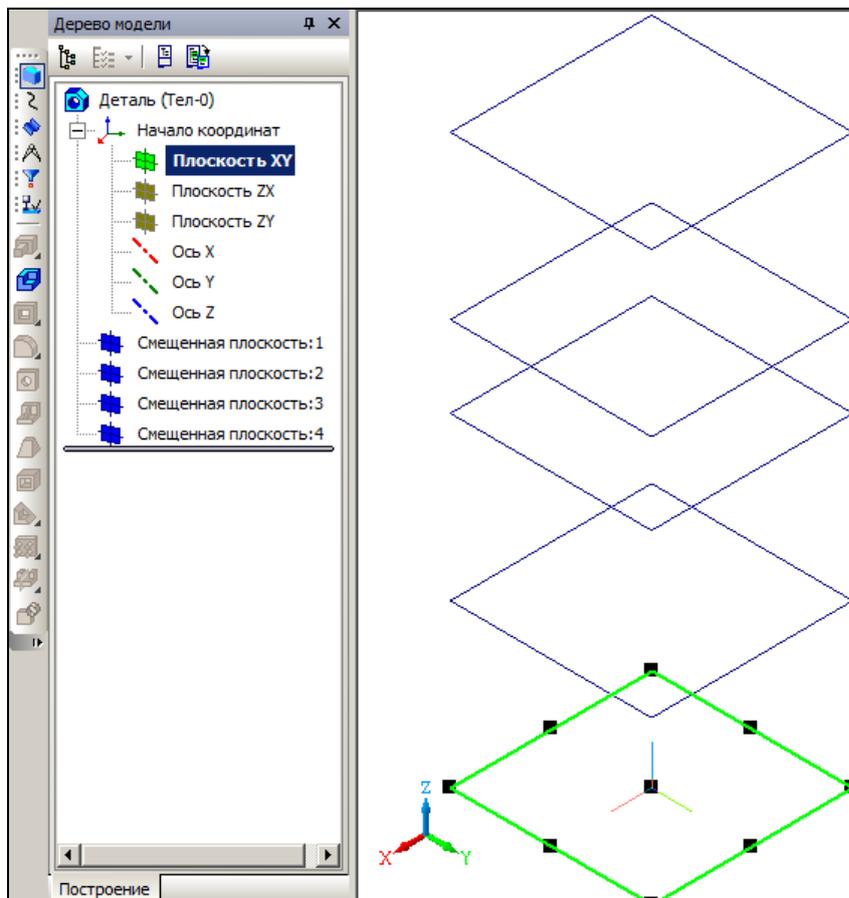


Рис. 4.74. Система смещенных плоскостей (выделена плоскость XY)

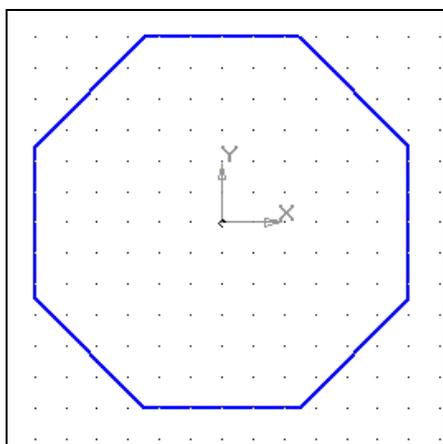


Рис. 4.75. Первый эскиз в плоскости XY

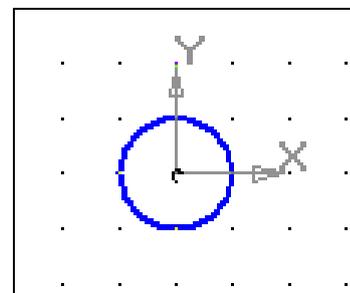


Рис. 4.76. Второй и третий эскизы (смещенные плоскости 1 и 2)

Смещение создаваемой плоскости отсчитывается от выделенной в дереве модели плоскости. На смещенных плоскостях 1 и 2 создадим эскиз по рис. 4.76. Это окружность диаметром 10мм. На смещенных плоскостях 3 и 4 создадим эскизы по рис 4.77-4.78. Третий эскиз это – восьмиугольник с диаметром вписанной окружности 70мм. Пятый эскиз – окружность диаметром 90мм (рис 4.78).

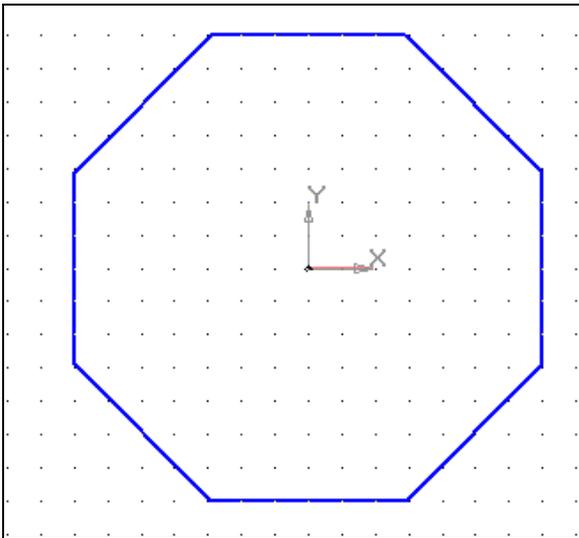


Рис. 4.77. Четвертый эскиз (смещенная плоскость 3)

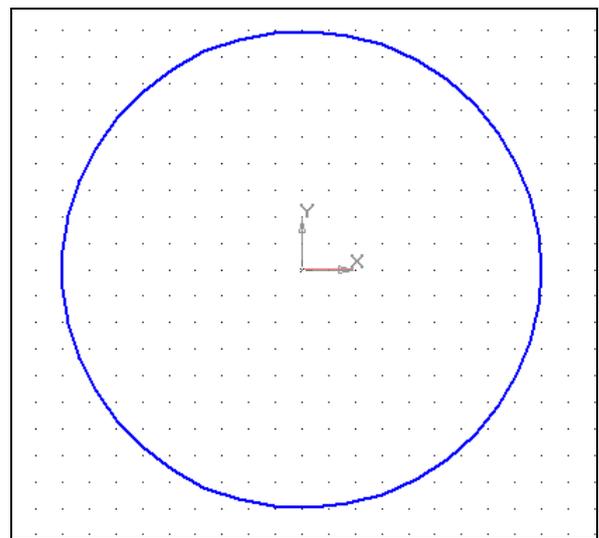


Рис. 4.78. Пятый эскиз (смещенная плоскость 4)

Объединение эскизов в единую модель производится путем гладкого сопряжения операцией **По сечениям**:  (рис. 4.79). Операция требует последовательно добавления эскизов из дерева модели для построения трехмерного объекта. Добавление выполняется щелчком мышки.

Необходимо сделать выемку в полученной детали путем выполнения операции **Вырезать по сечениям**. Для реализации этой операции создадим три новые смещенные плоскости (Смещенная плоскость: 5; Смещенная плоскость: 6; Смещенная плоскость: 7, рис. 4.80). Для новых смещенных плоскостей величина смещения (параметр **Расстояние**) задается относительно объекта **Смещенная плоскость:4**. Расстояния равны – 5мм, 30мм и 62мм соответственно (рис. 4.81).

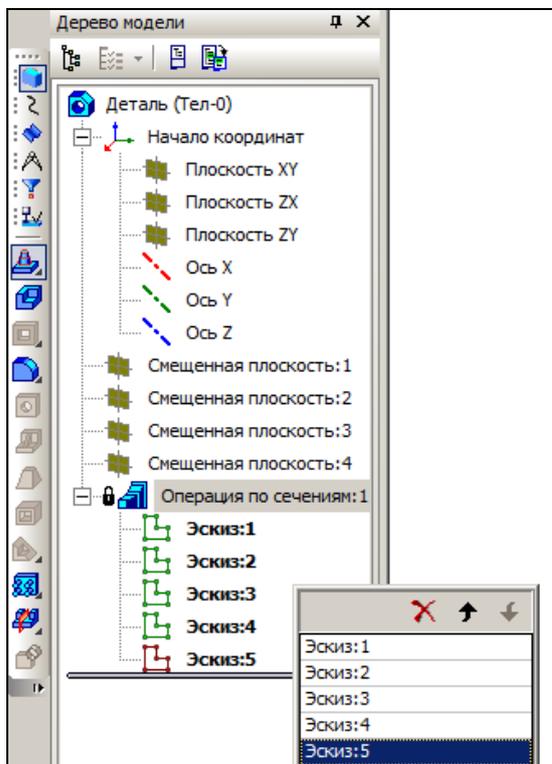


Рис. 4.79. Добавление эскизов в операцию **По сечениям**

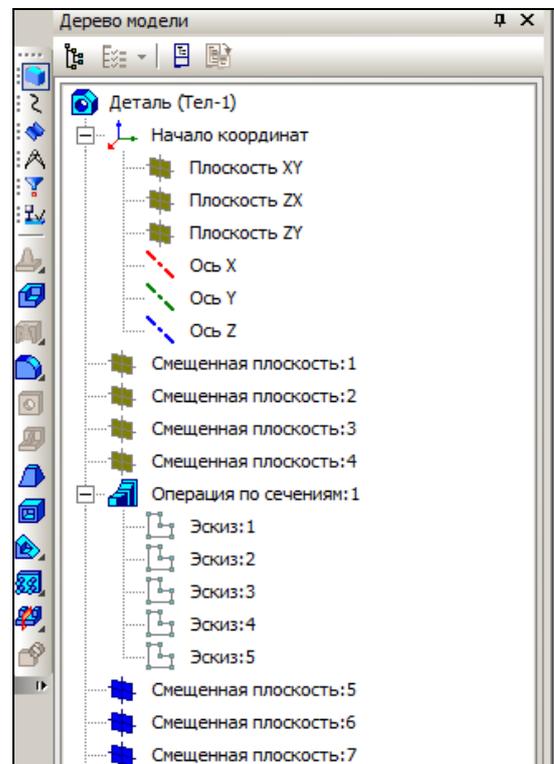


Рис. 4.80. Дерево модели

На новых смещенных плоскостях создадим эскизы (рис. 4.82-4.84). Эскизы – это окружности диаметром 10мм, 63мм, 88мм.

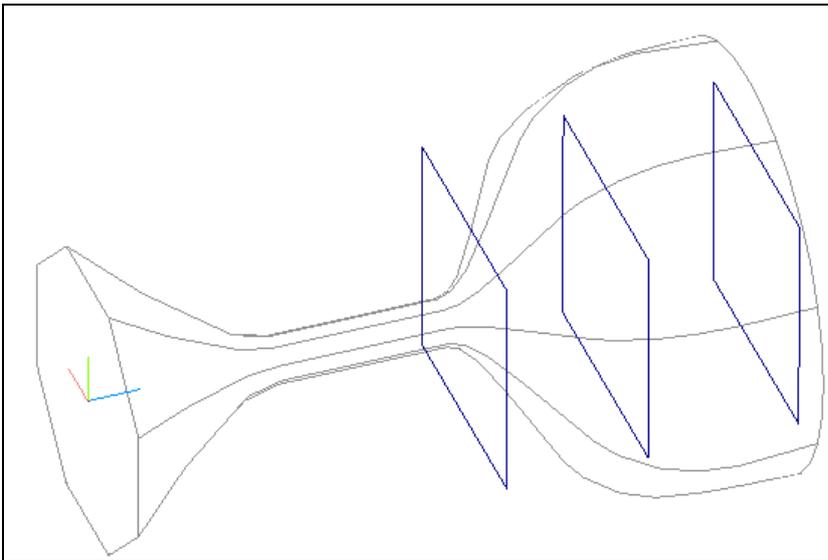


Рис. 4.81. Новые смещенные плоскости

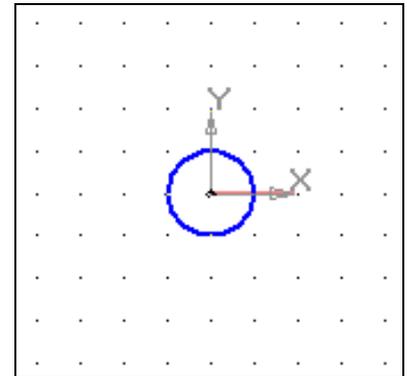


Рис. 4.82. Эскиз для смещенной плоскости 5

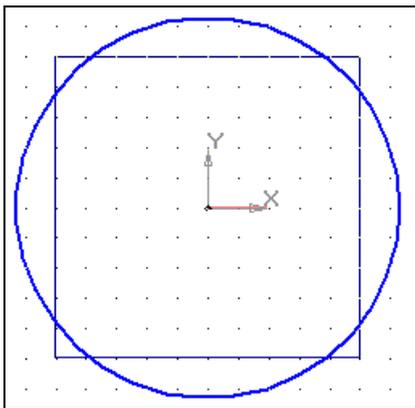


Рис. 4.83. Эскиз для смещенной плоскости 6

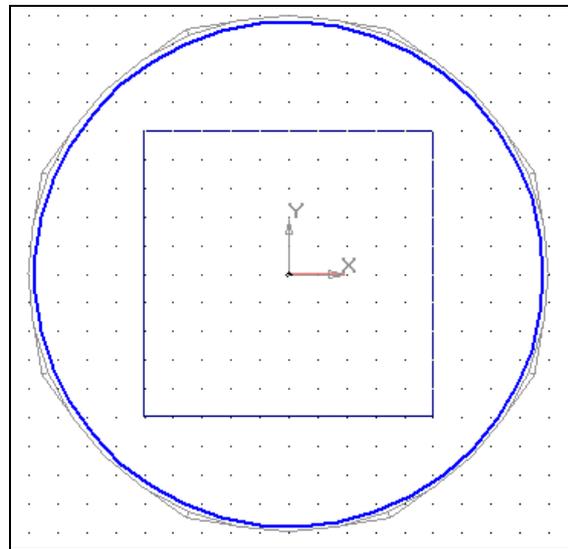


Рис. 4.84. Эскиз для смещенной плоскости 7



Рис. 4.85. Панель параметров окружности

Так как установлен режим привязки **По сетке**, то первоначально создается окружность диаметром, например, 60мм, а затем, путем ее редактирования, значение диаметра на панели параметров окружности задается явным образом (рис. 4.85). Для перехода в режим редактирования, окружность необходимо выделить и выбрать пункт **Редактировать** в контекстном меню (рис. 4.86).

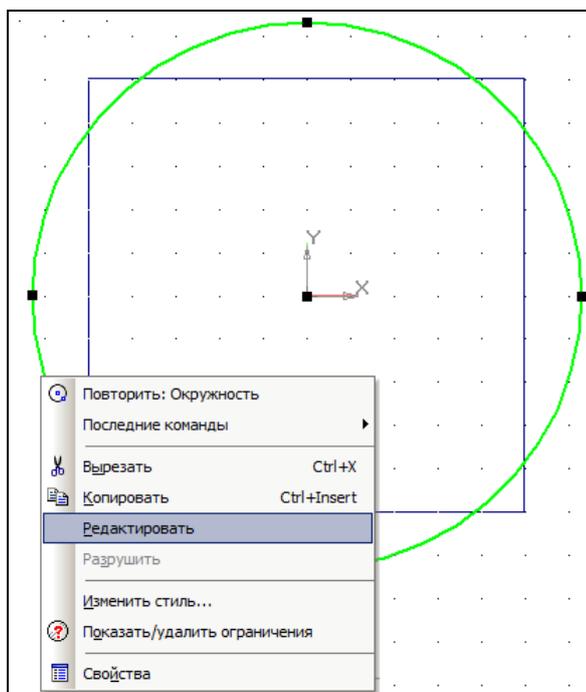


Рис. 4.86. Переход в режим редактирования окружности

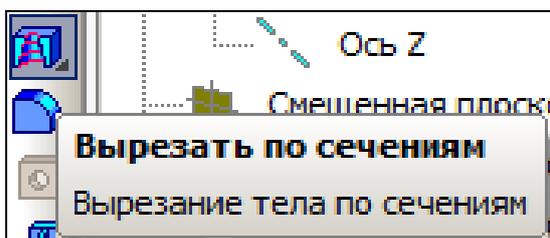


Рис. 4.87. Кнопка операции - **Вырезать по сечениям**

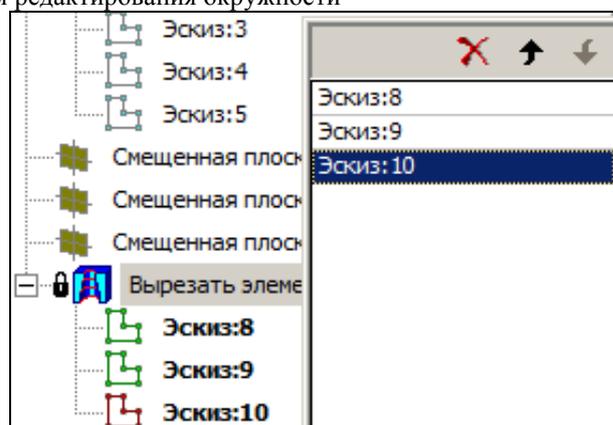


Рис. 4.88. Добавление эскизов

Осталось выполнить операцию **Вырезать по сечениям** (рис. 4.87), которая находится в группе операций **Вырезать**. При выполнении операции следует добавить в операцию необходимые эскизы (рис. 4.88) и выполнить ее. Результат – готовая модель (рис. 4.73).

**Дополнительное задание.** Самостоятельно задайте цвет и оптические свойства детали таким образом, чтобы модель внешне воспринималась как стеклянный фужер. Для получения доступа к свойствам детали необходимо пометить пункт **Деталь** в дереве модели и выбрать пункт **Свойства** в контекстном меню (рис. 4.89).

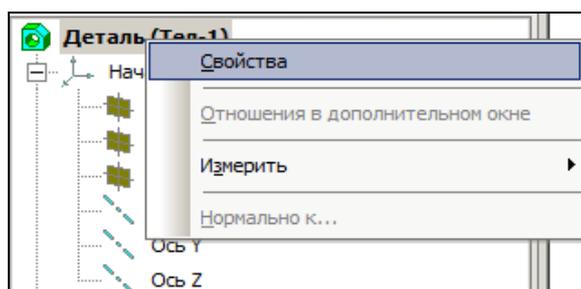


Рис. 4.89. Контекстное меню

#### 4.5. Применение кинематической операции

**Теоретическое введение.** В предыдущих работах для построения трехмерных моделей уже применялись операции, связанные с перемещением эскиза по заданной траектории. Операция **Выдавливание** связана с прямолинейным перемещением плоского эскиза перпендикулярно плоскости его построения. Операция **Вращение** включает перемещение исходного эскиза по круговой траектории относительно заданной оси вращения.

В системе КОМПАС 3-D существует **Кинематическая операция** твердотельного моделирования, которая связана с перемещением эскиза по произвольной траектории. Операция требует двух эскизов: эскиз-траектория и эскиз-сечение. Плоскость, в которой находится эскиз - траектория, не совпадает с плоскостью эскиза - сечения.

**Постановка задачи моделирования.** Создать модель прямоугольной рамы (рис. 4.90-4.91). Сечение рамы – прямоугольник размерами: 10мм на 30мм. Размеры рамы 200мм на 300мм.

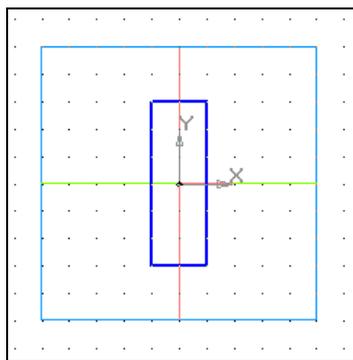


Рис. 4.90. Эскиз сечения рамы 1

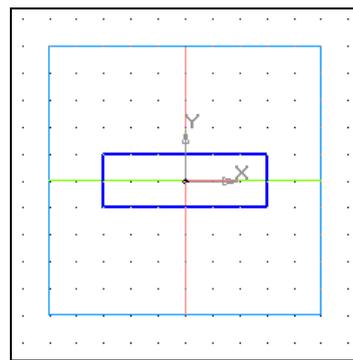


Рис. 4.91. Эскиз сечения рамы 2

**Порядок выполнения работы.** Необходимо построить два эскиза: эскиз-сечение и эскиз-траекторию. Для построения эскиза-сечения выберем плоскость XY. Далее построим эскиз по рис. 4.90 или по рис. 4.91. Затем построим эскиз траектории. Для построения траектории выберем плоскость ZX.

Для построения замкнутой траектории используем команду **Прямоугольник** - . Первую точку прямоугольной траектории движения эскиза-сечения нужно поставить в точке пересечения осей X и Y.

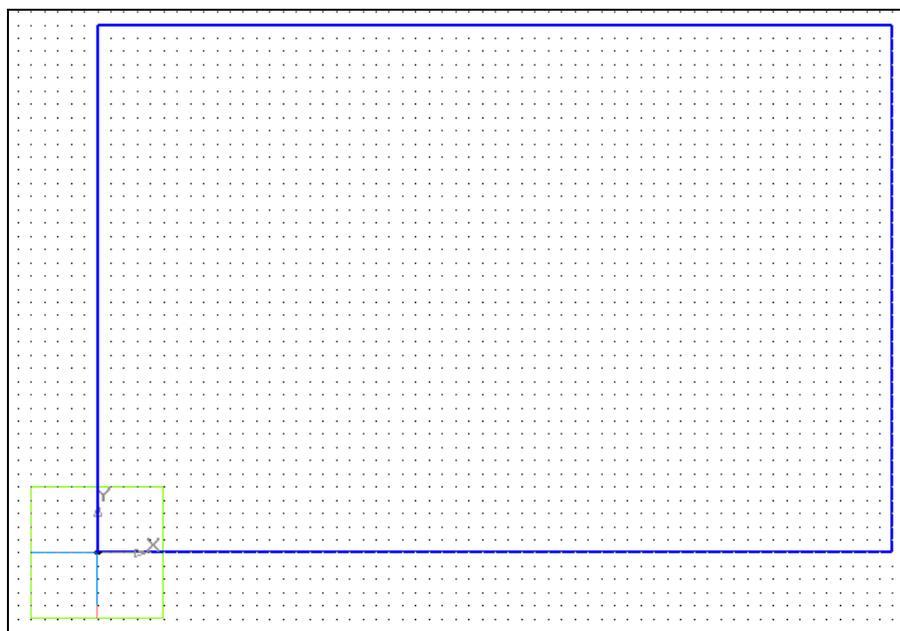


Рис. 4.92. Эскиз-траектория

Построим эскиз-траекторию **Прямоугольник** так, как показано на рис. 4.92, после чего завершим редактирование эскиза. После построения эскиза-сечения и эскиза-траектории можно использовать **Кинематическую операцию** твердотельного моделирования - .

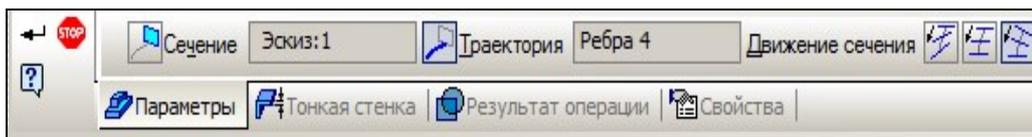


Рис. 4.93. Панель параметров кинематической операции

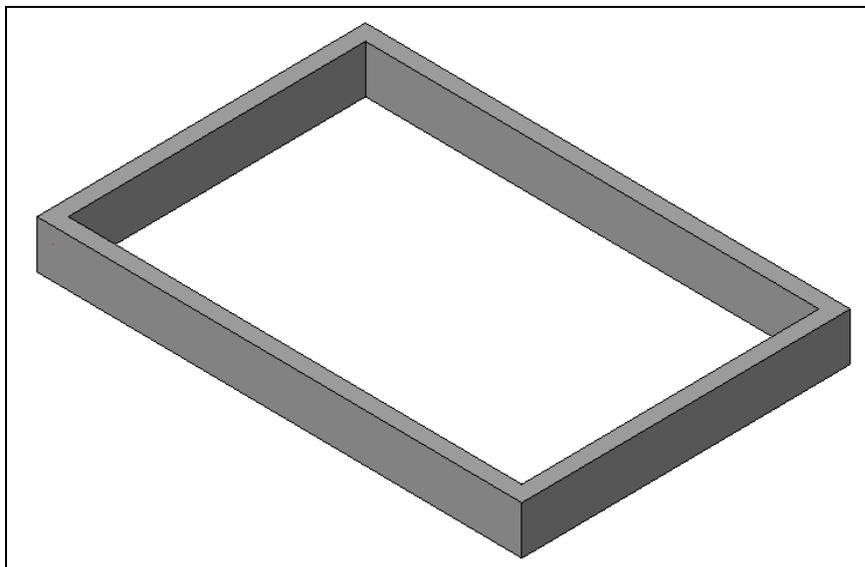


Рис. 4.94. Модель рамы

На панели параметров Кинематической операции (рис. 4.93) зададим следующие значения: Отключить создание тонкой стенки; **Сечение** – в дереве модели выберем **Эскиз:1**; **Траектория** – в дереве модели выберем **Эскиз:2**; **Движение сечения** – выберем вариант ортогонально траектории.

Создадим модель (кнопка Создать ). Готовая модель представлена на рис. 4.94.

**Дополнительное задание.** Создайте модель рамы, с сечением по рис. 4.91. Постройте модели с тонкой стенкой 1мм.

#### 4.6. Построение сечения тела плоскостью

**Теоретическое введение.** Программный комплекс твердотельного моделирования КОМПАС позволяет строить дополнительные плоскости множеством способов. Дополнительные плоскости могут использоваться для различных целей: построение эскизов, выполнение сечений и т.п. Имеется множество вариантов построения дополнительных плоскостей (пункт меню **Операции - Плоскость**). В предыдущей работе мы познакомились с технологией создания смещенных плоскостей. В данной работе предстоит освоить некоторые способы построения дополнительных плоскостей и использовать плоскости для построения сечений.

**Постановка задачи моделирования 1.** Построить деталь-заготовку, которая является призмой высотой 80мм., основанием которой является правильный восьмиугольник с диаметром вписанной окружности 60мм. (рис. 4.95).

Деталь строится с помощью операции **Выдавливание** в режиме **Создать тонкую стенку** с толщиной 2мм. Затем к торцам детали с помощью операции выдавливания добавляются днища толщиной 2мм. При этом эскиз строится в плоскости торца детали. Для привязки к этой плоскости ее необходимо выделить (позметить) щелчком мышки. Схема построения детали показана в **Дереве модели** (рис. 4.95). Выполнить сечения тела плоскостями XY и ZX.

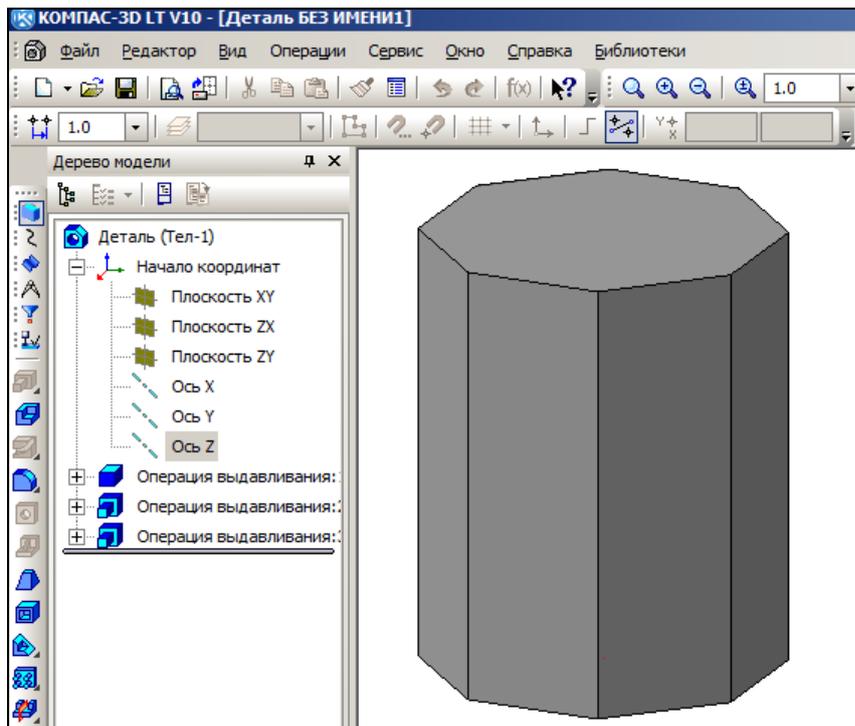


Рис. 4.95. Деталь-заготовка

**Порядок выполнения работы.** Выполним сечение тела плоскостью ZY. Для этого выделим в Дереве модели элемент **Плоскость ZY** (рис. 4.96.).

Выполним операцию **Сечение поверхностью** - . Панель параметров операции представлена на рис. 4.95. Плоскость сечения уже указана, выберем прямое направление для построения сечения.

Выполнение команды **Создать**  даст следующий результат (рис. 4.98). Далее по аналогичному сценарию выполните сечение плоскостью ZX (рис. 4.99).

**Постановка задачи моделирования 2.** Выполнить сечение тела плоскостью (рис. 4.100).

**Порядок выполнения работы.** Удалим из дерева модели элементы **Сечение плоскостью:1** и **Сечение плоскостью:2**, т.е. восстановим первоначальный вид детали (рис. 4.95). В пункте меню **Операции - Плоскость** выберите команду **Плоскость через три вершины** (рис. 4.101).

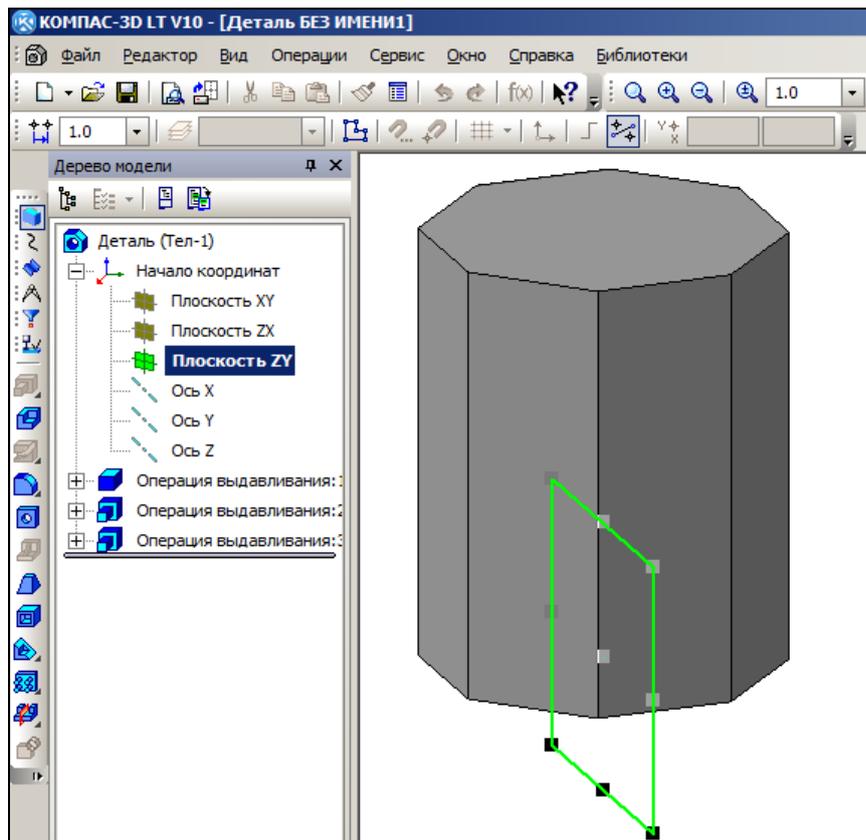


Рис. 4.96. Выделена плоскость ZY

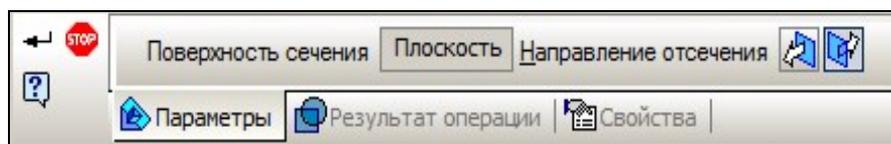


Рис. 4.97. Панель параметров операции **Сечение поверхностью**

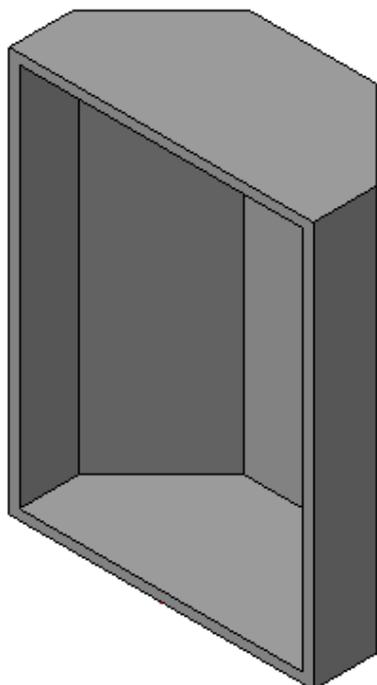


Рис. 4.98. Сечение плоскостью ZY

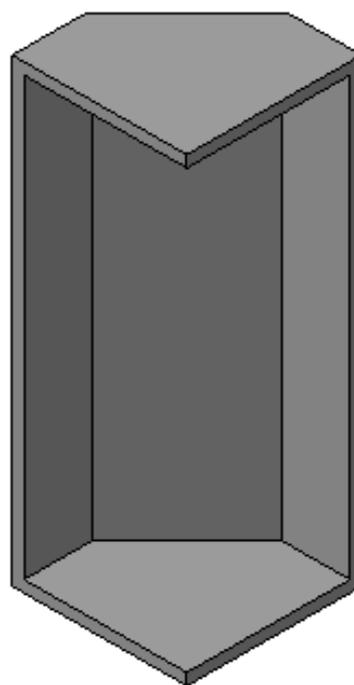


Рис. 4.99. Сечение плоскостью ZX

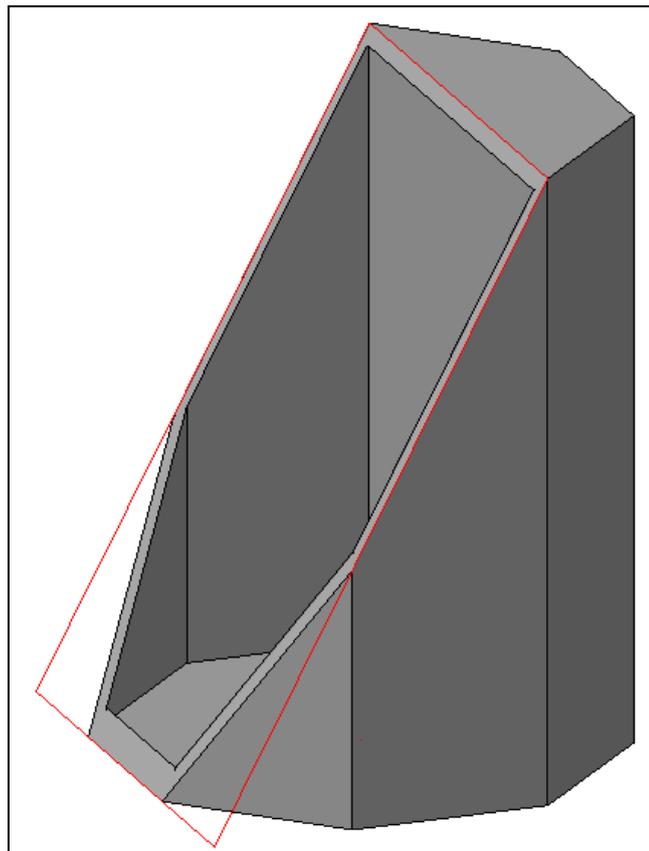


Рис. 4.100. Деталь

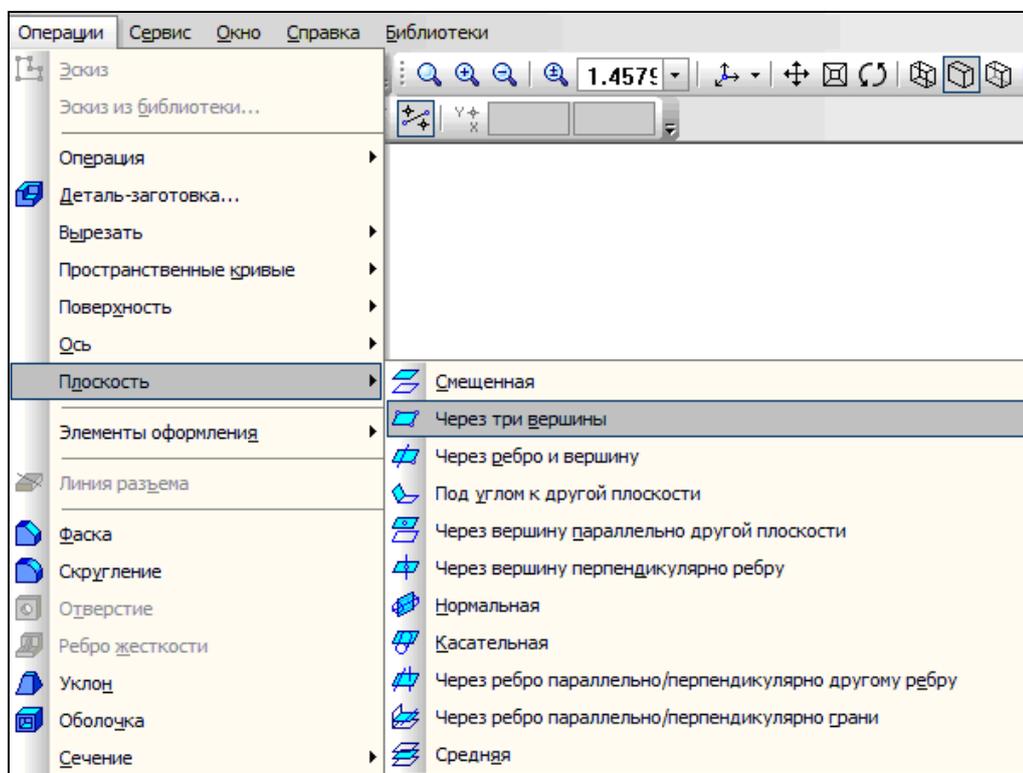


Рис. 4.101. Команда построения плоскости **Через три вершины**

Затем последовательно привяжитесь к трем вершинам тела, как показано на рис. 4.102, и плоскость будет построена. Выполните операцию **Сечение плоскостью** - . Параметры операции задайте, таким образом, чтобы получить модель по рис. 4.100.

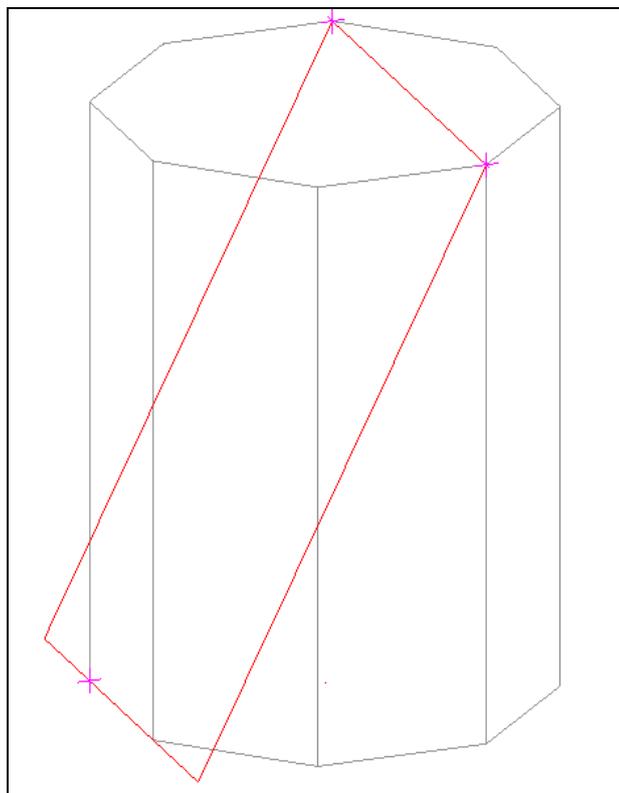


Рис. 4.102. Построение плоскости через три вершины

**Постановка задачи моделирования 3.** Построить сечение тела плоскостью по рис. 4.103.

**Порядок выполнения работы.** Путем удаления из **Дерева модели** элементов **Сечение поверхностью** и **Плоскость через три вершины**, восстановим исходное состояние модели (рис. 4.95). Выполним сечение плоскостью **Через три вершины**. Плоскость показана на рис. 4.103.

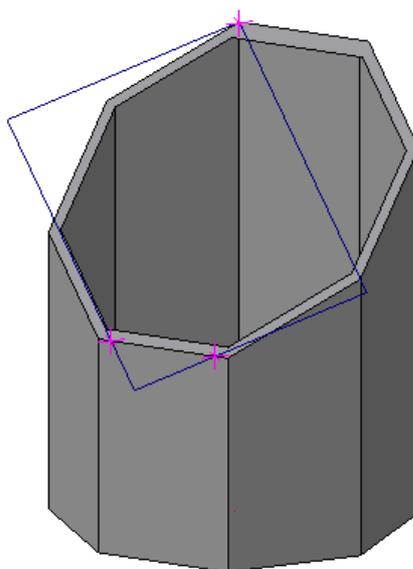


Рис. 4.103. Деталь

В выделим одну из боковых граней детали, зададим ориентацию **Нормально к...** и создадим новый эскиз (рис. 4.104). С помощью инструмента плоского рисования - точка , построим две точки на эскизе (рис. 4.104). Точки находятся на равных расстояниях от оснований. Затем закончим редактирование эскиза.

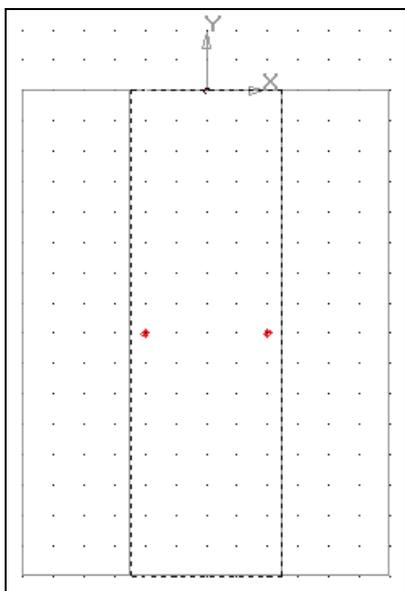


Рис. 4.104. Выделенная грань и эскиз

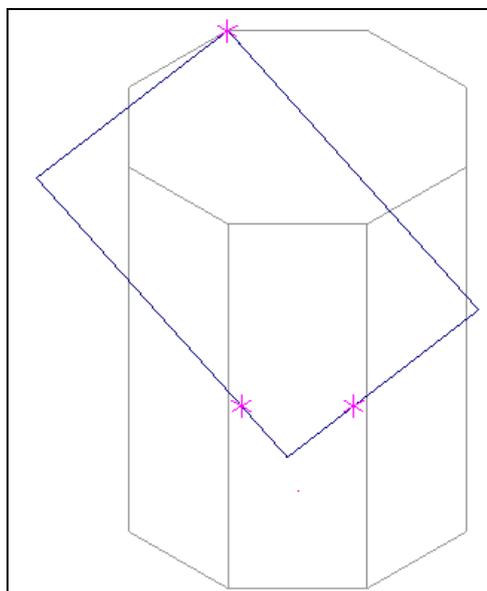


Рис. 4.105. Построение плоскости через три вершины

Построим плоскость через три вершины. В качестве вершин выберем построенные точки и одну из вершин детали (рис. 4.105). Выполним операцию **Сечение поверхностью** . Итог выполнения операции представлен на рис. 4.103.

#### 4.7. Использование операций добавления и вырезания вращением

**Теоретическое введение.** В предыдущих работах мы уже использовали операцию **Выдавливание**, которая позволяет к созданному телу присоединить новый фрагмент, созданный выдавливанием. В тоже время система КОМПАС 3D позволяет выполнять добавление новых фрагментов с помощью операций **Вращение**, **Кинематически** и **По сечениям** (рис. 4.106), которые по сути совпадают с операцией **Приклеить выдавливанием**. Существуют и обратные операции: **Вырезать выдавливанием**, **Вырезать вращением**, **Вырезать кинематически**, **Вырезать по сечениям** (рис. 4.107).



Рис. 4.106. Операции добавления новых фрагментов тела



Рис. 4.107. Операции вырезания

**Задание на моделирование.** Используя операции добавления вращением и вырезания вращением, создать модели тел по рис. 4.108-4.109. Тела абсолютно симметричны. Ребро куба – 100мм, диаметр полусферы – 30мм.

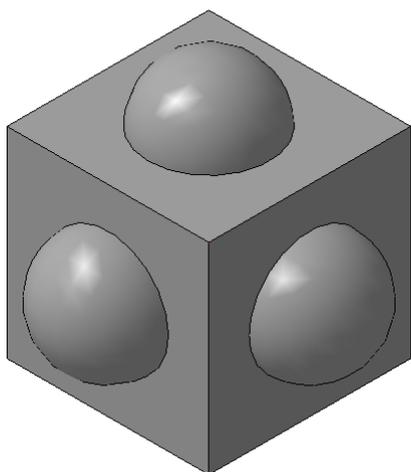


Рис. 4.108. Результат добавления..

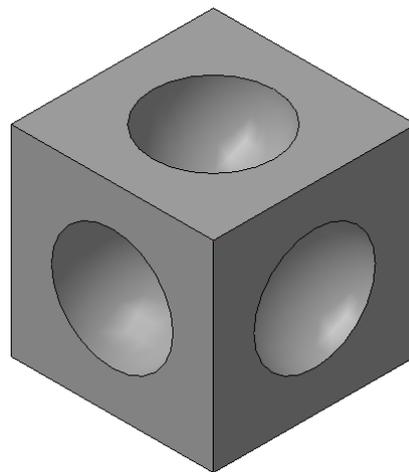


Рис. 4.109. Результат вырезания

**Порядок выполнения лабораторной работы.** При построении моделей в качестве базовых плоскостей для построения эскизов следует выбирать грани куба. Для этого грань необходимо выделить щелчком мышки (рис. 4.110). Дальнейшие действия построения эскиза аналогичны.

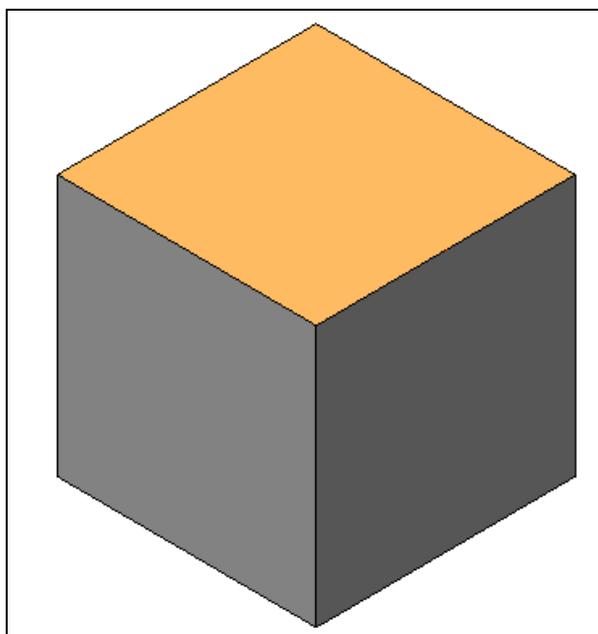


Рис. 4.110. Выделенная грань  
(для наглядности цвет выделения изменен)

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить модель детали по рис. 4.111. Параметры детали: ширина и длина 50мм., в пятиугольник может быть вписана окружность радиусом 20мм, толщина стенки 2мм.



Вид сверху

Вид сбоку

Изометрия

Рис. 4.111

2. Построить модель детали по рис. 4.112. Параметры детали: высота 80мм., диаметр окружностей-оснований 50мм., сдвиг оснований относительно друг друга 25мм.



Вид сбоку

Изометрия

Рис. 4.112

3. Построить модель детали по рис. 4.113. Параметры детали: высота 60мм., основание – квадрат со стороной 50мм., толщина стенки 2мм.

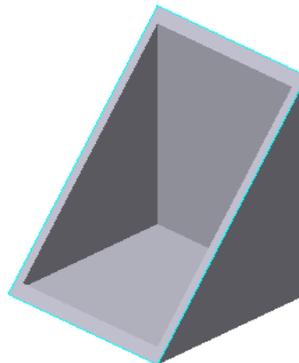
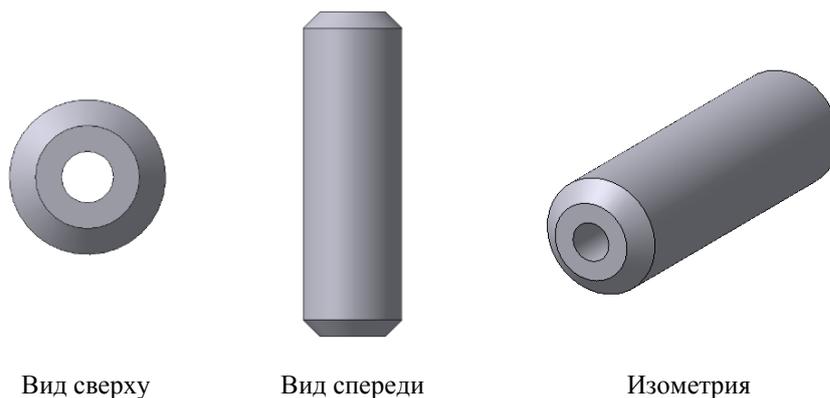


Рис. 4.113

4. Построить модель детали по рис. 4.114. Характеристики детали: высота 100мм., диаметр 30мм., диаметр продольного отверстия 10 мм., фаска  $5 \times 45^\circ$ .



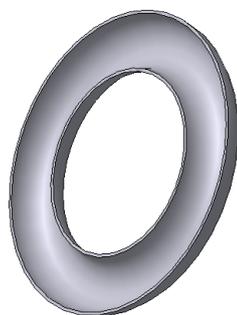
Вид сверху

Вид спереди

Изометрия

Рис. 4.114

5. Построить модель детали по рис. 4.115. Параметры детали: внутренний радиус тора 30мм., внешний радиус тора 50мм., толщина стенки 1 мм., высота 10 мм.



Изометрия



Вид сбоку

Рис. 4.115

6. Построить модель детали по рис. 4.116. Параметры детали: высота 30мм., диаметр окружности вписанной в шестиугольник основания 60 мм., вершина сдвинута относительно центра основания на 20 мм.

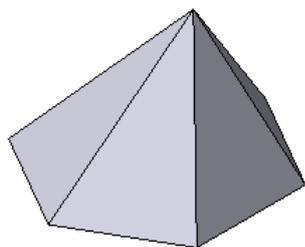


Рис. 4.116

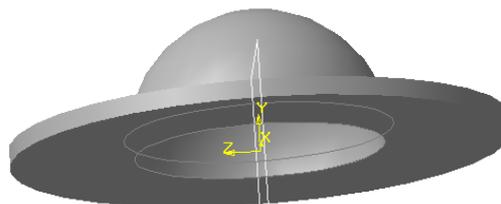


Рис. 4.117

7. Построить модель детали по рис. 4.117. Параметры детали («шляпа»): диаметр полусферы 70мм., диаметр полей «шляпы» 140мм., толщина «шляпы» 2мм.

8. Построить модель детали по рис. 4.118. Параметры детали: параллелепипед с высотой 20мм. и сферическим скруглением ребер. Основание правильный треугольник радиусом вписанной окружности 15мм.

9. Построить модель детали: кубик с внутренней сферической раковиной (рис. 4.119). Характеристики детали: Кубик со стороной 50мм. Диаметр раковины 60мм.

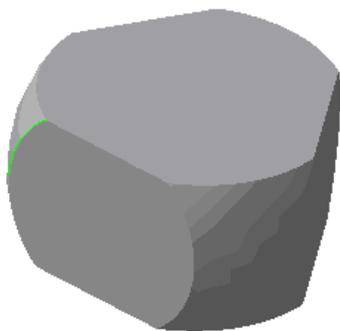


Рис. 4.118

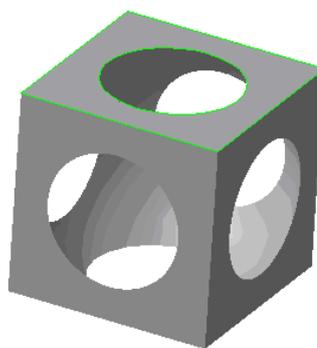


Рис. 4.119

Дополнительную информацию по теме «Графическое 3D моделирование» можно найти на сайтах и в публикациях: [12], [20], [27].

## V. Имитационное и стохастическое моделирование

### 5.1. Построение регрессионной модели

**Теоретическое введение.** Одно из характерных явлений современной науки – это переход к изучению сложных, больших и плохо организованных систем. В начале XX века на основе методов математической статистики были сделаны первые шаги по изучению таких систем, в которых нельзя выделить отдельные физически однородные явления и разграничить их действие.

Математическое моделирование с использованием законов, описывающих протекающие в подобных системах процессы, приводит к весьма сложным нелинейным системам дифференциальных уравнений, в которых параметры либо заданы приближенно, либо неизвестны. В тоже время подобные системы достаточно просто поддаются экспериментальному изучению.

В этом случае при построении модели реализуется чисто **эмпирический подход** – устанавливается формальная количественная связь между свойствами объекта и определяющими их факторами в виде, какой либо формальной математической зависимости (т.е. построение уравнения регрессии или регрессионной модели).

Пусть эксперимент поставлен и проведен, результаты наблюдений получены и зафиксированы. Теперь их необходимо представить в какой-то компактной форме, удобной для практического применения и анализа.

Пусть явление или процесс характеризуется только двумя величинами  $X$  и  $Y$ , значения которых фиксируются путем измерений в процессе эксперимента и всегда имеют случайный характер. Задачей исследования является установление так называемой статистической зависимости между случайными величинами  $X$  и  $Y$ .

Выбор той или иной формы зависимости определяет точность, с которой модель описывает реальную действительность. Регрессионный анализ сводится к тому, что на основе экспериментальных данных определяются коэффициенты модели и делается оценка ее адекватности.

Рассмотрим простой пример. Предположим, выполнено  $N$  измерений случайных величин  $X$  и  $Y - (x_i, y_i)$ . Допустим, что зависимость  $y$  от  $x$  предполагается линейной:

$$f(x) = a x + b.$$

Результаты измерений  $(x_i, y_i)$  всегда представляют собой случайные величины. Требуется построить такую линейную зависимость, которая наилучшим образом приближает результаты наблюдений. Таким образом, требуется определить параметры линейной функции  $a$  и  $b$ . Для решения данной задачи используется **метод наименьших квадратов** (МНК). Параметры линейной функции должны иметь такие значения, чтобы в целом точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$  лежали как можно ближе к прямой.

Назовем отклонением разность:  $f(x_i) - y_i$ . Подберем параметры  $a$  и  $b$  таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальна:

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min .$$

В этом и состоит требование метода наименьших квадратов. Данная сумма есть функция искомых параметров  $a$  и  $b$ :

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^N ((a \cdot x_i + b) - y_i)^2.$$

Минимум данной функции достигается при следующих значениях  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - a \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Подобным образом метод наименьших квадратов применяется для нахождения параметров множественной линейной и нелинейной регрессии.

Для оценки адекватности регрессионной модели используется **коэффициент детерминации**, который характеризует соответствие полученной зависимости, имеющимся эмпирическим данным:

$$D = 1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{общ}^2}; \quad \sigma_{общ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}; \quad \sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i))^2}{N-1}$$

Величина  $\sigma_{общ}^2$  - общая дисперсия, характеризует разброс наблюдаемых величин  $y_i$  относительно среднего значения  $\bar{y}$ ;  $\sigma_{ост}^2$  - остаточная дисперсия, характеризует отклонения наблюдаемых величин  $y_i$  от значений, полученных по регрессионной зависимости. Если  $D=1$ , значит  $\sigma_{ост}^2 = 0$ , т.е. все наблюдаемые точки соответствуют построенной регрессионной зависимости. В противном случае при  $D=0$ , регрессионная связь между величинами отсутствует.

**Постановка задачи моделирования.** По заданным значениям  $(x_i, y_i)$ , полученным в результате измерений (табл. 5.1), методом наименьших квадратов определить параметры линейной регрессионной модели и оценить ее адекватность.

**Порядок выполнения работы.** Первоначально построим линейную зависимость. Для исходных данных (вариант 1, табл. 5.1) выполнить поиск значений параметров линейной функции с помощью надстройки «Поиск решения». Таблица для решения задачи представлена на рис. 5.1. Целевой функцией является зависимость:

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^N ((a \cdot x_i + b) - y_i)^2.$$

	A	B	C	D	E	F
1	$\Sigma(F(Xi)-Yi)^2$			$Xi$	$Yi$	$(F(Xi)-Yi)^2$
2	64,7			0	8,4	6,32
3				-1	3,4	2,20
4	a	1,0012		-2	3	0,78
5	b	5,8859		-3	2,5	0,15
6				-4	1,7	0,03
7				-5	1,3	0,18

Рис. 5.1. Поиск оптимального значения параметров  $a, b$  с помощью надстройки «Поиск решения»

Для построения следующей модели и выполнения расчетов необходимо создать таблицу, фрагмент которой показан на рис. 5.2. В таблице представлены исходные данные  $x_i, y_i$  и выполнены необходимые расчеты для варианта 1 (табл. 5.1). Создайте

данную таблицу. Для проверки правильности расчетов добейтесь совпадения результатов.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\Sigma Xi$	N		$Xi$	$Yi$	$Xi \cdot Yi$	$Xi^2$
2	-465	31		0	8,4	0,0	0
3	$\Sigma Yi$	a		-1	3,4	-3,4	1
4	-283,1	1,0012		-2	3,0	-6,0	4
5	$\Sigma (Xi^2)$	b		-3	2,5	-7,5	9
6	9455	5,8859		-4	1,7	-6,8	16
7	$\Sigma XiYi$			-5	1,3	-6,5	25
8	6729,5			-6	-2,0	12,0	36
9				-7	-1,0	7,0	49
10				-8	-0,5	4,0	64
11				-9	-4,3	38,7	81
12				-10	-5,6	56,0	100

Рис. 5.2. Решение задачи для варианта 1

Таблица 5.1

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
$Xi$	$Yi$	$Xi$	$Yi$	$Xi$	$Yi$	$Xi$	$Yi$	$Xi$	$Yi$	$Xi$	$Yi$
0	8,4	0	0,0	-10	109,4	-10	71,2	0	51,3	0	3,5
-1	3,4	-1	0,6	-9	114,0	-9	181,8	1	16,7	1	9,6
-2	3,0	-2	2,5	-8	112,0	-8	135,3	2	26,6	2	0,5
-3	2,5	-3	7,9	-7	43,0	-7	108,8	3	55,9	3	5,9
-4	1,7	-4	8,5	-6	34,3	-6	40,0	4	40,9	4	1,0
-5	1,3	-5	9,0	-5	39,3	-5	150,1	5	67,9	5	2,0
-6	-2,0	-6	9,0	-4	27,6	-4	109,8	6	42,1	6	6,5
-7	-1,0	-7	15,7	-3	39,1	-3	122,9	7	76,2	7	5,2
-8	-0,5	-8	12,1	-2	49,7	-2	38,2	8	93,9	8	2,9
-9	-4,3	-9	18,1	-1	20,3	-1	83,1	9	56,7	9	4,5
-10	-5,6	-10	21,7	0	77,4	0	29,9	10	64,3	10	9,7
-11	-2,5	-11	18,0	1	65,9	1	50,7	11	93,0	11	3,7
-12	-5,1	-12	22,0	2	22,1	2	95,0	12	81,1	12	8,8
-13	-9,0	-13	23,9	3	5,4	3	23,5	13	94,4	13	2,9
-14	-9,3	-14	26,7	4	36,7	4	41,8	14	103,4	14	2,7
-15	-10,2	-15	32,7	5	8,4	5	97,0	15	109,9	15	1,7
-16	-7,8	-16	32,0	6	10,0	6	92,4	16	124,8	16	3,2
-17	-10,7	-17	34,6	7	12,6	7	94,7	17	121,9	17	9,6
-18	-11,6	-18	35,8	8	-29,0	8	82,8	18	105,9	18	9,5
-19	-14,4	-19	38,2	9	-22,0	9	84,7	19	103,7	19	0,6
-20	-14,6	-20	42,7	10	-41,3	10	-32,8	20	115,6	20	0,1
-21	-12,6	-21	40,7	11	-36,6	11	-34,1	21	147,6	21	7,5
-22	-16,1	-22	44,5	12	17,8	12	-21,9	22	146,5	22	0,3
-23	-18,9	-23	46,0	13	-43,9	13	42,1	23	163,2	23	5,3
-24	-15,0	-24	44,6	14	-4,1	14	58,5	24	169,9	24	5,5
-25	-18,6	-25	50,1	15	-40,2	15	25,9	25	176,1	25	8,2
-26	-19,8	-26	50,7	16	-43,2	16	-15,8	26	162,8	26	4,6
-27	-21,3	-27	52,8	17	-19,9	17	-70,1	27	143,6	27	2,3
-28	-23,8	-28	56,8	18	-60,3	18	-57,7	28	151,6	28	2,3
-29	-23,8	-29	60,5	19	-87,5	19	41,4	29	149,2	29	7,4
-30	-24,9	-30	57,2	20	-91,7	20	-69,6	30	185,2	30	0,6

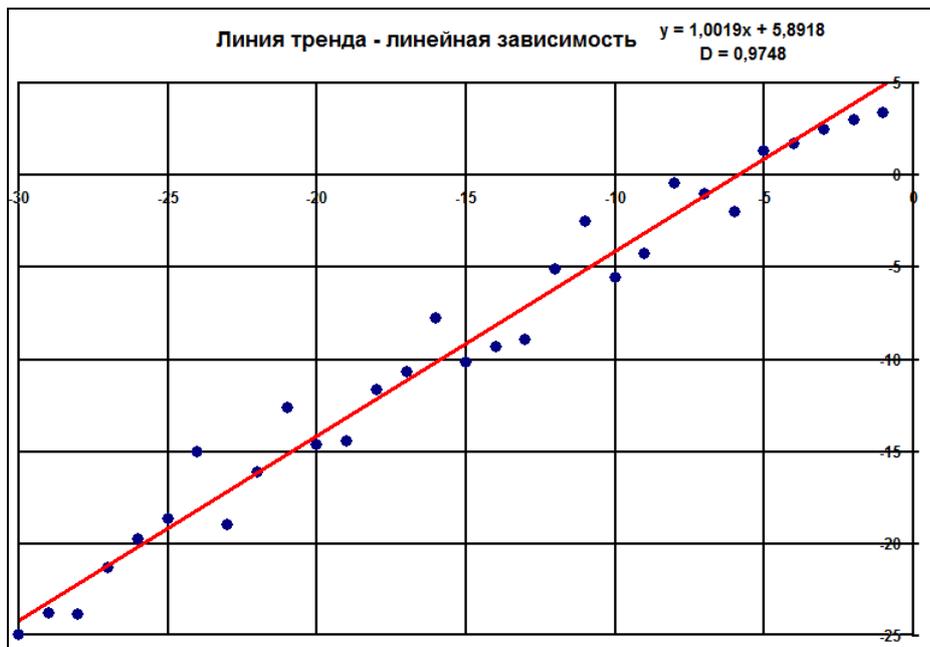


Рис. 5.3. Линия тренда и величина достоверности (коэффициент детерминации)

Задача определения параметров регрессионной зависимости может быть решена средствами электронных таблиц путем построения **линии тренда** (рис. 5.3). При этом ЭТ реализуют метод наименьших квадратов автоматически.

При построении уравнения регрессии кроме линейной функции могут быть использованы следующие классы зависимостей:

Таблица 5.2

Тип зависимости	Уравнение	Параметры
Линейная	$Y=ax+b$	$a, b$
Полиномиальная	$Y=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+b$	$a_1, \dots, a_n, b$
Логарифмическая	$Y=a+b \ln(x)$	$a, b$
Экспоненциальная	$Y=a \exp(bx)$	$a, b$
Степенная	$Y=a x^b$	$a, b$

Для построения уравнения регрессии необходимо создать таблицу числовых данных. Затем по таблице построить диаграмму «**точечная**». При этом выбрать вариант диаграммы, который отображает табличные данные в виде **точек**. Далее необходимо левой кнопкой мыши выделить любую точку и правой кнопкой вызвать контекстное меню. В нем выбрать команду «**Добавить линию тренда**». В открывшемся диалоговом окне «**Линия тренда**» (рис. 5.4) выбрать **тип зависимости**.

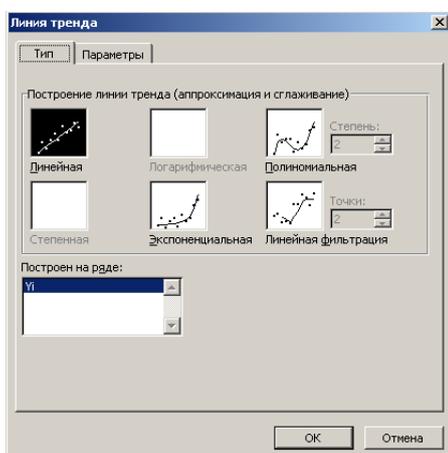


Рис. 5.4. Диалоговое окно «Линия тренда»

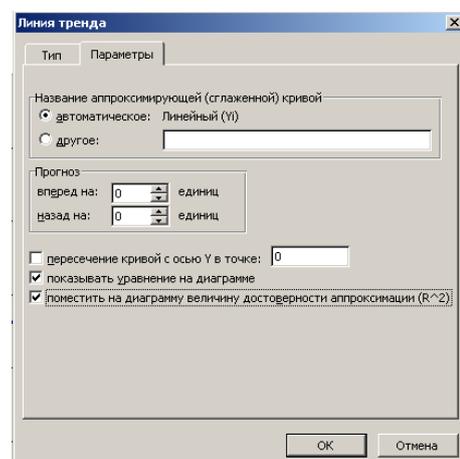


Рис. 5.5. Вкладка «Параметры»

На вкладке «**Параметры**» (рис. 5.5) выбрать опции «**Показывать уравнение**» и «**Поместить величину достоверности...**». Для исходных данных по табл. 5.1 (вариант 1) постройте **линию тренда, тип зависимости – линейная**. Параметры модели должны совпадать с данными по рис. 5.1-5.2.

Таблица 5.3

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
$X_i$	$Y_i$								
1	0,30	5,0	-53,5	-2,0	0,74	5	-1,84	1,0	0,84
2	0,42	4,9	-50,0	-1,9	0,77	6	-1,99	1,1	0,89
3	0,52	4,4	-34,8	-1,8	0,81	7	-2,11	1,2	0,93
4	0,60	3,9	-22,9	-1,7	0,85	8	-2,22	1,3	0,96
5	0,67	3,4	-13,9	-1,6	0,90	9	-2,31	1,4	0,99
6	0,74	2,9	-7,4	-1,5	0,94	10	-2,40	1,5	1,00
7	0,79	2,4	-3,1	-1,4	0,99	11	-2,47	1,6	1,00
8	0,85	1,9	-0,6	-1,3	1,04	12	-2,54	1,7	0,99
9	0,90	1,4	0,4	-1,2	1,10	13	-2,61	1,8	0,97
10	0,95	0,9	0,4	-1,1	1,15	14	-2,67	1,9	0,95
11	1,00	0,4	-0,2	-1,0	1,21	15	-2,72	2,0	0,91
12	1,04	-0,1	-1,2	-0,9	1,28	16	-2,77	2,1	0,86
13	1,08	-0,6	-2,1	-0,8	1,34	17	-2,82	2,2	0,81
14	1,12	-1,1	-2,5	-0,7	1,41	18	-2,87	2,3	0,75
15	1,16	-1,6	-2,2	-0,6	1,48	19	-2,91	2,4	0,68
16	1,20	-2,1	-0,6	-0,5	1,56	20	-2,95	2,5	0,60
17	1,24	-2,6	2,6	-0,4	1,64	21	-2,99	2,6	0,52
18	1,27	-3,1	7,7	-0,3	1,72	22	-3,03	2,7	0,43
19	1,31	-3,6	15,1	-0,2	1,81	23	-3,06	2,8	0,34
20	1,34	-4,1	25,3	-0,1	1,90	24	-3,10	2,9	0,24
21	1,38	-4,6	38,5	0,0	2,00	25	-3,13	3,0	0,14
22	1,41	-5,1	55,1	0,1	2,10	26	-3,16	3,1	0,04
23	1,44	-5,6	75,6	0,2	2,21	27	-3,19	3,2	-0,06
24	1,47	-6,1	100,3	0,3	2,32	28	-3,22	3,3	-0,16
25	1,50	-6,6	129,6	0,4	2,44	29	-3,25	3,4	-0,26
26	1,53	-7,1	163,8	0,5	2,57	30	-3,28	3,5	-0,35
27	1,56	-7,6	203,3	0,6	2,70	31	-3,30	3,6	-0,44
28	1,59	-8,1	248,5	0,7	2,84	32	-3,33	3,7	-0,53
29	1,62	-8,6	299,8	0,8	2,98	33	-3,35	3,8	-0,61
30	1,64	-9,1	357,6	0,9	3,14	34	-3,38	3,9	-0,69
31	1,67	-9,6	422,2	1,0	3,30	35	-3,40	4,0	-0,76

**Анализ результатов моделирования.** После построения таблицы и линии тренда (рис. 5.3), выполните расчеты для других вариантов исходных данных (табл. 5.1.). Сделайте выводы по результатам выполнения расчетов.

**Дополнительное задание.** Дополнить таблицу по рис. 5.2 расчетом коэффициента достоверности  $D$ . Выполнить построение нелинейных регрессионных моделей средствами ЭТ. На основе значения коэффициента детерминации, выбрать наиболее адекватную модель. (В ЭТ коэффициент детерминации называется **величиной достоверности –  $R^2$** .) Исходные данные представлены в табл. 5.3. Пример решения задачи представлен на рис. 5.6.

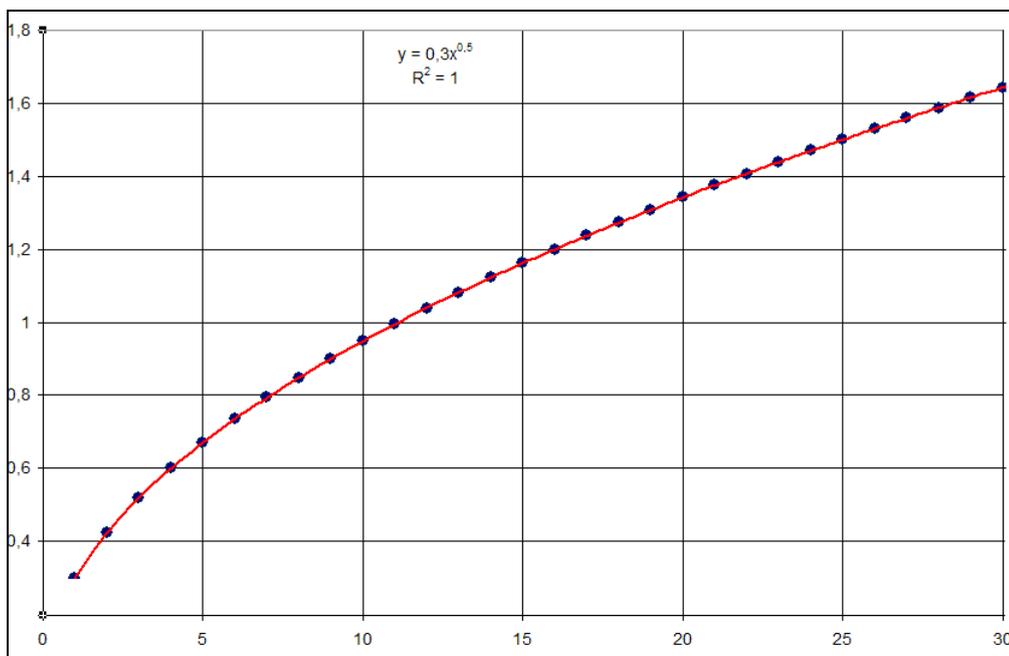


Рис. 5.6. Нелинейная регрессионная зависимость

## 5.2. Построение модели на основе корреляционного анализа

**Теоретическое введение.** При построении регрессионной модели формируется перечень факторов, которые могут влиять на свойства объекта. Исходя из содержательного описания объекта выявляются переменные - параметры модели и производится их разделение на зависимые и независимые.

В модель включаются все факторы, которые, по мнению исследователя, могут оказать какое-либо влияние на свойства объекта, т.е. на зависимые переменные. Таких факторов может оказаться достаточно много. Какие факторы являются главными, а какие второстепенными необходимо выяснить.

Пусть исходная информация о свойствах объекта, полученная в ходе экспериментов, представляется табл. 5.4:

Таблица 5.4

$X_1$	$X_2$	$X_3$	....	$X_n$	$Y$

Для уменьшения количества факторов, необходимо выявить и исключить **взаимозависимые** факторы и **малозначимые** факторы, которые оказывают несущественное влияние на величину зависимой переменной. С этой целью строится корреляционная матрица следующего вида (табл. 5.5):

Таблица 5.5

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$Y$
$X_1$	1	$R_{x_1x_2}$	$R_{x_1x_3}$	$R_{x_1x_4}$	$R_{x_1x_5}$	$R_{x_1y}$
$X_2$		1	$R_{x_2x_3}$	$R_{x_2x_4}$	$R_{x_2x_5}$	$R_{x_2y}$
$X_3$			1	$R_{x_3x_4}$	$R_{x_3x_5}$	$R_{x_3y}$
$X_4$				1	$R_{x_4x_5}$	$R_{x_4y}$
$X_5$					1	$R_{x_5y}$
$Y$						1

Здесь  $x_i$  - факторы,  $y$  - отклик системы. По определению коэффициента корреляции ясно, что данная матрица является симметричной относительно главной диагонали. Коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Здесь  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  - средние значения соответствующих величин,  $r_{xy}$  - коэффициент корреляции. Значение коэффициента корреляции заключены в пределах от -1 до +1. В случае  $r_{xy}=0$  связь между  $x$  и  $y$  отсутствует. При  $r_{xy}=1$  существует строгая положительная связь. Если  $r_{xy}=-1$ , то существует строгая отрицательная связь.

Взаимозависимость между факторами  $x_i, x_j$  имеет место, если коэффициент парной корреляции  $|R_{x_i, x_j}| \geq 0.7 \div 0.8$ . Опыт показывает, что в этом случае один из факторов можно исключить, так как он существенно зависит от другого.

Кроме того, факторы, для которых  $|R_{x_i, y}| \leq 0.1-0.3$ , фактически не связаны с  $y$  и подлежат исключению как малозначимые. Естественно, что далее регрессионная модель строится без учета малозначимых и взаимосвязанных факторов.

**Постановка задачи моделирования.** Выявить значимые и независимые факторы и на основе данных экспериментов построить регрессионную модель.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		x1	x2	x3	x4	x5	y	X1	X2	X3	X4	X5	Y
2	x1	1,0000	0,1831	1,0000	0,1831	-0,0977	0,5694	0,16	2,62	8,32	0,12	4,53	8,54
3	x2		1,0000	0,1831	1,0000	-0,0756	0,0894	0,31	3,42	9,71	0,92	3,02	5,62
4	x3			1,0000	0,1831	-0,0977	0,5694	0,46	2,73	11,09	0,23	0,34	0,59
5	x4				1,0000	-0,0756	0,0894	0,60	2,58	12,48	0,08	0,32	0,70
6	x5					1,0000	0,6866	0,75	2,54	13,86	0,04	0,15	0,52
7	y						1,0000	0,89	3,27	15,25	0,77	0,06	0,50
8								1,04	2,57	16,64	0,07	3,09	5,92

Рис. 5.7. Корреляционная матрица и фрагмент таблицы исходных данных

**Порядок выполнения лабораторной работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. Исходными данными является таблица результатов экспериментов с объектом моделирования (табл. 5.8), которая содержит значения факторов  $X_1-X_5$  и отклика  $Y$ . Применив корреляционный анализ необходимо выявить и исключить малозначимые и взаимозависимые факторы. С этой целью построить корреляционную матрицу (табл. 5.5). При построении корреляционной матрицы рекомендуется использовать функцию электронных таблиц **КОРРЕЛ** (см. справку Excel). Результат построения корреляционной матрицы представлен на рис. 5.7.

На основе корреляционной матрицы выявить и исключить малозначимые и взаимозависимые факторы. После чего необходимо построить новую таблицу данных (табл. 5.6), которая не содержит исключенных факторов.

Таблица 5.6

$X_1$	$X_5$	$Y$	$(Y-f(X_1, X_5))^2$
...	...	...	...

Далее необходимо методом наименьших квадратов создать регрессионную модель, т.е. определить значения параметров  $b_{i,j}$ , при этом необходимо использовать надстройку «Поиск решения». Затем необходимо графически отобразить **поверхность отклика** по полученной регрессионной зависимости средствами электронных таблиц.

При построении регрессионной модели используем многочлен 2-й степени:  
 $f(X_1, X_5) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_5 + b_{12} X_1 X_5$ .

Для построения поверхности отклика необходимо на отдельном листе ЭТ построить таблицу значения функции отклика (рис. 5.8.). Диапазон изменения факторов определить по табл. 5.8. При этом необходимо использовать тип диаграммы – **поверхность** (рис. 5.9.).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	b0	b1	b2	b12								
2	-0,50421	1,002068	2,000605	-0,25014								
3		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
4	0	-0,50421	-0,30415	-0,10409	0,095974	0,296035	0,496095	0,696156	0,896216	1,096277	1,296337	1,496398
5	0,1	-0,404	-0,20644	-0,00888	0,188677	0,386236	0,583795	0,781354	0,978913	1,176472	1,374032	1,571591
6	0,2	-0,30379	-0,10874	0,086322	0,28138	0,476437	0,671495	0,866553	1,06161	1,256668	1,451726	1,646784
7	0,3	-0,20359	-0,01103	0,181526	0,374082	0,566639	0,759195	0,951751	1,144308	1,336864	1,52942	1,721976
8	0,4	-0,10338	0,086675	0,27673	0,466785	0,65684	0,846895	1,03695	1,227005	1,41706	1,607114	1,797169
9	0,5	-0,00317	0,18438	0,371934	0,559488	0,747041	0,934595	1,122148	1,309702	1,497255	1,684809	1,872362
10	0,6	0,097034	0,282086	0,467138	0,65219	0,837242	1,022294	1,207347	1,392399	1,577451	1,762503	1,947555
11	0,7	0,19724	0,379791	0,562342	0,744893	0,927444	1,109994	1,292545	1,475096	1,657647	1,840197	2,022748
12	0,8	0,297447	0,477497	0,657546	0,837595	1,017645	1,197694	1,377743	1,557793	1,737842	1,917892	2,097941
13	0,9	0,397654	0,575202	0,75275	0,930298	1,107846	1,285394	1,462942	1,64049	1,818038	1,995586	2,173134
14	1	0,497861	0,672907	0,847954	1,023001	1,198047	1,373094	1,54814	1,723187	1,898234	2,07328	2,248327

Рис. 5.8. Фрагмент таблицы значений функции отклика

Коэффициенты многочлена определить по методу наименьших квадратов, используя надстройку «**Поиск решения**». Для решения этой задачи необходимо составить таблицу следующего вида:

Таблица 5.7

b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>12</sub>	$\sum(Y-f(X_1, X_5))^2$
1	1	1	1	<b>Формула вычисления целевой функции</b>

Так как решение нелинейной задачи оптимизации требует задания начальных значений искомых параметров, то предварительные значения коэффициентов задайте по табл. 5.7. В данном случае изменяемые ячейки – это ячейки, содержащие значения коэффициентов  $b_{i,j}$ . Ограничений в данной задаче нет.

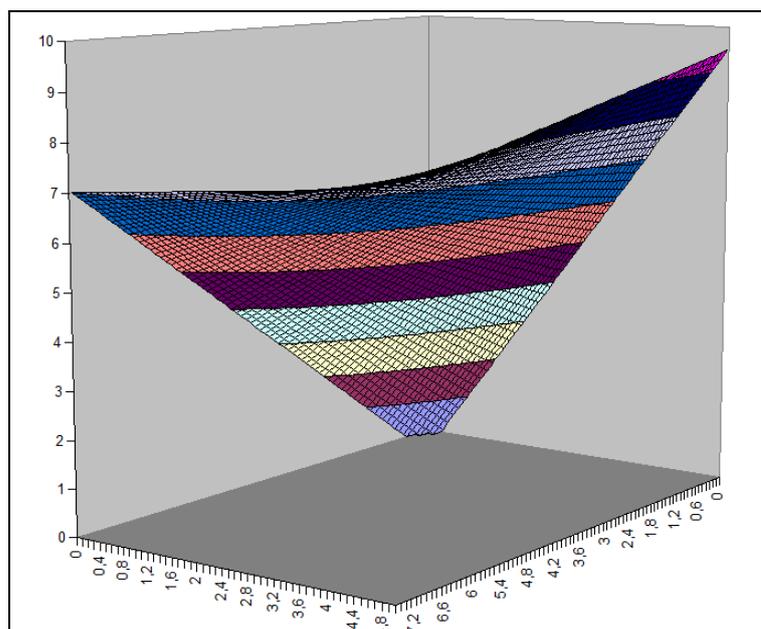


Рис. 5.9. Поверхность отклика

Таблица 5.8

X1	X2	X3	X4	X5	Y
0,16	2,62	8,32	0,12	4,53	8,54
0,31	3,42	9,71	0,92	3,02	5,62
0,46	2,73	11,09	0,23	0,34	0,59
0,60	2,58	12,48	0,08	0,32	0,70
0,75	2,54	13,86	0,04	0,15	0,52
0,89	3,27	15,25	0,77	0,06	0,50
1,04	2,57	16,64	0,07	3,09	5,92
1,18	2,98	18,02	0,48	2,24	4,50
1,33	3,19	19,41	0,69	0,01	0,85
1,48	2,79	20,79	0,29	0,31	1,47
1,62	3,43	22,18	0,93	0,41	1,78
1,77	3,22	23,56	0,72	1,80	4,07
1,91	2,69	24,95	0,19	4,15	7,72
2,06	2,61	26,34	0,11	0,02	1,58
2,20	2,51	27,72	0,01	0,23	2,03
2,35	2,96	29,11	0,46	0,06	1,93
2,49	2,91	30,49	0,41	0,10	2,13
2,64	3,32	31,88	0,82	4,37	7,99
2,79	3,05	33,27	0,55	2,27	5,24
2,93	2,70	34,65	0,20	4,42	8,03
3,08	2,83	36,04	0,33	0,37	3,03
3,22	2,91	37,42	0,41	0,53	3,36
3,37	2,64	38,81	0,14	1,56	4,67
3,51	3,20	40,19	0,70	0,95	4,08
3,66	3,22	41,58	0,72	0,02	3,18
3,81	2,54	42,97	0,04	0,42	3,74
3,95	2,80	44,35	0,30	0,13	3,58
4,10	3,27	45,74	0,77	0,26	3,85
4,24	3,25	47,12	0,75	0,28	4,00
4,39	2,52	48,51	0,02	2,24	5,91
4,53	2,98	49,89	0,48	2,72	6,39
4,68	3,38	51,28	0,88	1,09	5,08
4,82	2,70	52,67	0,20	0,76	4,93
4,97	3,10	54,05	0,60	0,25	4,66
5,12	2,85	55,44	0,35	0,35	4,86
5,26	2,89	56,82	0,39	1,02	5,46
5,41	2,68	58,21	0,18	0,06	4,94
5,55	3,49	59,59	0,99	0,61	5,43
5,70	3,02	60,98	0,52	1,21	5,89
5,84	2,99	62,37	0,49	2,60	6,75
5,99	2,80	63,75	0,30	1,93	6,46
6,14	2,82	65,14	0,32	0,32	5,79
6,28	3,49	66,52	0,99	1,82	6,56
6,43	2,68	67,91	0,18	0,29	6,04
6,57	3,32	69,29	0,82	0,77	6,35
6,72	3,50	70,68	1,00	0,13	6,26
6,86	2,52	72,07	0,02	1,05	6,66
7,01	3,47	73,45	0,97	2,37	7,10
7,15	2,60	74,84	0,10	4,27	7,56
7,30	3,25	76,22	0,75	0,68	6,92

7,45	2,94	77,61	0,44	0,01	6,95
------	------	-------	------	------	------

При минимизации целевой функции (сумма квадратов отклонений) использовать нелинейную модель поиска. Необходимо задать параметры поиска: Оценки - квадратичные; Разности – центральные; Метод поиска – сопряженных градиентов; Предельное число итераций – 10000; Относительная точность – 0,000001; Сходимость – 0,00001; Допустимое отклонение – 0,05%.

### 5.3. Построение модели на основе плана полного факторного эксперимента

**Теоретическое введение.** Целью любого эксперимента является получение информации о зависимости некоторых свойств объекта от его параметров, которые предположительно влияют на эти свойства. Эти зависимости могут быть выражены в виде чисто формальных математических соотношений (регрессионных моделей).

Наиболее подходящей моделью, которую можно построить на основе обработки результатов эксперимента является модель «**черный ящик**». При таком подходе различают только входные и выходные переменные, которые разделяются на **факторы** и **отклики**. **Факторы** – это управляемые переменные, значения которых в ходе эксперимента можно менять. Каждый фактор в эксперименте может принимать определенные значения, которые называются **уровнями**. Набор уровней значений факторов определяет одно из возможных состояний системы в эксперименте.

В ходе эксперимента регистрируются определенные величины, характеризующие сущность изучаемого процесса или явления. Такие величины называются **откликами**. С аналитической точки зрения эксперимент представляет собой выявление связи отклика  $y$  с рядом факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Эта связь в итоге выражается с помощью уравнения регрессии:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Теория планирования эксперимента предполагает получение формальной количественной модели в унифицированном виде, которая может быть пригодна для любых откликов и факторов. Подобной моделью может служить алгебраический многочлен (отрезок ряда Тейлора):

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots,$$

где  $b$  – коэффициенты регрессии,  $k$  – количество факторов.

Целью эксперимента является получение такого количества точек в пространстве факторов, которое будет с достаточной степенью точности характеризовать отклик. Планирование эксперимента при этом заключается в выборе оптимального количества точек (опытов) и размещении их в пространстве факторов таким образом, чтобы уравнение регрессии было определено с наибольшей точностью.

Основной принцип одного из видов активного эксперимента, который называется полным факторным экспериментом (ПФЭ), заключается в том, что каждый фактор **варьируется** в эксперименте **вместе со всеми** остальными факторами. При этом чтобы исследовать  $k$  факторов на  $m$  уровнях, требуется выполнить  $m^k$  опытов.

Если выбранная модель включает в себя только линейные члены и произведения факторов, то для оценки коэффициентов модели используется план экспериментов с варьированием всех  $k$  факторов на двух уровнях. Такие планы ПФЭ называются планами типа  $2^k$ , где  $N = 2^k$  - число всех возможных испытаний.

Планирование такого эксперимента можно предельно формализовать и упростить. Первоначально требуется преобразовать все факторы к безразмерному виду и нормировать их таким образом, чтобы на одном уровне фактор принимал значение +1, а на другом уровне значение -1.

При построении плана эксперимента необходимо определить границы варьирования переменных и их нулевой уровень. Для каждой переменной задается нулевой уровень  $x_{i0}$ , соответствующий наилучшим условиям построения модели, задается интервал варьирования  $\Delta x_i$ , который должен быть достаточно большим для статистической различимости уровней фактора на фоне ошибок его измерения. В качестве уровней варьирования выбираются значения факторов, симметрично расположенных относительно нулевой точки. Нижний и верхний уровни выбираются по соотношениям:

$$x_{in} = x_{i0} - \Delta x_i, \quad x_{is} = x_{i0} + \Delta x_i.$$

Для стандартизации и упрощения записи плана проводится нормирование факторов, при этом нижнему уровню фактора будет соответствовать значение -1, а верхнему уровню значение +1. Преобразование проводится по формулам:

$$\bar{x}_i = (x_i - x_{i0}) / \Delta x_i.$$

Полный факторный эксперимент дает возможность определить коэффициенты регрессии, соответствующие линейным членам, и коэффициенты, соответствующие взаимодействиям факторов. Эффект взаимодействия нескольких факторов проявляется при одновременном варьировании их значений, когда действие одного фактора зависит от уровня на котором находятся другие факторы. Для оценки свободного члена и определения эффектов взаимодействий план ПФЭ типа  $2^2$  для модели:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$$

преобразуют путем добавления фиктивной переменной  $\bar{x}_0$ .

Таблица 5.9

Номер испытания	План ПФЭ				$y_t$
	$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	
1	+1	-1	-1	+1	1
2	+1	+1	+1	+1	7
3	+1	-1	+1	-1	19
4	+1	+1	-1	-1	5

Формулы вычислений для представленной выше матрицы планирования эксперимента имеют вид:

$$b_0 = \sum_{t=1}^N x_{0t} y_t / N, \quad b_i = \sum_{t=1}^N x_{it} y_t / \sum_{t=1}^N x_{it}^2, \quad b_{ij} = \sum_{t=1}^N (x_i x_j)_t y_t / N.$$

Здесь индекс  $t$  означает номер испытания,  $N$  - общее количество испытаний, остальные обозначения соответствуют представленной выше таблице.

**Постановка задачи моделирования.** Используя результаты ПФЭ построить регрессионную модель объекта. Вычислить коэффициенты регрессии по результатам испытаний по табл. 5.9.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. На основе результатов ПФЭ, представленных в табл. 5.9. Средствами электронных таблиц (**тип диаграммы - поверхность**), используя полученную модель, построить

**поверхность отклика.** Построение поверхности отклика потребует создания на новом листе таблицы значений функции отклика  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$ . Диапазон изменения факторов  $x_1, x_2 - [-1;1]$ . Шаг таблицы по любому фактору равен  $0,1$ . Примерная таблица представлена на рис. 5.10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	Номер испытания	План ПФЭ				$y_i$			<b>b0</b>	<b>b1</b>	<b>b2</b>	<b>b12</b>
2		$\bar{x}_0$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$				<b>7,5</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>-1,5</b>
3	1	1	-1	-1	1	3						
4	2	1	1	1	1	9						
5	3	1	-1	1	-1	6						
6	4	1	1	-1	-1	12						
7												
8		$x_1/x_2$	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	
9		-1	3	3,45	3,9	4,35	4,8	5,25	5,7	6,15	6,6	
10		-0,9	3,15	3,585	4,02	4,455	4,89	5,325	5,76	6,195	6,63	
11		-0,8	3,3	3,72	4,14	4,56	4,98	5,4	5,82	6,24	6,66	
12		-0,7	3,45	3,855	4,26	4,665	5,07	5,475	5,88	6,285	6,69	
13		-0,6	3,6	3,99	4,38	4,77	5,16	5,55	5,94	6,33	6,72	
14		-0,5	3,75	4,125	4,5	4,875	5,25	5,625	6	6,375	6,75	
15		-0,4	3,9	4,26	4,62	4,98	5,34	5,7	6,06	6,42	6,78	
16		-0,3	4,05	4,395	4,74	5,085	5,43	5,775	6,12	6,465	6,81	
17		-0,2	4,2	4,53	4,86	5,19	5,52	5,85	6,18	6,51	6,84	

Рис. 5.10. Построение модели по таблице ПФЭ

#### 5.4. Имитационное моделирование на основе клеточных автоматов

**Теоретическое введение.** Моделирование на основе клеточных автоматов – это пример **имитационного моделирования**. Модели данного вида представляют собой **алгоритм** функционирования системы клеток, который не имеет аналога в виде математической модели. Динамика изменения состояния автомата может быть исследована только путем модельного эксперимента. Другим способом предсказать какие-либо закономерности развития системы невозможно.

Клеточным автоматом называется сеть из дискретных элементов, меняющих свое состояние в дискретные моменты времени. Каждый автомат (клетка) может находиться в конечном числе состояний. Время в данной модели является дискретным множеством тактов.

Состояние автомата в следующий момент времени определяется его собственным состоянием и состоянием его ближайших соседей в предыдущий момент времени. Правила изменения состояний для всех клеток одинаковы. Клеточные автоматы моделируют поведение системы, имитируя шаг за шагом ее эволюцию.

Основная идея клеточного автомата «Жизнь» состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь расположения «организмов» по клеткам, проследить за эволюцией исходной позиции под действием «генетических законов», которые управляют рождением, гибелью и выживанием клеток.

Генетические законы эволюции клеток таковы, что начальные конфигурации могут закончить свою эволюцию одним из трех способов:

- полностью исчезают из-за перенаселенности или разреженности жизненного пространства, т.е. популяция вырождается;
- переходят в устойчивую конфигурацию и перестают изменяться вообще — эволюция вышла на стационарный режим;
- выходят на колебательный режим, при котором совершают некий бесконечный цикл превращений с определенным периодом.

Каждую клетку окружают восемь соседних клеток: четыре имеют с ней общие стороны, а четыре другие общие вершины (окрестность Мура).

Генетические законы состоят в следующем:

**Правило выживания.** Каждая клетка, у которой имеются две или три соседних, выживает и переходит в следующее поколение.

**Правило рождения.** Если число клеток, с которыми граничит какая-либо пустая клетка, равно трем, то на ней происходит рождение нового организма.

**Правило гибели.** Каждая клетка, у которой оказывается более трех соседних, погибает от перенаселения. Каждая клетка, вокруг которой свободны все клетки или занята только одна, погибает от одиночества.

Гибель и рождение всех организмов происходит одновременно. Выжившие и вновь рожденные организмы образуют одно поколение эволюции начальной конфигурации. Как показал многолетний опыт, различные начальные конфигурации порождают ряд типовых периодических или стационарных структур.

**Порядок выполнения работы:** Провести ряд компьютерных экспериментов с имитационной моделью клеточного автомата «Life». Проверить основные закономерности развития системы.

**Пример 1.** Начальная конфигурация состоит из трех клеток, расположенных подряд, горизонтально, (рис. 5.11а). Крайние клетки погибают, так как у них только один сосед. В свободных клетках, находящихся выше и ниже средней, происходит рождение новых клеток, поэтому следующее поколение состоит из трех клеток, расположенных подряд, но уже вертикально.

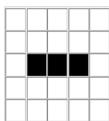


Рис. 5.11а

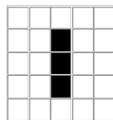


Рис. 5.11б

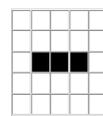


Рис. 5.11в

Начальная конфигурация повернулась на  $90^\circ$  (рис. 5.11.б). Второе поколение совпадает с исходным (рис. 5.11в). В итоге получен периодический режим эволюции с периодом в два поколения.

**Пример 2.** В начальной конфигурации по рис. 5.12а, выживает лишь верхняя клетка, а рождение происходит в клетке, расположенной ниже – она окружена тремя соседями. Следующее поколение (рис. 5.12б) состоит из двух клеток. Каждая из них имеет лишь одного соседа и, следовательно, погибает. Это пример вырождения.

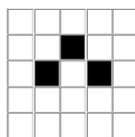


Рис. 5.12а.

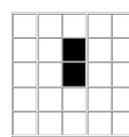


Рис. 5.12б.

**Пример 3.** На рис. 5.13а изображена начальная конфигурация из семи горизонтальных клеток, а на рис. 5.13б — ее некоторое поколение. Самостоятельно получите пропущенные поколения, а также дальнейшее развитие популяции. Убедитесь, что в данном случае эволюция выходит на стационарный режим.

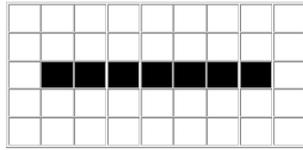


Рис. 5.13а. Начальное состояние

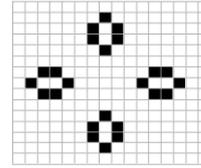


Рис. 5.13б. Стационарный режим

**Задание 4.** Исследуйте эволюцию конфигураций из трех клеток. Проверьте утверждение, что эволюция конфигураций, симметричных относительно вертикальной или горизонтальной оси, протекает одинаково.

**Задание 5.** Исследуйте изменение начальных конфигураций из четырех клеток. Установите устойчивые и периодические конфигурации.

**Задание 6.** Покажите, что конфигурация по рис. 5.14 повторяется циклически.

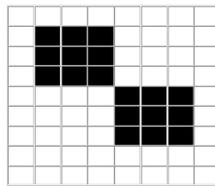


Рис. 5.14

## 5.5. Моделирование случайных событий

**Теоретическое введение.** Моделирование случайных процессов – это одно из важнейших направлений современного компьютерного моделирования. Само понятие «случайный» является фундаментальным: **Событие** называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо.

Под **событием** будем понимать всякий факт, который может наблюдаться в данных условиях. Различают достоверное событие, которое наступает каждый раз при реализации определенного комплекса условий. Невозможное (недостоверное) событие не наступает никогда.

Формирование компьютерных реализаций случайных событий (т.е. моделирование случайных событий) сводится к генерации случайных чисел с равномерным законом распределения вероятности на интервале  $[0;1]$ , например, функцией электронных таблиц **СЛЧИС()**.

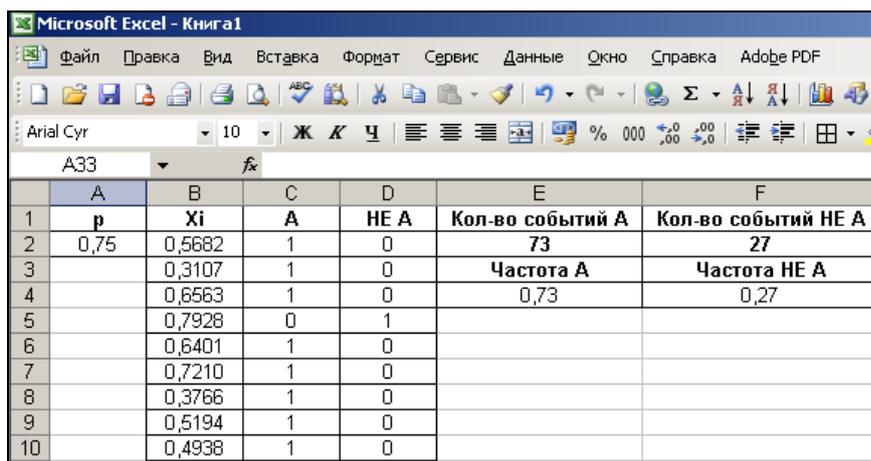
Пусть событие  $A$  наступает с заданной вероятностью  $p$ . Пусть имеется возможность генерировать последовательность значений случайной величины с равномерным распределением вероятности на интервале  $[0;1]$ :  $x_1, x_2, \dots, x_i$ . Определим, что событие  $A$  наступает в том случае, если значение сгенерированной случайной величины удовлетворяет неравенству  $x_i < p$ .

Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  равна  $P(\bar{A}) = 1 - p$ . Следовательно, если соотношение  $x_i < p$  выполняется, то исходом испытания является событие  $A$ , в противном случае исходом испытания является событие  $\bar{A}$ .

**Постановка задачи моделирования.** Построить компьютерную модель реализации случайного события с заданной вероятностью и исследовать ее свойства.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. Для решения задачи необходимо построить таблицу по рис. 5.15. Исходными данными для модели является вероятность реализации события  $p$  – ячейка **A1**. В колонку **B** электронной таблицы вводится функция **СЛЧИС()**. В колонку **C** вводится функция **ЕСЛИ()**, которая возвращает значение равное 1, если выполняется неравенство  $x_i < p$ , или значение 0 в противном случае. В колонку **D** вводится аналогичная функция, которая возвращает значение 1, если событие **A** не произошло.

В ячейках **E2** и **F2** с помощью функции **СУММ()** подсчитывается количество реализаций событий **A** и **НЕ A**. В ячейках **E4** и **F4** необходимо рассчитать частоту реализации каждого события (**СРЗНАЧ()**).

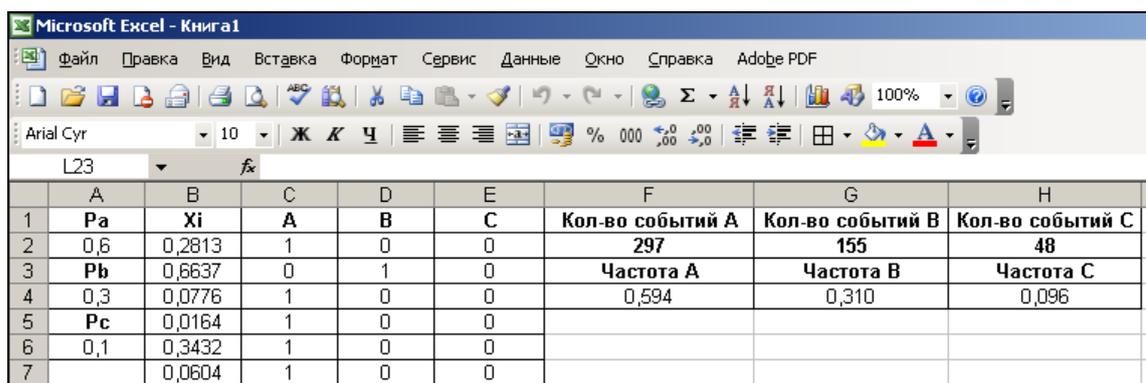


	A	B	C	D	E	F
1	<b>p</b>	<b>Xi</b>	<b>A</b>	<b>НЕ A</b>	<b>Кол-во событий A</b>	<b>Кол-во событий НЕ A</b>
2	0,75	0,5682	1	0	<b>73</b>	<b>27</b>
3		0,3107	1	0	<b>Частота A</b>	<b>Частота НЕ A</b>
4		0,6563	1	0	0,73	0,27
5		0,7928	0	1		
6		0,6401	1	0		
7		0,7210	1	0		
8		0,3766	1	0		
9		0,5194	1	0		
10		0,4938	1	0		

Рис. 5.15. Таблица для моделирования случайного события

**Анализ результатов эксперимента.** Провести ряд экспериментов при разном количестве реализаций события **A**: 50; 100; 200 и т.д. и сопоставить значение заданной вероятности события  $p$  и частоты его реализации в эксперименте. Пересчет формул производится при нажатии клавиши **F9**.

**Дополнительное задание.** Построить модель реализации полной группы событий: **A, B, C** с вероятностями  $P_a, P_b, P_c$ , причем  $P_a + P_b + P_c = 1$  (рис. 5.16).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Pa</b>	<b>Xi</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>Кол-во событий A</b>	<b>Кол-во событий B</b>	<b>Кол-во событий C</b>
2	0,6	0,2813	1	0	0	<b>297</b>	<b>155</b>	<b>48</b>
3	<b>Pb</b>	0,6637	0	1	0	<b>Частота A</b>	<b>Частота B</b>	<b>Частота C</b>
4	0,3	0,0776	1	0	0	0,594	0,310	0,096
5	<b>Pc</b>	0,0164	1	0	0			
6	0,1	0,3432	1	0	0			
7		0,0604	1	0	0			

Рис. 5.16. Моделирование полной группы событий

Самостоятельно построить модель реализации двух независимых событий **A** и **B** с вероятностями  $P_a, P_b$ , причем события могут происходить совместно, т.е. полной группы не образуют.

Провести ряд экспериментов с моделью при разном количестве реализаций и оценить результат моделирования.

## 5.6. Моделирование случайного блуждания

**Теоретическое введение.** В данной работе моделируется случайное изменение состояния объекта. Состояние объекта характеризуется двумя параметрами-координатами  $X$  и  $Y$ . Изменение состояния объекта связано с изменением значений этих параметров, которое происходит случайно и дискретно. Каждый параметр может: остаться неизменным, либо изменить свое значение на +1 или -1.

Таким образом, возможна реализация 9 взаимоисключающих событий, которые образуют полную группу:

$$\begin{aligned} &(X, Y); \quad (X, Y+1); \quad (X, Y-1); \\ &(X+1, Y); \quad (X+1, Y+1); \quad (X+1, Y-1); \\ &(X-1, Y); \quad (X-1, Y+1); \quad (X-1, Y-1). \end{aligned}$$

Вероятность изменения каждого параметра задана:  $PX_a, PX_b, PX_c; PY_a, PY_b, PY_c$ . Причем  $PX_a + PX_b + PX_c = 1, PY_a + PY_b + PY_c = 1$ . Таким образом для каждого параметра возможны следующие события: событие  $A$  – параметр остался неизменным; событие  $B$  – параметр изменился на +1; событие  $C$  – параметр изменился на -1. Изменение значения каждого параметра происходит независимо.

**Постановка задачи моделирования.** Построить компьютерную модель реализации случайного блуждания. Исследовать поведение объекта.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. Для решения задачи необходимо построить электронную таблицу по рис. 5.17. Исходными данными для модели являются вероятности реализации событий  $A, B, C$ :  $PX_a, PX_b, PX_c; PY_a, PY_b, PY_c$ . Начальные значения:  $X = 0; Y = 0$ . При моделировании случайных событий изменения  $X$  и изменения  $Y$  использовать отдельный датчик случайных чисел – функцию **СЛЧИС()**. В таблице  $X_i$  и  $Y_i$  – случайные числа. Таблица строится по аналогии с работой 5.5. По результатам моделирования постройте временную диаграмму изменения параметров  $X(t), Y(t)$  (рис. 5.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>PXa</b>	<b>Xi</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>Yi</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>t</b>	<b>X</b>	<b>Y</b>
2	0,6	0,5072	1	0	0	0,7775	0	1	0	0	0	0
3	<b>PXb</b>	0,4164	1	0	0	0,0715	1	0	0	1	0	1
4	0,3	0,5214	1	0	0	0,2269	1	0	0	2	0	1
5	<b>PXc</b>	0,1354	1	0	0	0,6018	0	1	0	3	0	1
6	0,1	0,4986	1	0	0	0,3213	1	0	0	4	0	2
7	<b>PYa</b>	0,3059	1	0	0	0,5857	0	1	0	5	0	2
8	0,4	0,8662	0	1	0	0,6490	0	1	0	6	0	3
9	<b>PYb</b>	0,3061	1	0	0	0,1178	1	0	0	7	1	4
10	0,4	0,4817	1	0	0	0,3675	1	0	0	8	1	4
11	<b>PYc</b>	0,1975	1	0	0	0,4584	0	1	0	9	1	4
12	0,2	0,2945	1	0	0	0,4078	0	1	0	10	1	5
13		0,0095	1	0	0	0,5227	0	1	0	11	1	6
14		0,9091	0	0	1	0,8439	0	0	1	12	1	7

Рис. 5.17. Таблица моделирования случайного блуждания

**Анализ результатов эксперимента.** Проведите серии экспериментов при разных значениях вероятностей событий и наблюдайте, как изменяются диаграммы. Пересчет формул производится при нажатии клавиши F9. Постройте фазовую

диаграмму процесса. Самостоятельно постройте модель, в которой изменение  $Y$  происходит только при изменении  $X$ .

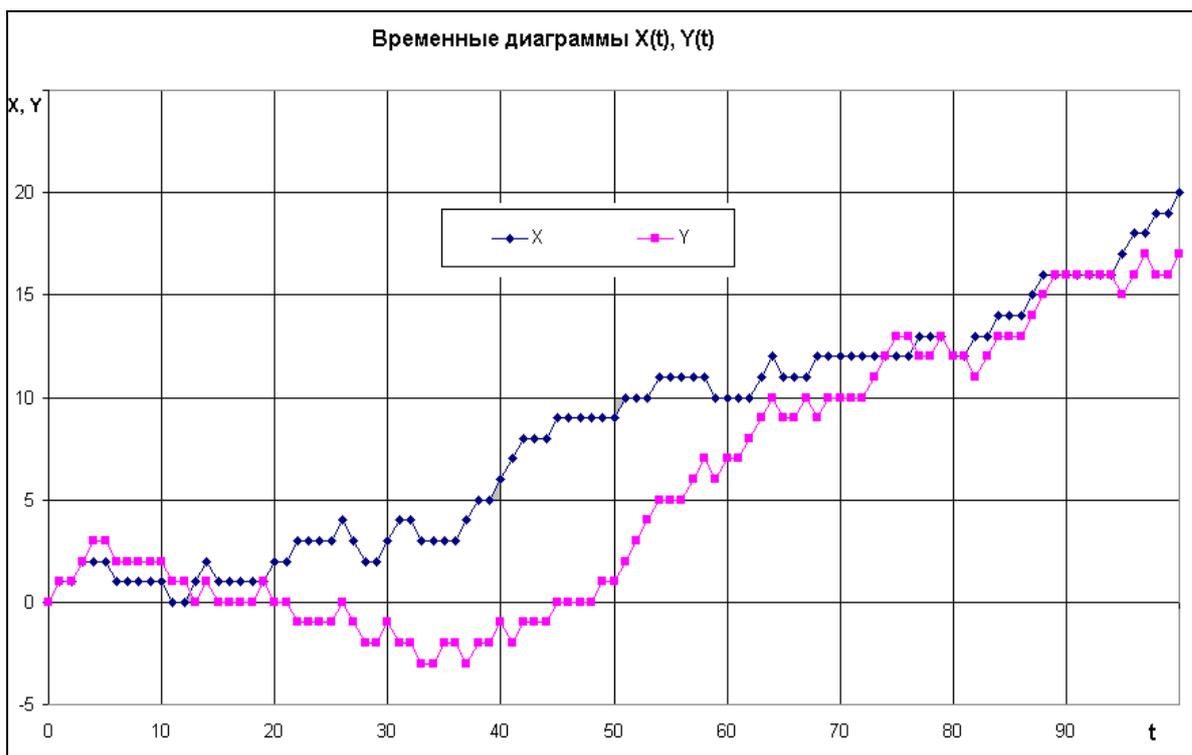


Рис. 5.18. Результат моделирования блуждания

### 5.7. Имитационная модель транспортного предприятия

**Теоретическое введение.** Необходимо выполнить прогноз работы автомобиля. В течение суток автомобиль может быть исправным или стать неисправным. Состояние автомобиля изменяется дискретно с единицей измерения «сутки». Событие смены состояния автомобиля является случайным, так как оно зависит от многих факторов, которые заранее учесть невозможно. Вероятности смены состояний устанавливаются на основе статистических данных по эксплуатации и ремонту автомобилей.

В начальный момент времени автомобиль может быть с достаточно большой вероятностью  $P_0$  исправным. Дальнейшее развитие событий может быть следующим: исправный автомобиль в течение суток с вероятностью  $P_1$  может стать неисправным, на следующие сутки приступят к его ремонту. Неисправный автомобиль после суток ремонта с вероятностью  $P_2$  вернется к работе. Изменение состояния автомобиля представлено графом (рис. 5.19).

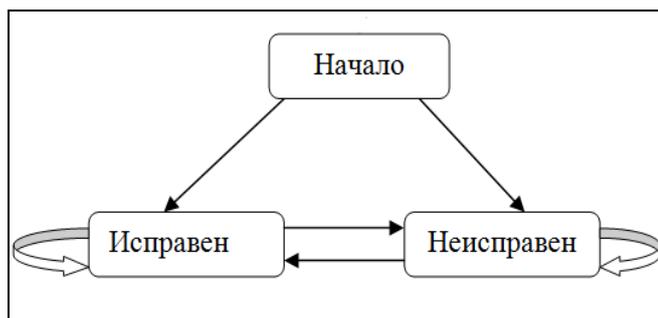


Рис. 5.19. Граф изменения состояния автомобиля

Вероятности переходов зависят только от конкретного состояния автомобиля (исправен / в ремонте), а не от того, как данное состояние достигнуто. Далее объект находится в каждом возможном состоянии ровно сутки и переходит в новое состояние (или сохраняет текущее состояние) с учетом вероятности нового перехода.

**Постановка задачи моделирования.** Построить компьютерную модель работы автомобиля в среде ЭТ и исследовать ее свойства.

**Порядок выполнения работы.** Первоначально необходимо построить модель состояния одного автомобиля. Модель изменения состояния автомобиля представлена на рис. 5.20. Здесь  $X_i$ ,  $Y_i$  – случайные числа, полученные с применением функции СЛЧИС(). Случайное число  $X_i$  используется при моделировании события «изменение состояния автомобиля». Событие  $A$  – текущее состояние автомобиля:  $A=1$  – автомобиль исправен;  $A=0$  – автомобиль неисправен. Случайное число  $Y_i$  используется при моделировании результата ремонта автомобиля. Событие  $B$  – результат ремонта автомобиля:  $B=1$  – автомобиль отремонтирован;  $B=0$  – автомобиль остается в ремонте.

Начальное состояние автомобиля ( $t=0$ ) определяется формулой: **ЕСЛИ(B5<\$A\$2;1;0)**. Состояние исправного автомобиля на следующий день может измениться: **ЕСЛИ(И(B6<\$B\$2;C5=1);1;0)**. Если в текущий день автомобиль окажется неисправным, то его ремонт начнется на следующий день. Результат ремонта определяется формулой **ЕСЛИ(И(C5=0;D6<\$C\$2);1;0)** (в ремонт поступает неисправный автомобиль).

	A	B	C	D	E
1	P0	P1	P2		
2	0,99	0,8	0,7		
3					
4	t	Xi	A	Yi	B
5	0	0,586	1		
6	1	0,243	1	0,125	0
7	2	0,328	1	0,685	0
8	3	0,181	1	0,448	0
9	4	0,546	1	0,079	0
10	5	0,474	1	0,104	0

Рис. 5.20. Модель изменения состояния автомобиля

Состояние автомобиля на третий ( $t=2$ ) и последующие дни определяется тем, что автомобиль либо сохраняет свое исправное состояние, либо его ремонт закончен: **ЕСЛИ(ИЛИ(И(B7<\$B\$2;C6=1);E6=1);1;0)**. Результат моделирования изменения состояния автомобиля представлен на рис. 5.21.

Модель изменения состояния целого парка автомобилей строится путем копирования таблицы на рис. 5.20 и подсчета общего числа исправных автомобилей на каждый день. Результат моделирования представлен на рис. 5.22.

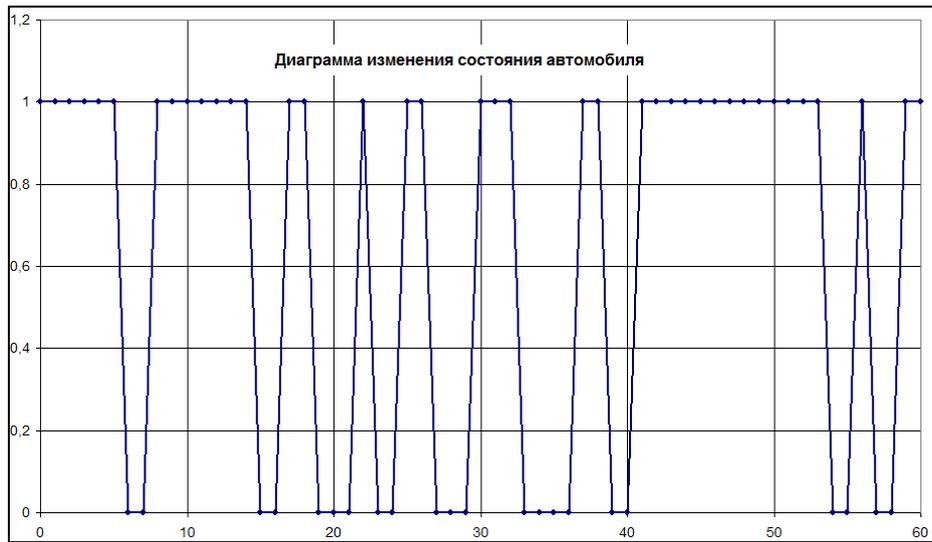


Рис. 5.21. Результат моделирования состояния автомобиля

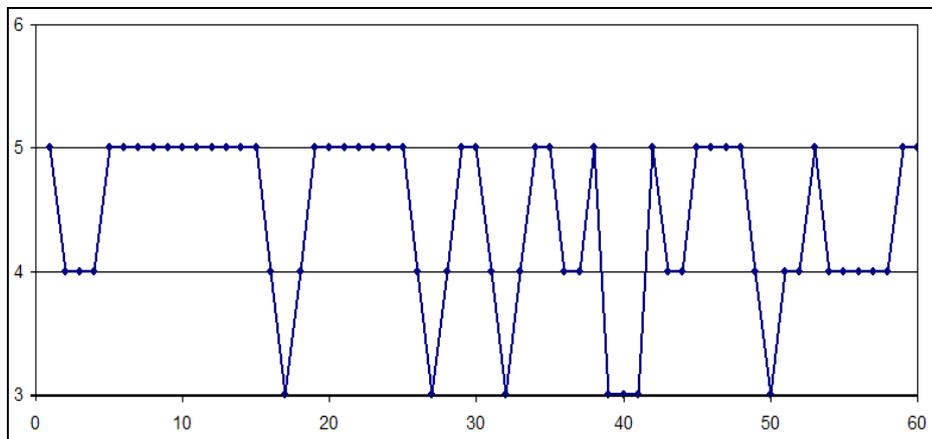


Рис. 5.22. Результат моделирования изменения состояния парка из пяти автомобилей

Теперь можно решать задачу **имитационного моделирования**, - какое количество автомобилей необходимо иметь, с учетом их возможной поломки и ремонта, чтобы выполнить за заданное время определенный объем работ, какова вероятность выполнения работы имеющимся парком автомобилей за требуемое время.

P0	P1	P2
0,995	0,95	0,85
Количество автомобилей	Срок выполнения работы	
5	100	
Необходимое количество машино-дней	Число положительных результатов	Частота реализации
430	20	1,00
440	18	0,90
450	12	0,60
460	5	0,25
470	1	0,05
480	0	0

Рис. 5.23. Результат экспериментов

Для решения задачи требуется многократное повторение экспериментов с моделью (пересчет таблицы) и получение статистических данных о состоянии парка автомобилей (рис. 5.23).

Допустим, что фирме, имеющей пять автомобилей, требуется выполнить за 100 дней определенную работу. Объем работы задан количеством машино-дней. Ясно, что сто дней все автомобили работать не смогут, так как возможны их поломки. Для выяснения возможности выполнения работы провести имитационный эксперимент, состоящий, например, из 20 или более, испытаний. Его результаты представить по аналогии с таблицей на рис. 5.20.

По результатам эксперимента оценить вероятность выполнения работы в срок для разных объемов. Сделать вывод о необходимости привлечения дополнительных автомобилей. Построить модель и провести эксперименты для 6, 7, 8 автомобилей.

## 5.8. Метод Монте-Карло

**Теоретическое введение.** Метод Монте-Карло является предшественником метода стохастического моделирования. Основная идея метода состоит в использовании выборки случайных чисел для получения решения детерминированной вычислительной задачи. Для знакомства с методом рассмотрим классический пример вычисления площади окружности с помощью генерации последовательности случайных чисел с равномерным законом распределения (функция СЛЧИС()).

Задано уравнение окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $R=1$ . Требуется оценить площадь сектора первой четверти ( $x \leq 1$ ,  $y \leq 1$ ).

**Постановка задачи.** Построить электронную таблицу реализации вычислительной задачи методом Монте-Карло. Исследовать результат в зависимости от объема выборки.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. Для решения задачи необходимо построить электронную таблицу по рис. 5.24. При генерации случайных значений  $X_i$  и  $Y_i$  использовать датчик случайных чисел – функцию СЛЧИС(). В таблице  $Y_{окр} = \sqrt{1 - X_i^2}$  – точное теоретическое значение координаты. Событие **A=1** произошло, если точка принадлежит кругу радиуса  $R=1$ :  $X_i^2 + Y_i^2 \leq 1$ . По результатам моделирования постройте фазовую диаграмму **X-Y** (рис. 5.25).

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>N</b>	$X_i$	$Y_i$	$Y_{окр}$	$X^2+Y^2$	<b>A</b>	Частота события A
2	1	0,667	0,783	0,745	1,058	0	0,786
3	2	0,233	0,325	0,972	0,160	1	Площадь круга
4	3	0,594	0,388	0,805	0,503	1	3,144

Рис. 5.24. Таблица решения задачи

**Анализ результатов эксперимента.** Проведите серии экспериментов при разных объемах выборки случайных событий и наблюдайте, как изменяются диаграммы и результаты расчета площади круга. Пересчет формул производится при нажатии клавиши F9.

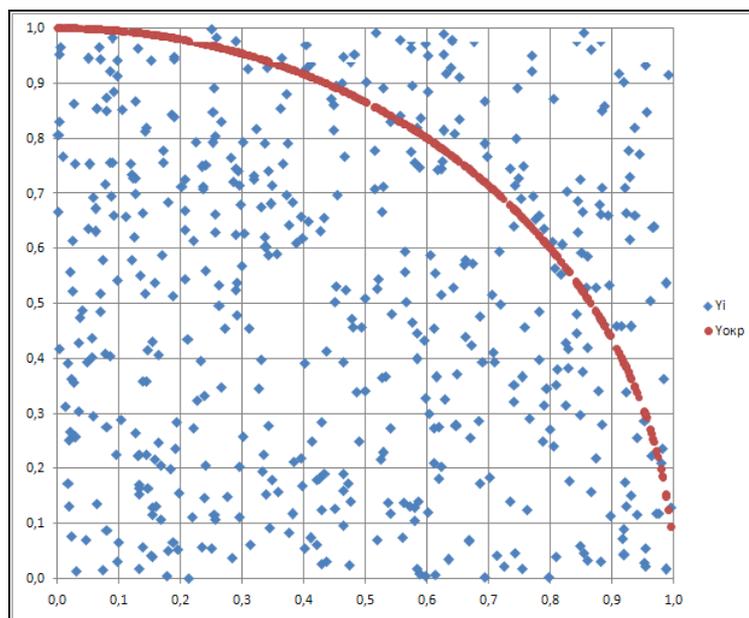


Рис. 5.25. Результат вычислений

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить методом наименьших квадратов регрессионную модель в виде функции  $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  по данным измерений из табл. 5.10.

Таблица 5.10

<b>t</b>	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
<b>f(t)</b>	1,57	-0,51	-0,75	1,71	-1,99	1,48	-0,38	-0,87	1,77	-1,97	1,39	-0,25	-0,99
6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
1,83	-1,95	1,29	-0,12	-1,10	1,88	-1,91	1,19	0,01	-1,21	1,92	-1,87	1,08	0,15

2. Вычислить методом Монте-Карло площадь квадрата со стороной равной единице.
3. По аналогии с работой 5.7 построить имитационную модель системы по рис. 5.26 с вероятностями переходов:

$$P_{ab} = 0,4; \quad P_{ba} = 0,5; \quad P_{cb} = 0,3; \quad P_{bc} = 0,3; \quad P_{ca} = 0,6;$$

$$P_{aa} = 0,6; \quad P_{bb} = 0,2; \quad P_{cc} = 0,1$$

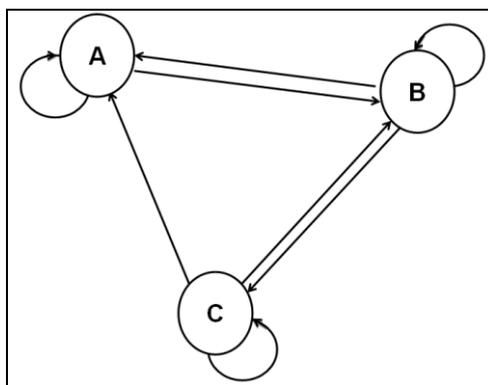


Рис. 5.26. Структура системы

Дополнительную информацию по теме «Имитационное и стохастическое моделирование» можно найти на сайтах и в публикациях: [3-5], [12], [16-17], [23] , [28-29].

## VI. Моделирование процессов с распределенными параметрами

### 6.1. Моделирование процессов переноса

**Теоретическое введение.** Работа посвящена моделированию переходного процесса в системе с распределенными параметрами. Пусть имеется теплообменник, представляющий собой канал, обогрев которого производится, например, пропусканием электрического тока через его стенки.

Примем следующие предположения: в теплообменник поступает холодная жидкость с известной температурой  $T_0$ ; скорость движения жидкости (теплоносителя) внутри канала считается неизменной; свойства теплоносителя (плотность, теплоемкость и т.п.) считаются неизменными. Температура теплоносителя однородна по сечению канала.

В начальный момент времени  $t = 0$  включается обогрев канала, т.е.  $q=0$ , при  $t < 0$  и  $q > 0$ , при  $t > 0$ . Здесь  $q$  – количество тепла, которое передается через стенки канала к теплоносителю в единицу времени через единицу его поверхности.

Расчетная схема объекта моделирования представлена на рис. 6.1.

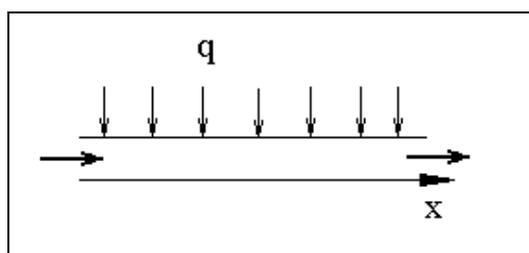


Рис. 6.1. Схема объекта моделирования

До начала обогрева теплообменник находился в стационарном режиме. После включения обогрева теплообменник через некоторое время выйдет на новый установившийся режим. С учетом принятых допущений, динамика изменения температуры теплоносителя в теплообменнике может быть описана следующим уравнением, которое является следствием закона сохранения энергии:

$$S(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + c \rho u \frac{\partial T}{\partial x}) = q\Pi; \quad S = \pi R^2, \quad \Pi = 2\pi R.$$

Здесь  $S$  – площадь поперечного сечения канала теплообменника,  $\Pi$  – его периметр,  $\rho$  – плотность теплоносителя,  $c$  – его теплоемкость,  $u$  – скорость движения теплоносителя по каналу теплообменника. После преобразований безразмерное уравнение процесса переноса тепла примет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = 1.$$

Краевые и начальные условия, с учетом преобразований, задаются следующими соотношениями:

$$y(\bar{t}, \bar{x} = 0) = 0 \quad y(\bar{t} = 0, \bar{x}) = 0.$$

Для численного решения данной начально-краевой задачи применим метод конечных разностей. Дифференциальные операторы  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\frac{\partial}{\partial x}$  заменим приближенными конечно-разностными аналогами. В итоге получим:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} + \frac{y_j^{n+1} - y_{j-1}^{n+1}}{h} = 1.$$

Здесь  $y_j^n = y(t_n, x_j)$ ,  $y_j^{n+1} = y(t_{n+1}, x_j)$ ,  $y_{j-1}^{n+1} = y(t_{n+1}, x_{j-1})$ . Пусть в момент времени  $t = t_n$  нам известны значения  $y_j^n$  в любой точке канала по оси  $x$ . Преобразуем конечно-разностный аналог уравнения следующим образом:

$$y_j^{n+1} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right) = 1 + \frac{y_j^n}{\tau} + \frac{y_{j-1}^{n+1}}{h}, \quad y_j^{n+1} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right)} + \frac{y_j^n \left( \frac{1}{\tau} \right)}{\left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right)} + y_{j-1}^{n+1} \frac{\frac{1}{h}}{\left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right)}.$$

Последнее соотношение есть расчетная формула, применяя которую последовательно для  $j = 2-M$ , ( $M$  – номер последней точки по координате  $x$ ) на основе известных значений  $y_j^n$  получим искомые величины  $y_j^{n+1}$ . Для  $j = 1$ , т.е. при  $x=0$ , значение  $y_j^{n+1}$  всегда известно, так как задано краевыми условиями. Рассмотренный метод решения уравнения в частных производных называется методом «бегущего» счета. Данный численный метод безусловно устойчив и имеет первый порядок точности.

**Постановка задачи моделирования.** Установить закономерность перехода теплообменника в новое состояние после включения обогрева, установить закон изменения температуры теплоносителя в канале теплообменника как функции времени и координаты –  $T(t, x)$ .

**Порядок выполнения работы.** Для решения задачи определения нового температурного режима создадим таблицу (рис. 6.2). Все необходимые расчетные формулы представлены ниже.

Значения коэффициентов **A**, **B**, **C** рассчитываются по формулам (см. ниже). Значение  $y$  при  $x=0$  задается явно исходя из краевых условий. Значения координат узловых точек по  $x$  рассчитываются в ЭТ по формуле (можно использовать автозаполнение). Начальное распределение  $y_0$  задается явно как исходные данные. Другие значения  $y_1 - y_{50}$  вычисляются по методу бегущего счета. В результате должен быть получен график изменения  $y(x)$  по времени (рис. 6.3) для различных моментов времени (каждое пятое значение  $y$ ).

$$A = \frac{1}{\left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right)}, \quad B = \frac{\left( \frac{1}{\tau} \right)}{\left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right)}, \quad C = \frac{\frac{1}{h}}{\left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right)}. \quad y_j^{n+1} = A + B \cdot y_j^n + C \cdot y_{j-1}^{n+1}.$$

	A	B	C	D	Строка формул	F
1	$\tau$	$X_i$	$Y_0$	$Y_1$	....	$Y_{50}$
2	0,025	0	0	0	0	0
3	h	0,02	0	=...	=...	=...
4	0,02	0,04	0	=...	=...	=...
5	A	0,06	0	=...	=...	=...
6	=...	0,08	0	=...	=...	=...
7	B	0,1	0	=...	=...	=...
8	=...	=...	0	=...	=...	=...
9	C	=...	0	=...	=...	=...
10	=...	=...	0	=...	=...	=...
11		0,94	0	=...	=...	=...
12		0,96	0	=...	=...	=...
13		0,98	0	=...	=...	=...
14		1	0	=...	=...	=...

Рис. 6.2. Расчетная таблица

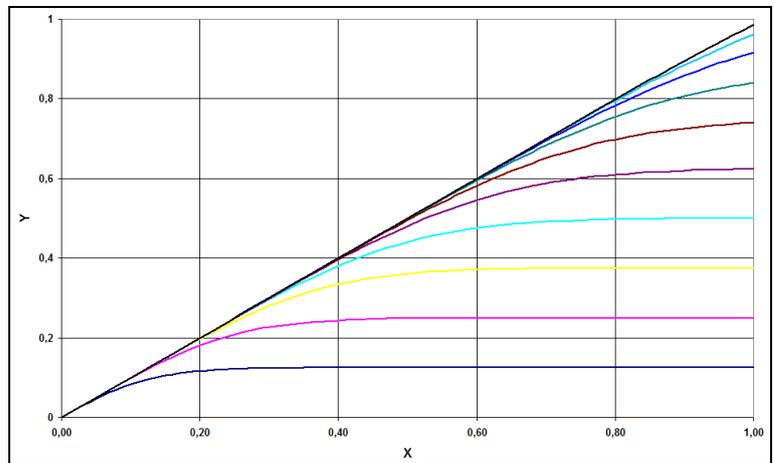


Рис. 6.3. Результат моделирования

**Дополнительное задание.** Самостоятельно построить модель и провести расчеты для следующей задачи:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + c \rho u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_1 - T) \frac{\Pi}{S}$$

с начальными и краевыми условиями:

$$T(t = 0, x) = T_1; \quad T(t, x = 0) = T_0.$$

В данной задаче температура стенок канала теплообменника  $T_1$  остается всегда неизменной. В начальный момент времени в канал поступает теплоноситель с температурой  $T_0$ . После преобразования задачи к безразмерному виду (выполнить самостоятельно) получим следующее:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = -ky;$$

с начальными и краевыми условиями:  $y(0, \tau) = 0, \quad y(x, 0) = 1, \quad y(x, \tau) = 0, \quad y(1, \tau) = 0$

Получить численное решение задачи, используя метод конечных разностей по аналогии с предыдущей задачей.

Установить влияние на результат моделирования значения параметра  $k$ .

## 6.2. Моделирование процессов теплопроводности

**Теоретическое введение.** Длинный металлический стержень имеет одинаковую температуру по всей длине  $T_0$ . В начальный момент времени температура на правом торце стержня изменяется скачкообразно до  $T_1$  и далее сохраняет это значение. Левый торец стержня сохраняет постоянную температуру  $T_0$ . По боковой поверхности стержень имеет возможность взаимодействовать с окружающей средой, которая имеет температуру  $T_0$ .

Считаем, что длина стержня значительно больше его радиуса  $L \gg R$ . Материал стержня имеет достаточно высокую теплопроводность, следовательно, изменением температуры в поперечном сечении пренебрегаем, она считается одинаковой во всех точках поперечного сечения. Ниже на рис. 6.4 представлена расчетная схема объекта моделирования:

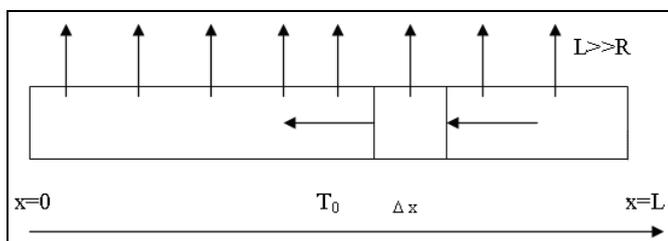


Рис. 6.4. Схема объекта моделирования

Процессы передачи тепла в стержне описывается следующим уравнением:

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Pi}{F} \alpha (T_0 - T),$$

$x$  – продольная координата,  $t$  – время,  $\Pi$  – периметр поперечного сечения стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи в окружающую среду через боковую поверхность,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стержня,  $\rho$  – его плотность,  $T_0$  – температура окружающей среды,  $T(t, x)$  – температура стержня, функция времени и координаты.

В начальный момент времени  $T(t=0, x) = T_0$ , а краевые условия имеют вид:

$$T(t, x=0) = T_1, \quad T(t, x=L) = T_0.$$

Преобразование уравнений к безразмерному виду дает следующее:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} + \bar{k} (1 - y),$$

$$y(\bar{t} = 0, \bar{x}) = 0, \quad y(\bar{t}, \bar{x} = 0) = 1, \quad y(\bar{t}, \bar{x} = 1) = 0,$$

Здесь  $\bar{t} = t/t^*$ ,  $\bar{x} = x/L$ , безразмерная температура определяется соотношением  $y = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ , в качестве масштаба по времени принята величина  $t^* = L^2/a$ . Безразмерный параметр  $\bar{k}$  характеризует соотношение интенсивности процессов теплопередачи с окружающей средой

и теплопроводности по стержню:  $\bar{k} = \frac{kL^2}{a}$ ,  $k = \frac{\Pi\alpha}{F \cdot \rho \cdot c}$ ,  $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$ . Модель процесса теплопроводности в безразмерной форме полностью совпадает с моделью процесса диффузии.

Для решения полученной начально-краевой задачи применим метод конечных разностей. Конечно-разностный аналог уравнения имеет вид:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} - ky_j^{n+1},$$

$$\frac{1}{h^2} y_{j-1}^{n+1} - \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + k \right) y_j^{n+1} + \frac{1}{h^2} y_{j+1}^{n+1} = -\frac{y_j^n}{\tau}.$$

Последнее соотношение записано для точек с индексами  $j = 2 \div (M - 1)$ , т.е. для внутренних узловых точек по координате  $x$ . Для краевых точек значения  $y_j^{n+1}$  заданы краевыми условиями:  $j=1$ ,  $y_j^{n+1} = 0$ , а для  $j=M$ ,  $y_j^{n+1} = 1$ . Теперь необходимо решение полученной системы линейных алгебраических уравнений относительно  $y_j^{n+1}$ . Подобная специфическая система линейных уравнений с трехдиагональной ленточной матрицей решается с помощью метода прогонки.

В общем случае система подобных линейных алгебраических уравнений может быть представлена в следующем каноническом виде:

$$\begin{cases} A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = -F_j \\ y_1 = \chi_1 y_2 + \nu_1 \\ y_M = \chi_2 y_{M-1} + \nu_2 \end{cases}$$

В рассматриваемой задаче коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  имеют конкретные значения:

$$A_j = \frac{1}{h^2}, \quad B_j = \frac{1}{h^2}, \quad C_j = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + k, \quad F_j = \frac{y_j^n}{\tau};$$

$$\chi_1 = 0, \quad \nu_1 = 1, \quad \chi_2 = 0, \quad \nu_2 = 0.$$

Главная идея метода прогонки состоит в том, что решение системы уравнений ищется в виде рекуррентного соотношения:  $y_j = \alpha_j y_{j+1} + \beta_j$ . Коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  называются прогоночными. Положим  $j=1$ , тогда  $y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1$ , в тоже время  $y_1 = \chi_1 y_2 + \nu_1$ , из чего следует, что  $\alpha_1 = \chi_1$ ,  $\beta_1 = \nu_1$ . Расчет остальных прогоночных коэффициентов выполняется по следующим рекуррентным формулам:

$$\alpha_j = \frac{B_j}{C_j - A_j \alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{F_j + A_j \beta_{j-1}}{C_j - A_j \alpha_{j-1}}.$$

После определения прогоночных коэффициентов, решение определяется по соотношению:

$$y_j = \alpha_j y_{j+1} + \beta_j, \quad \text{где } j = (M - 1) \div 2.$$

Таким образом, алгоритм решения задачи включает следующие этапы:

1. Определить значения коэффициентов  $A, B, C, F_j$ .
2. Исходя из краевых условий, определить значения  $\chi_1, \nu_1, \chi_2, \nu_2$ .
3. Задать значения прогоночных коэффициентов  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ .
4. Рассчитать  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ , причем  $j$  изменяется от  $j=2$  до  $j=(M-1)$ .
5. Рассчитать  $y_j^{n+1}$  при изменении  $j$  от  $j=(M-1)$  до  $j=2$ .

**Постановка задачи моделирования.** Целью моделирования является исследование переходного процесса после скачкообразного изменения температуры правого торца стержня. Представляет интерес новый стационарный температурный режим, который установится по окончании переходного процесса, а также время протекания этого процесса.

**Порядок выполнения работы.** Первоначально решим задачу определения нового температурного режима, который установится через некоторое время после скачкообразного изменения температуры. В дальнейшем полученную компьютерную модель модифицируем для анализа динамики переходного процесса из начального состояния в новое состояние, которое установится в системе через некоторое время.

Для решения задачи определения нового температурного режима создадим таблицу (рис. 6.5).

	A	B	C	D	E	F
1	$\tau$	$X_i$	$Y_0$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$Y_1$
2	1000	0	0	0	0	0
3	h	0,02	0	=...	=...	=...
4	0,02	0,04	0	=...	=...	=...
5	k	0,06	0	=...	=...	=...
6	0	0,08	0	=...	=...	=...
7	A	0,1	0	=...	=...	=...
8	=...	=...	0	=...	=...	=...
9	B	=...	0	=...	=...	=...
10	=...	=...	0	=...	=...	=...
11	C	0,94	0	=...	=...	=...
12	=...	0,96	0	=...	=...	=...
13		0,98	0	=...	=...	=...
14		1	1			1

Рис. 6.5. Таблица для решения задачи

Ниже представлена сводка всех необходимых формул:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} - ky_j^{n+1};$$

$$\frac{1}{h^2} y_{j-1}^{n+1} - \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + k \right) y_j^{n+1} + \frac{1}{h^2} y_{j+1}^{n+1} = -\frac{y_j^n}{\tau};$$

$$A_j = \frac{1}{h^2}, \quad B_j = \frac{1}{h^2}, \quad C_j = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2} + k, \quad F_j = \frac{y_j^n}{\tau};$$

$$\chi_1 = 0, \quad \nu_1 = 1, \quad \chi_2 = 0, \quad \nu_2 = 0.$$

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \nu_1.$$

$$\alpha_j = \frac{B_j}{C_j - A_j \alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{F_j + A_j \beta_{j-1}}{C_j - A_j \alpha_{j-1}}, \quad y_j = \alpha_j y_{j+1} + \beta_j.$$

Так как значение  $\tau$  задано достаточно большим, то за один шаг по времени мы получим новое установившееся состояние.

В столбце А электронной таблицы задаем параметры задачи:  $\tau$ ,  $h$ ,  $k$  и формулы для вычисления коэффициентов **A**, **B**, **C**. В столбце В представим координаты точек по оси  $x$ . Их можно рассчитать по формуле. В столбце С задано начальное состояние, которое имеет место в момент времени  $t=0$ . Первые значения прогонных коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  задаются исходя из краевых условий, остальные рассчитываются по соответствующим формулам. Значения  $Y_1$  при  $x=0$  и  $x=1$  задаются явно согласно краевым условиям, остальные значения вычисляются по формулам. После создания таблицы необходимо построить график зависимости  $y(x)$ .

Для решения задачи моделирования переходного процесса шаг по времени  $\tau=0,005$ , колонки D, E, F копируются 50 раз ( $Y_1-Y_{50}$ ). Строится график, в который включается каждая пятая колонка  $Y$ . График (рис. 6.6) будет отражать ход процесса изменения температуры стержня во времени и по продольной координате.

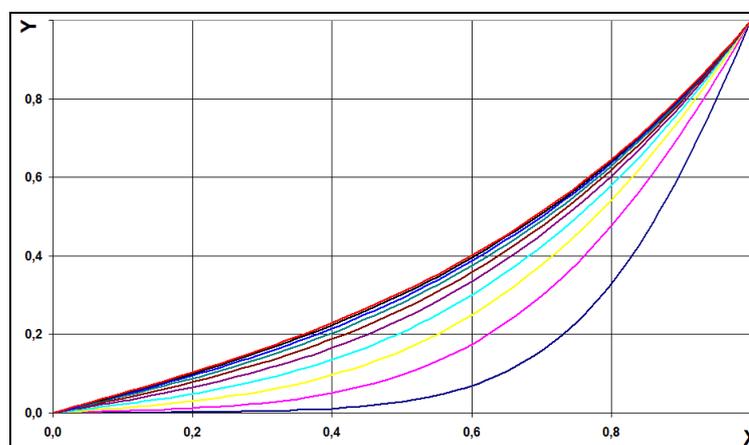


Рис. 6.6. Результат моделирования

**Анализ результатов моделирования.** Получите решение для различных положительных и отрицательных значений  $k$  и установите качественный характер влияния этого параметра.

При анализе процесса теплопроводности параметр  $k$  может принимать только положительные значения, т.к. тепло всегда передается от более нагретой области в более холодную. При анализе процессов диффузии параметр  $k$  может принимать и положительные и отрицательные значения, т.к. диффузия может проходить и с поглощением и с выделением вещества при взаимодействии с окружающей средой.

### 6.3. Моделирование ламинарного течения жидкости

**Постановка задачи:** Имеется проточный канал, образованный двумя плоскими пластинами (аналогичная задача решается для круглого канала в цилиндрической системе координат). По каналу, за счет разности давления на его входе и выходе, течет вязкая несжимаемая жидкость с постоянными свойствами. Длина канала значительно больше его поперечного размера:  $L \gg R$ . Перепад давления между входом и выходом канала  $\Delta p = p_1 - p_0 = const$ . Движение жидкости установившееся. Ширина канала равна  $2 \cdot R$ . Расчетная схема объекта исследования представлена на рис. 6.7.

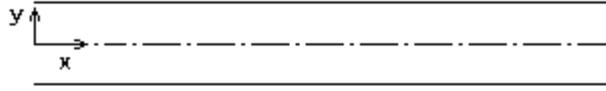


Рис. 6.7. Расчетная схема объекта исследования.

Уравнение движения жидкости по каналу, которое получено на основе второго закона Ньютона, имеет вид:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Здесь  $\rho$  - плотность жидкости,  $\mu$  - вязкость,  $u$  - скорость течения жидкости,  $p$  - давление,  $t$  - время,  $x, y$  - продольная и поперечная координаты соответственно.

Краевые условия задачи суть следующее:

$$u(t, x, y = R) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Так как мы рассматриваем установившееся движение жидкости ( $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ) с постоянными свойствами, то исходное уравнение можно упростить:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Решение полученной краевой задачи позволяет рассчитать профиль скорости движения жидкости в канале - функцию  $u(y)$ . Преобразуем уравнение к безразмерному виду в соответствии с соотношениями:

$$\bar{u} = u / u^*, \quad \bar{y} = y / R.$$

Так как движение установившееся, то градиент давления по всей длине канала можно считать неизменным и равным:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{p_1 - p_0}{L} = - \frac{\Delta p}{L}.$$

Подстановка соотношений в уравнение дает следующий результат:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = - \frac{\Delta p}{L} \frac{R^2}{\mu \cdot u^*}.$$

Выберем масштаб скорости  $u^*$  таким, чтобы выражение в правой части последнего уравнения имело значение равное -1. Тогда получим краевую задачу в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -1, \quad \bar{u}(\bar{y} = 1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} = 0.$$

Численное решение задачи проводится методом конечных разностей. Конечно-разностный аналог краевой задачи имеет вид:

$$\frac{\bar{u}_{j+1} - 2\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}}{h^2} = -1.$$

Или

$$\frac{1}{h^2}\bar{u}_{j-1} - \frac{2}{h^2}\bar{u}_j + \frac{1}{h^2}\bar{u}_{j+1} = -1.$$

Краевые условия:  $u_1 = u_2$ ;  $u_m = 0$ .

Таким образом

$$A_j = \frac{1}{h^2}, \quad B_j = \frac{1}{h^2}, \quad C_j = \frac{2}{h^2}, \quad F_j = 1.$$

С учетом краевого условия при  $y=0$  ( $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$  или  $\frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{h} = 0$ ) примем, что  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ . Таким образом  $\chi_1 = 1$ ,  $\nu_1 = 0$ . Следовательно, прогоночные коэффициенты  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ .

Расчет остальных прогоночных коэффициентов и значений  $u_j$  выполняется по рекуррентным формулам:

$$\alpha_j = \frac{B_j}{C_j - A_j\alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{F_j + A_j\beta_{j-1}}{C_j - A_j\alpha_{j-1}}, \quad u_j = \alpha_j u_{j+1} + \beta_j.$$

**Постановка задачи моделирования.** Рассчитать профиль скорости течения вязкой жидкости по каналу.

	A	B	C	D	E
1	h	xi	$\alpha_i$	$\beta_i$	$u_i$
2	0,02	0,00	1	0	=...
3	A	0,02	=...	=...	=...
4	=...	0,04	=...	=...	=...
5	B	0,06	=...	=...	=...
6	=...	0,08	=...	=...	=...
7	C	0,10	=...	=...	=...
8	=...	...	=...	=...	=...
9	F	...	=...	=...	=...
10	1	...	=...	=...	=...
11		1,00			0

Рис. 6.8. Таблица расчета профиля скорости

**Порядок выполнения работы.** Задача решается методом прогонки (аналогично задаче теплопроводности). Для ее решения потребуется создать таблицу (рис. 6.8). Результат расчета профиля скорости  $\bar{u}(x)$  необходимо представить в виде графика.

## 6.4. Моделирование совместного протекания переноса и теплопроводности

**Постановка задачи:** В предыдущих работах мы построили и изучили модели однородных по физической сути процессов: либо перенос движущейся средой, либо теплопроводность в неподвижной среде. Однако данные процессы могут протекать одновременно. Например, теплоносителем является жидкий металл. Аналогичная задача возникает в экологии при моделировании процессов распространения загрязнений в окружающей среде (атмосфера или мировой океан).

Пусть в теплообменнике рабочей средой является жидкий металл. Модель совместного протекания процессов строится на основе закона сохранения энергии путем объединения уравнений, отражающих каждый процесс в отдельности:

$$\rho \cdot c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Pi}{F} \alpha (T_0 - T).$$

Приведение уравнения к безразмерному виду с помощью преобразований, которые мы уже проделывали выше, дает следующее:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = a \frac{\partial^2 y}{\partial \bar{x}^2} - ky.$$

Безразмерные величины в последнем уравнении суть следующее:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad \bar{t} = t / \left( \frac{L}{u} \right); \quad y = (T - T_0) / (T_1 - T_0); \quad a = \frac{\lambda}{\rho c \cdot L \cdot u}; \quad k = \frac{\Pi \alpha L}{F \cdot \rho c u}.$$

Параметр  $a$  есть соотношение интенсивности процессов теплопроводности и переноса тепла движущейся средой, в свою очередь, параметр  $k$  отражает соотношение интенсивности теплоотдачи в окружающую среду через стенки канала и переносом тепла по каналу. В качестве начального и одного из краевых условий выберем следующее:

$$y(\bar{t}, \bar{x} = 0) = 0 \quad y(\bar{t} = 0, \bar{x}) = 1.$$

Это соответствует тому, что в начальный момент времени теплоноситель имеет температуру, равную температуре стенок. В момент времени  $t=0$  в канал начинает поступать холодная жидкость, что является причиной возникновения динамического переходного процесса из начального стационарного режима в новое стационарное состояние. Представленная выше начально-краевая задача имеет второй порядок по пространственной координате. На входе в канал ( $\bar{x} = 0$ ) краевое условие задано и имеет простой физический смысл: жидкость, поступающая в канал, имеет постоянную температуру.

Второе краевое является в некотором смысле искусственным. Полагаем, что при  $\bar{x} = 1$ , т.е. на выходе из канала и далее в ближайшей окрестности, можно считать изменение температуры линейным. Аналогичный результат имеем, если влиянием теплопроводности в этом сечении можно пренебречь. Тогда краевое условие будет следующим:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = -ky.$$

Переход от дифференциальной формы к конечно-разностному аналогу краевой задачи дает следующие линейные алгебраические уравнения:



2. Построить модель распространения тепловой волны в стержне

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad \bar{y} \in [0, 1], \quad \bar{t} \in [0, \infty);$$

$$y(\bar{t} = 0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t} = 0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t}, \bar{y} = 0) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t}, \bar{y} = 1) = 0,$$

3. Построить модель пульсирующего ламинарного движения жидкости

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad \bar{y} \in [0, 1], \quad \bar{t} \in [0, \infty); \quad \bar{u}(t = 0, \bar{y}) = (1 - \bar{y}^2)/2; \quad \bar{u}(\bar{t}, \bar{y} = 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0.$$

4. Построить модель распространения тепловой волны в стержне

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad \bar{y} \in [0, 1], \quad \bar{t} \in [0, \infty);$$

$$y(\bar{t} = 0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t} = 0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t}, \bar{y} = 0) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t}, \bar{y} = 1) = 0,$$

5. Определить новый установившийся тепловой режим стержня

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad \bar{y} \in [0, 1], \quad \bar{t} \in [0, \infty);$$

$$y(\bar{t} = 0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t} = 0, \bar{y}) = 0, \quad \bar{u}(\bar{t}, \bar{y} = 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = 0,$$

Дополнительную информацию по теме «Моделирование процессов с распределенными параметрами» можно найти в публикациях: [12], [18], [22], [26].

### 7.1. Механизм рыночного ценообразования

**Теоретическое введение.** Целью работы является изучение динамики установления рыночной цены, которая является результатом взаимодействия рынка, товаропроизводителя и потребителя. Это одна из исторически первых динамических моделей.

Пусть  $P_n$  - цена товара в период  $t_n$ ,  $D_n$  - спрос на товар,  $S_n$  - предложение товара производителем в этот же период времени. В основе модели лежат следующие гипотезы:

1. Товаропроизводитель, принимая решение об объеме предложения товара на рынок  $S_n$ , ориентируется на цену предыдущего периода  $P_{n-1}$ . Логика такого прогноза весьма проста: если сегодня цена была  $P_{n-1}$  то и завтра она останется такой же.
2. Рынок всегда находится в состоянии локального равновесия: спрос равен предложению.

Таким образом, в каждый период  $t_n$  объем предложения на рынке  $S_n$  определяется значением цены предыдущего периода  $P_{n-1}$ . В тоже время на рынке в каждый период  $t_n$  устанавливается такая максимальная цена товара, которая обеспечивает равенство спроса и предложения:  $S_n = D_n$ . При этой цене потребители купят все, что предложено производителем на рынке. Модель отражает процесс формирования рыночной цены на товар, который обязательно должен быть продан в текущий период, например, скоропортящийся продукт.

Для построения математической модели примем следующие предположения: Зависимость спроса от цены является линейной и имеет вид:

$$D_n = A - BP_n,$$

где  $A$ ,  $B$  – коэффициенты, определенные на основе статистического исследования рыночных законов. Зависимость предложения товара при простом прогнозе его цены в соответствии с гипотезой (1) представляется следующим соотношением:

$$S_n = C + EP_{n-1},$$

где  $C$  и  $E$  – рыночные константы. Производитель товара определяет объем поставок на рынок в соответствии с ценой в  $(n-1)$  день. На основе значения цены  $P_{n-1}$  производитель прогнозирует емкость рынка. В начальный момент времени цена известна  $P_0$  – заданная величина.

Предполагается, что значения констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $E$  оценены с помощью стандартных статистических методов исследования рынка. Производитель имеет необходимую информацию о ценах на рынке в предшествующие отрезки времени. На этой основе он формирует объем поставки товара  $S_n$ . В соответствии с объемом предложения и величиной спроса устанавливается рыночная цена товара, обеспечивающая равенство спроса и предложения:

$$D_n = A - BP_n = S_n; \quad P_n = (A - S_n) / B.$$

В дальнейшем производитель учитывает новую рыночную цену товара, корректирует свое предложение и цикл повторяется. Так как реакция производителя

всегда имеет запаздывание, то рыночное равновесие наступает после некоторых колебаний цены. Процесс установления равновесной рыночной цены можно представить в виде сходящейся спирали. Поэтому данная модель рынка носит название «паутинной».

**Постановка задачи моделирования.** Построить модель процесса установления равновесной рыночной цены. Установить закономерности ценообразования.

**Порядок выполнения работы.** Работа выполняется в среде электронных таблиц. Алгоритм моделирования динамики изменения рыночной цены представляется следующим:

- на основе начального значения цены товара  $P_0$  производитель определяет объем предложения  $S_1$ ;
- в соответствии с объемом предложенного товара рынок устанавливает его цену (спрос равен предложению)

$$P_1 = (A - S_1) / B;$$

- в следующий период производитель учитывает новую рыночную цену товара  $P_1$  и корректирует объем поставки на следующий период  $S_2$ . Далее процесс повторяется (рис. 7.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Модель динамики рыночных цен</b>						
2	<b>Параметры</b>				<b>n</b>	<b>P</b>	<b>S</b>
3	<b>A</b>	<b>100</b>			0	10	
4	<b>B</b>	<b>4</b>			1	15	40
5	<b>C</b>	<b>10</b>			2	11,25	55
6	<b>E</b>	<b>3</b>			3	14,0625	43,75
7	<b>Начальная цена</b>	<b>10</b>			4	11,95313	52,1875
8					5	13,53516	45,85938
9	<b>Средняя цена</b>	<b>12,83</b>			6	12,34863	50,60547
10	<b>Дисперсия цены</b>	<b>0,372</b>			7	13,23853	47,0459
11					8	12,57111	49,71558
12					9	13,07167	47,71332
13					10	12,69625	49,21501
14					11	12,97781	48,08874
15					12	12,76664	48,93344

Рис. 7.1. Таблица расчета изменения цен на рынке

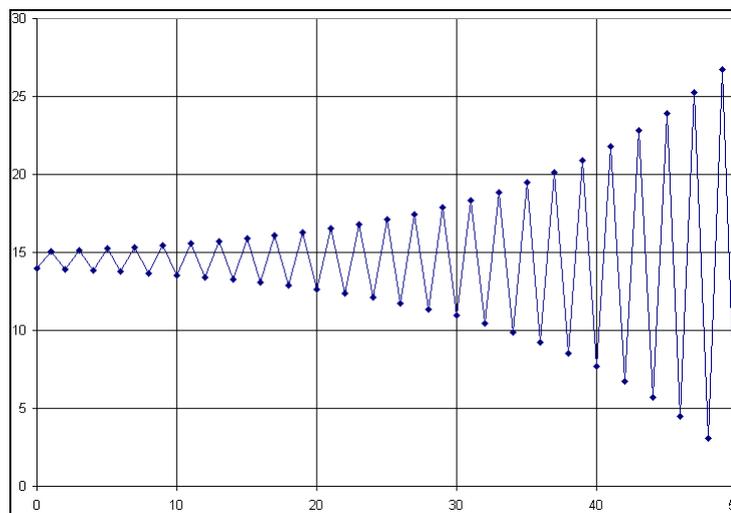


Рис. 7.2. График изменения рыночной цены

Исходные данные для моделирования: значения рыночных констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $E$ , начальная цена  $P_0$ . Необходимо задать исходные данные, рассчитать изменение цены товара на интервале времени для  $n = 0 - 30$ . Построить график изменения рыночной цены во времени в координатах  $P - n$  (рис.7.2).

При моделировании учесть, что цена товара не может быть отрицательной. Определить среднее значение и дисперсию цены за период. (Использовать функции СРЗНАЧ и ДИСП).

Значения исходных данных для экспериментов представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

A	B	C	E	P <sub>0</sub>
100	4	10	3	10
100	3	10	3	10
100	3	10	3,2	10
100	4	10	4	10
100	3	10	4	10

**Модифицированная модель.** В данной модели уточнена процедура прогнозирования цены. Производитель устанавливает объем предложения, ориентируясь на усредненное значение цены за два последних периода, т.е. производитель в некотором смысле учитывает динамику изменения цен на рынке. Такой прогноз будет, естественно, более адекватным. Зависимость предложения товара при таком прогнозе его цены можно определить следующим соотношением:

$$S_n = C + E((1-r)P_{n-1} + rP_{n-2}),$$

где  $r$  – коэффициент усреднения:  $0 < r < 1$ . При этом расчет значения  $S_1$  проводится по зависимости:

$$S_1 = C + EP_0.$$

Для построения новой модели необходимо скопировать предыдущую таблицу на Лист 2 и внести в нее изменения, соответствующие новой методике прогноза цены (рис. 7.3).

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Модель динамики рыночных цен модифицированная</b>						
2	<b>Параметры</b>				<b>n</b>	<b>P</b>	<b>S</b>
3	A	100			0	10	
4	B	3			1	21	37
5	C	5			2	15,13333	54,6
6	E	3,2			3	12,39556	62,81333
7	Начальная цена	10			4	16,98459	49,04622
8	Козф. усреднения r	0,5			5	15,99725	52,00824
9					6	14,07635	57,77096
10	Средняя цена	15,30			7	15,62741	53,11776
11	Дисперсия цены	1,491			8	15,82466	52,52602

Рис. 7.3. Таблица для модифицированной модели

**Анализ результатов моделирования.** Установить отличия в свойствах при простом и усредненном способе прогноза цены товара, установить влияние коэффициента  $r$ .

Доказать на основе сравнения моделей, что достоверный прогноз цены (т.е. адекватная реакция производителей) имеет принципиальное значение для обеспечения

устойчивости рынка. Исследовать влияние рыночных констант  $B$  и  $E$  на динамику установления равновесного значения цены товара.

Для заданных рыночных констант на основе результатов моделирования выбрать начальное значение цены товара, обеспечивающее наименьшую дисперсию.

## 7.2. Моделирование циклических процессов в экономике

**Теоретическое введение.** Предлагается следующая содержательная модель экономической системы. В фазе процветания успешное функционирование старых отраслей поддерживает инновационные процессы в новых отраслях. Но постепенно развитие старых отраслей замедляется. Начинают замедляться и процессы инновации в новых отраслях.

В стадии спада происходит подавление инновационных процессов. Отсутствие инноваций способствует старению и износу оборудования старых отраслей, что усиливает спад.

В фазе депрессии негативные процессы в старых отраслях производства приводят к их кризису. Старые отрасли, занятые своими проблемами, в меньшей степени способны подавлять молодые отрасли производства и не мешают оживлению в них инноваций.

В фазе восстановления успехи в молодых отраслях оздоравливают экономику и поднимают производство в старых отраслях. Такие циклические процессы в экономике называются волнами Кондратьева.

Для построения модели подобных процессов введем понятие кооперативной и антагонистической переменных. Активная переменная  $X$  является кооперативной по отношению к пассивной переменной  $Y$ , если увеличение  $X$  усиливает  $Y$  при больших значениях  $X$ , но снижает  $Y$  при малых значениях  $X$  (кооперативная переменная  $X$  стремится согласовать свое значение и значение  $Y$ ). Активная переменная  $X$  является антагонистической по отношению к пассивной переменной  $Y$ , если  $X$  подавляет  $Y$  при больших значениях  $X$  и усиливает  $Y$  при малых значениях  $X$  (антагонистическая переменная стремится увеличить разницу между переменными). Подобное кооперативное и антагонистическое поведение характерно для социально-экономических систем.

Пусть  $X$  – объем производства в молодых отраслях, а  $Y$  – объем производства в старых отраслях.  $X$  по отношению к  $Y$  является кооперативной переменной, а  $Y$  по отношению к  $X$  является антагонистической переменной. Предполагается, что  $X$  и  $Y$  являются ограниченными по росту во времени функциями. Взаимодействие  $X$  и  $Y$  описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a(y) \cdot s - x), \\ \frac{dy}{dt} &= y(b(x) \cdot s - y).\end{aligned}$$

Здесь  $t$  – время,  $s$  – параметр, функции  $a(y)$  и  $b(x)$  задают вид взаимодействия переменных: кооперативный или антагонистический. Для того чтобы задать кооперативное взаимодействие между  $x$  и  $y$  функцию  $b(x)$  определим следующим образом:

$$b(x) = \begin{cases} b_- < 0 & \text{для } 0 < x < x_s \\ b_+ > 0 & \text{для } x_s < x < \infty \end{cases},$$

где  $b_-$  и  $b_+$  - константы, а  $x_s$  - точка переключения. Очевидно, что функция  $b(x)$  приводит к уменьшению  $y$  при малых значениях  $x$  и увеличению  $y$  для  $x > x_s$ .

Антагонистическое взаимодействие определяется следующей зависимостью для  $b(x)$ :

$$b(x) = \begin{cases} b_+ > 0 & \text{для } 0 < x < x_s \\ b_- < 0 & \text{для } x_s < x < \infty \end{cases}$$

Аналогичным образом кооперативное или антагонистическое взаимодействие определяется функцией  $a(y)$ :

$$a(y) = \begin{cases} a_- < 0 & \text{для } 0 < y < y_s \\ a_+ > 0 & \text{для } y_s < y < \infty \end{cases} \quad a(y) = \begin{cases} a_+ > 0 & \text{для } 0 < y < y_s \\ a_- < 0 & \text{для } y_s < y < \infty \end{cases}$$

**Постановка задачи моделирования.** Построить модель циклического развития и исследовать свойства процесса.

**Порядок выполнения работы:** Работа выполняется в среде MVS. Необходимо построить модель в соответствии с рис. 7.4. Результаты моделирования отразить в виде временной и фазовой диаграмм (рис. 7.5).

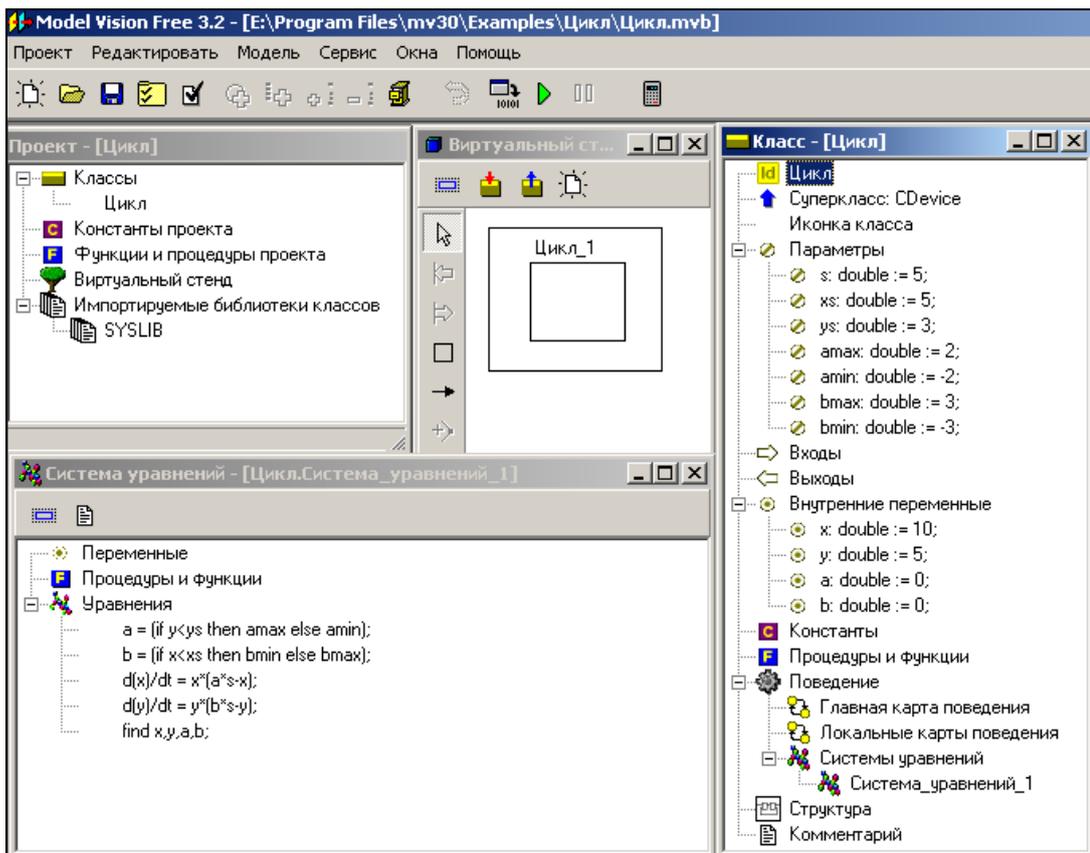


Рис. 7.4. MVS-модель циклического развития

**Анализ результатов моделирования.** Проанализировать влияние различных вариантов взаимодействий:

- $x$ ,  $y$  являются кооперативными переменными по отношению к друг другу;
- $x$ ,  $y$  являются антагонистическими переменными по отношению к друг другу;

- $x$  кооперативно влияет на  $y$ , а  $y$  антагонистически влияет на  $x$ ;
- $y$  кооперативно влияет на  $x$ , а  $x$  антагонистически влияет на  $y$ .

Подтвердить положение о том, что в двух первых случаях взаимодействие дает две точки равновесия, и все траектории стремятся к тому или иному положению равновесия, в последних двух случаях решения представляют собой циклы вокруг определенного центра.

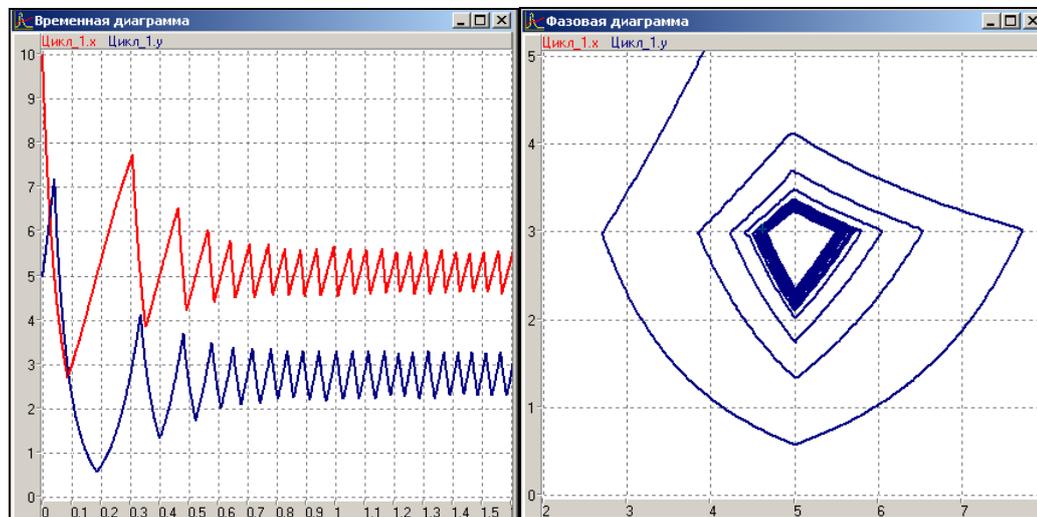


Рис. 7.5. Результаты моделирования циклического развития

### 7.3. Моделирование распространения инноваций

**Теоретическое введение.** Одним из главных факторов, определяющих скорость процессов распространения нововведений (инноваций), является межличностное общение между сторонниками данной новинки и теми, кто еще колеблется или ничего не слышал о нововведении. Если обозначить численность людей, принявших инновацию к моменту времени  $t$ , через  $y_i$ , то число лиц, которых, в принципе, можно сагитировать равно  $M - y_i$ , где  $M$  – емкость рынка, максимально возможное число лиц, которые могут принять нововведение.

Можно считать, что прирост числа сторонников новинки пропорционален числу встреч между сторонниками новинки и сомневающимися. Число таких встреч пропорционально произведению  $(M - y_i)y_i$ . Если отразить данные рассуждения количественно, то получим следующее разностное уравнение для прироста числа сторонников инновации:

$$y_{i+1} = y_i + \alpha (M - y_i) y_i,$$

где  $\alpha$  - коэффициент пропорциональности.

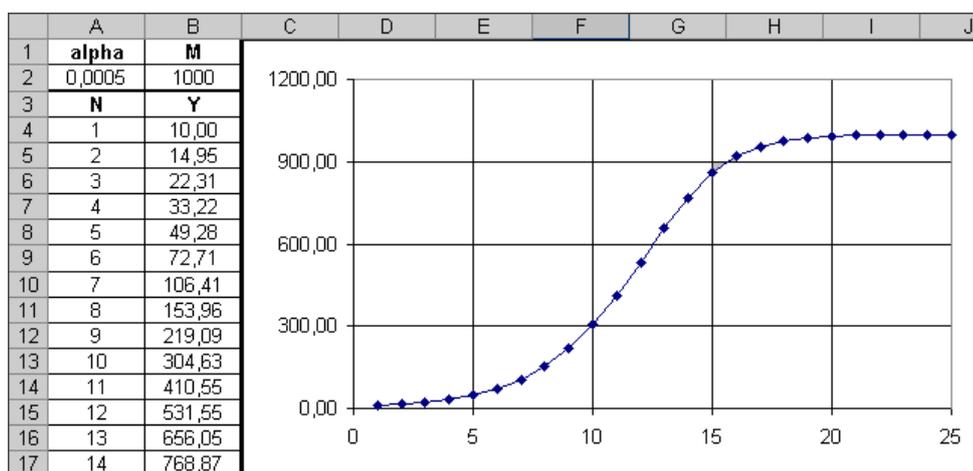


Рис. 7.6. Моделирование распространения инноваций

Подобная модель хорошо описывает процессы обновления техники, смену технологий, эволюционные процессы, процессы в социальной сфере, распространение движений протеста в обществе и даже распространение слухов.

**Постановка задачи моделирования.** Построить модель распространения инноваций и исследовать ее свойства.

**Порядок выполнения работы.** Модель строится в среде электронных таблиц (рис. 7.6) в соответствии с представленной зависимостью. Моделирование следует провести для максимального значения  $N=25$ .

**Анализ результатов моделирования.** Установить влияние параметров на свойства процесса распространения инноваций.

#### 7.4. Определение налога на прибыль

**Постановка задачи.** Государству для наполнения бюджета и выполнения своих функций применяет налогообложение. Существует мнение, что **большие ставки налога сдерживают развитие экономики** и препятствуют росту отчислений в бюджет. Источником и развития бизнеса, и наполнения бюджета является прибыль предприятий, т.е. превышение доходов над расходами. Государство устанавливает ставку налога на прибыль и получает средства в бюджет. Предприятия вкладывают капитал в свою экономическую деятельность, производят и реализуют продукцию. В итоге они получают прибыль и отчисляют по налоговой ставке средства в бюджет. Размер прибыли характеризуется уровнем рентабельности, т.е. отношением прибыли к вложенным в бизнес средствам.

**Постановка задачи моделирования.** На основе моделирования установить оптимальную ставку налога, наиболее выгодную для государства.

Будем считать, что оставшуюся после уплаты налогов часть прибыли предприятие полностью включает в собственный капитал и вкладывает в развитие бизнеса. Налоги на прибыль выплачиваются в начале текущего года по результатам деятельности за предыдущий год. Требуется на основе модельных экспериментов определить оптимальную ставку налогообложения предприятий и ее зависимость от уровня рентабельности. Налог на прибыль должен обеспечить максимум отчислений в бюджет за определенный период времени.

Исходные данные для моделирования: **начальный капитал предприятия, уровень рентабельности предприятия, ставка налога.** Задача – построить модель, которая позволит определить оптимальную ставку налога, при которой суммарный объем поступлений в бюджет в виде уплаты налогов за определенный период работы предприятия (10 лет) будет максимальным.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Рентабельность	120%	Ставка налога	20%								
2	Время	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Капитал на начало года	100										
4	Прибыль	0										
5	Отчисления в бюджет	0										
6	Остаток прибыли	0										
7	Поступления в бюджет за весь период	0										

Рис. 7.7. Таблица для определения оптимальной ставки налога

В начальный момент времени (на начало года) предприятие имеет капитал в 100 единиц. Естественно, что при этом нет никакой прибыли и отчислений в бюджет (рис. 7.7), так как предприятие только начинает свою деятельность.

На начало каждого следующего года необходимо с учетом рентабельности и величины капитала в начале предыдущего года рассчитать полученную за предыдущий год прибыль: **Прибыль=Капитал\*Рентабельность.**

Затем вычислить величину налоговых отчислений в бюджет: **Отчисления в бюджет=Прибыль\*Ставка налога.** Вычислить остаток прибыли: **Остаток прибыли=Прибыль-Отчисления в бюджет.** Начальный капитал текущего года вычисляется путем увеличения капитала предыдущего года на величину **остатка прибыли.**

Значение в ячейке L7 - суммарная величина налоговых поступлений в бюджет за 10 лет. Определить налоговую ставку, обеспечивающую максимальное увеличение налоговых поступлений. Определение оптимального значения налоговой ставки и есть цель решения данной задачи оптимизации.

**Порядок выполнения работы.** Построить таблицу расчета поступлений в бюджет за 10-летний период для заданных исходных данных. С помощью надстройки «Поиск решения» определить оптимальную ставку налога, которая обеспечивает максимум поступлений в бюджет за 10 лет для различных уровней рентабельности (диапазон изменения рентабельности: 120%, 100%,...20%). Результаты оптимизации свести в таблицу.

Рентабельность	Оптимальная ставка налога	Поступление налогов в бюджет за 10 лет
120%		
100%		
80%		
60%		
40%		
20%		

**Дополнительное задание:** решить данную задачу при условии, что первые 3 года предприятие **освобождено от уплаты налогов** и всю прибыль вкладывает в развитие бизнеса. Определить максимальный срок налоговых льгот, при котором отчисления в бюджет растут. Решить задачу при условии, что часть прибыли направляется на дивиденды по акциям.

**Анализ результатов моделирования.** Сделать вывод по налогообложению предприятий с разным уровнем рентабельности и целесообразности предоставления налоговых льгот.

### Задачи для самостоятельного решения

1. В рассмотренной ранее модели установления рыночной цены предполагалось, что на рынке всегда существует локальное равновесие. Во многих случаях установление равновесия рынка (равенство спроса и предложения) происходит в течение определенного конечного промежутка времени. Динамику установления равновесия рынка можно выразить соотношением:

$$P_{n+1} = P_n \exp(r(D(P_n) - S(P_n))); \quad D_n = Q_e - d(P_n - P_e), \quad S_n = Q_e + s(P_n - P_e).$$

Здесь  $Q_e$ ,  $P_e$  – равновесный спрос и равновесное значение цены соответственно,  $d$  и  $s$  рыночные параметры, определенные на основе статистического исследования рыночных законов,  $r$  – параметр, определяющий реакцию участников рыночных отношений. Построить модель установления рыночного равновесия.

2. Модель рынка, которая рассмотрена ранее, предполагает, что на рынке никаких запасов продукции не создается. Подобная ситуация характерна для рынка скоропортящихся продуктов, который предполагает полную реализацию всего объема поступившей на рынок продукции. Имеется дополнительная группа участников рыночных отношений – торговые предприятия. Они держат запасы продукции и организуют торговлю. Коммерсанты покупают товар у производителей по фиксированной договорной цене, установленной на длительный период времени. Пусть  $Q_n$  – запас товара к концу  $n$ -го периода.  $\Delta Q_n$  – изменение запаса товара, которое определяется дисбалансом между спросом  $D_n$  и предложением  $S_n$  в текущий период времени:

$$\Delta Q_n = Q_n - Q_{n-1} = S_n - D_n.$$

Устанавливая цену на текущий отрезок времени, коммерсанты повышают ее относительно цены на предыдущем отрезке, если запасы товара уменьшились, и понижают в противном случае. При этом изменение цен выбирается пропорционально колебаниям запасов. Таким образом,

$$P_n = P_{n-1} - \lambda \Delta Q_{n-1}, \quad P_n = P_{n-1} - \lambda \cdot (S_{n-1} - D_{n-1}),$$

где  $\lambda$  – положительная константа, отражающая реакцию коммерсанта на изменение запаса товаров на складе. Функции спроса и предложения имеют вид:

$$D_n = A - BP_n, \quad S_n = C + EP_n.$$

Так как

$$\Delta Q_{n-1} = Q_{n-1} - Q_{n-2} = S_{n-1} - D_{n-1} = (C - A) + (E + B)P_{n-1},$$

то уравнение образования цены можно переписать следующим образом:

$$P_n = P_{n-1} - \lambda((C - A) + (E + B)P_{n-1}).$$

Для вычисления значений представленных выше функций на определенном отрезке времени необходимо задать начальные значения цены товара и его запасов:  $P_0, Q_0$ . Для коммерсанта прогноз рыночной цены весьма важен, так как просчет может привести к необходимости содержать запасы товара значительных объемов (омертвление капитала). С другой стороны, товар должен всегда присутствовать на рынке. Моделирование должно предсказать возможную динамику изменения рыночных цен, потребного объема запаса товара, оптимальное значение параметра  $\lambda$ .

Построить модель ценообразования с учетом деятельности коммерсантов и определить оптимальные параметры ведения торговли.

3. Пусть отрасль контролируют две фирмы  $A$  и  $B$ , которые производят однотипный продукт. Обе фирмы стремятся получить максимум прибыли. Через фиксированные отрезки времени фирмы планируют объем своего производства на текущий период, чем и ограничивается их управленческая деятельность. Фирмам известна функция спроса на продукцию отрасли. Данная функция линейна и определяет зависимость рыночной цены от предложения продукции, произведенной отраслью. Планируя свой выпуск продукции на текущий  $n$ -й период, фирма  $A$  предполагает, что выпуск продукции фирмы  $B$  на этом отрезке останется таким же, каким он был на предыдущем  $(n-1)$ -м отрезке времени. Фирма  $B$  поступает аналогичным образом по отношению к фирме  $A$ .

Суммарный объем продукции обеих фирм реализуется по рыночной цене, обеспечивающей локальное равновесие рынка, т.е. равенство спроса и предложения. Затраты обеих фирм на производство единицы продукции одинаковы. Считается, что производственные мощности фирм неограниченны.

Пусть  $C$  – производственные затраты фирм на единицу выпускаемой продукции,  $A_n, B_n$  – объем выпускаемой фирмами продукции на  $n$ -м отрезке времени.  $Q_n$  – суммарный выпуск продукции всей отрасли на  $n$ -м отрезке времени.  $P_n$  – рыночная цена продукции на  $n$ -м отрезке времени.  $PA_n, PB_n$  – прибыль каждой фирмы на  $n$ -м отрезке времени,  $D$  и  $E$  – константы, определяющие внутренние свойства данного рынка.

Соотношения, определяющие функционирование фирм имеют следующий вид:

$$P_n = D - EQ_n, \quad Q_n = A_n + B_n, \quad PA_n = P_n A_n - CA_n, \quad PB_n = P_n B_n - CB_n.$$

Если выражение для рыночной цены подставить в соотношение для прибыли, которую будет иметь фирма  $A$ , тогда получим следующее выражение:

$$PA_n = (D - EQ_n)A_n - CA_n,$$

где  $Q_n$  – ожидаемый фирмой  $A$  объем выпуска отрасли. Руководство фирмы  $A$  предполагает, что объем выпуска продукции фирмой  $B$  будет на уровне предшествующего периода  $B_{n-1}$ . Таким образом фирма  $A$  предполагает, что объем производства отрасли определяется суммой:

$$Q_n = A_n + B_{n-1}.$$

В этом случае для прибыли фирмы  $A$  получим выражение:

$$ПA_n = (D - E(A_n + B_{n-1}))A_n - CA_n.$$

Равенство нулю производной от правой части последнего выражения по  $A_n$  дает условие максимума ожидаемой прибыли. Данное условие определяет оптимальный объем выпуска продукции, который планирует в указанных условиях фирма  $A$ :

$$A_n = \frac{D - EB_{n-1} - C}{2E}.$$

Аналогичный вывод для фирмы  $B$  дает следующее соотношение:

$$B_n = \frac{D - EA_{n-1} - C}{2E}.$$

Таким образом, чтобы получить конкретную реализацию моделируемого процесса, необходимо задать значения констант  $C, D, E$  и начальные значения объемов производства  $A_0, B_0$ .

Данная модель имеет достаточно упрощенный характер и отражает только качественную сторону процессов. Модель строится в среде электронных таблиц. Расчет величин производится в следующей последовательности: вычисляются объемы производства  $A_n, B_n$ , затем определяется общий объем производства отрасли  $Q_n$ , затем определяется рыночная цена  $P_n$ , и, наконец, прибыль, полученная каждой фирмой  $ПA_n, ПB_n$ . Моделирование проводится на отрезке  $n=0-30$ . По результатам моделирования построить графики изменения объемов производства обеих фирм во времени; график изменения цены продукции во времени и график изменения прибыли фирм. Так как речь идет о разнородных величинах, то всего должно быть три графика, которые удобнее разместить на одном листе с таблицей.

Исследовать свойства модели в зависимости от значений констант и начальных объемов производства. Начальные значения параметров выбрать  $D=50, E=0,5, C=5, A_0=20, B_0=30$ .

4. Моделирование учебного процесса. Пусть  $x(t)$  - объем знаний, накопленных учащимся к моменту времени  $t$ ,  $y(t)$  - объем накопленных умений рассуждать, решать задачи, разбираться в излагаемом преподавателем материале;  $u(t)$  - доля времени, отведенного на накопление знаний в промежутке времени  $(t; t + dt)$ . Любое знание состоит частично из «информации» и частично из «умения». Можно считать, что увеличение объема знаний учащегося пропорционально потраченному на это времени  $u(t)dt$  и накопленным умениям  $y(t)$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = k_1 u(t) y(t),$$

где коэффициент  $k_1 > 0$  зависит от индивидуальных особенностей учащегося.

Увеличение знаний за то же время пропорционально потраченному на это времени  $(1 - u(t))dt$ , имеющимся умениям  $y(t)$  и знаниям  $x(t)$ . Следовательно,

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_2(1-u(t))x(t)y(t)$$

Коэффициент  $k_2 > 0$  также зависит от индивидуальности. Можно управлять процессом обучения, выбирая при каждом  $t$  значение функции  $u(t)$  из отрезка  $[0,1]$ . Замена переменных  $z(t) = k_2x(t)$ ,  $w(t) = k_1k_2y(t)$  дает более простую систему уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = uw; \quad \frac{dw}{dt} = (1-u)zw.$$

Построить MVS-модель учебного процесса, исследовать влияние начальных условий и параметра  $u$ .

Дополнительную информацию по теме «Моделирование социальных и экономических процессов» можно найти в публикациях: [3-4], [7] [12], [14], [19], [25].

## VIII. Моделирование экологических систем

### 8.1. Моделирование развития популяции

**Теоретическое введение.** Одной из первых моделей роста популяции была модель **Мальтуса**, модель развития популяции в условиях неограниченных ресурсов среды обитания. При этом считалось, что скорость роста популяции пропорциональна ее численности:

$$\frac{dx}{dt} = Rx$$

Здесь  $R$  – врожденный коэффициент скорости роста популяции  $x$  – численность популяции. Данное уравнение имеет экспоненциальное решение с неограниченным ростом во времени:  $x = x_0 \cdot \exp(Rt)$ .

Растущая популяция со временем исчерпает ресурсы окружающей среды и ее численность стабилизируется. В этом случае развитие популяции описывается логистическим уравнением Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = Rx \left( \frac{k - x}{k} \right)$$

Здесь  $k$  – экологическая емкость среды, т.е. максимальная численность популяции, которую способна «прокормить» экологическая система. Уравнение имеет простую интерпретацию – скорость роста популяции пропорциональна ее численности и свободной части среды обитания.

**Постановка задачи моделирования.** Провести исследование свойств модели развития популяции. Требуется построить компьютерную MVS-модель и провести модельный эксперимент с целью выявления качественных закономерностей развития популяций.

**Порядок выполнения лабораторной работы.** Первый этап выполнения работы – получение безразмерной модели методом неопределенных масштабов с целью сокращения числа параметров. После преобразования модель примет вид:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}(1 - \bar{x}), \quad \bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0$$

Здесь надчеркивание означает безразмерную величину. Создайте модель в среде MVS соответственно уравнению. Изменение  $\bar{x}$  во времени необходимо отразить с помощью временной диаграммы.

**Анализ результатов моделирования.** В ходе численного эксперимента необходимо проверить теоретические предположения о характере развития и вымирания популяции. Как будет развиваться популяция, если  $\bar{x}_0 < 1$  или  $\bar{x}_0 > 1$ .

## 8.2. Моделирование межвидовой конкуренции

**Теоретическое введение.** Пусть в экологической системе существует два вида, которые эксплуатируют общий жизненный ресурс (общая пища или территория существования) и находятся в конкурентной борьбе за его использование. Развитие каждого вида описывается модифицированным логистическим уравнением, которое учитывает взаимодействие видов за счет изменения экологической емкости окружающей среды. Модель построена для непрерывного процесса взаимодействия и имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = R_1 x \left( \frac{k_1 - x - \alpha y}{k_1} \right); \quad \frac{dy}{dt} = R_2 y \left( \frac{k_2 - y - \beta x}{k_2} \right)$$

Здесь  $R_1, R_2$  - коэффициенты размножения,  $k_1, k_2$  - параметры, характеризующие экологическую емкость среды для каждого вида соответственно. Коэффициент  $\alpha$  - отражает влияние вида  $y$  на  $x$ . В свою очередь, коэффициент  $\beta$  отражает влияние вида  $x$  на вид  $y$ . Естественно, что при нулевых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  взаимодействие между видами отсутствует.

После приведения модели к безразмерному виду по методу неопределенных масштабов уравнения будут представлены соотношениями:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}(1 - \bar{x} - \varepsilon_1 \bar{y}); \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \gamma \bar{y}(1 - \bar{y} - \varepsilon_2 \bar{x}), \quad \text{где}$$
$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha k_2}{k_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\beta k_1}{k_2}; \quad \gamma = \frac{R_2 k_1}{R_1 k_2}.$$

Дополнив систему уравнений начальными условиями:

$$\bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0, \quad \bar{y}(\bar{t} = 0) = \bar{y}_0$$

получим безразмерную модель взаимодействия двух популяций.

**Постановка задачи моделирования.** Провести исследование развития системы из двух популяций в зависимости от соотношения параметров.

**Порядок выполнения работы.** Моделирование выполняется в среде MVS по аналогии с предыдущими работами. Динамику развития популяций необходимо отразить в виде временной диаграммы.

**Анализ результатов моделирования.** На основе данной модели необходимо проследить следующие варианты развития популяций:

1.  $\varepsilon_1 < 1, \varepsilon_2 < 1$  с экологической точки зрения это означает, что межвидовая конкуренция слабее, чем внутривидовая. Вывод: возможно совместное существование двух видов. Докажите путем выполнения компьютерных экспериментов, что независимо от начальных условий при неизменных значениях параметров с течением времени система приходит к одному и тому же состоянию.

2.  $\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_2 > 1$  межвидовая конкуренция является главным фактором, в зависимости от начальных условий выживает один из видов. В ходе экспериментов с моделью докажите это утверждение.
3.  $\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_2 < 1; \varepsilon_1 < 1, \varepsilon_2 > 1$  - один из видов вытесняет другой.

Все представленные варианты развития системы двух конкурирующих популяций необходимо подтвердить или опровергнуть в ходе выполнения численных экспериментов с моделью. Кроме того, необходимо установить возможные стационарные состояния системы и проверить их устойчивость. С этой целью необходимо выявить такие начальные значения  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0$  и  $\bar{y}(\bar{t} = 0) = \bar{y}_0$ , которые дают решение неизменное во времени. Один из таких режимов очевиден:  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 0, \bar{y}(\bar{t} = 0) = 0$ . Исследуйте поведение системы в том случае, когда начальные значения переменных мало отличаются от стационарных.

### 8.3. Модель системы «хищник-жертва»

**Теоретическое введение.** Исследуется изолированная от прочих сторонних воздействий экологическая система, состоящая из двух видов: «хищник» и «жертва». Для «жертвы» имеется неограниченное количество корма. «Жертва» размножается естественным путем, ее смертность обусловлена только воздействием со стороны «хищника». Пусть  $x$  – количество «жертв»,  $y$  – количество «хищников». Динамика взаимодействия между «жертвой» и «хищником» описывается следующей системой дифференциальных уравнений, которую называют уравнениями Лотки - Вольтерра:

$$\frac{dx}{dt} = Rx - P_1xy; \quad \frac{dy}{dt} = P_2xy - Dy.$$

В представленной системе уравнений слагаемое  $Rx$  характеризует скорость размножения «жертвы» в отсутствии «хищника», а слагаемое  $P_1xy$  характеризует скорость гибели «жертвы» за счет её уничтожения «хищником». Во втором уравнении слагаемое  $P_2xy$  характеризует увеличение численности «хищников» за счет поедания «жертв», а слагаемое  $Dy$  характеризует естественную смертность «хищника» в отсутствие питания («жертв»). Коэффициенты уравнений  $P, D, R$  – положительные константы. Преобразование по методу неопределенных масштабов дает безразмерную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}(1 - \bar{y}); \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{y}(\bar{x} - k).$$

С начальными условиями:  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0, \bar{y}(\bar{t} = 0) = \bar{y}_0$ , определяющими количество «жертв» и «хищников» в начальный момент времени. Начальные значения вместе с коэффициентом  $k$  являются параметрами задачи.

**Постановка задачи моделирования.** Построить MVS-модель Лотки – Вольтерра. Исследовать ее свойства.

**Порядок выполнения работы.** Мы рассчитываем на то, что вы уже научились на основе математического описания строить модель средствами MVS. При выполнении работы следует представить результаты моделирования в виде временной диаграммы  $x(t), y(t)$  и фазовой диаграммы  $y(x)$ .

**Анализ результатов моделирования.** На основе полученных результатов сделайте выводы о качественных закономерностях поведения системы «хищник» - «жертва» в зависимости от значений параметров. Установите возможные режимы разрушения системы вследствие исчезновения одного из видов. Кроме того, необходимо установить возможные стационарные состояния системы и проверить их устойчивость. С этой целью необходимо выявить такие начальные значения  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0$  и  $\bar{y}(\bar{t} = 0) = \bar{y}_0$ , которые дают решение неизменное во времени. Один из таких режимов очевиден:  $\bar{x}(\bar{t} = 0) = 0$ ,  $\bar{y}(\bar{t} = 0) = 0$ .

Исследуйте поведение системы в том случае, когда начальные значения переменных мало отличаются от стационарных.

#### 8.4. Уточненная модель системы «хищник-жертва»

**Теоретическое введение.** Ранее мы рассмотрели простейшую модель взаимодействия популяций, которая не учитывает ограниченность ресурсов для развития и «жертвы», и «хищника», не учитывается эффект насыщения «хищника» и т.д. Таким образом модель Лотки - Вольтерра взаимодействия популяций типа «хищник» - «жертва» является биологически не вполне корректной. На основе экспериментальных наблюдений предлагаются модели, уточняющие поведение популяций [1]. Данная модель учитывает следующие важные биологические факторы:

- 1. Насыщение хищников.** В модели Вольтерра предполагается, что интенсивность поедания жертв хищниками линейно растет с ростом плотности популяции жертв. В действительности с ростом плотности популяции жертв рацион хищников асимптотически стремится к постоянному значению. Это означает, что «аппетит» хищника имеет определенные пределы. А.Д. Базыкин описывает эту зависимость функцией следующего вида:  $x/(1 + px)$ .
- 2. Конкуренция жертв.** Из ограничения внешних ресурсов вытекает невозможность безграничного размножения популяции жертв. Этот эффект можно учесть логистическим членом вида  $Rx(k - x)/k$ , что эквивалентно введению слагаемого типа:  $-Ex^2$ .
- 3. Конкуренция хищников.** Даже при неограниченном питании популяция хищников не может расти безгранично. Недостаток, например территории, приводит к конкуренции, которую можно учесть с помощью дополнительного слагаемого в правой части уравнения  $-My^2$ .

С учетом уточнений модель взаимодействия хищника и жертвы представляется следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax - \frac{Bxy}{1 + px} - Ex^2; \quad \frac{dy}{dt} = -Cy + \frac{Dxy}{1 + px} - My^2$$

С помощью замены переменных по методу неопределенных масштабов

$$\bar{x} = Ax/D, \quad \bar{y} = Ay/D, \quad \bar{t} = t/A, \quad \gamma = C/A, \quad \alpha = PD/A, \quad \varepsilon = E/D, \quad \mu = M/B.$$

исходная система уравнений приводится к следующему безразмерному виду:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x} - \frac{\bar{x}\bar{y}}{1 + \alpha\bar{x}} - \varepsilon\bar{x}^2; \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = -\gamma\bar{y} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{1 + \alpha\bar{x}} - \mu\bar{y}^2$$

Данная система уравнений учитывает более сложный характер внутривидового и межвидового взаимодействия. В системе возможно устойчивое равновесие, предельный цикл, два устойчивых равновесия и другие варианты поведения.

**Постановка задачи моделирования.** Исследовать свойства модели Базыкина и установить эффекты, порожденные ученом дополнительных факторов.

**Порядок выполнения лабораторной работы.** Требуется построить компьютерную MVS-модель и провести модельный эксперимент с целью выявления качественных закономерностей развития популяций. Для качественного исследования необходимо построить временную и фазовую диаграммы поведения системы.

**Анализ результатов моделирования.** Сравните обе модели, очевидно, что при  $\alpha=0$ ,  $\varepsilon=0$ ,  $\mu=0$  новая модель должна дать результаты, полностью совпадающие с моделью Лотки - Вольтерра. В ходе компьютерных экспериментов с моделью необходимо выявить какие новые качественные свойства вносит учет перечисленных выше факторов, которые связаны с параметрами  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  и  $\mu$ .

## 8.5. Моделирование дискретного развития популяции

**Теоретическое введение.** Во многих нелинейных динамических системах (биологические, метеорологические, экономические системы и т.п.) можно обнаружить развитие неустойчивости. Известно, что нелинейная система в случае ее неустойчивого поведения может либо выйти на новое устойчивое состояние, либо перейти в режим автоколебаний, либо перейти в режим хаотического поведения. На достаточно продолжительных промежутках времени при развитии хаотического поведения состояние систем не предсказуемо.

В 1977 году развитие хаоса было обнаружено при моделировании динамики биологических популяций. В некоторых случаях численность популяции представляет собой дискретную функцию времени. Такие популяции развиваются путем полной смены поколений. Подобные закономерности имеют место, например, у растений и насекомых.

Если предположить, что численность данного поколения зависит от численности предыдущего поколения, то для описания динамики численности популяции можно применить дискретный аналог логистического уравнения:

$$N_{t+1} = RN_t(1 - N_t/k).$$

Здесь  $N_{t+1}$ ,  $N_t$  - численность двух последовательных поколений популяции,  $R$  - коэффициент размножения,  $k$  - экологическая емкость среды,  $N_t$  - численность поколения «родителей»,  $N_{t+1}$  - численность поколения «потомков». Следуя данной модели, численность потомков пропорциональна численности родителей и относительной части свободного жизненного пространства. Логистическое уравнение отражает процесс внутривидовой конкуренции, при этом при малой численности внутривидовая конкуренция практически отсутствует, а при максимальной численности она становится определяющим фактором.

**Постановка задачи моделирования.** Исследовать свойства модели дискретного развития популяции.

**Порядок выполнения работы.** В среде электронных таблиц построить компьютерную модель дискретного развития популяции и исследовать ее качественные свойства в ходе модельного вычислительного эксперимента (рис. 8.1).

**Анализ результатов моделирования.** Требуется выявить параметры системы, при которых могут возникать: монотонное, колебательное приближение численности популяции к состоянию равновесия, автоколебания, хаотическое поведение системы. Доказать, что в режиме хаотического поведения малое изменение начального состояния приводит к существенному изменению дальнейшего поведения.

Рассмотреть варианты развития систем с различными значениями параметра  $R$  при прочих равных условиях. Для режима хаотического поведения необходимо сравнить развитие систем с близкими начальными состояниями.

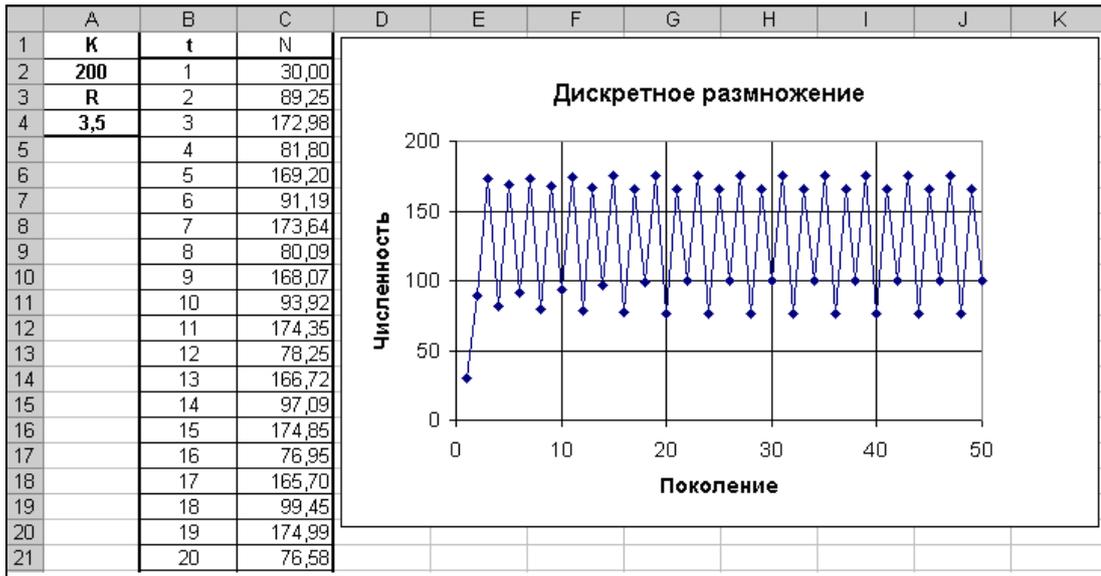


Рис. 8.1. Модель дискретного размножения

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить MVS-модель внутривидовой конкуренции с разрешенным «отстрелом», уровень которого задан параметром  $k$ .

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} \cdot (1 - \bar{x}) - k \cdot \bar{x}, \quad \bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0.$$

2. Построить MVS-модель внутривидовой конкуренции с заданным пределом вымирания  $L$ .

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} \cdot (\bar{x} - L) \cdot (1 - \bar{x}), \quad \bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0.$$

3. Построить MVS-модель внутривидовой конкуренции с периодическим (сезонным) изменением экологической емкости окружающей среды.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} (1 - a \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot \bar{t}) - \bar{x}), \quad \bar{x}(\bar{t} = 0) = \bar{x}_0.$$

4. Построить MVS-модель межвидовой конкуренции трех видов: «растительность» -  $x$ , «лоси» -  $y$ , «волки» -  $z$ , которые образуют пищевую цепь. Лоси питаются растительностью, а волки являются хищниками по отношению к лосям. Математическая модель подобной системы имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Rx(k-x)/k - \frac{Axy}{1+px}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{Bxy}{1+px} - Cy - \frac{Dzy}{1+qy}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{Fzy}{1+qy} - Ez.$$

$$x(t=0) = x_0, \quad y(t=0) = y_0, \quad z(t=0) = z_0$$

Дополнительную информацию по теме «Моделирование экологических систем» можно найти в публикациях: [1-2], [6], [24].

## Список литературы

1. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. - М.: Наука, 1985. - 271с.
2. Бенькович Е.С., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Практическое моделирование динамических систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. - 464с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2003. - 368с.
4. Варфоломеев В.И., Назаров С.В. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2004. - 264с.
5. Введение в математическое моделирование. Под ред. П.В. Трусова. - М.: Логос, 2007. - 440с.
6. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М.: Мир, 1976.-286с.
7. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. - М.: ЮНИТИ, 1995.- 136с.
8. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: в 2-х частях. - М.: Мир, 1990.
9. Дьяконов В.П. Simulink - 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. - 528с.
10. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 224с.
11. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем: Практикум по компьютерному моделированию. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 352с.
12. Королев А.Л. Компьютерное моделирование. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. - 230с.
13. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel.-СПб.: ВHV-Санкт-Петербург, 1997. - 384с.
14. Лебедев В.В., Лебедев К.В. Математическое и компьютерное моделирование экономики. – М.: НТВ-Дизайн, 2002. - 256с.
15. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel.- СПб.: БХВ-Петербург, 2005. - 704с.
16. Макарова Н.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel. – М.: Финансы и статистика, 2002. - 368с.
17. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука, 1971. - 208с.
18. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло - и массообмена.-М.: Наука, 1984. - 286с.
19. Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: Логос, 1998. - 280с.
20. Потемкин А.М. Трехмерное твердотельное моделирование в системе КОМПАС-3D. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512с.
21. Плохотников Э.К. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика. – М.: Едиториал УРСС, 2003.-280с.
22. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2007. - 320с.
23. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Лабораторный практикум. - М.: Высшая школа, 2007. - 127с.
24. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. – М.: Едиториал УРСС, 2004. - 440с.
25. Цисарь И.Ф., Нейман В.Г. Компьютерное моделирование экономики. - М.: Диалог-МИФИ, 2008. - 384с.
26. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров.- М.: Мир, 1985. - 384с.

### Ресурсы InterNet

27. Образовательный сайт компании Ascon [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.edu-ascon.ru>, свободный. – Яз. рус.
28. Образовательный математический сайт [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.exponenta.ru>, свободный. – Яз. рус.
29. Образовательный сайт имитационного моделирования [Электронный ресурс].–Режим доступа: <http://www.matlab.ru>, свободный. – Яз. рус.
30. Сайт компании Mathworks [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mathworks.ru>, свободный. – Яз. англ.
31. Сайт компании MVStadium Group [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mvstadium.com>, свободный. – Яз. рус.