МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения методу геометрических преобразований в условиях реализации ФГОС СОО

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
63% авторского текста
Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

«26» марта 2021 г.
и.о. зав.кафедрой математики и МОМ
_______________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Моллекер Анна Игоревна
Научный руководитель: доцент
к.п.н., доцент кафедры МиМОМ
Винтиш Татьяна Юрьевна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

С 2011 года в России появился новый документ, на основе которого стали работать все образовательные организации страны. Это Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, главная цель которого – повышение качества образования, достижения новых образовательных результатов, соответствующих современным запросам личности, общества и государства.

Исследовав программы по геометрии можно сделать вывод, что они содержат изучение не только традиционных фактов элементарной геометрии. Основной целью изучения курса геометрии является освоение обучающимися основными методами геометрии, такими как: координатным, векторным, геометрических преобразований, а также приобретение навыка применения их в решении геометрических задач.

Роль и значение геометрических преобразований в математике весьма значительна. Еще в 19 столетии известным немецким математиком Ф. Клейном было доказано, что преобразования могут быть определены в основу определения самого предмета геометрии.

Сущность метода геометрических преобразований при решении геометрических задач состоит в привлечении того или иного геометрического преобразования, основываясь на свойства которого, задача будет решена.

К сожалению, тема преобразования пространства в современном образовательном процессе находится далеко не на первом месте. Например, в государственном образовательном стандарте по математике в качестве целей изучения предмета отмечено формирование представлений об идеях и методах математики, развитие логического и пространственного воображения. Все же, в образовательный минимум содержания основных образовательных программ вынесены только темы: симметрии куба, параллелепипеда, призмы и пирамиды; понятие о симметрии пространства (центральная, осевая). Так же можно увидеть противоречие между целями обучения математике и программой школьного курса математики.

Учебная программа по математике не предоставляет в достаточной степени внимания методу геометрических преобразований, считая его подходящим только для простых задач. Именно поэтому появилась потребность исследовать задачи более сложные задачи, которые можно решать с помощью данного метода. Из вышесказанного мы можем сделать вывод, что изучение данного метода необходимо в школьном курсе геометрии.

Изучение темы геометрических преобразований не только содействует созданию наиболее правильных и наиболее инновационных взглядов на смысл математики, но и показывает также новые методы решения геометрических задач, особенно важные не только для математики, но и для ее приложений. Так же, геометрические преобразования дают понимание о фигуре, как о множестве точек и преобразование, как о нестандартной геометрической функции, что формирует геометрические умения и навыки обучающихся, объединяя их с алгеброй, а также развиваются их пространственные представления и логическое мышление.

Для этого требуется методика обучения методу геометрических преобразований, помогающая обучающимся научиться, согласно правилам, применять метод геометрических преобразований при решении задач различной сложности. Вышесказанным определяется актуальность выбранной темы «Методика обучения методу геометрических преобразований в условиях реализации ФГОС СОО».

Актуальность исследования: необходимость усиления роли геометрических преобразований в школьном курсе геометрии; поиск путей усовершенствования методики изучения и применения геометрических преобразований в условиях реализации ФГОС.

Объект исследования данной работы: процесс изучения учащимися геометрии.

Предметом исследования является изучение метода геометрических преобразований в условиях ФГОС СОО.

Цель исследования: применение методики обучения методу геометрических преобразований, способствующей формированию предметных результатов в школьном курсе геометрии, с помощью курса внеурочной деятельности для 8 класса.

Гипотеза исследования: Если проводить курс внеурочной деятельности на тему «Геометрические преобразования», то это будет способствовать наиболее эффективному развитию логического мышления учащихся при обучении геометрии, а так же значительно повысит качество геометрических знаний школьников.

Предмет, цель и гипотеза исследования определяет следующие задачи:

1. Раскрыть значение метода геометрических преобразований в курсе геометрии.
2. Проанализировать изучение темы «Геометрические преобразования» в школьных учебниках и в программе по математике.
3. Разработать курс внеурочной деятельности по данной теме для 8 класса.

Для достижения целей работы, проверки гипотезы и решения поставленных выше задач был использован метод-анализа документов, таких как программа по математики, учебные пособия, методические материалы, касающиеся метода геометрических преобразований.

ГЛАВА 1. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАК ОСНОВНОЙ МЕТОД ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1 История возникновения геометрических преобразований

Геометрия – одна из древнейших математических наук, первые упоминания о ней можно найти в египетских папирусах и вавилонских письменностях.

Одним из необходимых обогащений геометрии стало основание теории геометрических преобразований, а именно, движений.

Движение было главным методом доказательства у Фалеса, кроме того играет весомую роль в «Началах» Евклида. Определение равенства фигур у Евклида основано на соединение фигур. Евклид часто производит перенос отрезков с использованием циркуля, и само описание прямых линий и окружностей осуществляется с участием движений.

Например, Евклид считает сферу как результат вращения полуокружности вокруг диаметра. Все же во всех ситуациях, когда Евклид может справиться без движений, он так и делает. Евклид не раскрывает движение и его виды.

Идея геометрических преобразований как основание геометрии поднялась с помощью теории групп. Впервые теорию групп использовал в геометрии немецкий математик Ф. Клейн. В собственной «Эрлангенской программе» (1872) он продемонстрировал построения в геометрии с помощью геометрических преобразований и сформулировал геометрию как предмет, изучающий инварианты определенной группы преобразований.

Как только опубликовали «Эрлангенской программы» Ф. Клейна реформисты попытались воспользоваться идеей геометрических преобразований при создании школьного курса геометрии. В учебниках по геометрии тема движения находит свое отражение уже в XIX веке.

В Германии в 1882-1883 годах выпускается «Учебник элементарной геометрии» Генрицы и Трейтлейна, в базу которого заложена тема геометрического преобразования.

В избытке геометрические преобразования рассмотрены в учебнике А.Н. Глаголева «Элементарная геометрия» (1895). Автор внедряет аксиому движения и при доказательстве нескольких теорем применяет наложение фигур. Одинаково с симметрией в учебнике рассматривается параллельный перенос и вращение вокруг точки.

Использование метода геометрических преобразований при решении задач на построение рассматривается во многих учебниках второй половины XIX века в книгах Ю. Петерсена «Методы и теории для решения геометрических задач на построение» (1866), И.И. Александрова «Методы решения геометрических задач на построение» (1883). Авторы характеризуют каждый метод и иллюстрируют их на примере решения разных задач. В «Элементарной геометрии» Ж. Адамара (1898-1901) разбираются виды геометрических преобразований, такие как симметрия, перемещение, гомотетия и подобие, вращение, теория полюсов и другие. Все же геометрические преобразования не приравнивают к основному материалу курса.

Таким образом, геометрические преобразования фигурируют во многих учебниках XIX века, однако применяют их при малом числе доказательств и решении отдельных видов задач.

В 1911-1914 годах на Всероссийских съездах преподавателей математики России был поднят вопрос о введении в школьный курс метод геометрических преобразований. С докладом «Об упрощении построения курса геометрии и расширении ее содержания» выступил А.В. Годнев, где высказался за введение в курс геометрии движений.

Солидарную точку зрения пояснил в докладе «Идея движения в современной геометрии и область ее применимости в курсе средней школы» А.Р. Кулишер.

Учебник А.П. Киселева «Элементарная геометрия для средних учебных заведений» (1923), который долго использовали как базовый учебник для средней школы, очень скромен в применении метода геометрических преобразований. В учебнике содержались ссылки на применение параллельного переноса, вращения или симметрии относительно прямой к решению задач на построение. С 1938 года учебник А.П. Киселева выходит под редакцией Н.А. Глаголева, который вынес на основной план геометрические идеи о движении, о симметрии, о подобии, как геометрическом преобразовании.

В первом издании «Элементарной геометрии» (1944) Н.А. Глаголева повышается значение метода геометрических преобразований. Достаточно изучаются гомотетия и симметрия, которые применяются автором для доказательства соответственно признаков подобия треугольников и признаков равенства треугольников, что стало сильным толчком в реализации этой идеи в школьном преподавании геометрии.

К началу 60-х годов была объявлена реформа школьного образования. Важными целями геометрического образования были сформулированы систематичность и научность. Академик А.Н. Колмогоров, пошедший во главе реформы, предпринял радикальную перестройку курса геометрии: он ввел новую аксиоматику, которая подготавливала обучающихся к высокому пониманию геометрических положений. В учебном пособии под редакцией А.Н. Колмогорова геометрические преобразования занимали основное место, именно они являлись основой доказательства большинства теорем, их доказательству была посвящена отдельная аксиома подвижности.

В 1963-1964 учебном году в учебную программу по геометрии 9 класса была добавлена тема «Геометрические преобразования». Целью изучения этой темы являлось знакомство обучающихся с методом геометрических преобразований. Базовым являлся учебник «Геометрия» В.Г. Болтянского и И.М. Яглома, где авторы рассматривают основные методы геометрических преобразований: осевую и центральную симметрии, поворот, параллельный перенос, гомотетию. Изучение раздела «Осевая симметрия» начинается с исследования симметричных фигур. Потом формулируется определение точек, симметричных относительно прямой. При освещении теории центральной симметрии, параллельного переноса и поворота основное место отдается наглядности. Много внимания в пособии предоставляется учению о гомотетии, которая изучается как с положительным, так и с отрицательным коэффициентом. После изучения отдельных методов геометрических преобразований составители формулируют читателям определение геометрического преобразования. В результате формулируют понятие движения, и устанавливает его место в геометрии. В пособии имеются задания на развитие у обучающихся приемов метода геометрических преобразований.

1.2 Возможности метода геометрических преобразований для формирования УУД

В современном мире – мире новых технологий и компьютеров – воспитание детей должно идти по другому направлению. Многократно дети начали задавать вопрос не «Почему?», а «Зачем?». Зачем это изучать, если это можно посмотреть в Интернет? Трудность нашего века современных технологий состоит в огромном объеме информации, которую люди легко находят, но не умеют анализировать и использовать. Именно из-за этого перед педагогом возникает основная цель: показать и подготовить ребенка существовать в мире информации и осуществлять правильный выбор. Возникает проблема личного освоения обучающимися новых знаний, умений и навыков, которую педагоги должны отслеживать, наблюдать и вести в правильном направлении. Стремительный темп роста технологий предполагает ускоренное развитие образовательного пространства, установление целей образования, включающее государственные, социальные и личностные потребности и интересы. Универсальная учебная деятельность (далее – УУД) предоставляет огромные возможности для достижения данной потребности. В широком смысле слова «универсальные учебные процессы» обозначают самостоятельное развитие и самосовершенствование с помощью осознанной социальной деятельности и активного получения опыта.

Качество знаний, усвоенных обучающимися, зависит от многообразия и характера использованных универсальных учебных процессов. Вместе с возникновением активных и целенаправленных процессов обучающихся возникают, применяются и совершенствуются получаемые знания, умения и навыки.

Усвоение УУД приводит к постижению познавательной, эстетической и нравственной культуры, применению полученных знаний, умений и навыков в практической деятельности обучающихся, а также в повседневной жизни.

Основные функции УУД:

1) предоставление возможностей обучающегося самостоятельно реализовать деятельность обучения, ставить учебные цели, искать и применять требуемые средства и способы их достижения, отслеживать и оценивать процесс и результаты деятельности;
2) создание условий для слаженного развития личности и её самовыражения на основе стремлении к беспрерывному образованию; предоставление успешного изучения знаний, формирования умений, навыков и компетентностей в любой предметной области.

Рассмотрим глубже универсальные учебные процессы.

1. *Регулятивные учебные процессы*. Данные учебные процессы делают возможным регулировать процесс приобретения знаний умений и навыков. С помощью их возникает возможность строить работу обучающихся, выявлять цели обучения, что приводит к успешному изучению знаний. Регулятивные процессы следят и исправляют деятельность обучающихся и предоставляют оценивать успешность изучения. Для развития регулятивных универсальных учебных процессов применяются приемы контроля, самопроверки и взаимопроверки задач. В ходе работы ученик учится самостоятельно ставить цель своей работы, планировать её, самостоятельно проходить по задуманному плану, оценивать и исправлять полученный результат. Обучающимся, например, могут быть заданы задачи с умышленными ошибками, поиск информации в предоставляемых источниках, взаимоконтроль, разнообразные итоговые опросы по выбранной теме. Для решения вышесказанных заданий можно вместе с учениками создать алгоритм действий или правила проверки ответа.
2. *Познавательные учебные процессы.* Такие учебные процессы нацелены на решение поставленной задачи, а именно формулировка проблемы, ее изучение, логический поиск решения, отбор и

структурирование информации, нужной для ее решения, создание моделей рассматриваемого предмета. Обучающимся предоставляются различные виды задач, предоставляется самостоятельно выстроить процесс рассуждений, рассмотреть все необходимое для их решения, употребить логические рассуждения и добиться определенной цели.

3. *Коммуникативные учебные процессы.* Такие действия нацелены на формирование умений заниматься в группе, так и с учителем. Они дают возможность сотрудничать, заниматься в команде, формируют способность слушать друг друга и понимать, выдвигать совместные результаты и исполнять совместную работу. Также процессы направлены на правильное распределение ролей, взаимоконтроль и взаимоподдержку друг друга, способность договариваться и высказывать собственные идеи. Обучающимся дают задания на работу в группе, в которых возможно распределение ролей. Такие процессы активно выражаются в проектных работах, которые направлены на исследование и достижение совместного результата. Для развития учебно-познавательной компетенции на уроках математики используются разнообразные технологии, которые зависят от типа урока. Создание и развитие УУД на уроках математики возникает с помощью разнообразных видов заданий.

Пример 1.

Геометрия 6 класс. Метод симметрии.

«Составить заданием для одноклассника по теме «Осевая симметрия» и решение для проверки»

Задание: Достройте, применив осевую симметрию (смотреть рисунок 1).

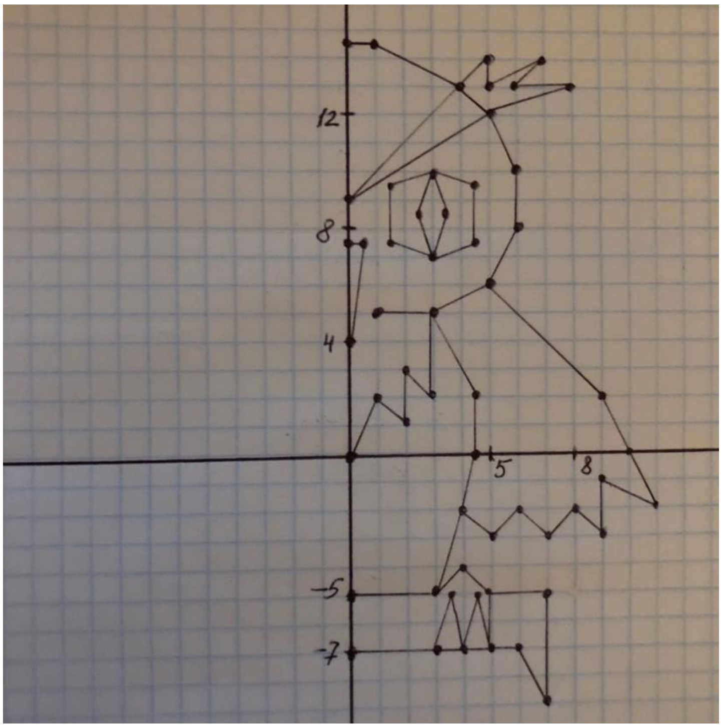

Рисунок 1 – Осевая симметрия совы

Решение: смотреть рисунок 2.

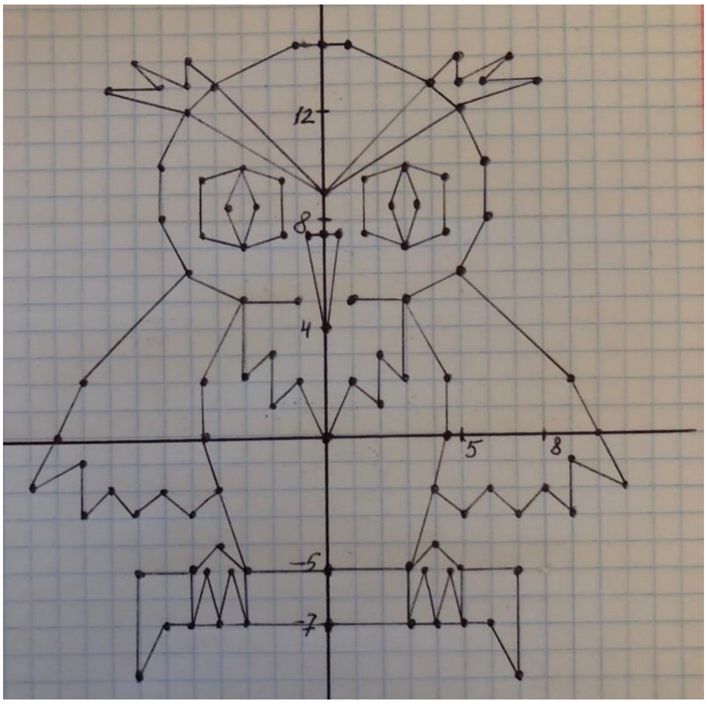

Рисунок 2 – Осевая симметрия совы

В процессе работы образовываются универсальные учебные процессы:

1. *Познавательные*: самостоятельное выделение и определение познавательной цели; способность составлять модель; следить за процессом и оценивать результат деятельности.

2. *Регулятивные*: выявление последовательности предварительных целей с учетом конечного результата.

2.1. Создание плана и последовательности процесса.

2.2. Проверка в форме сравнения результата с заданным эталоном, с целью нахождения отклонений и различий от идеала.

2.3. Внесение нужных дополнений и корректировок в план и способы действия, если есть расхождения с идеалом.

2.4. Выделение и понимание обучающимся того, что уже изучено и что еще подлежит изучению.

2.5. Понимание качества и уровня изучения.

2.6. Способность к волевому усилию.

3. *Коммуникативные*: планирование учебного содействия с учителем и сверстниками.

Пример 2.

Геометрия 9 класс. Метод поворота.

«Составить карточку для одноклассника по теме «Метод поворота» и решение для проверки».

Карточка:

Воздушный шар взлетел из пункта А и летит с постоянной скоростью 10 км/ч в течение 3 часов. Затем он поворачивает на 90 градусов и летит с той же скоростью еще 4 часа и прибывает в пункт В. Найдите расстояние от А до В в километрах.

Работа учащегося:

Мы видим (рисунок 3), что до точки поворота шар пролетел расстояние

AP = 10·3= 30 км, а после точки поворота – расстояние PB = 10·4 = 40 км.

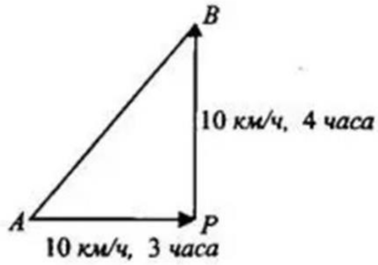

Рисунок 3 – Метод поворота

По теореме Пифагора найдем АВ.

$AB^2 = AP^2 + PB^2 = 30^2 + 40^2 = 2500$, (АВ=50км).

Ответ: 50 км.

В ходе разбора задач, решаемых методом геометрических преобразований, были отмечены ряд действий, применяемых на каждом шаге решения. Исследовав эти действия, мы можем выявить их соответствие с универсальными учебными действиями. Эти соответствия представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – УУД в геометрических преобразованиях

№	Действия, применяемые при решении задач методом геометрических преобразований	УУД
1	Умение строить образы фигур в каждом требуем преобразовании	Умение создавать модели для решения учебных задач
2	Умение видеть соответствующие при указанном преобразовании точки на соответствующих фигурах;	Умение осознано выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач
3	Умение выделять элементы, определяющие то или иное преобразование	Умение создавать модели для решения учебных задач
4	Умение строить соответствующие при указанном преобразовании точки на несоответствующих фигурах;	Умение осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач
5	Умение использовать специфические свойства преобразований.	Умение делать выводы, смысловое чтение

1.3 Виды геометрических преобразований и их суть.

Сущность метода геометрических преобразований при решении геометрических задач состоит в использовании геометрического преобразования, отталкиваясь от свойств которого, задача будет решена.

Процесс изучения решению задач методом преобразований предполагает не только знания самих преобразований, но и применение всей геометрической и графической культуры, что, демонстрирует положительное влияние на развитие геометрической интуиции, которая нужна при решении различных задач.

Рассмотрим использование данного метода по каждому отдельному геометрическому преобразованию.

Метод геометрических преобразований делится на следующие методы:

1) метод параллельного переноса;

2) метод осевой симметрии;

3) метод поворота;

4) метод центральной симметрии;

5) метод подобия;

6) метод инверсии;

7) метод гомотетии.

В программе основной школы рассматривается только некоторые методов, такие как: метод параллельного переноса, метод осевой и центральной симметрии, метод поворота.

Метод параллельного переноса: суть данного метода заключается в том, что вместе с данными фигурами рассматриваются иные фигуры, которые формируются из данных фигур или их частей путём переноса на некоторый вектор. Данным методом иногда, получается, упростить проведение анализа. Метод параллельного переноса применяют в основном для объединения отдельных частей фигур, когда построение фигуры оказывается затруднительным, потому что отдельные части фигуры находятся далеко друг от друга, и поэтому трудно ввести в чертёж данные. В таких случаях любую часть искомой фигуры переносят параллельно самой себе на такое расстояние, чтобы полученная фигура строилась легче, чем искомая фигура. Направление данного переноса зависит от условий задачи и должно быть выбрано таким образом, чтобы в составленную фигуру вошло, максимальное число данных.

Очень часто данный метод параллельного переноса применяют для построения многоугольников. Данный метод может быть полезен при решении задач на «кратчайший путь».

Для применения метода параллельного переноса необходимо владеть следующими действиями:

1) строить точки, в которые переходят точки при параллельном переносе;
2) уметь замечать соответственные при преобразовании точки;
3) подчеркивать элементы, и направление параллельного переноса.

Метод симметрии: использование осевой симметрии при решении задач на построение называют методом симметрии. Суть этого метода в том, что вместе с данными фигурами рассматриваются еще фигуры, которые симметричны некоторым из них относительно какой-либо оси. При успешном выборе оси и преобразуемой фигуры решение задачи может существенно упроститься, а в определенных случаях симметрия даёт искомые точки.

Применение осевой симметрии требует освоения следующими навыками:

1) создавать образ фигуры с помощью осевой симметрии;
2) видеть при осевой симметрии точки на соответственных при той же симметрии фигуры;
3) видеть ось симметрии фигуры;
4) уметь строить симметричные, относительно определённой прямой, точки на заданных фигурах.

Метод поворота (вращения): поворотом так же пользуются при решении задач на построение. Сущность метода вращения заключается в том, чтобы повернуть фигуру около избранного центра на соответствующий угол так, чтобы упростить решение задачи, либо же решить ее.

Чтобы применять метод поворота, необходимо уметь выполнять следующие действия:

1) строить образы фигур при повороте;
2) видеть соответственные при повороте точки;
3) уметь видеть и находить центр поворота;
4) уметь строить соответственные точки при повороте на фигурах;
5) уметь пользоваться специфическими свойства поворота.

Метод подобия: основная суть метода подобия состоит в следующем.

Для начала строят фигуру, которая удовлетворяет всем условиям задачи, кроме одного, подобную искомой. Далее строят искомую фигуру, как фигуру подобную построенной и удовлетворяющую одному упущенному требованию.

Метод подобия применяется обычно, когда среди данных только одно является отрезком, а все оставшиеся данные – либо углы, либо отношения отрезков.

Чтобы решение было упрощено, лучше строить вспомогательную фигуру так, чтобы она была подобна искомой и была подобно расположена к ней

При решении задач на построение методом подобия целесообразно использовать следующее замечание:

$$\frac{a'+b'}{a+b}, \frac{a'-b'}{a-b}, \frac{a'+b'-c'}{a+b-c}.$$

Если две фигуры подобны, то коэффициент подобия равен отношению любых двух соответствующих отрезков. Если отрезкам a, b, c, … фигуры Ф соответствуют отрезки aґ, bґ, cґ, … подобной фигуры Фґ, то коэффициент подобия равен также отношениям и т.д.

Компонентами умения применять метод подобия являются следующие действия:

1) использовать специфические свойства преобразования;

2) выделить при методе подобия точки на соответственные при той же симметрии фигуры;

3) строить соответственные при повороте точки на любых заданных фигурах.

Метод инверсии: она даёт способность решать сравнительно сложные и нестандартные задачи на построение, тяжело поддающиеся решению с помощью остальных рассмотренных выше методов. Этот метод гораздо «моложе» выше описываемых. Этот метод позволяет заменять фигуры, включающие окружность, простыми фигурами. Суть метода инверсии состоит в следующем: вместе с данными фигурами рассматриваем фигуры, инверсные им или их частям. Бывает, что этого уже достаточно для решения задачи.

Чтобы использовать этот метод необходимо уметь:

1) пользоваться специфическими свойствами преобразования;

2) строить соответственные при преобразовании точки на любых заданных фигурах;

3) строить образы фигур при этом преобразовании.

Слабой стороной данного метода является его громоздкость, связанная с необходимостью делать огромное число построений.

Метод гомотетии: преобразование фигуры, когда каждая её точка переходит в точку полученную построением, называется гомотетией относительно центра О. Гомотетия часто применяется при создании чертежей деталей машин, сооружений, планов мест и др.

Чтобы использовать этот метод необходимо уметь:

1) пользоваться специфическими свойства преобразования;

2) создавать образ изображений на плоскость;

3) находить центр гомотетии, вычислять его коэффициент.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ГЕОМЕТРИИ

2.1 Анализ изложения метода геометрических преобразований в школьных учебниках

В анализе использованы некоторые учебники из Федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию.

Проанализировав учебник по геометрии А.В. Погорелова для 7-9 классов, мы можем заметить, что изложение темы «Геометрические преобразования» рассматриваются в двух темах: в теме «Движение» и в теме «Подобие фигур». В учебнике есть одна особенность: автор вводит понятие «движение фигур» частным случаем понятия «преобразования фигур». Данный подход не перегружает интерпретацию темы сложными понятиями и способствует лучшему восприятию обучающимися. Введение определения движения необходимо, потому что с помощью него легко вывести понятие равенства геометрических фигур. В учебнике Погорелова признаки равенства треугольников доказываются с помощью аксиомы о существовании треугольника, поэтому утверждают существование равных фигур и доказывается теорема об эквивалентности двух определений равенства треугольников (две фигуры равны, если они движением переходят одна в другую). Так в учебнике доказывается существование равных фигур.

Автор подробно рассматривает подобие фигур и их свойства, доказывает, что гомотетия и есть преобразование подобия, а так же обосновывается свойство транзитивности подобия фигур. Это позволяет подтвердить наличие подобных, что помогает при решении задач с использованием подобия.

В учебнике А.В. Погорелова на геометрические преобразования отведен параграф «Движение». Данная тема начинает изучаться в 8 классе. Одна из главных целей изучения темы, это показать обучающимся примеры, с использованием геометрических преобразований. Основные виды движений – симметрия относительно прямой и точки, поворот, параллельный перенос.

Определение параллельного переноса предоставляется с использованием формул, которые показывают связь между координатами точки и ее образа при параллельном переносе.

По итогам освоения информации обучающиеся должны:

1) знать понятие движения, его свойства; понятие точек и фигур, которые симметричны относительно определенной точки, симметричных относительно прямой; понятие поворота, формулы, определяющие параллельный перенос;
2) легко пользоваться свойствами движений для определение фигур, в которые переходят данные фигуры при движении;
3) строить точки и простейшие фигуры, симметричные данным относительно данной точки и данной прямой;
4) уметь строить образы фигур при помощи поворота и параллельного переноса;
5) уметь видеть сонаправленные и противоположно направленные лучи.

Так же важно отметить, что Погорелов рассматривает преобразования не всей плоскости, а только фигур. Поэтому непонятно что происходит с оставшимися точками плоскости. Возможно, такое изучение связано с объяснением определения движения с механической точки зрения.

Потом изучаются теоретические основы свойств движения, симметрии относительно точки и прямой. Абсолютно все определения проиллюстрированы и доказаны, но нет рассмотрения конкретных задач. Следом за рассмотрением теории показана разобранная задача на построение фигуры, в которую переходит отрезок при повороте вокруг точки O на угол 60°. Небольшой акцент уделяется вопросу применения метода координат при изучении свойств преобразований, такого как параллельный перенос.

А в учебнике Л.С. Атанасяна первое упоминание осевой и центральной симметрии начинается в 8 классе. Такие преобразования изучаются как свойства геометрических фигур, в особенности четырехугольников, что дает автору исследовать свойства симметричности четырехугольников именно в ходе исследования их свойств. Разбор этих определений как движений плоскости осуществляется в 9 классе в главе «Движения». В этой же главе разбираются основные виды движений: осевая и центральная симметрии, параллельный перенос и поворот. На примерах рассматривается применение движений при решении геометрических задач различного уровня сложности. Так же, рассматривается вопрос о связи определений наложения и движения. Определение наложения вносится в число основных понятий в курсе геометрии. И важно заметить, что параграф «Наложения и движения» выделен звездочкой, что указывает на необязательное изучение.

Просмотрев предложенные задачи темы, можно сделать вывод, что материал темы ориентирован на усвоение навыков построения образов точек, отрезков, треугольников при симметриях, параллельном переносе и повороте.

Тема преобразование подобия в этом учебнике не затрагивается, кроме подобия треугольников. Понятия гомотетии в учебнике нет. Так же, вопрос о наличие подобных фигур остается непонятным.

2.2 Этапы решения задач методом геометрических преобразований.

В решении задач методом геометрических преобразований можно выделить два этапа:

1) выбор геометрического преобразования, которое мы будем использовать;
2) доказательство того, что фигуры из условия задачи, подходят для выбранного геометрическом преобразовании.

В качестве примера рассмотрим решение геометрических задач методом геометрических преобразований и выделим в них данные этапы.

Пример 3.

Дан квадрат ABCD (рисунок 4). Через центр этого квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, отличные от прямых AC и BD. Докажите, что отрезки секущих, заключенные внутри квадрата, равны.

Решение:

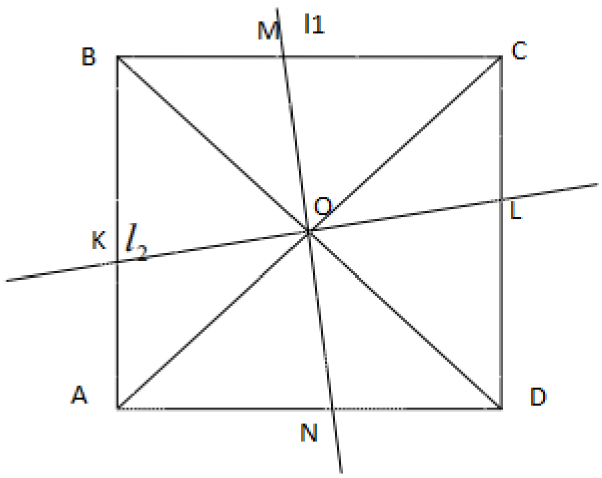

Рисунок 4 – Пример 4

Пусть $l_1 \cap [BC]=M$, $l_1 \cap [AD]=N$, $l_2 \cap [AB]=K$, $l_2 \cap$ $[CD]=L$. Решение задачи сводится к доказательству равенства отрезков MN и KL. Доказать равенство фигур F1 и F2 на языке геометрических преобразований означает, что достаточно найти движение, отображающее фигуру F1 на фигуру F2. Таким образом, как это отмечалось выше, необходимо обосновать выбор геометрического преобразования (этап 1).

Так как угол между прямыми l_1 и l_2 равен 90° , то естественно рассмотреть поворот вокруг точки O на 90° (R_o^{90}). Итак, приходим к целесообразности рассмотрения поворота (R_o^{90}).

Второй этап решения этой задачи будет состоять в доказательстве того, что отрезки MN и KL являются соответствующими в данном преобразовании. Действительно, точка M= l_1∩[BC]. Значит,

R_o^{90} (M)= R_o^{90} (l_1∩[BC]= R_o^{90} (l_1)∩ R_o^{90} ([BC])= l_2 [AB]=K. Рассуждая аналогично, находим образ точки N:

R_o^{90} (N)= R_o^{90} (l_1∩[AD]= R_o^{90} (l_1)∩ R_o^{90} ([AD])= l_2 [CD]=L. Итак,

R_o^{90} ([MN])=([KL]). Последнее означает, что [MN]=[KL].

Пример 4.

Окружности $w_1(O_1,r_1)$ и $w_2(O_2,r_2)$,($r_1 \neq r_2$) касаются внешним образом в точке S. Через центр O_1 окружности w_1 проведены два луча h_1 и h_2 , которые пересекают окружность w_1 в точках A и B соответственно. Через центр O_2 окружности w_2 проведены два луча h_1' и h_2', противоположно направленные с h_1 и h_2 соответственно. Лучи h_1' и h_2' пересекают окружность w_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что прямые AB и CD параллельны (рисунок 5).

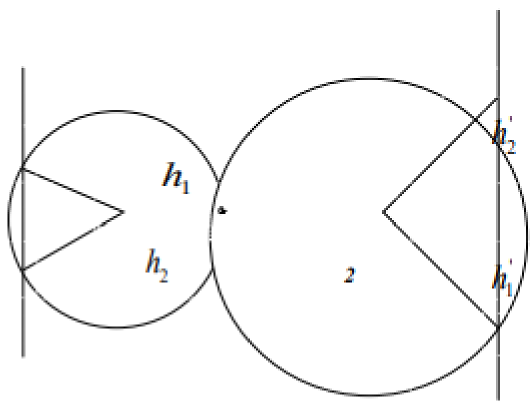

Рисунок 5 – Задание 4

Решение: На первом этапе решения задачи выясним возможность её решения с помощью геометрических преобразований. Для этого переводим утверждение задачи на язык преобразований. Утверждение задачи на языке геометрических преобразований означает, что надо найти либо параллельный перенос, либо центральную симметрию, либо гомотетию (так как эти преобразования переводят прямую в параллельную ей прямую), отображающие прямую AB на прямую CD.

Но так как точки A и B, C и D принадлежат окружностям w_1 и w_2, радиусы которых не равны, то не будет существовать ни параллельного переноса, ни центральной симметрии, которые отображали бы окружность w_1 на окружность w_2. А вот гомотетия с центром в точке S и коэффициентом

K = $\frac{-r_2}{r_1}$ переводит окружность w_1 в окружность w_2. Значит, если мы покажем, что точки A и B гомотетичны точкам C и D, то утверждение задачи будет обосновано. Итак, мы приходим к целесообразности рассмотрения гомотетии с центром в точке S и коэффициентом k = $\frac{-r_2}{r_1}$: H_s^k.

Второй этап решения этой задачи будет состоять в доказательстве того, что прямые AB и CD являются соответствующими в выбранной гомотетии. При рассматриваемой гомотетии $w_1 \rightarrow w_2$, $h_1 \rightarrow h_1'$, $h_2 \rightarrow h_2'$. Точка

A = h_1∩ω1. Значит, H_s^k(A) = $H_s^k(h_1 \cap w_1)$ = $H_s^k(h_1) \cap H_s^k(w_1)$ = $h_1' \cap w_2$ = C.

Рассуждая аналогично, находим образ точки B:

$$H_s^k(\text{B}) = H_s^k(h_2 \cap w_1) = H_s^k(h_2) \cap H_s^k(w_1) = h_2' \cap w_2 = \text{D}.$$

Таким образом, H_s^k(AB) = CD Что означает: прямые AB и CD параллельны.

2.3 Разработка курса внеурочной деятельности на тему «Геометрические преобразования» для 8 класса.

Современные школьники все больше теряют интерес к обучению. На обычных уроках ученикам скучно и малоинтересно, из-за этого у них появляются пробелы в знаниях и плохие оценки. В следствие этого стала популярна потребность в репетиторах. В связи с этим введение в школах курса внеурочной деятельности по различным предметам и на разные темы может повысить интерес к обучению обучающихся. На таких занятиях школьники, работая в различных занимательных формах, изучают определенную тему и погружаются в нее глубже. Такие занятия вызывают интерес не только у отстающих ребят, но и у заинтересованных учеников, желающих тщательно разбираться в предмете и повысить свой балл.

Главной задачей такого курса является создание благоприятных условий для интеллектуального развития обучающихся в соответствии с их интересами, целями, способностями и потребностями. В ходе данного курса обучающиеся смогут закрыть свои пробелы в знаниях, с помощью повторного и глубокого прохождения материала в занимательных формах, а также расширить свои знания и умения решать задачи в данной теме, за счет более детального изучения.

Образовательные цели:

1) приобретение умений и навыков в решении задач, а также задач повышенной сложности,
2) ознакомление учащихся с теоретической частью данной темы, с формулами, этапами, которые необходимы при решении задач.

Развивающие цели:

1) развитие познавательного интереса,
2) развитие умственных способностей,

3) формирование исследовательских навыков применения методов научного познания: анализа и синтеза, абстрагирования, обобщения и конкретизации, индукции и дедукции, классификации.

Воспитательные цели курса внеурочной деятельности:

1) стимулирование самостоятельности учащихся в решении задач повышенной сложности,
2) воспитание трудолюбия и преодоления трудностей,
3) стимулирование детей в участии во внеклассной работе, в олимпиадах.

Данный элективный курс «Геометрические преобразования» предназначен для учащихся 8 классов. Программа рассчитана на 19 часов. Тематическое планирование курса можно увидеть в Таблице 2.

Основная цель: ознакомить учащихся с методом геометрических преобразований и сформировать навыки при решении задач различной сложности.

Таблица 2 – Тематическое планирование

Темы занятий	Кол-во часов
Изометрические преобразования, виды и свойства	3
Решение задач на доказательство методом движений	3
Решение задач на построение методом движений	3
Решение задач на построение циркулем и линейкой	2
Подобие. Гомотетия. Решение задач методом подобия	3
Инверсия. Решение задач.	2
Решение задач смешанного типа	3
Всего часов	19

Ожидаемые результаты:

1) учащиеся познакомились с теоретической частью темы;
2) у учащихся сформирован навык решения задач, а так же задач повышенной сложности;
3) расширен круг знаний по теме «Геометрические преобразования»

Для проведения курса предлагается ряд задач, при решении которых используются геометрические преобразования.

Задача 1.

Для снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону канала, надо построить на его берегу водонапорную башню. Где должна находиться башня, чтобы суммарная длина труб от нее до населенных пунктов (по прямой) была наименьшей? (рисунок 6)

Решение:

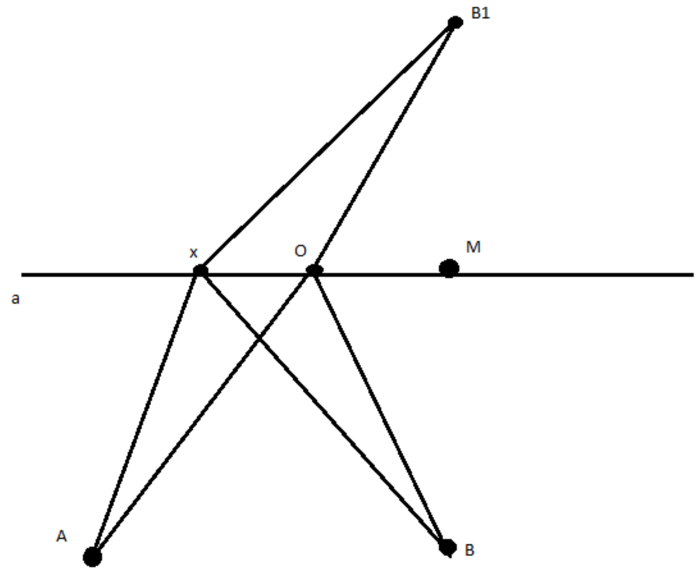

Рисунок 6 – Снабжение водой

На рисунке прямая а – это канал, точки А и В – населенные пункты.

Построим точку B_1 симметричную точке В относительно прямой а.

По построению: $BB_1 \perp$ a и MB_1 = MB, где M = $BB_1 \cap$ a. Тогда по теореме о наклонной OB = OB_1.

Сумма расстояний: OA+OB = OA+OB_1 = AB_1.

Возьмем на прямой a любую произвольную точку $x \neq$ O. По- прежнему, по теореме наклонных XB =XB_1.

По неравенству треугольника: XA+XB > AB_1.

Получаем, что XA+XB > OA+OB.

Значит точка O – искомая.

Задача 2.

Три населенных пункта A, B и C расположены в вершинах остроугольного треугольника. Где следует построить комбинат, чтобы сумма расстояний от него до всех трех пунктов была наименьшей? (рисунок 7)

Решение:

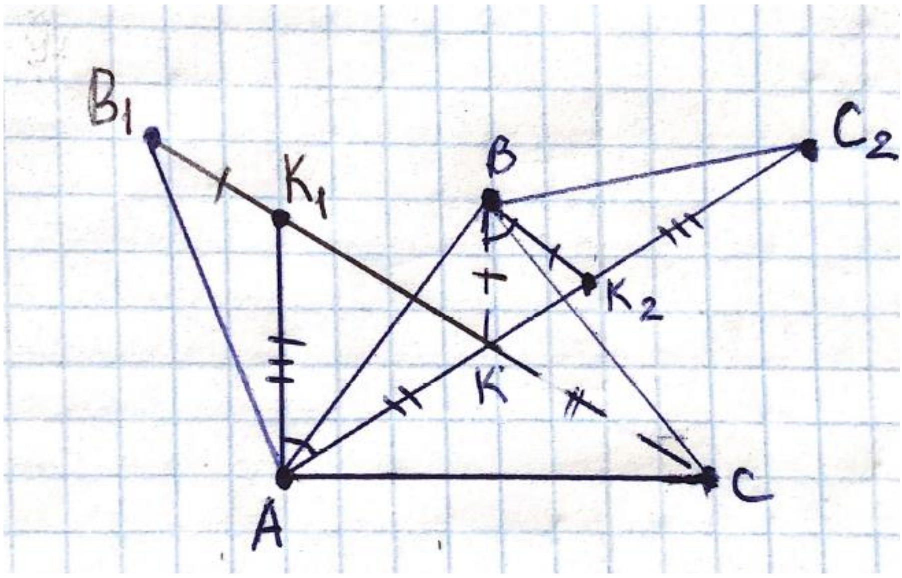

Рисунок 7 – Комбинат

1) допустим такая точка K уже существует;
2) повернем треугольник AKB на угол 60° около вершины A так, чтобы точки B1 и K1 лежали по другую сторону от точки C относительно прямой AB;
3) расстояния при движении сохраняются, значит:
   B_1K_1 = BK и AK = AK_1;

4) треугольник АКК1– равнобедренный с ∠А = 60°;

   ∠К = $\angle K_1$ = $\frac{180°-60°}{2}$=60°, значит треугольник AKK_1 - равносторонний, отсюда KK_1 = АК;

5) АК+ВК+СК = KK_1+B_1K_1+СК = CB_1, а так как расстояния от точки К до вершин треугольника АВС минимальны, то по неравенству треугольника точки B_1, K_1, К и С лежат на одной прямой;

6) аналогично доказывается, что если треугольник СВК повернуть на угол 60°, около точки В так, чтобы точки C_2 и K_2 лежали по другую сторону от точки А относительно прямой ВС, то точка К будет лежать на одной прямой с точками А и C_2;

7) таким образом, для нахождения местоположения комбината К следует повернуть отрезок АВ около точки А и отрезок СВ около точки В на 60° так, чтобы точка B_1 лежала по другую сторону от точки С относительно прямой АВ, а точка C_2 - по другую сторону от точки А относительно прямой ВС, тогда точка К будет лежать на пересечении прямых CB_1 и AC_2.

Задание 3.

Два населенных пункта К и М расположены по разные стороны канала. В каком месте следует построить мост (перпендикулярно берегам канала) и прямолинейные дороги от населенных пунктов к мосту, чтобы путь между данными пунктами был кратчайшим? (рисунок 8).

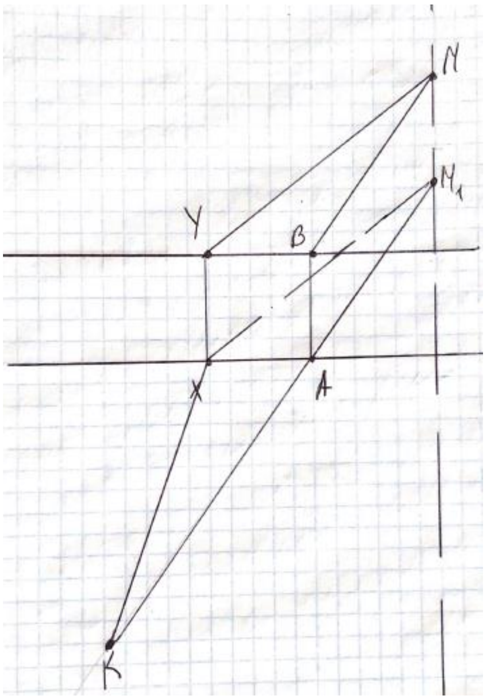

Рисунок 8 – Каналы

Пусть ширина канала d. Проведем перпендикуляр к берегам канала и сместим точку M по этому перпендикуляру ближе к каналу M1 на расстояние, равное ширине канала.

Построим отрезок KM_1 и отметим точку его пересечения A с берегом со стороны пункта K.

Построим мост: отрезок AB перпендикулярный берегам канала.

По построению AB и MM_1 параллельны и равны, следовательно, $ABMM_1$ – параллелограмм и BM = AM_1.

Так же можем сказать, что отрезок AM_1 является результатом параллельного переноса отрезка BM.

Предлагаемый маршрут движения: ломаная KABM.

Расстояние по этому маршруту: KA+AB+BM = KA+d+AM_1 = KM_1+d

Возьмем на берегу со стороны пункта K любую произвольную точку X $\neq$ A и построим мост – отрезок XУ.

Новый маршрут движения – ломанная KXУM.

Расстояние по этому маршруту: KX+XУ+УM = KX+d+XM_1 >KM_1+d

Мы использовали УM = XM – равенство отрезков, полученных параллельным переносом и неравенство треугольника : KX+XM_1 >KM_1.

Задание 4.

В прямоугольном треугольнике ABC катет AC=25, а высота CH, опущенная на гипотенузу, равна $4\sqrt{21}$. Найдите sin ∠ABC.

Задание 5.

В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна $5\sqrt{91}$., а сторона AB равна 50. Найдите cos B.

Задание 6.

Основания трапеции равны 1 и 13, одна из боковых сторон равна $15\sqrt{2}$., а угол между ней и одним из оснований равен 135°. Найдите площадь трапеции.

Задание 7.

В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Задание 8.

Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как 7:9. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади четырѐхугольника KPCM.

Задачи на дом:

1. Докажите, что параллельный перенос является движением.
2. При симметрии относительно прямой a, отрезок BC проходит в отрезок ED. Прямые a и BC не параллельны. Определите вид четырехугольника BCDE.
3. Какие из букв Д, Б, А, В, Е, К имеют ось симметрии? Укажите несколько слов, запись которых имеет ось симметрию.

Была проведена апробация в 8 классе МБОУ СОШ 121 г. Челябинска.

Были проведены два урока по внеурочной деятельности. Результаты тестирования до и после проведения внеурочных занятий можно увидеть в Таблице 3.

Таблица 3 – Результаты апробации

Ученик	% выполненных заданий до курса	% выполненных заданий после двух уроков
1	40%	55%
2	52%	60%
3	47%	56%
4	60%	69%
5	78%	85%
6	80%	85%
7	59%	65%

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод геометрических преобразований имеет широкое применение в различных областях наук. Благодаря его универсальному подходу к решению различных задач, метод геометрических преобразований является мощным аппаратом, используемым для исследования геометрических объектов.

Применение данного метода способствует школьникам облегчить процесс решения задач. Метод геометрических преобразований является необходимым и используется не только в школах, но и в высших учебных заведениях.

В ходе работы были проанализированы школьные учебники, на основе чего были сделаны выводы о недостаточном количестве заданий, а так же поверхностном изучении данной темы. Поставленные задачи были выполнены, что позволило достичь цели данной работы, а именно, применить методику обучения методу геометрических преобразований в школьном курсе геометрии.

Гипотеза подтвердилась, действительно, продуктивность решения задач по геометрии повышается, если более детально изучать метод геометрических преобразований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Заславский А.А**. Геометрические преобразования / Заславский А.А. – 2-е изд. – Москва: МЦНМО, 2004. – 86 с. – Текст : непосредственный.
2. **Понарин Я. П.** Элементарная геометрия: [в 2 томах] / Понарин Я. П. – Москва : МЦНМО, 2004. – 2 т. ; Планиметрия, преобразования плоскости . – 312 с. – Текст : непосредственный.
3. **Капленко Э.Ф.** Сборник задач по геометрии. Часть III. Геометрические преобразования плоскости. Метод преобразований решения геометрических задач: учебное пособие / Э.Ф. Капленко, С.Г. Маркова. – Воронеж: ВГПУ, 2010. – 80 с. – Текст : непосредственный.
4. **Дорофеев. Г.В.** Математика. 5 класс. Учебное пособие. В 2 частях. Часть 1. Математика. 5 класс / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2-е изд. – Москва: 2011. – 176с. – Текст: непосредственный.
5. **Атанасян. Л.С.** Геометрия: учебник для 7-9 классов. Учебное пособие. – Москва: 2014. – 384с. – Текст : непосредственный.
6. **Шарыгин. И.Ф.** Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. Учебное пособие / И. Ф. Шарыгин. – 10-е изд. – Москва: 2009. – 241 с. – Текст : непосредственный.
7. **Погорелов. А.В.** Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных учреждений. Учебное пособие / А. В. Погорелов. – 10-е изд. – Москва: 2009. – 224 с. – Текст : непосредственный.
8. **Муравин. Г.К.** Математика : 6 класс. Учебное пособие / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: 2014. – 307 с. – Текст: непосредственный.

9. **Капленко Э.Ф.** Сборник задач по геометрии. Часть III. Геометрические преобразования плоскости. Метод преобразований решения геометрических задач. Учебное пособие / Э.Ф. Капленко, С.Г. Маркова. – Воронеж: ВГПУ: 2010. – 80 с. – Текст : непосредственный.
10. **Белошистая А.В.** Задачи на построение в школьном курсе геометрии. Математика в школе: 2002. – 51 с. – Текст : непосредственный.
11. **Коновалова. В.С.** Решение задач на построение в курсе геометрии как средство развития логического мышления / В.С. Коновалова. З.В. Шилова. – Киров: ВятГГУ. – 2008. – 69 с. – Текст : непосредственный.