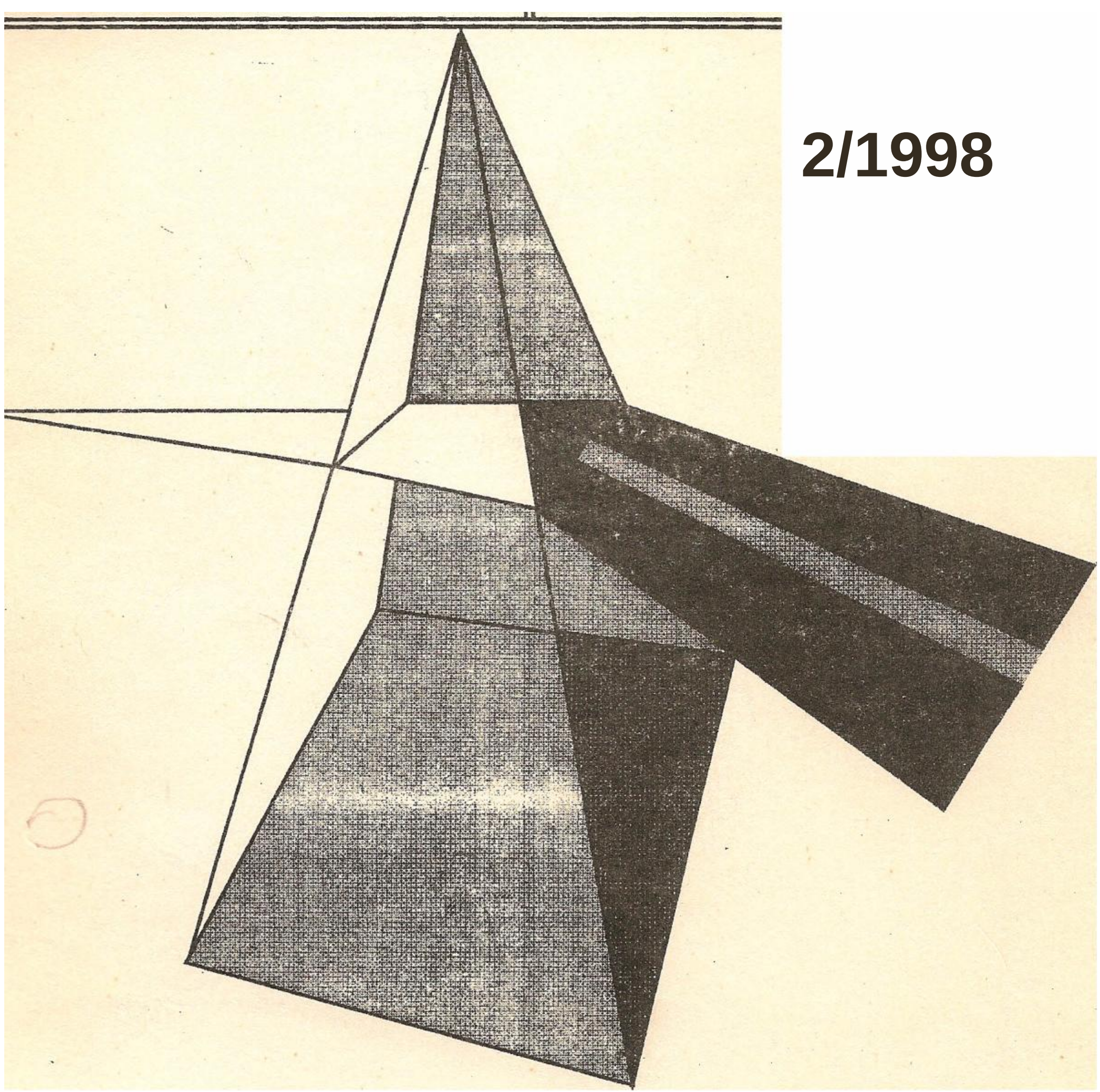
ВЕСТНИК ЧЕЛЯБИНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ЧГПУ

СЕРИЯ 4. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Основан в 1995 году



2/1998

УДК 517.9

А.С. Макаров

Об односторонних относительных генераторах интегрированных полугрупп

В настоящей статье вводятся понятия n раз интегрированной C - полугруппы на подпространстве банахова пространства и правого (левого) относительного генератора таких полугрупп, устанавливаются эквивалентные условия, при которых данный оператор является односторонним относительным генератором.

Пусть U и F - банаховы пространства, оператор $L \in L(U,F)$, линейный замкнутый оператор $M : dom\ M \subset U \to F$, $\ker L \neq \{0\}$, $\overline{domM} = U$. Пусть $\rho^L(M) = \{\alpha \in \boldsymbol{C} : \exists\ (\alpha L - M)^{-1} \in L(F.U)\}$ - L-резольвентное множество оператора M. Обозначим через $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L$ и $L_\alpha^L(M) = L(\alpha L - M)^{-1}$, соответственно, правую и левую L-резольвенты оператора M, $\forall \alpha \in \rho^L(M)$ $R_\alpha^L(M) \in L(U)$, $L_\alpha^L(M) \in L(F)$.

Лемма 1 (см. [1]) **.** Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$. Тогда

(i) $im\ R_\lambda^L(M) = im\ R_\mu^L(M)$, $im\ L_\lambda^L(M) = im\ L_\mu^L(M)$;

(ii) $\ker R_\lambda^L(M) = \ker L$, $\ker L_\lambda^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker L \cap dom\ M\}$.

Лемма 2. Если $\ker R_\alpha^L(M) \cap im\ R_\alpha^L(M) = \{0\}$, то $\forall n \in \mathrm{N}$ $\ker L(R_\alpha^L(M))^n = \ker L$.

$\triangleright$ Ясно, что $\ker L \subseteq \ker L(R_\alpha^L)^n$. Пусть $n = 1$ и $x \in \ker LR_\alpha^L$, т.е. $LR_\alpha^L x = 0$. Следовательно, $R_\alpha^L x \in \ker L$ и $R_\alpha^L x \in im\ R_\alpha^L$. В силу условия леммы $R_\alpha^L x = 0$, поэтому и $Lx = 0$, т.е. $x \in \ker L$. Таким образом, при $n = 1$ $\ker L = \ker LR_\alpha^L$. Далее доказательство можно провести по индукции. $\triangleleft$

Пусть $\{S(t), t \ge 0\}$- сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов из U в U, т.е. $\forall t \ge 0 \ S(t) \in L(U)$, $C : U \to U$ такой линейный ограниченный оператор, что $\forall \alpha \in \rho^L(M) \ CR_\alpha^L(M) = R_\alpha^L(M)C$.

Пусть X - некоторое подпространство в U.

Определение 1. Пусть $n \in \mathrm{N}$. Семейство $\{S(t), t \ge 0\}$ называется n раз интегрированной C-полугруппой на X, если $\forall x \in X$, $s,t \ge 0$ $S(0)x = 0$, $S(t)Cx = CS(t)x$ и

$$S(t)S(s)x = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r)Cxdr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1}S(r)Cxdr\right]. \quad (1)$$

Из равенства (1) следует, что $\forall x \in X$, $s,t \ge 0$

$$S(t)S(s)x = S(s)S(t)x. \quad (2)$$

Введем обозначение $D = \{x \in dom\ M : \ Mx \in im\, L\}$. Очевидно, что D -линеал и $M(D) \subset im\ L$. Справедлива

Лемма 3 (см. [2]) **.** $\forall \alpha \in \rho^L(M) \ D = im\ R_\alpha^L(M)$.

Обозначим $X = \overline{D} = \overline{im\ R_\alpha^L(M)} \subset U$ - подпространство в U.

Лемма 4. Пусть $\alpha \in \rho^L(M)$ и $\forall x \in U$, $\forall t \ge 0$ $R_\alpha^L S(t)x = S(t)R_\alpha^L x$. Тогда $\{S(t), t \ge 0\}$ является n раз интегрированной C-полугруппой на X только в том случае, когда $\forall x \in U$, $s,t \ge 0$ $LS(0)x = 0$, $LS(t)Cx = LCS(t)x$ и

$$LS(t)S(s)x = \frac{1}{(n-1)!}L\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r)Cxdr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1}S(r)Cxdr\right]. \quad (3)$$

$\triangleright$ Пусть $x \in U$. Тогда при $\alpha \in \rho^L(M)$ $R_\alpha^L x \in D$ и $S(0)R_\alpha^L x = 0$. Следовательно, $R_\alpha^L S(0)x = 0$ и, в силу леммы 1(ii), $LS(0)x = 0$. Аналогично устанавливаются второе равенство и равенство (3).

Обратно, пусть $x \in D$. В силу леммы 3 существует $y \in U$ такой, что $x = R_\alpha^L x$. Умножив равенства $LS(0)y = 0$ и $LS(t)Cy = LCS(t)y$ на $(\alpha L - M)^{-1}$, получим $R_\alpha^L S(0) = 0$ и $R_\alpha^L S(t)Cy = R_\alpha^L CS(t)y$ или $S(0)R_\alpha^L y = 0$ и $S(t)CR_\alpha^L y = CS(t)R_\alpha^L y$. Следовательно, $S(0)x = 0$ и $S(t)Cx = CS(t)x$. Аналогично, для $x \in D$ из (3) следует (1). Так как $X = \overline{D}$, то для $x \in X$ первые два равенства в определении 1 следуют из непрерывности операторов L, C и $S(t)$. Справедливость равенства (1) для $x \in X$ следует из (3) в силу возможности предельного перехода под знаком интегралов. Сама возможность предельного перехода вытекает из принципа равномерной ограниченности. $\triangleleft$

Из равенства (3) следует, что $\forall x \in U, \forall s,t \geq 0$
$$LS(t)S(s)x = LS(s)S(t)x. \qquad (4)$$

Определение 2. Пусть $n \in \mathrm{N}$. Оператор M называется правым L-генератором n раз интегрированной C-полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$ на X, если выполнено условие:
$$x \in D \text{ и } Ly = Mx \Leftrightarrow LS(x) = \frac{t^n}{n!}LCx + L\int_0^t S(r)y\,dr. \qquad (5)$$

Теорема 1. Пусть $n \in \mathrm{N}$ и выполнены условия:
1) $\forall x \in U, \forall t \geq 0, \forall \alpha \in \rho^L(M)$ $R_\alpha^L(M)S(t)x = S(t)R_\alpha^L(M)x$;
2) $\ker R_\alpha^L(M) \cap im\, R_\alpha^L(M) = \{0\}$.

Тогда следующие условия эквивалентны:
(i) Оператор M является правым L-генератором n раз интегрированной C-полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$ на X;
(ii) a) $\forall x \in X$ $S(t)Cx = CS(t)x, S(t)S(s)x = S(s)S(t)x$;
b) $\forall x \in D$ $S(t)x \in D$ и
$$LS(t)(\alpha L - M)^{-1}Mx = MS(t)(\alpha L - M)^{-1}Lx; \qquad (6)$$
c) $\forall x \in U$ $\int_0^t S(r)xdr \in D$ и
$$LS(t)x = \frac{t^n}{n!}LCx + M\int_0^t S(r)xdr; \qquad (7)$$
d) Полугруппа $\{\mathrm{S(t)}, \mathrm{t} \geq 0\}$ сильно непрерывно дифференцируема при $\mathrm{t} \geq 0$ на $\mathrm{im}\left(\mathrm{R}_\alpha^{\mathrm{L}}(\mathrm{M})\right)^2$, причем $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{D}$
$$\mathrm{S}'(\mathrm{t})\mathrm{R}_\alpha^{\mathrm{L}}(\mathrm{M})\mathrm{x} = \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}-1}}{(\mathrm{n}-1)!}\mathrm{CR}_\alpha^{\mathrm{L}}(\mathrm{M})\mathrm{x} + \mathrm{S(t)}(\alpha\mathrm{L} - \mathrm{M})^{-1}\mathrm{Mx};$$
e) Оператор M, удовлетворяющий условиям 1), 2), b), c), является максимальным на D.

$\triangleright$Докажем (i)$\rightarrow$(ii). Равенства в a) следуют из определения 1 и равенства (2).

b) Пусть $x \in D$. Умножив равенство 5) на $S(s)(\alpha L - M)^{-1}$ и использовав перестановочность соответствующих операторов, получим:
$$R_\alpha^L S(t)S(s)x = \frac{t^n}{n!}R_\alpha^L CS(s)x + R_\alpha^L\int_0^t S(r)S(s)y\,dr \qquad (8)$$
или
$$LS(t)S(s)x = \frac{t^n}{n!}LCS(s)x + L\int_0^t S(r)S(s)y\,dr.$$

Отсюда, в силу определения 2, $S(s)x \in D$. Умножив равенство (8) на L и заменив Ly на Mx, получим:

$$LS(t)R_\alpha^L S(s)x = \frac{t^n}{n!} LCR_\alpha^L S(s)x + L\int_0^t S(r)S(s)\,(\alpha L - M)^{-1} Mx\ dr\,.$$

Из определения 2 следует, что $R_\alpha^L S(s)x \in D$ (что, впрочем, вытекает из леммы 3) и $\mathrm{LS(s)(\alpha L - M)^{-1}Mx = MR_\alpha^L S(s)x = MS(s)R_\alpha^L x}$.

c) Пусть $x \in U$ и $y = R_\alpha^L x \in D$. Проинтегрировав равенство (1), поменяв порядок интегрирования справа и вычислив внутренние интегралы, получим:

$$\int_0^s S(t)S(r)ydr = \frac{1}{n!}\left(\int_t^{t+s}(t+s-u)^n S(u)Cydu - \int_0^s((t+s-u)^n - t^n)S(u)Cydu\right).$$

Отсюда

$$S(t)\int_0^s S(r)ydr - \frac{t^n}{n!}\int_0^s S(u)Cydu = \frac{1}{n!}\left(\int_t^{t+s}(t+s-u)^n S(u)Cydu - \int_0^s (t+s-u)^n S(u)Cydu\right) \quad (9)$$

Поменяем в (9) местами s и t и полученное равенство вычтем из (9). Затем заменив y на $R_\alpha^L x$, получим:

$$R_\alpha^L S(t)\int_0^s S(r)xdr = \frac{t^n}{n!} R_\alpha^L C\int_0^s S(r)xdr + R_\alpha^L\int_0^t S(r)\left[S(s)x - \frac{s^n}{n!}Cx\right]dr$$

или

$$LS(t)\int_0^s S(r)xdr = \frac{t^n}{n!} LC\int_0^s S(r)xdr + L\int_0^t S(r)\left[S(s)x - \frac{s^n}{n!}Cx\right]dr\,.$$

Из определения 2 следует, что $\int_0^s S(r)xdr \in D$ и

$$L\left[S(s)x - \frac{s^n}{n!}Cx\right] = M\int_0^s S(r)xdr\,,$$

т.е. равенство (7).

d) Если $\mathrm{x \in D}$, то из определения 2 получаем $\mathrm{S(t)R_\alpha^L x = \frac{t^n}{n!}CR_\alpha^L x + \int_0^t S(r)(\alpha L - M)^{-1}Mxdr}$. Отсюда следует утверждение e).

e) Пусть M_1 - другой линейный замкнутый оператор с плотной областью определения в U, удовлетворяющий условиям 1), 2), b), c), где D следует заменить на $D_1 = imR_\alpha^L(M_1)$. Пусть $x \in D_1$ и $y \in U$ такой, что $Ly = M_1 x$. Умножив равенство (7) на $L(\alpha L - M_1)^{-1}$ и, использовав замкнутость M_1, получим:

$$LR_\alpha^L(M_1)S(t)x=\frac{t^n}{n!}LR_\alpha^L(M_1)Cx+\int_0^t M_1(\alpha L-M_1)^{-1}LS(r)xdr\,.$$

Отсюда, использовав равенство (6), после замены M_1x на Ly получим:

$$LR_\alpha^L(M_1)S(t)x=\frac{t^n}{n!}LR_\alpha^L(M_1)Cx+LR_\alpha^L(M_1)\int_0^t S(r)ydr\,.$$

Отсюда, в силу леммы 2,

$$LS(t)x=\frac{t^n}{n!}LCx+L\int_0^t S(r)ydr\,.$$

Из определения 2 следует, что $x\in D$ и $Ly=Mx$. Отсюда $D_1\subseteq D$ и $Mx=M_1x$.

Докажем (ii)$\to$(i). Чтобы доказать, что $\{S(t),t\ge 0\}$ образует n-раз интегрированную C-полугруппу на X, достаточно установить справедливость равенств в лемме 4. Равенство $LS(0)x=0$ для любого $x\in U$ следует из (7). Если $x\in U$, то в силу первого равенства в а) $S(t)CR_\alpha^Lx=CS(t)R_\alpha^Lx$. Отсюда $LS(t)Cx=LCS(t)x$.

Так как в силу условия с) $\forall x\in U\ \int_0^r S(u)R_\alpha^L xdu=R_\alpha^L\int_0^r S(u)xdu\in \mathrm{im}(R_\alpha^L)^2$, то использовав условие е), найдем при $t\ge r$ производную:

$$\frac{d}{dr}(S(t-r)\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdu)=-S'(t-r)\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdu+S(t-r)S(r)R_\alpha^L x=$$

$$-\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}C\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdu-S(t-r)(\alpha L-M)^{-1}M\int_0^r S(u)xdu+S(t-r)S(r)R_\alpha^L x$$

Проинтегрируем это равенство по r от 0 до s ($s\le t$);

$$S(t-s)\int_0^s S(u)R_\alpha^L xdu=-\int_0^s\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}C\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdudr-$$

$$-\int_0^s\Big(S(t-r)(\alpha L-M)^{-1}M\int_0^r S(u)xdu\Big)dr+\int_0^s S(t-r)S(r)R_\alpha^L xdr$$

Умножим это равенство на L и воспользуемся равенствами (6):

$$LS(t-s)\int_0^s S(u)R_\alpha^L xdu=-L\int_0^s\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}C\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdudr-$$

$$-\int_0^s\Big(MS(t-r)\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdu\Big)dr+L\int_0^s S(t-r)S(r)R_\alpha^L xdr=$$

$$=-L\int_0^s\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}C\int_0^r S(u)R_\alpha^L xdudr+\int_0^s\frac{r^n}{n!}LCS(t-r)R_\alpha^L xdr$$

или

$$LR_\alpha^L S(t-s)\int_0^s S(u)xdu = -LR_\alpha^L\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}C\int_0^r S(u)xdudr + \\ + LR_\alpha^L\int_0^s \frac{r^n}{n!}S(t-r)Cxdr \tag{10}$$

Отсюда, использовав лемму 2, получим:

$$LS(t-s)\int_0^s S(u)xdu = -L\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}C\int_0^r S(u)xdudr + L\int_0^s \frac{r^n}{n!}S(t-r)Cxdr$$

или

$$LS(t-s)\int_0^s S(u)xdu = -L\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}dr\int_0^r S(u)Cxdu + L\int_{t-s}^s \frac{r^n}{n!}S(r)Cxdr \tag{11}$$

Умножив (7) на $LS(t-s)(\alpha L - M)^{-1}$ и использовав равенство (6), получим:

$$LR_\alpha^L S(t-s)S(s)x = \frac{s^n}{n!}LR_\alpha^L S(t-s)Cx + MR_\alpha^L S(t-s)\int_0^s S(r)xdr\,. \tag{12}$$

Умножим (11) на $\mathrm{M}(\alpha\mathrm{L}-\mathrm{M})^{-1}$:

$$MR_\alpha^L S(t-s)\int_0^s S(u)xdu = -MR_\alpha^L\left[\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}dr\int_0^r S(u)Cxdu - \int_{t-s}^t \frac{(t-r)^n}{n!}S(r)Cxdr\right]. \tag{13}$$

Использовав (13), (7) и интегрирование по частям, представим равенство (12) в виде:

$$LR_\alpha^L S(t-s)S(s)x - \frac{s^n}{n!}LR_\alpha^L S(t-s)Cx =$$

$$= -MR_\alpha^L\left[\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}dr\int_0^r S(u)Cxdu - \int_{t-s}^t \frac{\left(t-r\right)^n}{n!}S(r)Cxdr\right] =$$

$$= -\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}\left(M\int_0^r S(u)CR_\alpha^L xdu\right)dr + M\int_{t-s}^t \frac{(t-r)^n}{n!}S(r)CR_\alpha^L xdr =$$

$$= -\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}\left(LS(r)CR_\alpha^L x - \frac{r^n}{n!}LC^2R_\alpha^L x\right)dr +$$

$$+\frac{1}{n!}M\left[n\int_{t-s}^t (t-r)^{n-1}\left(\int_0^r S(u)CR_\alpha^L xdu\right)dr - s^n\int_0^{t-s} S(u)CR_\alpha^L xdu\right] =$$

$$= -\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}\left(LS(r)CR_\alpha^L x - \frac{r^n}{n!}LC^2R_\alpha^L x\right)dr +$$

$$+\int_{t-s}^t \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}\left(LS(r)CR_\alpha^L x - \frac{r^n}{n!}LC^2R_\alpha^L x\right)dr - \frac{s^n}{n!}\left(LS(t-s)CR_\alpha^L x - \frac{(t-s)^n}{n!}LC^2R_\alpha^L x\right).$$

Отсюда

$$LR_\alpha^L S(t-s)S(s)x = LR_\alpha^L\left[\int_{t-s}^{t}\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)Cxdr - \int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)Cxdr\right]+$$

$$+LR_\alpha^L\left[\int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{r^n}{n!}dr - \int_{t-s}^{t}\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{r^n}{n!}dr + \frac{s^n}{n!}\frac{(t-s)^n}{n!}\right]C^2x\,.$$

Так как выражение в квадратных скобках во втором слагаемом справа, как нетрудно проверить, равно нулю, то

$$LR_\alpha^L S(t-s)S(s)x = LR_\alpha^L\left[\int_{t-s}^{t}\frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)Cxdr - \int_0^s \frac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)Cxdr\right].$$

Использовав лемму 2 и заменив t на $t+s$, получим:

$$LS(t)S(s)x = \frac{1}{(n-1)!}L\left[\int_t^{t+t}(t+s-r)^{n-1}S(r)Cxdr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1}S(r)Cxdr\right],$$

т.е. выполняется (3). Таким образом, в силу леммы 4 $\{S(t), t\ge 0\}$ является n раз интегрированной C-полугруппой на X.

То, что M является L-генератором, следует из максимальности оператора M.$\lhd$

Пусть $\{T(t), t\ge 0\}$- сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов из F в F, $C':F\to F$ - линейный ограниченный оператор такой, что $\forall\alpha\in\rho^L(M)$ $C'L_\alpha^L(M) = L_\alpha^L(M)C'$.

Введем обозначение $Y = \overline{im\ L(\alpha L - M)^{-1}} = \overline{im\ L_\alpha^L(M)}, Y\subset F$.

Определение 1 можно переформулировать для семейства $\{T(t), t\ge 0\}$ и мы получим определение n раз интегрированной C'-полугруппы на Y. Из равенства типа (1) будет следовать, что для всех $x\in Y$, $s,t\ge 0$ $T(t)T(s)x = T(s)T(t)x$.

Лемма 5. Пусть $\forall x\in F$, $\forall t\ge 0$ $L_\alpha^L(M)T(t)x = T(t)L_\alpha^L(M)x, \alpha\in\rho^L(M)$. Тогда $\{T(t), t\ge 0\}$ является n раз интегрированной C'-полугруппой на Y только в том случае, когда $\forall x\in F$, $s,t\ge 0$ $T(0)L_\alpha^L x = 0$, $T(t)C'L_\alpha^L x = C'T(t)L_\alpha^L x$ и

$$L_\alpha^L T(t)T(s)x = \frac{1}{(n-1)!}L_\alpha^L\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}T(r)C'xdr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1}T(r)C'xdr\right].$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Введем обозначение $D_1 = \{x\in F:\ M(\alpha L - M)^{-1}x\in im\ L_\alpha^L(M)\}$.

Лемма 6. $D_1 = im\ L_\alpha^L(M)$.

$\rhd$ Пусть $M_1^\alpha = M(\alpha L - M)^{-1}$. Если $x\in D_1$ и $M_1^\alpha x = L_\alpha^L\varphi$, то

$$(\alpha L_\alpha^L - M_1)x = L_\alpha^L(\alpha x - \varphi).$$

Отсюда

$$\left(\alpha L(\alpha L - M)^{-1} - M(\alpha L - M)^{-1}\right)x = L_\alpha^L(\alpha x - \varphi)$$

или $(\alpha L - M)(\alpha L - M)^{-1}x = L_\alpha^L(\alpha x - \varphi)$, т.е. $x = L_\alpha^L(\alpha x - \varphi) \in im\ L_\alpha^L$. Обратно, если $x \in im\ L_\alpha^L$, то $x = L_\alpha^L\varphi$. Отсюда $(\alpha L - M)(\alpha L - M)^{-1}x = L_\alpha^L\varphi$. Следовательно, $M(\alpha L - M)^{-1}x = L_\alpha^L(\alpha x - \varphi)$ и $x \in D_1$.$\lhd$

Из лемм 1 и 6 следует, что D_1 не зависит от α и $Y = \overline{D_1}$. В доказательстве леммы 6 введен оператор $M_1^\alpha = M(\alpha L - M)^{-1}$, , где $\alpha \in \rho^L(M)$. Оператор $M_1^\alpha : F \to F$, $dom\ M_1^\alpha = F$. В этих обозначениях множество $D_1 = \{x \in F : M_1^\alpha x \in im\ L_1^\alpha\}$. В силу лемм 3 и 6 $D_1 = im\ R_\alpha^{L_1^\alpha}(M_1^\alpha) = im\ L_\alpha^L(M)$. Второе равенство следует также из равенства:

$$R_\alpha^{L_1^\alpha}(M_1^\alpha) = (\alpha L_1^\alpha - M_1^\alpha)^{-1}L_1^\alpha = (\alpha L(\alpha L - M)^{-1} - M(\alpha L - M)^{-1}L(\alpha L - M)^{-1} =$$
$$= (\alpha L - M)(\alpha L - M)^{-1}L(\alpha L - M)^{-1} = L_\alpha^L(M).$$

Равенство $R_\alpha^{L_1^\alpha}(M_1^\alpha) = L_\alpha^L(M)$ позволяет ввести следующее определение.

Определение 3. Пусть $n \in \mathrm{N}$. Оператор M называется левым L-генератором n раз интегрированной C'-полугруппы $\{T(t), t \ge 0\}$ на Y, если для любого $\alpha \in \rho^L(M)$ оператор M_1^α является правым L_1^α-генератором n раз интегрированной C'-полугруппы $\{T(t), t \ge 0\}$ на Y.

Используя это определение и теорему 1, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathrm{N}$ и выполнены условия.

1) $\forall x \in F, t \ge 0, \alpha \in \rho^L(M)$ $L_\alpha^L(M)T(t)x = T(t)L_\alpha^L(M)x$;

2) $\ker L_\alpha^L(M) \cap im\ L_\alpha^L(M) = \{0\}$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Оператор M является левым L-генератором n раз интегрированной C'-полугруппы $\{T(t), t \ge 0\}$ на Y;

(ii) a) $\forall x \in Y\ T(t)C'x = C'T(t)x$, $T(t)T(s)x = T(s)T(t)x$;

b) $\forall x \in D_1$ $T(t)x \in D_1$ и
$L_\alpha^L(M)T(t)M(\alpha L - M)^{-1}x = M(\alpha L - M)^{-1}T(t)L_\alpha^L(M)x$;

c) $\forall x \in F$ $\int_0^t T(r)x\, dr \in D_1$ и

$$L_\alpha^L(M)T(t)x = \frac{t^n}{n!}L_\alpha^L(M)C'x + M(\alpha L - M)^{-1}\int_0^t T(r)xdr;$$

d) Полугруппа $\{T(t), t \geq 0\}$ сильно непрерывно дифференцируема при $t \geq 0$ на $im(L_\alpha^L(M))^2$, причем $\forall x \in D_1$

$$T'(t)L_\alpha^L(M)x = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}C'L_\alpha^L(M)x + T(t)M(\alpha L - M)^{-1}x;$$

e) Оператор $M(\alpha L - M)^{-1}$, удовлетворяющий условиям 1), 2), b), c), является максимальным .

$\triangleright$ В теореме 1 M и L следует заменить на M_1^α и L_1^α, $R_\alpha^{L_1^\alpha}$ на $L_\alpha^L(M)$, $S(t)$ на $T(t)$, $(\alpha L_1^\alpha - M_1^\alpha)^{-1}$ на единичный оператор.

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49, Вып. 4(298). С. 47-74.

2. Мельникова И.В., Альшанский М.А. Корректность вырожденной задачи Коши в банаховом пространстве // ДАН. 1994. Т. 333,№1. С. 17-20.

3. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и С-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // УМН. 1994. Т.49. Вып. 6(300). С. 111-150.

4. Wang S.W. Mild integrated C-existence families // Studia Mathematica. 1995. 112(3). С. 251-266.