Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный педагогический университет»

М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

Учебно-практическое пособие

Челябинск
2013

УДК 51-74, 519.718
ББК 22.18 я 73
К 42

Кипнис, М.М. Устойчивость нейронных сетей: исследовательские задачи [Текст]: учебно-практическое пособие / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин. – Челябинск: Изд-во Чел. гос. пед. ун-та, 2013. – 38 с.

ISBN 978-5-85716-993-3

В пособии изложены теоретические основы и методы исследования устойчивости нейронных сетей. Сформулированы исследовательские задачи для нейронных сетей различных конфигураций. Приведены примеры использования пакета MathCAD для решения поставленных задач.

Пособие предназначено для организации исследовательской работы студентов и магистрантов (при выполнении курсовых, квалификационных работ и магистерских диссертаций).

Пособие адресовано преподавателям вузов, а также студентам (обучающимся преимущественно по профилям подготовки «математика», «информатика») и магистрантам (обучающимся по близким к указанным профилям программам подготовки).

Рецензенты: Карачик В.В., д-р физ.-мат. наук, профессор
Поднебесова Г.Б., канд. пед. наук, доцент

ISBN 978-5-85716-993-3

Содержание

Введение

В последние десятилетия бурно развивается новая прикладная область математики, специализирующаяся на искусственных нейронных сетях.

Искусственные нейронные сети – вид математических моделей, которые строятся по принципу организации и функционирования их биологических аналогов – сетей нервных клеток (нейронов) мозга. Привлекательность использования нейронных сетей заключается в том, что при очень ограниченных вычислительных возможностях элементов такой сети, вся сеть в целом, объединяя большое количество таких элементов, оказывается способной выполнять довольно сложные задачи.

Одно из важнейших свойств нейронной сети – это устойчивость, т.е. способность сохранять стабильность своего функционирования при возникновении малых колебаний при передаче сигналов между нейронами, например, вследствие запаздывания.

В предлагаемом пособии формулируются задачи исследования устойчивости нейронных сетей наиболее известных конфигураций: кольцевой, звездной, двухслойной и трёхслойной, полносвязной, цилиндрической, тороидальной и некоторых других. Также в пособии кратко изложен общий метод исследования математических моделей таких нейронных сетей, демонстрируются возможности применения пакета компьютерной математики MathCAD для решения задач и проведения численных экспериментов, для визуализации получаемых результатов исследования.

Пособие предназначено для организации исследовательской работы студентов и магистрантов, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» (преимущественно по профилям «Математика», «Информатика», по магистерской программе

«Информатика в образовании») и позволяет формулировать широкий диапазон тем курсовых, квалификационных работ и магистерских диссертаций.

Исследование конкретной конфигурации нейронов является достаточным по объему содержанием курсовой работы студентов. Квалификационная работа студента и диссертация магистранта может содержать, например, сравнение областей устойчивости нейронных сетей различных конфигураций и выявление качественных особенностей в случае разрыва или образования связей между нейронами (например, разрыв связей в цилиндрической нейронной сети приводит к образованию плоского однородного нейронного поля, а появление новых связей – к образованию тороидальной конфигурации нейронов).

В основу пособия положен многолетний результативный опыт руководства профессора М.М. Кипниса курсовыми, квалификационными работами студентов и диссертациями магистрантов и аспирантов на математическом факультете и факультете информатики. Результаты этих работ опубликованы в научных статьях и материалах конференций (публикации приведены в библиографическом списке).

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (Проект № 1.1711.2011).

1. Постановка общей задачи

Искусственные нейронные сети (сети Хопфилда[1]) с n нейронами в дискретном линеаризованном варианте описываются разностными уравнениями

$$x_s = Ax_{s-1} + Bx_{s-k}\,, s = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Здесь A, B – матрицы размера $n \times n$, натуральное число s есть номер такта, x_s является n-мерным вектором состояний нейронной сети в момент s. A есть матрица мгновенных взаимодействий нейронов, B – матрица взаимодействий с запаздыванием.

Пример 1. На рис. 1 изображена сеть из шести нейронов.

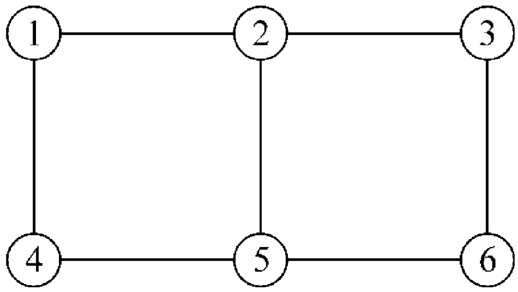


Рис. 1. Пример нейронной сети

Будем считать, что взаимодействие различных нейронов происходит с запаздыванием k. Сила взаимодействия нейрона с левым соседним нейроном равна a, с правым b, с верхним c, с нижним d. Предположим, что каждый нейрон реагирует на свой собственный сигнал без запаздывания с мощностью α.

Введем вектор-функцию состояний $x_s = \left(x_s^{(1)}, x_s^{(2)}, x_s^{(3)}, x_s^{(4)}, x_s^{(5)}, x_s^{(6)}\right)^T$. Тогда дискретная модель сети на рис. 1 описывается уравнением (1) с матрицами

[1] Hopfield, J. Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like those of Two-State Neurons / J. Hopfield // *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1984. – V. 81, P. 3088–3092.

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & d \\ c & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

В развернутом виде полученное уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_s^{(1)} \\ x_s^{(2)} \\ x_s^{(3)} \\ x_s^{(4)} \\ x_s^{(5)} \\ x_s^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{s-1}^{(1)} \\ x_{s-1}^{(2)} \\ x_{s-1}^{(3)} \\ x_{s-1}^{(4)} \\ x_{s-1}^{(5)} \\ x_{s-1}^{(6)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & d \\ c & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{s-k}^{(1)} \\ x_{s-k}^{(2)} \\ x_{s-k}^{(3)} \\ x_{s-k}^{(4)} \\ x_{s-k}^{(5)} \\ x_{s-k}^{(6)} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Рассмотрим вариант интерпретации системы связей на рис. 1 как двухслойной сети. Будем считать, что первый слой состоит из нейронов 1, 2, 3, второй слой из 4, 5, 6. Пусть взаимодействие нейронов внутри слоев происходит без запаздывания, а взаимодействие нейронов из разных слоев происходит с запаздыванием k. Предположим, мощности взаимодействия таковы, как они описаны в предыдущем примере.

Усложняя сеть, предположим также, что каждый нейрон, кроме мгновенной реакции на собственное состояние, реагирует на собственное состояние ещё и с запаздыванием с некоторой силой e (такие реакции нейронов рассматривали в 2004 г. С. Гуо и Л. Хуанг[2], а также С. Кемпбелл с соавторами[3]).

Тогда нейронная сеть описывается уравнением (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & b & 0 & d & 0 & 0 \\ a & \alpha & b & 0 & d & 0 \\ 0 & a & \alpha & 0 & 0 & d \\ c & 0 & 0 & \alpha & b & 0 \\ 0 & c & 0 & a & \alpha & b \\ 0 & 0 & c & 0 & a & \alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ a & e & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & a & e & 0 & 0 & d \\ c & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & e & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & a & e \end{pmatrix}$$

[2] Guo, S. Exponential stability of discrete time Hopfield neural networks / S. Guo, L. Huang // *Compu. Math. Appl.*, 2004. –V. 47, P. 1249–1256.

[3] Campbell, S.A. Delayed coupling between two neural network loops / S.A. Campbell, R. Edwards, P. van den Driessche // *S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics, 2004.* –V. 65(1), P. 316–335.

Примеры демонстрируют, что в описании нейронных сетей часто фигурируют симметричные матрицы, а также блочные матрицы относительно несложной структуры. Ещё одна особенность матриц, часто встречающаяся в уравнениях нейронных сетей – ненулевыми элементами заполняются только немногие диагонали над и под главной диагональю, то есть матрицы являются ленточными. Это связано с тем, что во многих (но не всех) сетях нейроны соединяются только с ближайшими в некотором смысле соседями, то есть наблюдается близкодействие. Существенной особенностью задач устойчивости нейронных сетей является зависимость устойчивости только от согласованного спектра двух матриц A и B в случае их одновременного приведения к треугольной форме.

Общая задача исследования состоит в нахождении области устойчивости некоторой стандартной конфигурации нейронной сети с n нейронами ($3 \leq n \leq 16$), описываемой уравнением (1) и запаздыванием k, равным $2, 3, 4, 5$, в пространстве трёх параметров (как правило, это силы взаимодействия нейронов, например, α, a, b). Требуется получить графическое изображение (на плоскости или в пространстве) таких областей.

В следующем параграфе формулируются задачи исследования устойчивости стандартных конфигураций нейронных сетей: кольцевой, звездной, «колеса», двухслойной, трёхслойной, полносвязной, тороидальной, цилиндрической. Одна из предлагаемых задач посвящена исследованию устойчивости однородного плоского нейронного поля, фрагмент которого указан на рис. 1.

В предлагаемых задачах уравнение (1) содержит только такие матрицы A и B, которые могут быть приведены одной трансформирующей матрицей к треугольному виду. Этот класс включает все коммутирующие пары матриц A и B.

2. Задачи исследования устойчивости стандартных конфигураций нейронных сетей

2.1. Кольцевая конфигурация нейронов

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости кольца, состоящего из n нейронов (рис. 2). Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакция нейрона на сигналы соседних нейронов запаздывают на k тактов. Сила реакции нейрона на правого соседа равна a, на левого b. Первый нейрон является левым соседом последнего.

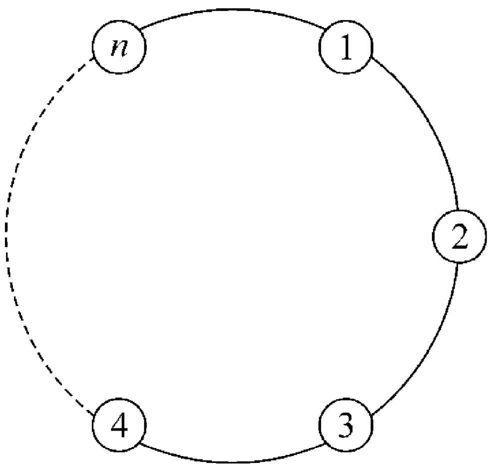


Рис. 2. Кольцевая архитектура нейронной сети

Задача об устойчивости кольца из шести нейронов сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица B имеет размер 6×6. Посредством E обозначена единичная матрица 6 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

Введем специальное обозначение для 6×6 матрицы оператора сдвига строк

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

С учетом обозначения (1) имеем $B = aP + bP^5$. Несложно обобщить эту формулу для произвольного числа нейронов n.

2.2. Звёздная конфигурация нейронов

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости звездной нейронной сети (рис. 3), содержащей n нейронов. Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакция центрального нейрона на сигналы других нейронов запаздывает на k тактов и имеет силу a, реакции нецентральных (периферийных) нейронов на сигналы центрального нейрона запаздывают на k тактов и имеют силу b.

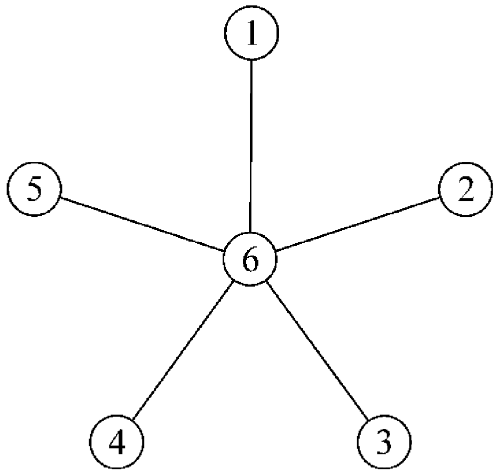


Рис. 3. Звездная конфигурация нейронов

Задача об устойчивости звезды сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Для сети из шести нейронов ($n = 6$, рис. 3) матрицы A и B указаны в (2). Матрица B имеет размер 6×6. Посредством E обозначена единичная матрица 6 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.3. Конфигурация нейронов «колесо»

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости сети из n нейронов, образующих «колесо» (рис. 4). Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакция центрального нейрона на сигналы других нейронов запаздывают на k тактов и имеет силу a, реакции нецентральных (периферийных) нейронов на сигналы центрального нейрона запаздывают на k тактов и имеют силу b. Сила реакции нейрона на правого соседа равна c, на левого d. Второй нейрон является левым соседом последнего.

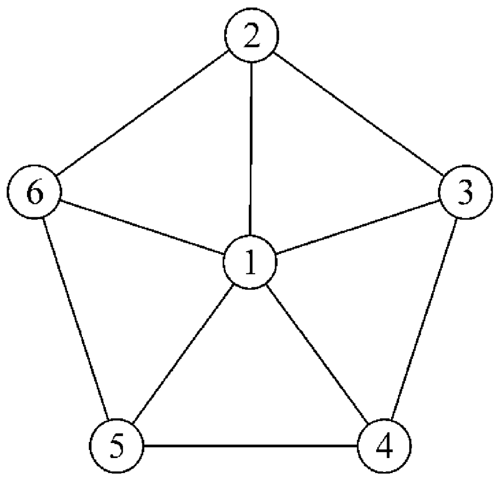


Рис. 4. Конфигурация нейронов «колесо»

Задача об устойчивости сети нейронов, образующих «колесо», сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a & a & a \\ b & 0 & d & 0 & 0 & c \\ b & c & 0 & d & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & d & 0 \\ b & 0 & 0 & c & 0 & d \\ b & d & 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Для сети из шести нейронов ($n = 6$, рис. 4) матрицы A и B указаны в (3). Матрица B имеет размер 6×6. Посредством E обозначена единичная матрица 6 порядка.

Будем считать основными параметрами a, c (с отождествлениями $a = b$, $c = d$) и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.4. Двухслойная нейронная сеть

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости двухслойной нейронной сети, показанной на рис. 5, содержащей $2n$ нейронов. Связи между нейронами показаны линиями. Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакции нейронов первого слоя на сигналы соединенных с ним нейронов второго слоя запаздывают на k тактов и имеют силу a. Реакции нейронов второго слоя на сигналы соединенных с ним нейронов первого слоя запаздывают на k тактов и имеют силу b.

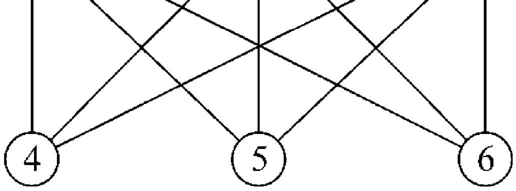


Рис. 5. Двухслойная сеть

Задача об устойчивости двухслойной нейронной сети сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Для сети из шести нейронов ($n = 6$, рис. 5) матрицы A и B указаны в (4). Матрица B имеет размер 6×6. Посредством E обозначена единичная матрица 6 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.5. Трёхслойная нейронная сеть

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости трёхслойной нейронной сети, показанной на рис. 6, содержащую $3n$ нейронов. Связи между нейронами показаны сплошными линиями. Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакции нейронов первого слоя на сигналы соединенных с ним нейронов второго слоя, а также реакции нейронов второго слоя на сигналы соединенных с ним нейронов третьего слоя, запаздывают на k тактов и имеют силу a. Обратные реакции нейронов третьего слоя на сигналы нейронов второго слоя и нейронов второго на нейроны первого слоя запаздывают на k тактов и имеют силу b.

Задача об устойчивости трёхслойной нейронной сети сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & b & b & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b & b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Для сети из девяти нейронов ($n = 9$, рис. 6) матрицы A и B указаны в (5). Матрица B имеет размер 9×9. Посредством E обозначена единичная матрица 9 порядка.

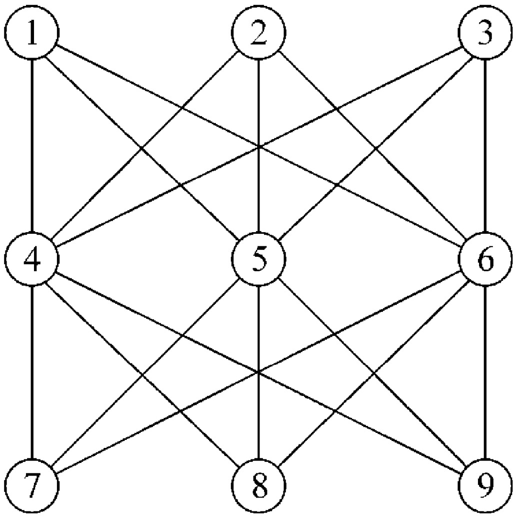


Рис. 6. Трёхслойная сеть

Будем считать основными параметрами a, b и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.6. Полносвязная нейронная сеть с запаздыванием в реакции нейрона на собственный сигнал

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости полносвязной нейронной сети (рис. 9). Сеть содержит n нейронов. Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s разделена на две части:

одна часть мгновенна с силой α, другая с запаздыванием на k тактов с силой a. Реакция нейрона на сигналы всех других нейронов запаздывают на k тактов и имеет силу b.

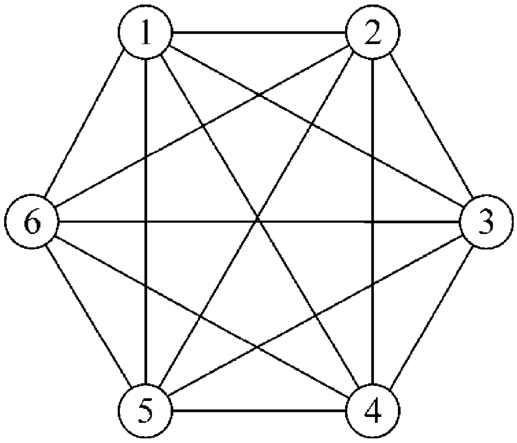


Рис. 7. Полносвязная сеть

Задача об устойчивости полносвязной нейронной сети сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b & b \\ b & b & a & b & b & b \\ b & b & b & a & b & b \\ b & b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Для сети из шести нейронов ($n = 6$, рис. 7) матрицы A и B указаны в (6). Матрица B имеет размер 6×6. Посредством E обозначена единичная матрица 6 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.7. Полносвязная нейронная сеть с простой реакцией нейрона на собственный сигнал

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости полносвязной нейронной сети (рис. 10), содержащей n нейронов. Реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Предположим, что нейроны последовательно подключаются к существующей полносвязной сети, и в процессе подключения каждый нейрон действует на нейроны с меньшими номерами с силой b, а нейроны с меньшими номерами действуют на вновь присоединенный нейрон с силой a. Реакция нейрона на сигналы других нейронов запаздывает на k тактов.

Задача об устойчивости такой полносвязной нейронной сети сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & b & b & b & b \\ a & 0 & b & b & b & b \\ a & a & 0 & b & b & b \\ a & a & a & 0 & b & b \\ a & a & a & a & 0 & b \\ a & a & a & a & a & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Для сети из шести нейронов ($n = 6$, рис. 7) матрицы A и B указаны в (7). Матрица B имеет размер 6×6. Посредством E обозначена единичная матрица 6 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.8. Плоское однородное нейронное поле

Предлагается рассмотреть задачу об устойчивости плоского однородного нейронного поля размером $n \times n$, показанного на рис. 8. Сеть содержит n^2 нейронов. Предположим, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакция нейрона на сигналы соседних нейронов запаздывают на k тактов. Сила реакции нейрона на левого соседа равна a, на правого b, на верхнего c, на нижнего d.

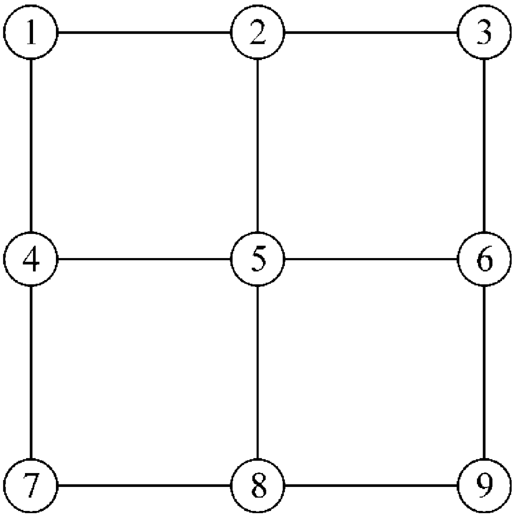


Рис. 8. Плоское 3×3 нейронное поле

Задача об устойчивости плоского однородного нейронного поля сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & b & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Для сети из девяти нейронов ($n = 9$, рис. 8) матрицы A и B указаны в (8). Матрица B имеет размер 9×9. Посредством E обозначена единичная матрица 9 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b (с отождествлениями $a = c$, $b = d$) и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.9. Тороидальная конфигурация нейронов

Рассмотрим тороидальную 3×3 конфигурацию нейронов, показанную на рисунке 9. Предполагается, что реакция нейрона на собственный сигнал в момент s мгновенна с силой α. Реакция нейрона на сигналы соседних нейронов запаздывает на k тактов. Рассмотрим тройки нейронов, которые будем считать расположенными по часовой стрелке: $1, 2, 3;\ 4, 5, 6;\ 7, 8, 9$. В этих тройках сила реакции нейрона на соседа по часовой стрелке равна b, против часовой стрелки a. В трёх других тройках нейронов назначим следующее расположение по часовой стрелке: $1, 7, 4;$ $2, 8, 5;\ 3, 9, 6$. В этих тройках сила реакции нейрона на соседа по часовой стрелке равна d, против часовой стрелки c.

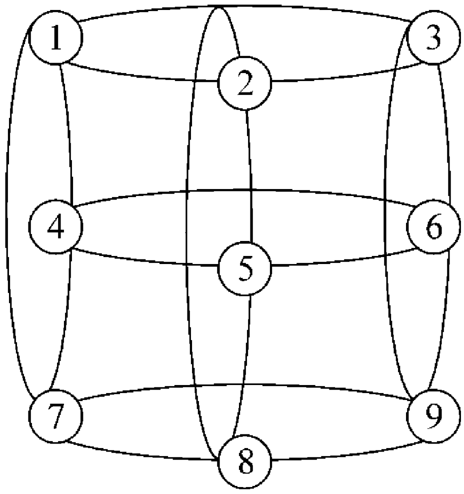


Рис. 9. Тороидальная конфигурация нейронов

Задача об устойчивости сети тороидальной конфигурации сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & a & d & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & d & 0 & 0 & c & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & 0 & b & a & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a & 0 & 0 & 0 & d \\ d & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b & a \\ 0 & d & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & c & b & a & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Для сети из девяти нейронов ($n = 9$, рис. 9) матрицы A и B указаны в (9). Матрица B имеет размер 9×9. Посредством E обозначена единичная матрица 9 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b (с отождествлениями $a = c$, $b = d$) и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

2.10. Цилиндрическая конфигурация нейронов

Рассмотрим конфигурацию на рисунке 10. Она отличается от тороидальной (рис. 9) только отсутствием связей между парами 1 и 7, 2 и 8, 3 и 9. Назовем такую конфигурацию цилиндрической.

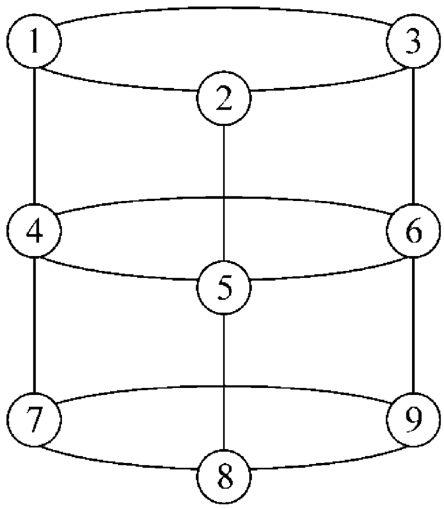


Рис. 10. Цилиндрическая конфигурация нейронов

Задача об устойчивости цилиндрической сети сводится к изучению устойчивости уравнения (1) с матрицами вида

$$A = \alpha E, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & a & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & b & a & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & a & 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & a & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Для сети из девяти нейронов ($n = 9$, рис. 10) матрицы A и B указаны в (10). Матрица B имеет размер 9×9. Посредством E обозначена единичная матрица 9 порядка.

Будем считать основными параметрами a, b (с отождествлениями $a = c,\quad b = d$) и строить области устойчивости в плоскости этих параметров. Требуется также выяснить, как меняется эта область при изменении параметров k и α.

3. Метод исследования

Для исследования устойчивости уравнения (1) ищем решение в виде

$$x_s = \lambda^s C, \quad s = 1, 2, \dots \tag{11}$$

где C – постоянный ненулевой вектор размерности n, равной количеству нейронов в сети, λ – комплексное число. Подставляя (11) в (1), получим

$$(E\lambda^k - A\lambda^{k-1} - B)C = 0. \tag{12}$$

Ненулевое решение уравнения (12) существует, если и только если

$$\det(E\lambda^k - A\lambda^{k-1} - B) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) называется характеристическим уравнением для уравнения (1), а его левая часть – характеристическим полиномом для (1). Уравнение (13) имеет порядок $k \cdot n$, где k – запаздывание, n – количество нейронов в сети.

Если все корни λ_j $(1 \le j \le kn)$ уравнения (13) обладают свойством $|\lambda_j| < 1$, то уравнение (1) является асимптотически устойчивым, то есть все его решения стремятся к нулю при $s \to \infty$. Если хотя бы для одного j выполняется неравенство $|\lambda_j| > 1$, то уравнение (1) неустойчиво.

Исключительный случай, когда при любом j $(1 \le j \le kn)$ имеет место неравенство $|\lambda_j| \le 1$ и существует такое j, что $|\lambda_j| = 1$, требует дополнительного исследования. На границе области устойчивости в пространстве параметров именно этот случай реализуется.

Следовательно, если при заданных значениях параметров, например, a, b, все корни уравнения (13) обладают свойством $|\lambda_j| < 1$, то точка (a, b) является внутренней точкой области устойчивости. Если же существует такое j, что $|\lambda_j| = 1$, а для остальных выполняется $|\lambda_j| < 1$, то точка (a, b) лежит на границе области устойчивости.

Для графического изображения области устойчивости уравнения (1), например, на плоскости параметров aOb можно придерживаться следующего порядка действий:

1. Зафиксируем значение α (коэффициент демпфирования) и значение запаздывания k.
2. Для каждого значения a мы находим такое значение b, при котором хотя бы один корень по модулю равен 1, а остальные по модулю меньше 1 (точка с координатами $(a;\ b)$ лежит на границе области устойчивости). Формируем множество граничных точек (в виде списка или массива значений).
3. По найденным точкам $(a;\ b)$ строим ломаные. Получаем изображение области устойчивости на плоскости параметров ab.

Уравнение (13) даже при небольших k и n имеет высокий порядок и в общем случае его корни не могут быть найдены аналитически. Естественно в таком случае находить корни численно, например, с помощью системы компьютерной математики MathCAD. Графическое изображение границы области устойчивости также может быть получено в MathCAD в виде ломаной, с вершинами в найденных точках $(a;\ b)$.

Таким образом, для исследования устойчивости уравнения (1) требуется провести численные эксперименты в системе компьютерной математики MathCAD для нахождения корней уравнения (13) и получения граничных точек $(a;\ b)$. Необходимые операторы и функции MathCAD будут рассмотрены с примерами в следующих параграфах.

4. Приемы для уменьшения размерности задачи

Учитывая большую размерность матриц в (13) и сложности работы MathCAD с матрицами большого размера, в этом параграфе мы укажем некоторые возможности для уменьшения размерности задачи при нахождении корней уравнения (13).

Первый способ заключается в вычислении определителя (13) с помощью следующей теоремы из теории блочных матриц.

Теорема. *Если все матрицы* B_{ij} $(i, j = 1,2)$ *коммутируют, то определитель блочной матрицы*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

может быть вычислен по формуле

$$\det B = \det B_{11} \det B_{22} - \det B_{21} \det B_{12}.$$

Аналогичная теорема имеет место для блочных матриц, блоки которых конфигурированы в матрицу третьего порядка. Именно этот случай будет иметь место в формулах (5), (8) – (10): здесь требуется вычислить определитель матрицы, состоящей из 9 блоков, каждый размером 3×3. Остается только вспомнить, как считается определитель третьего порядка.

Есть еще один способ преодоления трудностей работы MathCAD с матрицами больших порядков. Он требует более изощренных действий, зато позволяет решать задачи очень большой размерности.

В рассмотренных ранее конфигурациях нейронных сетей полагают $A = \alpha E$. Поэтому характеристическое уравнение (13) может быть записано в виде

$$\det\left((-\lambda^k + \alpha\lambda^{k-1})E + \mathrm{B}\right) = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) может быть преобразовано к виду

$$\det\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & g & 0 & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & g & 0 & a & a & a \\ b & b & b & 0 & 0 & g & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & b & b & b & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b & b & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b & b & 0 & 0 & g \end{pmatrix} = 0, \tag{15}$$

где буквой g обозначено выражение

$$g = -\lambda^k + \alpha \cdot \lambda^{k-1}. \tag{16}$$

Пусть даны k, α и матрица B. У матрицы B диагональные элементы равны нулю (например, в формулах (5), (8) – (10)), ее порядок равен r. Тогда следует с помощью MathCAD найти все собственные числа матрицы B (MathCAD делает это для матриц очень больших размерностей) с помощью функции `eigenvals(B)`.

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ – список собственных значений B. Тогда для каждого μ_j следует решить уравнение -й степени

$$\lambda^k - \alpha\,\lambda^{k-1} = \mu_j.$$

Всего получится kr корней. Вычисляя с помощью MathCAD модули полученных корней, можно диагностировать устойчивость либо неустойчивость системы (1).

Чтобы заставить MathCAD решить все уравнения сразу, можно задать ему уравнение

$$\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda^k - \alpha\,\lambda^{k-1} - \mu_j) = 0.$$

Решив это уравнение, MathCAD найдет все интересующие нас корни (в виде одного списка) и выберет наибольшее по модулю.

Для многочленов большой степени (большей 10) встроенные функции MathCAD могут численно находить корни многочлена с существенной потерей точности (особенно в тех случаях, когда у многочлена имеются кратные корни, либо когда корни плохо отделены друг от друга на малом промежутке или внутри круга малого радиуса на комплексной плоскости). Для предотвращения этого выгоднее находить корни уравнений $\lambda^k - \alpha\,\lambda^{k-1} = \mu_j$ по отдельности, а затем объединить их в общий список для анализа устойчивости.

Для численного нахождения корней полиномов с помощью функции `polyrooots` в MathCAD реализованы два метода: метод Лагерра и метод сопровождающей матрицы (`companion matrix method`). Наш опыт показывает, что для задач, рассматриваемых в этом пособии, последний из этих методов дает большую точность.

Примеры использования функций MathCAD для постановки и проведения численных экспериментов рассматриваются в следующем параграфе.

5. Использование пакета MathCAD для проведения вычислительных экспериментов

5.1. Генерирование матриц большого порядка и блочных матриц

В рассмотренных задачах исследования нейронных сетей чаще всего приходится иметь дело с единичными матрицами и блочными матрицами большого порядка.

Отметим, что традиционно в математике индексы элементов матриц обозначаются натуральными числами. В MathCAD по умолчанию эта нумерация идет с 0. Для перехода на традиционную нумерацию системной переменной ORIGIN нужно присвоить значение 1 (см. рис. 11).

Для генерирования единичной матрицы порядка n в MathCAD определена функция `identity(n)` (см. рис. 11).

Для генерирования блочной матрицы нужно определить матрицу-функцию (от одной или нескольких переменных), с помощью которой можно задать блоки одного вида для разных значений параметров. На рисунке 11 рассматривается пример построения матрицы B для трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами (см. формулу(5)). В этом примере задается матрица-блок $M33(x)$ как функция от одной переменной. С помощью матрицы $M33(x)$ можно задать все 9 блоков матрицы B, изменяя значения x на 0, a, b.

Блоки объединяются в одну матрицу с помощью функции `stack`. Эта функция объединяет блоки, располагая их только друг под другом. Поэтому сначала нужно получить три блока 3×9 (на рис. 11 эти блоки обозначены `B1(a,b)`, `B2(a,b)`, `B3(a,b)`), а потом соединить их в одну матрицу.

На рисунке 12 рассмотрен пример генерирования блочных матриц для цилиндрической нейронной сети с 9 нейронами.

Такой подход оказывается очень удобным (по сравнению с ручным вводом) особенно для большого числа нейронов в сети, например, для сети из 16 нейронов.

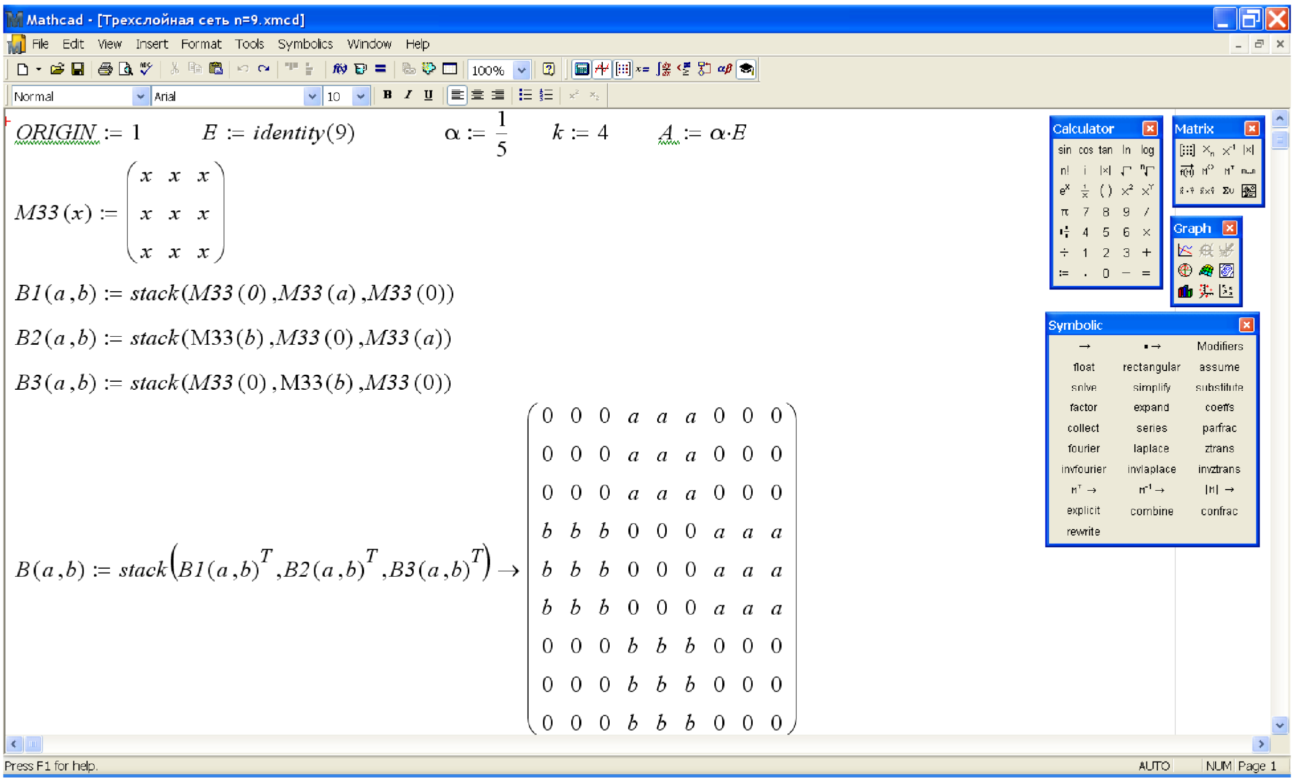


Рис. 11. Пример генерирования блочных матриц для трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами

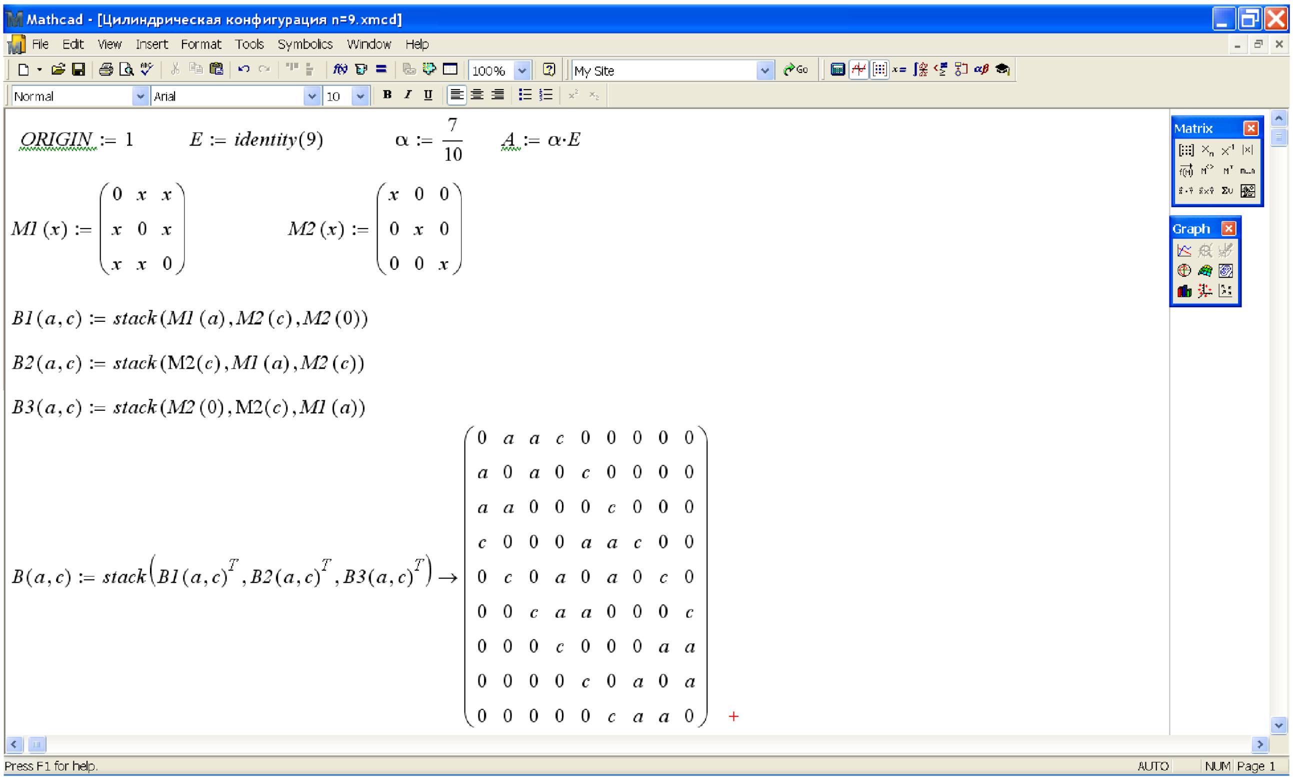


Рис. 12. Пример генерирования блочных матриц для цилиндрической нейронной сети с 9 нейронами

5.2. Вычисление определителей, собственных чисел матрицы и корней многочленов

Вычисление определителей в MathCAD проводится с помощью оператора с традиционным математическим обозначением $|x|$. Основные функции работы с матрицами представлены в виде значков на панели инструментов «Матрица» (Matrix):

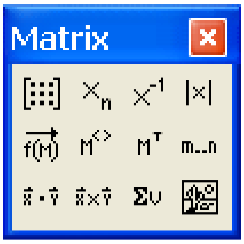


Рис. 13. Панель инструментов для работы с матрицами

Для упрощения характеристического полинома (разложения его на множители) можно использовать команду `factor` на панели символьных преобразований Symbolic:

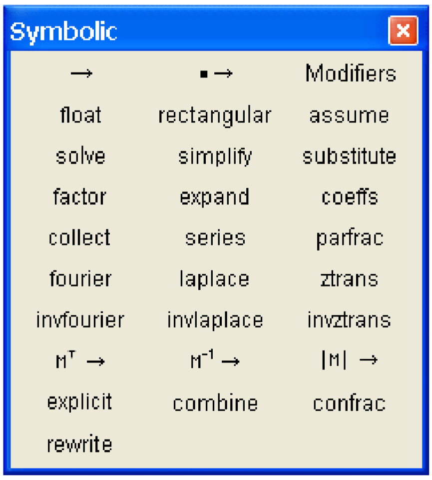


Рис. 14. Панель инструментов символьных преобразований

Обращаем внимание читателя на то, что MathCAD легче проводит символьные преобразования многочленов с целыми коэффициентами. Поэтому мы рекомендуем задавать значения параметров в виде обыкновенных дробей. Удобно знаменатели дробей делать равными 100 или 1000, например, $a = \frac{23}{1000}$, $b = \frac{24}{1000}$.

На рисунке 15 представлен пример вычисления характеристического полинома $D(\lambda, a, b)$ и его корней при исследовании устойчивости трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами для значений параметров $\alpha = \frac{1}{5}$, $k = 2$. При вычислении корней характеристического полинома можно заметить, что $\lambda = \frac{1}{5} = \alpha$ является корнем кратности 7 при всех a, b; $\lambda = 0$ является корнем кратности 21 при всех a, b. Поэтому устойчивость сети будет зависеть только от модулей корней многочлена 8-й степени, обозначенного $P(\lambda, a, b)$. Для значений $a = \frac{1}{10}$, $b = \frac{16}{45}$ у многочлена $P(\lambda, a, b)$ один корень по модулю равен 1, остальные имеют модули, меньшие 1. Поэтому точка $\left(\frac{1}{10}, \frac{16}{45}\right)$ лежит на границе области устойчивости.

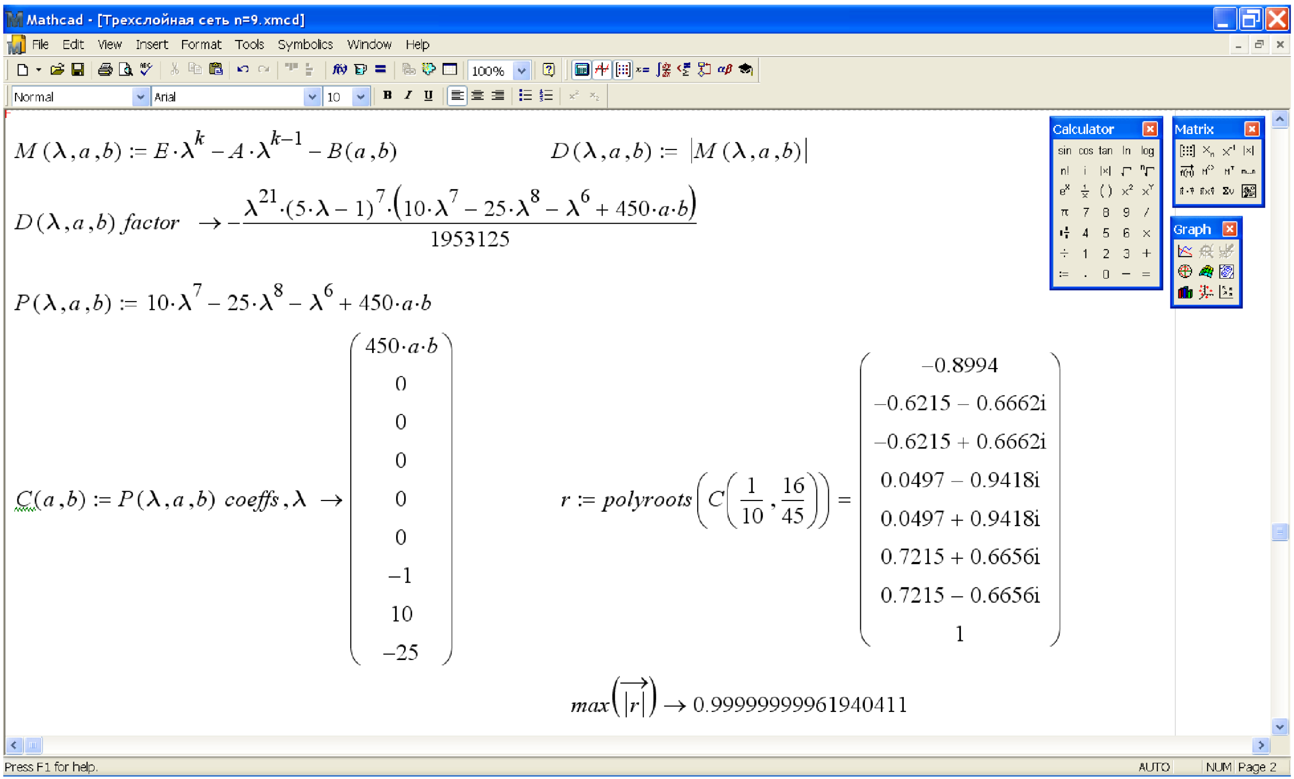


Рис. 15. Пример вычисления корней характеристического полинома при исследовании устойчивости трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами для $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{5}, k = 2}$

На рисунках 16 и 17 представлен пример вычисления характеристического полинома $D(\lambda, a, b)$ и его корней при исследовании устойчивости цилиндрической конфигурации 9 нейронов для значений параметров $\alpha = \frac{7}{10}$, $k = 3$. MathCAD сумел разложить характеристический полином в произведение четырех множителей. В этом случае вычисляются корни каждого многочлена (без учета его кратности), а затем все корни объединяются в общий список с помощью функции `stack`.

Характеристический полином $D(\lambda, a, c)$ при $a = \frac{1}{10}$, $c = \frac{7}{99}$ имеет один корень, по модулю равный 1, остальные по модулю меньше 1. Поэтому точка $\left(\frac{1}{10}, \frac{7}{99}\right)$ лежит на границе области устойчивости.

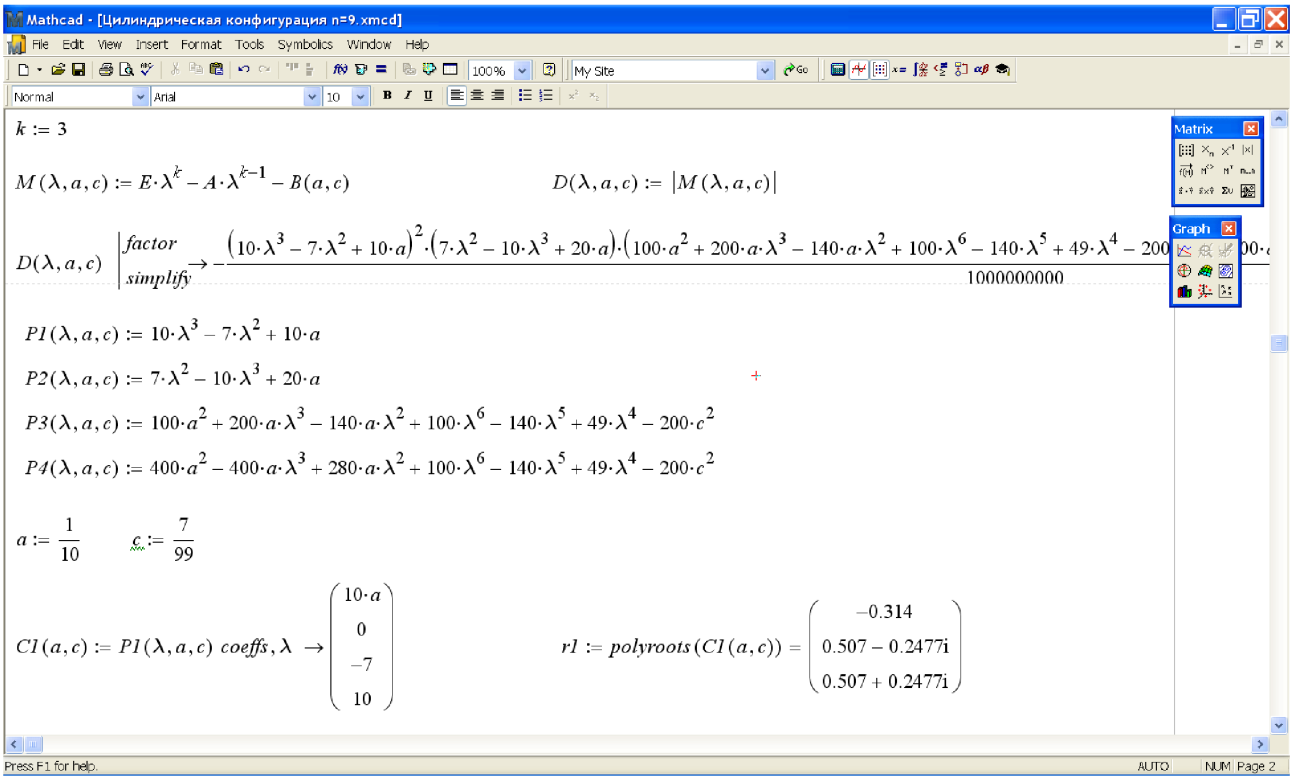


Рис. 16. Пример вычисления корней характеристического полинома при исследовании устойчивости цилиндрической конфигурации 9 нейронов для $\alpha = \frac{7}{10}$, $k = 3$ (начало примера)

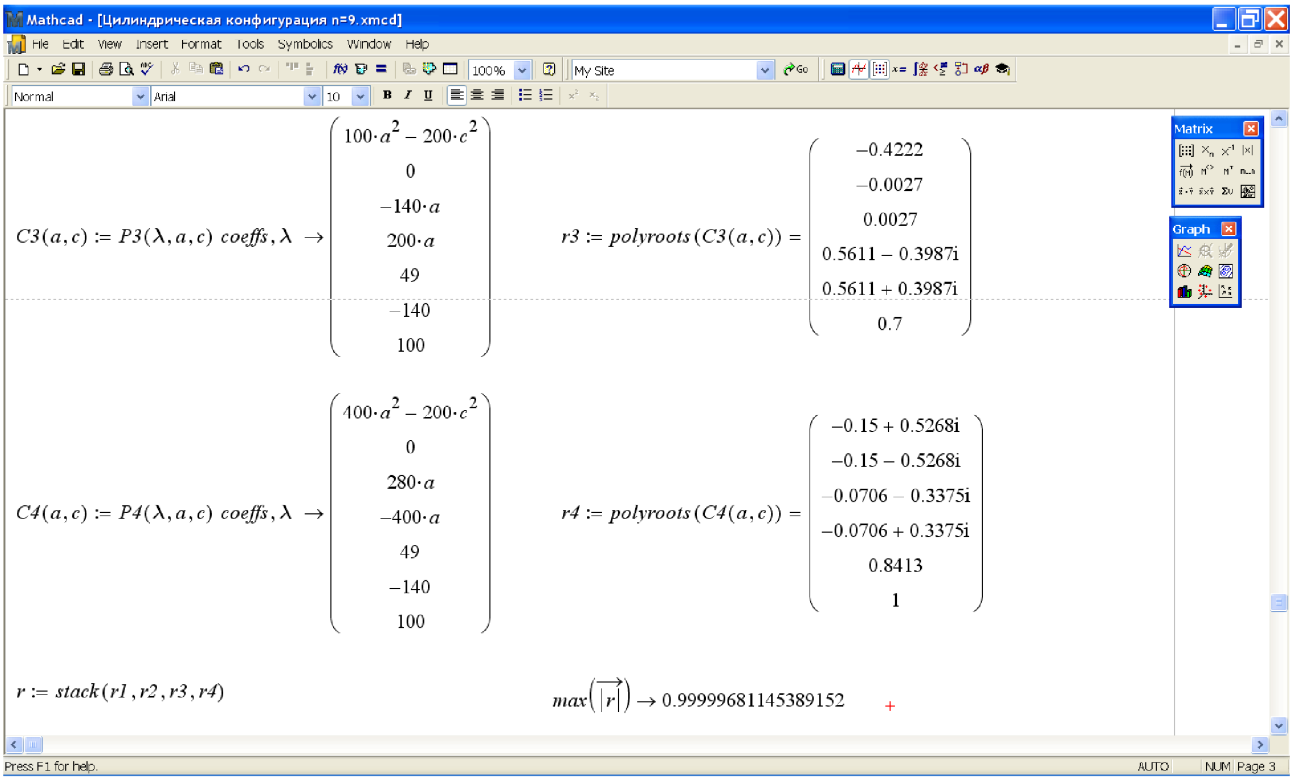


Рис. 17. Пример вычисления корней характеристического полинома при исследовании устойчивости цилиндрической конфигурации 9 нейронов для $\alpha = \frac{7}{10}$, $k = 3$ (окончание примера)

На рисунке 18 показан способ выбора метода нахождения корней многочлена с помощью функции `polyroots`. Правой кнопкой мыши по команде `polyroots` вызывается контекстное меню, в котором два первых параметра – это названия методов (Laguerre и Companion Matrix).

На рисунке 19 сравнивается точность прямого вычисления корней характеристического полинома (13) методом Лагерра (рис. 19, слева) и методом сопровождающей матрицы (рис. 19, справа) для трёхслойной сети из 9 нейронов при $k = 2$. В этом случае характеристический полином имеет 18-ю степень, причем среди его корней $\lambda = 0$ – корень кратности 7, а $\lambda = 0{,}2$ – корень кратности 7, а остальные 4 корня – это две пары комплексно-сопряженных корней. Преимущество в точности метода сопровождающей матрицы в этом случае очевидно.

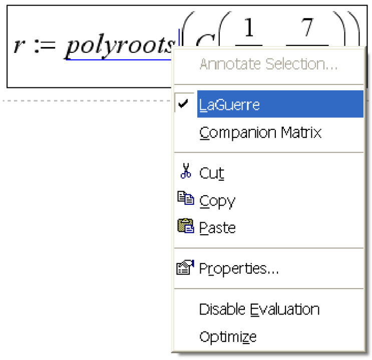


Рис. 18. Выбор метода для численного нахождения корней полинома с помощью функции `polyroots`

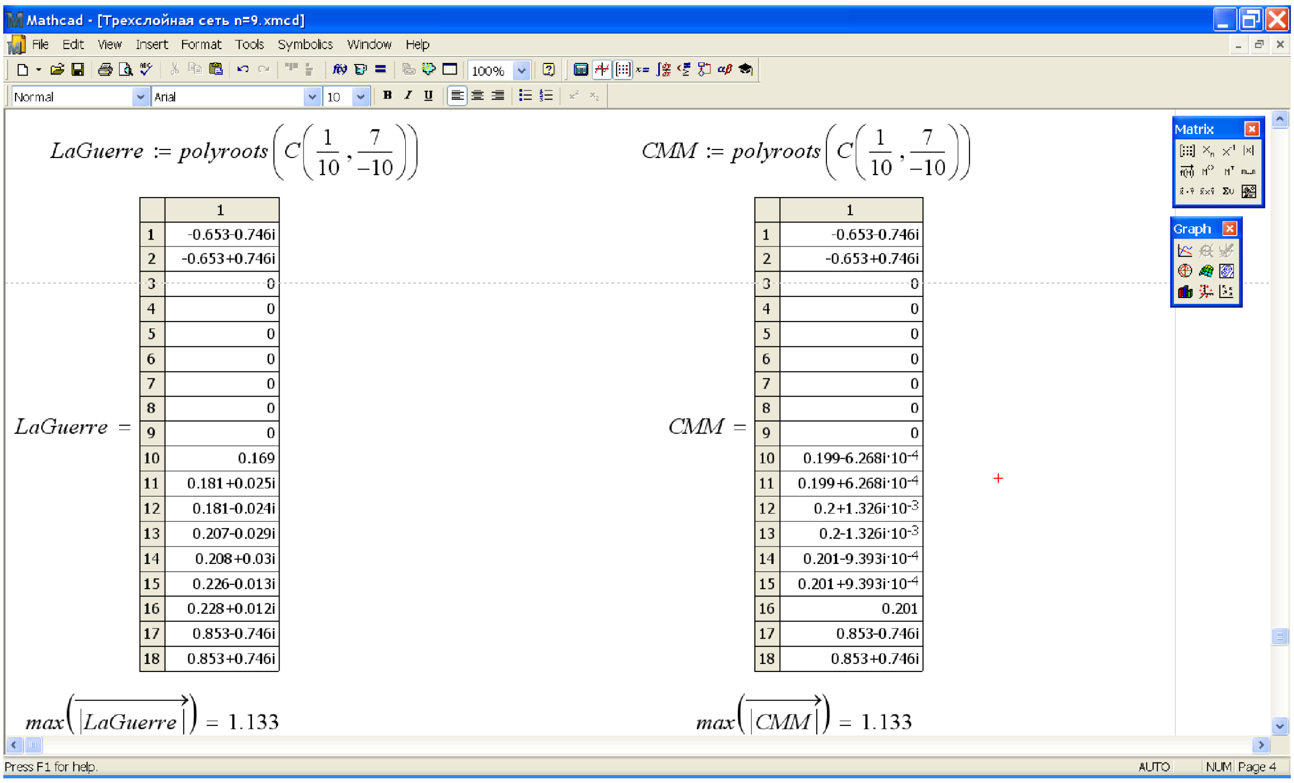
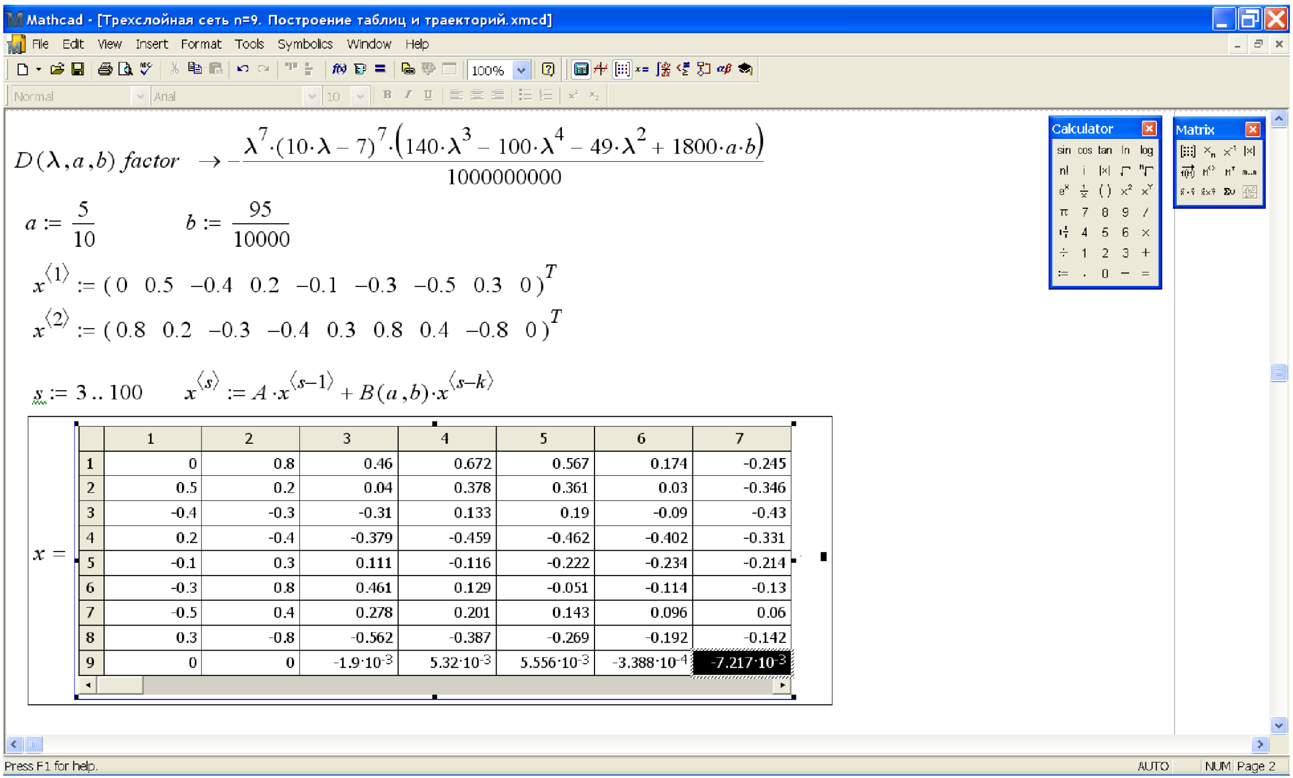


Рис. 19. Сравнение точности вычисления корней характеристического полинома (13) методом Лагерра (слева) и методом сопровождающей матрицы (справа) для трёхслойной сети из 9 нейронов при $k = 2$

5.3. Демонстрация динамики нейронной сети

На рисунке 20 представлен пример описания динамики трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами (см. также формулу (5) и пример на рис. 11) в численном виде (полученная таблица содержит последовательность векторов $x^{<s>}$ (по столбцам) состояний нейронной сети в моменты $s = 1, 2, \dots, 100$ при $k = 2$).



$$D(\lambda, a, b)\ factor \ \rightarrow -\frac{\lambda^7 \cdot (10 \cdot \lambda - 7)^7 \cdot \left(140 \cdot \lambda^3 - 100 \cdot \lambda^4 - 49 \cdot \lambda^2 + 1800 \cdot a \cdot b\right)}{1000000000}$$

$$a := \frac{5}{10} \qquad b := \frac{95}{10000}$$

$$x^{\langle 1 \rangle} := (0 \ \ 0.5 \ \ -0.4 \ \ 0.2 \ \ -0.1 \ \ -0.3 \ \ -0.5 \ \ 0.3 \ \ 0)^T$$

$$x^{\langle 2 \rangle} := (0.8 \ \ 0.2 \ \ -0.3 \ \ -0.4 \ \ 0.3 \ \ 0.8 \ \ 0.4 \ \ -0.8 \ \ 0)^T$$

$$s := 3 \,..\, 100 \qquad x^{\langle s \rangle} := A \cdot x^{\langle s-1 \rangle} + B(a, b) \cdot x^{\langle s-k \rangle}$$

$x =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.8	0.46	0.672	0.567	0.174	-0.245
2	0.5	0.2	0.04	0.378	0.361	0.03	-0.346
3	-0.4	-0.3	-0.31	0.133	0.19	-0.09	-0.43
4	0.2	-0.4	-0.379	-0.459	-0.462	-0.402	-0.331
5	-0.1	0.3	0.111	-0.116	-0.222	-0.234	-0.214
6	-0.3	0.8	0.461	0.129	-0.051	-0.114	-0.13
7	-0.5	0.4	0.278	0.201	0.143	0.096	0.06
8	0.3	-0.8	-0.562	-0.387	-0.269	-0.192	-0.142
9	0	0	$-1.9 \cdot 10^{-3}$	$5.32 \cdot 10^{-3}$	$5.556 \cdot 10^{-3}$	$-3.388 \cdot 10^{-4}$	$-7.217 \cdot 10^{-3}$

Рис. 20. Пример описания динамики трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами в виде последовательности векторов x_s (по столбцам) состояний нейронной сети в моменты $s = 1, 2, \dots, 100$ при $k = 2$

На рисунке 21 приведен пример графического представления динамики трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами. На трёх графиках представлена динамика реакции 1-го (точечный график $(x^{<s>})_1$ с маркерами ●), 4-го (точечный график $(x^{<s>})_4$ с маркерами ■) и 7-го (точечный график $(x^{<s>})_7$ с маркерами ▲) нейронов в моменты $s = 1, 2, \dots, 150$. Это примеры траекторий устойчивой нейронной сети.

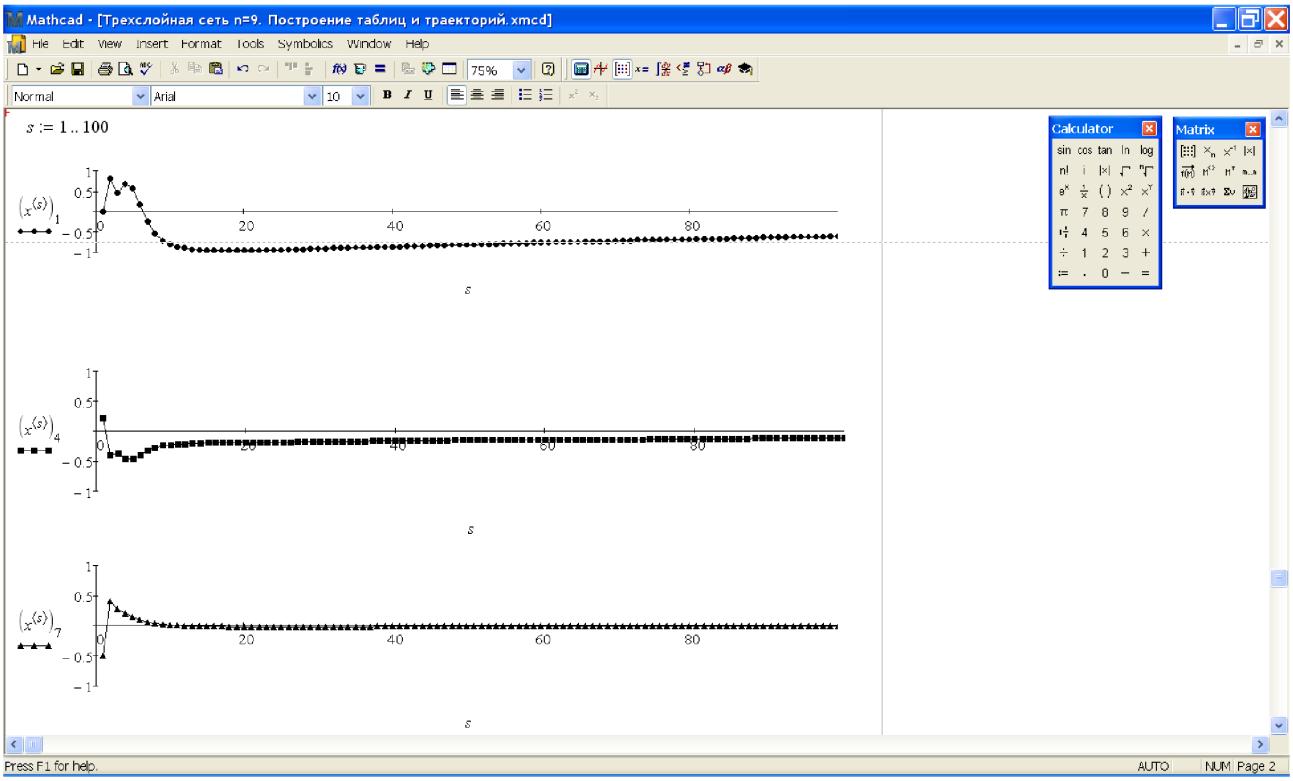


Рис. 21. Динамика реакции 1-го, 4-го и 7-го нейронов в устойчивой трёхслойной нейронной сети с 9 нейронами в моменты $s = 1, 2, \ldots, 100$ при $a = 0.5$, $b = 0.0095$, $k = 2$

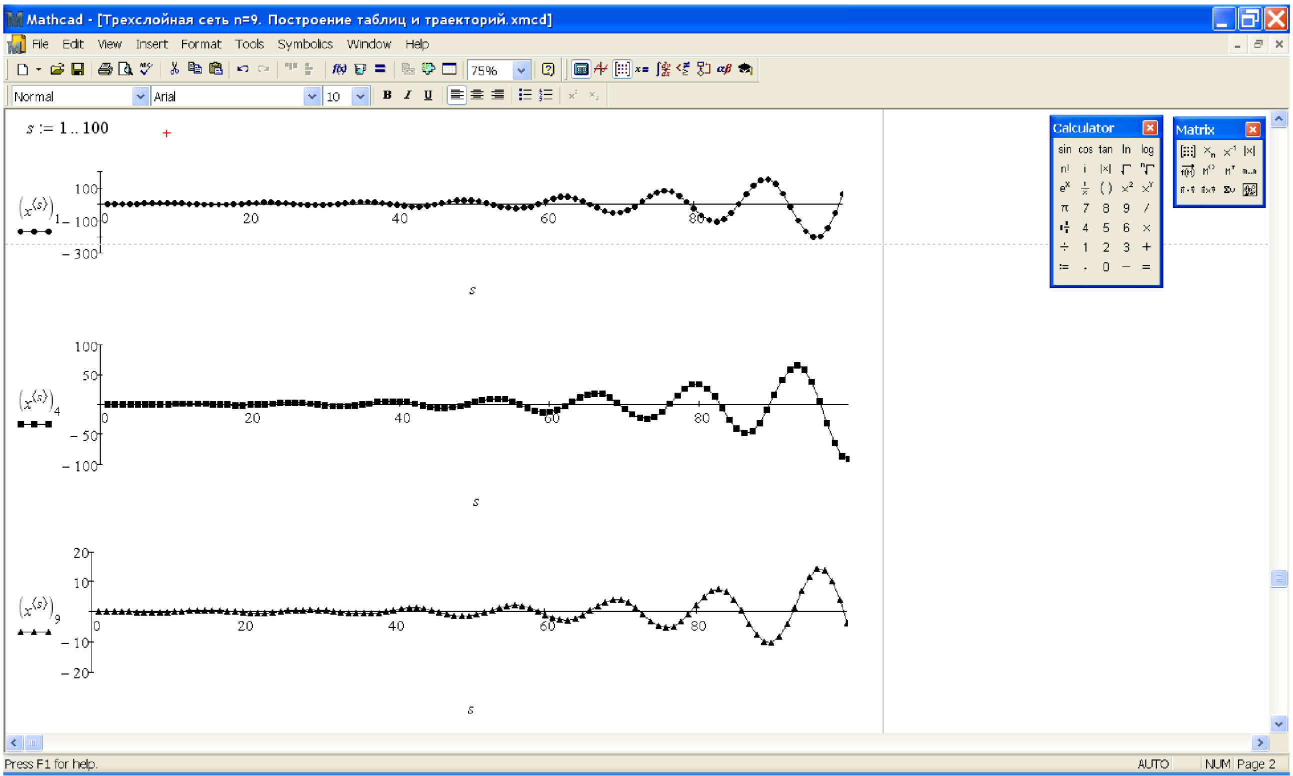


Рис. 22. Динамика реакции 1-го, 4-го и 9-го нейронов в неустойчивой трехслойной нейронной сети с 9 нейронами в моменты $s = 1, 2, \ldots, 100$ при $a = -0.5$, $b = 0.341$, $k = 2$

Библиографический список

Статьи и материалы конференций с результатами исследований, выполненных студентами, магистрантами и аспирантами под руководством профессора М.М. Кипниса

1. Ivanov, S.A. Stability analysis discrete-time neural networks with delayed interactions: torus, ring, grid, line / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis // International Journal of Pure and Applied Math, 2012. – V. 78(5), P. 691–709.
2. Ivanov, S.A. The stability cone for a difference matrix equation with two delays / S.A. Ivanov, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // ISRN Appl. Math, 2011. – P. 1–19.
3. Khokhlova, T.N. Numerical and qualitative stability analysis of ring and linear neural networks with a large number of neurons / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis // International Journal of Pure and Applied Math, 2012. – V. 76(3), P. 403–419.
4. Khokhlova, T.N. Stability cone for linear delay differential matrix equation / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis, V.V. Malygina // Appl. Math. Letters, 2011. – V. 24, P. 742–745.
5. Khokhlova, T.N. The breaking of a delayed ring neural network contributes to stability: The rule and exceptions / T.N. Khokhlova, M.M. Kipnis // Neural Networks, 2013. – V. 48, P. 148–152.
6. Kipnis, M.M. The stability cone for a matrix delay difference equation / M.M. Kipnis, V.V. Malygina // Int. J. of Math. and Mathematical Sciences, 2011. – P. 1–18.
7. Иванов, С.А. Устойчивость рекурсивной нейронной сети с топологией связей многомерного куба / С.А. Иванов // Теория управления и математическое моделирование. Труды конференции. – Ижевск, 15–18 мая 2012. – Ижевск, 2012. – С. 19–21.

8. Иванов, С.А. Устойчивость рекурсивных нейронных сетей тороидальной конфигурации / С.А. Иванов // Математика и ее приложения в современной науке и практике: сб. научных статей 2-й Международной конференции студентов и аспирантов, Курск, 5–6 апреля 2012. – Курск, 2012. – С. 112–115.
9. Иванов, С.А. Устойчивость плоского однородного нейронного поля / С.А. Иванов, А.А. Пархоменко // Инновации в науке, 2013. – № 16–1, С. 11–15.
10. Семенова, Ю.А. Устойчивость дискретной нейронной сети звездной конфигурации / Ю.А. Семенова // Математика и ее приложения в современной науке и практике: сб. научных статей 2-й Международной конференции студентов и аспирантов, Курск, 5–6 апреля 2012. – Курск, 2012. – С. 187–190.
11. Хохлова, Т.Н. Устойчивость двухслойного соединения нейронов с запаздыванием / Т.Н. Хохлова // Математика и ее приложения в современной науке и практике: сб. научных статей 2-й Международной конференции студентов и аспирантов, Курск, 5–6 апреля 2012. – Курск, 2012. – С. 191–194.

Учебники, монографии и учебные пособия

1. Аксенов, С.В. Организация и использование нейронных сетей (методы и технологии) / С.В. Аксенов, В.Б. Новосельцев. – Томск: Издательство НТЛ, 2006. – 128 с.
2. Барский, А.Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений / А.Б. Барский. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 176 с.
3. Галушкин, А.И. Нейронные сети. Основы теории / А.И. Галушкин. – М.: Издательство «Горячая Линия – Телеком», 2012. – 496 с.
4. Заенцов, И.В. Нейронные сети: основные модели / И.В. Заенцов. – Воронеж: Издательство ВГУ, 1999. – 76 с.

5. Каллан, Р. Основные концепции нейронных сетей / Р. Каллан. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 290 с.
6. Тархов, Д.А. Нейронные сети как средство математического моделирования / Д.А. Тархов. – М.: Издательство «Радиотехника», 2006. – 48 с.
7. Тархов, Д.А. Нейронные сети. Модели и алгоритмы / Д.А. Тархов. – М.: Издательство «Радиотехника», 2005. – 256 с.
8. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. – 1104 с.

Научные статьи

1. Бойков, И.В. К устойчивости нейронных сетей Хопфилда / И.В. Бойков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 9. – С. 124–140.
2. Бойков, И.В. Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием / И.В. Бойков // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2. – С. 85-97.
3. Liao, T.-L. Globally exponential stability condition of a class of neural networks with time-varying delays / T.-L. Liao, J.-J. Yan, C.-J. Cheng, C.-C. Hwang // Physics Letters A. –2005. –V. 339 (Issues 3–5). – P. 333–342.
4. Liu, C. Stability of Hopfield neural networks with time delays and variable-time impulses / C. Li, T. Huang, Chaojie Li // Neural Computing and Applications. – 2013. – Vol. 22 (Issue 1). – P. 195–202.

Учебное издание

Кипнис Михаил Маркович
Нигматулин Равиль Михайлович

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ

Учебно-практическое пособие

ISBN 978-5-85716-993-3

Работа рекомендована РИСом университета
Протокол № 6 (пункт 3) от 2013 г.

Редактор Н.С. Бокова

Издательство ЧГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Подписано в печать 05.11.2013
Формат 60x84/16
Бумага офсетная
Объём 0,5 уч.-изд. л.
Тираж 100 экз.
Заказ №

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЧГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69