МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математическийфакультет

Кафедра математики и методики обучения математике

Формирование логической культуры учащихся в процессе обучения математике

Выпускная квалификационная работа
по направлению 440401
«Математическое образование в системе профильной подготовки»

Проверка на объем заимствований:
79% авторского текста

Работа рекомендована к защите
« 3 » апреля 2017 г.
зав. кафедрой ММоМ
Суховиенко Елена Альбертовна

Выполнил (а):
Студент (ка) группыОФ-213/131-2-1
Боровикова Евгения Олеговна

Научный руководитель:
доктор педагогических наук,
доцент,
Суховиенко Елена Альбертовна,

Челябинск
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет

Кафедра математики и методики обучения математике

Формирование логической культуры учащихся в процессе обучения математике

Выпускная квалификационная работа
по направлению 440401
«Математическое образование в системе профильной подготовки»

Проверка на объем заимствований:
79% авторского текста

Работа рекомендована к защите
« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой ММоМ
Суховиенко Елена Альбертовна

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-213/131-2-1
Боровикова Евгения Олеговна

Научный руководитель:
доктор педагогических наук,
доцент,
Суховиенко Елена Альбертовна,

Челябинск
2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

XXI век можно по праву считать веком высоких технологий. И в развитии этих технологий немаловажную роль сыграла математика. Еще в 2013 году распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 n 2506-Р была утверждена Концепция математического образования в Российской федерации. Согласно данной Концепции успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования современных математических методов. Без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализация долгосрочных целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации, модернизация 25 млн. высокопроизводительных рабочих мест к 2020 году. [2]

Реализация данной концепции возможна посредством модернизации математического образования в целом.

В Российской Федерации математика как учебная дисциплина подразделяется на элементарную и высшую математику. Элементарная математика изучается в средней школе, и к ней относятся такие дисциплины, как арифметика, элементарная алгебра, элементарная геометрия (планиметрия и стереометрия);

Теория элементарных функций и элементы анализа.

Высшая математика значительно расширяет спектр математических дисциплин и включает такие разделы как

Алгебра, аналитическая геометрия, математическая логика и др.

В курсе средней школы математика играет системообразующую роль. Она развивает познавательные способности человека и влияет на преподавание других дисциплин. В процессе изучения математики происходит всестороннее развитие учащегося, в частности, его логической культуры.

Формирование логического мышления и логической культуры имеет место уже в курсе основной общей школы, т.к. согласно федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, утвержденному приказом от 17 декабря 2010 г. № 1897 изучение предметной области «математика и информатика» должно обеспечить развитие логического мышления, а одним из предметных результатов изучения этой предметной области является развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений. [3]

Далее, в курсе средней общей школы проблема выходит на новый, более качественный уровень.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования, утвержденному приказом от 06.10.2009 N 413, изучение предметной области «математика и информатика» должно обеспечить, в частности, «сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления». Одним из предметных результатов освоения базового уровня данной предметной области является «владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач». На углубленном уровне результаты освоения базового уровня дополняются такими компонентами, как, например, «сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений». [4]

Исходя из всего вышесказанного проблема развития логической культуры учащихся на сегодняшний день является одной из актуальных проблем современной методики обучения математике.

Цель исследования: выявление путей решения проблемы развития логической культуры учащихся.

Объект исследования: процесс обучения математики.

Предмет исследования: развития логической культуры в процессе изучения математики.

Гипотеза исследования: формирование логической культуры учащихся будет полным и всесторонним, если:

1. Ввести элективный курс «элементы математической логики»;
2. Ввести задачи, направленные на развитие логической культуры в другие разделы курса математики старшей школы.

Цель, объект и гипотеза исследования определили следующие задачи исследования:

1. Проанализировать современную учебную литературу по математике для средней и старшей школы с точки зрения отражения в ней элементов развития логической культуры учащихся;
2. Разработать элективный курс «Элементы математической логики» для старшей школы и методику его реализации;
3. Экспериментально проверить выявленную гипотезу.

Проблему формирования логического мышления и логической культуры изучали такие ученые, как Р. Смаллиан [22], [23], Д. Пойа [20], [21] и др.

Глава 1. Элементы развития логической культуры в школьном курсе математики

§1. Теоретические основы логической культуры

Для того, чтобы дать определение понятия «логическая культура», выясним, что же представляет из себя культура вообще.

Культура - система правил достижения произвольно поставленных целей.

Культура есть также область формального поведения, поскольку она формируется на основе правил достижения целей и сама выражается в виде тех или иных правил и их систем (норм культуры). Культура связана не столько с сознательно выполняемыми действиями, сколько с полубессознательными навыками, привычками. Применительно к логике культурой считается автоматическое совершение логических выводов. [14]

Мы же, не согласившись с точкой зрения Л.Ю. Лариной, попытаемся дать свое определение логической культуры:

Логическая культура - это культура мышления, проявляющаяся в культуре письменной и устной речи. Она включает:

А) определенную совокупность знаний о средствах мыслительной деятельности, ее формах и законах;

Б) умение использовать эти знания в практике мышления — оперировать понятиями, правильно производить те или иные логические операции с ними, строить умозаключения, доказывать и опровергать.

Для более полного и всестороннего формирования логической культуры учащихся в процессе обучения математики необходимо развитие совершения следующих логических операций:

1. Сравнение;
2. Анализ;

a. Восходящий анализ;

b. Нисходящий анализ;

3. Синтез;

4. Абстрагирование;

5. Обобщение;

6. Дедукция;

7. Индукция.

a. Полная индукция;

b. Неполная индукция.

Остановимся подробнее на этих операциях.

Сравнение – мыслительная операция, основанная на установлении сходства и различия между объектами. Результатом сравнения может стать классификация, которая выступает как первичная форма теоретического познания.

Анализ – мыслительная операция расчленения сложного объекта на составляющие его части или характеристики с последующим их сравнением.

Синтез – операция, обратная анализу, позволяющая мысленно воссоздать целое из аналитически заданных частей. Анализ и синтез обычно осуществляются вместе, способствуя более глубокому познанию действительности.

Абстрагирование – операция, основанная на выделении существенных свойств и связей предмета и отвлечении от других, несущественных. Эти выделенные характеристики как самостоятельные предметы в действительности не существуют.

Обобщение – мысленное объединение предметов и явлений по их общим и существенным признакам.

Дедукция – способ рассуждения от общего к частному, от общих положений к частным заключениям.

Индукция – способ рассуждения от частного к общему, от фактов к обобщению.

Различают 2 основных вида индукции: неполную и полную.

Неполная индукция – вывод, основанный на рассмотрении одного или нескольких (но не всех) единичных или частных суждений, относящихся к рассматриваемому понятию (системе понятий).

Полная индукция – вывод, основанный на рассмотрении всех единичных или частных суждений (случаев), относящихся к рассматриваемой ситуации. [24]

Логическое мышление, как один из видов мышления, обладает всеми основными его характеристиками.

§2. Анализ современной учебной литературы на предмет наличия в ней элементов, способствующих развитию логической культуры

Необходимость введения в курс математики элементов логики возникает еще в период 5-6 классов средней школы.

Многие авторы современных учебников, проводя пропедевтическую работу, вводят тем или иным образом раздел, связанный с математической логикой.

В ходе анализа литературы было выявлено 2 подхода к введению данного раздела:

1. Прямой. При этом способе авторы учебника вводят специальный раздел «Язык и логика», «Элементы математической логики» и др. К учебникам с таким способом изложения материала можно отнести, например, учебник Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон [9], [10].

2. Косвенный. В учебниках нет прямого упоминания математической логики, однако имеются задачи из различных разделов математики, направленные на развитие различных логических операций. К таким учебникам можно отнести учебники А.Г. Мерзляка [15], С.М. Никольского [19], С.А. Козловой [13].

Особняком стоят отдельные сборники нестандартных, занимательных и других задач, например, учебное пособие Е.В. Галкина, в котором приведена подборка нестандартных задач различных типов для учащихся средней школы, в т.ч. для 5 – 6 классов. [6], [7]

Рассмотрим более подробно данные подходы к развитию логической культуры в 5-6 классах.

Авторы учебника – Г.В. Дорофеев и Л.Г. Петерсон – не считают необходимым вводить общепринятую терминологию, в частности, кванторы в 5 классе. Раздел «Язык и логика» изложен здесь простым и понятным языком и состоит из следующих подразделов:

1. Высказывания. Здесь авторы дают определение высказывания, истинности и ложности, темы и ремы высказывания. В ходе изучения данного раздела предлагаются задачи на нахождение высказываний среди приведенных предложений, определение истинности высказываний.

2. Общие утверждения. В этом разделе дается определение выражений, содержащих квантор общности, однако сам квантор не вводится. Также здесь сообщается способ опровержения общих выражений при помощи приведения контрпримеров. В ходе изучения данного раздела предлагается решить задачи на нахождение общих выражений из приведенного списка, на приведение контрпримера к данному выражению.

3. «Хотя бы один» (утверждение о существовании); В этом разделе дается определение выражений, содержащих квантор существования, однако сам квантор не упоминается. Также здесь дается правило доказательства таких выражений при помощи приведения примера.

В этом разделе учащимся предлагается решить задачи на нахождение утверждений о существовании, а также на их доказательство.

4. О доказательстве общих утверждений. Здесь учащимся предлагается доказательство общих утверждений методом перебора.

5. Введение обозначений. В этом разделе приводится способ доказательства общих утверждений на бесконечном множестве при помощи введения буквенных обозначений элементов этого множества.

В учебнике за 6 класс авторы вновь рассматривают этот раздел. Здесь структура этого раздела такова:

1. Отрицание высказываний.
   a. Понятие отрицания;
   b. Отрицание общих высказываний;
   c. Отрицание высказываний о существовании.
2. Переменная.
   a. Понятие переменной. Выражения с переменными.
   b. Предложения с переменными.
   c. Переменная и кванторы.
   d. Отрицание утверждений с кванторами.

При косвенном подходе раздел, посвященный элементам математической логики, вводится в учебники далеко не всеми авторами.

Одним из преимуществ такого подхода является то, что навыки использования логических операций, таких как анализ, синтез, сравнение и др., формируются у учащихся на протяжение изучения всех разделов математики.

Наиболее явно это можно проследить в учебнике А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонского, М.С. Якира.

Например, при изучении раздела «Натуральные числа» авторами широко применяются магические квадраты, задачи на переливание, что способствует, в частности, развитию анализа и синтеза.

Также, например, при изучении темы о делении натуральных чисел автор предлагает решить задачу о сгорании веревки. При решении задач такого типа развиваются такие операции, как индукция и дедукция.

Таким образом, пропедевтическую работу по развитию логической культуры необходимо начинать еще в 5-6 классе. Это способствует более успешному изучению этого раздела в старшей школе и применению полученных знаний как при изучении других учебных дисциплин, так и в реальной жизни.

Существующая учебная литература по алгебре для 7-9 классов способствует дальнейшему развитию логического мышления учащихся. Прямое упоминание элементов математической логики в данных учебниках отсутствует, однако система упражнений, в частности так называемых задач повышенной сложности направлена здесь на развитие таких навыков, как анализ информации, наблюдение и эксперимент, конструирование алгоритмов, поиск закономерностей, исследование и т.д.

Кроме непосредственно учебников в курсе алгебры 7-9 классов используются сборники нестандартных задач. В частности, хотелось бы отметить учебное пособие Е.В. Галкина «Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами». [5]

В данном учебном пособии развитию логической культуры учащихся уделено особое внимание.

Данный процесс здесь происходит путем решения всевозможных задач развивающего характера, таких как, например, задачи на взвешивание, задачи на переливание, задачи, решаемые при помощи графов, задачи типа «Рыцари и лжецы» и др.

В учебниках для 10-11 классов авторы продолжают развитие логической культуры учащихся. Мы продолжим использовать прямой и косвенный подходы при анализе данных учебников.

Прямой подход, в частности, применяется такими авторами, как Г.В. Дорофеев [11], [12] и М.И. Шабунин [25].

Рассмотрим структуру раздела «Элементы математической логики на примере учебника М.И. Шабунина.

1. Высказывания и операции над ними. В данном разделе автор дает определение элементарных логических высказываний, сложных высказываний и законов логики.

2. Неопределенные высказывания. Знаки общности и существования. Здесь автор дает понятие предиката и квантора. Также в данном разделе учащимся предлагаются правила построения отрицания высказываний, содержащих кванторы.

3. Некоторые приемы доказательства. В данном разделе разъясняются основные приемы доказательства утверждений, а также правила построения обратных и противоположных утверждений.

Кроме того, автор продолжает логическую линию и в других разделах математики, о чем будет подробно рассказано далее.

Косвенного подхода придерживаются, например, такие авторы, как А.Г. Мордкович [17] и С.М. Никольский.

Например, рассмотрим задачу из раздела «Производные» учебника А.Г. Мордковича.

Известно, что одно из 2 чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение. [18]

В данном случае учащимся применяется анализ.

Пусть x – первое число, тогда x+36 – второе число.

$x(x+36) = x^2 + 36x$ - их произведение.

Для нахождения наименьшего значения произведения найдем минимум функции $f(x) = x^2 + 36x; f'(x) = 2x + 36; 2x + 36 = 0; x = -18; x = -18 -$ минимум функции. $-18 + 36 = 18 -$ второе число.

При решении данной задачи учащийся применяет такие логические операции, как анализ, сравнение и др.

Итак, в ходе анализа учебной литературы был сделан вывод о том, что развитие логического мышления учащихся имеет место быть, однако в основном происходит путем решения задач, не относящихся непосредственно к данному разделу. Изучение разделов курса, направленных на изучение математической логики, происходит лишь на уровне факультативов и элективных курсов.

В процессе анализа учебной литературы по математике и алгебре для 5 – 11 классов было выяснено, что элементы, способствующие развитию логической культуры учащихся, имеются далеко не у всех авторов, и при изучении курса математики старшей школы данная проблема становится наиболее актуальной, т.к. одним из результатов освоения данного курса является подготовленность учащегося к освоению курсов высших учебных заведений, где элементы логической культуры приобретают особую значимость.

Для того, чтобы развитие логической культуры учащихся было полным и всесторонним, при изучении курса математики старшей школы можно использовать 2 пути:

1. Ввести элективные курсы «Язык и логика», «Элементы математической логики» и др. в курс математики старшей школы;
2. Внедрить элементы, способствующие развитию логической культуры, в другие разделы математики.

Глава 2. Методика развитие логической культуры в курсе математики старшей школы

§1. Развитие логической культуры посредством введения раздела «Элементы математической логики»

В современной методике обучения математике имеются различные формы введения данного раздела в курс математики старшей школы. Одной из таких форм является разработка различных элективных курсов, способствующих более успешному изучению данного раздела.

В данных курсах общепринятым считается изучение следующих разделов:

1. Высказывания и операции над ними;
2. Неопределенные высказывания, знаки общности и существования;
3. Некоторые приемы доказательства.

В процессе исследования нами был разработан и апробирован подобный курс.

Данный курс предназначен для повышения уровня логической культуры учащихся и дает возможность их более успешного дальнейшего математического образования.

Содержание курса соотнесено с следующими учебниками:

1. Дорофеев Г.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. I: учебник для общеобразоват. учреждений: / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2005. – 316 с.
2. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса / М. И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 424 с.

Цель курса: на основе коррекции базовых математических знаний и введения нового материала совершенствовать логическую культуру и творческие способности учащихся.

Задачи курса:

1. Формирование у учащихся целостного представления о теме, ее значения в математике, связи с другими темами;

2. Формирование логического мышления, развитие памяти, расширение кругозора;

3. Формирование умения преодолевать трудности при решении усложненных задач;

4. Расширить представления учащихся о математике.

Таблица 1. План элективного курса

Тема	Кол-во часов
Высказывания и операции над ними	8
Неопределенные высказывания, знаки общности и существования	12
Некоторые приемы доказательства	14
Итоговое занятие	2
Всего	36

Таблица 2. Учебно-тематический план

№	Тема урока	Тип урока	Кол-во часов
I	Высказывания и операции над ними		8
1	Знакомство с понятиями «высказывание», «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «эквиваленция», «импликация»	Урок-ознакомление с новым материалом	1
2	Знакомство с понятиями «высказывание», «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция», «эквиваленция», «импликация»	Урок-закрепление изученного	1
3	Алгебра высказываний. Законы алгебры высказываний	Урок-ознакомление с новым материалом	1
4	Алгебра высказываний. Законы алгебры высказываний	Урок-закрепление изученного	2

5	Высказывания и операции над ними	Обобщающий урок	2
6	Высказывания и операции над ними	Контрольная работа по теме	1
II	Неопределенные высказывания, знаки общности и существования		12
1	Предикаты и операции над ними	Урок-ознакомление с новым материалом	1
2	Предикаты и операции над ними	Урок-закрепление изученного	2
3	Знаки общности и существования	Урок-ознакомление с новым материалом	1
4	Знаки общности и существования	Урок-закрепление изученного	1
5	Построение отрицаний высказываний, содержащих знаки общности и существования	Урок-ознакомление с новым материалом	1
6	Построение отрицаний высказываний,	Урок-закрепление изученного	2

	содержащих знаки общности и существования		
7	Неопределенные высказывания, знаки общности и существования	Обобщающий урок	2
8	Неопределенные высказывания, знаки общности и существования	Подготовка к контрольной работе	1
9	Неопределенные высказывания, знаки общности и существования	Контрольная работа	1
III	Некоторые приемы доказательства		14
1	Необходимое и достаточное условие	Урок-ознакомление с новым материалом	1
2	Необходимое и достаточное условие	Урок-закрепление изученного	1
3	Обратная и противоположная теоремы. Контрапозиция	Урок-ознакомление с новым материалом	1
4	Обратная и	Урок-	2

	противоположная теоремы. Контрапозиция	закрепление изученного	
5	Принцип полной дизъюнкции	Урок-ознакомление с новым материалом	1
6	Принцип полной дизъюнкции	Урок-закрепление	1
7	Метод математической индукции	Урок-ознакомление с новым материалом	1
8	Метод математической индукции	Урок-закрепление изученного	2
9	Некоторые приемы доказательства	Обобщающий урок	2
10	Некоторые приемы доказательства	Подготовка к контрольной работе	1
11	Некоторые приемы доказательства	Контрольная работа	1
IV	Подготовка к итоговой контрольной работе		1
V	Итоговая контрольная работа		1

Приведем конспект одного из уроков данного курса.

Конспект урока

Класс: 10;

Тема урока: неопределенные высказывания, знаки общности и существования;

Тип урока: урок-закрепление изученного;

Цели урока:

1. Образовательная: Закрепление понятий «неопределенные высказывания», «кванторы» и операций над ними;

2. Развивающая: Развитие памяти, внимания, логического мышления;

3. Воспитательная: воспитание умения работать в коллективе.

Ход урока:

1. Организационный момент (2 мин);

2. Проверка домашнего задания (5 мин);

3. Актуализация изученного (5 мин);
Что такое неопределенное высказывание? Неопределенным высказыванием называется предложение, содержащее переменные, при подстановке конкретных значений этих переменных образующееся в высказывание.
Какие кванторы вам известны? Известно 2 вида кванторов: квантор общности и квантор существования;
Как построить отрицание высказываний, содержащих кванторы? Для построения отрицания высказывания, содержащего кванторы, нужно поменять кванторы местами, а высказывательную форму заменить ее отрицанием.

4. Закрепление изученного (25 мин);
I.13. Записать с помощью кванторов следующие высказывания и установить, истинны они или ложны:
1. Если некоторое число делится на 6, то оно делится на 3;

Учащиеся видят, что данная фраза представляет собой импликацию. Данная импликация записывается следующим образом:

$$x:6 \Rightarrow x:3$$

Применяя квантор общности, получим:

$$\forall x(x:6 \Rightarrow x:3);$$

Для того, чтобы выяснить истинность высказывания, представим число, делящееся на 6, как 6n.

$$6n = 2 \cdot 3n. \text{ Следовательно, высказывание истинно.}$$

2. Существует число большее 10, и меньшее 9.
В данном случае очевидно, что необходимо использовать квантор существования и конъюнкцию 2 высказываний: x>10 и x<9.

$$\exists x(x > 10 \wedge x < 9)$$

Число не может быть одновременно больше 10 и меньше 9. Поэтому данное высказывание ложно.
I.14. Выяснить, истинны или ложны следующие высказывания:
1. $\forall x(x > 2 \vee x < 2);$
Данное высказывание ложно, так как:

$$\exists x(x = 2);$$

2. $\exists x(x < 10 \wedge x > 9)$. Для определения истинности высказывания, содержащего квантор существования, достаточно привести пример такого числа, например, x=9,1.
I.15. Построить отрицания следующих высказываний, выяснить, истинны они или ложны.

1. $\forall x(x > 2 \vee x < 3);$

Для построения отрицания изменим квантор общности на квантор существования и построим отрицание высказывания:
$\exists x(x \leq 2 \wedge x$
$\geq 3).$ Данное высказывание ложно, следовательно, исходное высказывание ист
2. $\exists x(x > 10 \wedge x < 9).$

$\forall x(x \le 10 \vee x$

$\ge 9)$. Данное высказывание ложно, следовательно, истинно исходное высказыва

I.20. Натуральное число n является составным тогда и только тогда, когда оно имеет делители, отличные от 1 и самого себя. Записать символически с помощью кванторов это определение.

$$\mathrm{A(n)} \equiv \{\text{Число n является составным}\};\quad \forall n \in \mathrm{N}\big(\mathrm{A(n)} \sim (\exists m \in \mathrm{N} \exists k \in \mathrm{N})(m \ne 1 \wedge m \ne n\text{ч} \wedge n = km)\big)$$

5. Запись домашнего задания (3 мин).

I.21. Записать с помощью кванторов неопределенное высказывание, заданное на множестве натуральных чисел:

$$\mathrm{A(m,n)} \equiv \{\text{Числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1}\}$$

$$\mathrm{A(m,n)} \equiv \left\{\forall a \in \mathrm{N}\left(\left(\exists N(m = ab)\right) \wedge \left(\exists c \in N(n = ac)\right)\right) \Rightarrow a = 1\right\}$$

В процессе данного урока учащиеся развивают навыки работы со знаково-символической системой, а также навык применения логических операций в процессе решения задач.

§2. Развитие логической культуры учащихся в процессе изучения других разделов математики

Развитие логического мышления должно происходить в течение всего курса математики старшей профильной школы, и педагог должен прилагать максимальные усилия для этого развития, подбирая соответствующий учебный материал.

Для многих разделов курса математики подбор материала по развитию логического мышления является не столь очевидным.

Выясним, возможно ли формирование и развитие основных психологических операций, входящих в состав мышления, в ходе решения задач с целыми числами раздела «Элементы теории чисел».

Для этого проанализируем задачу XIX.30 б) из учебника М.И. Шабунина.

$\text{Найти все простые числа p, для которых число } 4p + 1 \text{ является кубом некоторого целого числа } [26].$

На первом этапе решения задачи ученик строит математическую модель.

$$4p + 1 = a^3$$

В ходе преобразования данного выражения используется прием нисходящего анализа:

$4p = a^3 - 1; 4p = (a - 1)(a^2 + a + 1);$

Далее мы снова применяем анализ, разбивая полученное утверждение на несколько случаев:

$$4 = (a - 1), p = (a^2 + a + 1); 2)\ 2 = (a - 1), 2p = (a^2 + a + 1); 3)\ 1 = (a - 1), 4p = (a^2 + a + 1); 4)\ 4 = (a^2 + a + 1), p = (a - 1); 5)\ 2 = (a^2 + a + 1), 2p = (a - 1); 6)\ 1 = (a^2 + a + 1), 4p = (a - 1).$$

Далее учащийся применяет полную индукцию, рассматривая вышеуказанные случаи как системы уравнений:

$$1)\begin{cases}4=(a-1)\\p=(a^2+a+1)\end{cases},\begin{cases}a=5\\p=31\end{cases};2)\begin{cases}2=(a-1)\\2p=(a^2+a+1)\end{cases},\begin{cases}a=3\\p=\dfrac{13}{2}\end{cases};\ 3)\begin{cases}1=(a-1)\\4p=(a^2+a+1)\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}4=(a^2+a+1)\\p=(a-1)\end{cases},\begin{cases}a=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\\p=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\end{cases};5)\begin{cases}2=(a^2+a+1)\\2p=(a-1)\end{cases},\begin{cases}a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\p=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}\end{cases};6)\begin{cases}1=\\4p\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=0\\p=0\end{cases},\ \begin{cases}a=-1\\p=-\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Далее, применяя приемы синтеза, обобщения и сравнения (последнее используется, когда учащийся выясняет, является ли p целым и простым числом), получаем, что решением задачи является число 31.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в процессе решения задач с целыми числами происходит формирование и развитие логического мышления учащихся.

Проанализируем некоторые задания, входящие в другие разделы математики на предмет наличия в них элементов, способствующих развитию логической культуры.

Рассмотрим, например, задачу из раздела «Уравнения и неравенства», входящую в учебник А.Г. Мордковича:

Сумма 3 чисел равна восьми, а сумма их квадратов равна 26. Найдите эти числа, если известно, что одно из них на 2 больше другого.

Данную задачу можно решить несколькими способами.

1. Простым перебором, используя анализ. Зная, что число 5 в квадрате равно 25, мы уже не можем брать числа, большие 5. Таким образом, перебирая различные комбинации, мы получили числа 1, 3 и 4. При этом мы использовали анализ и дедукцию.

2. Решая систему уравнений и используя анализ, синтез, дедукцию и индукцию.

$$\begin{cases}x+y+z=8\\x^2+y^2+z^2=26\\x=2+y\end{cases},\begin{cases}2+2y+z=8\\x^2+y^2+z^2=26\\x=2+y\end{cases},\begin{cases}2y+z=6\\x^2+y^2+z^2=26\\x=2+y\end{cases},\begin{cases}z=6-2y\\x^2+y^2+z^2=26,\\x=2+y\end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 6 - 2y \\ (2+y)^2 + y^2 + (6-2y)^2 = 26 \\ x = 2 + y \end{cases}, \begin{cases} z = 6 - 2y \\ 4 + 4y + y^2 + y^2 + 36 - 24y + 4y^2 = 26, \\ x = 2 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 6 - 2y \\ 6y^2 + 14 - 20y = 0 \\ x = 2 + y \end{cases}, \begin{cases} z = 6 - 2y \\ 3y^2 - 10y + 7 = 0. \\ x = 2 + y \end{cases}$$

Решим отдельно 2-е уравнение системы:

$$3y^2 - 10y + 7 = 0,$$

$$D = 100 - 84 = 16;$$

$$y_1 = \frac{10+4}{6} = 2\frac{1}{3},$$

$$y_2 = \frac{10-4}{6} = 1.$$

$$\begin{cases} xx_1 = 2 + 2\frac{1}{3} \\ y_1 = 2\frac{1}{3} \\ z_1 = 6 - 4\frac{2}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 4\frac{1}{3} \\ y_1 = 2\frac{1}{3}; \\ z_1 = 1\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 + 1 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = 6 - 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1. \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

Итак, при помощи первого способа можно подобрать лишь целочисленное решение. Однако, применив анализ и построив математическую модель и составив систему уравнений было получено и второе, не столь очевидное решение.

Таким образом, при решении данной задачи учащийся применяет различные логические операции, тем самым развивая логическую культуру.

§3. Развитие логической культуры при решении комбинированных и нестандартных задач

В современном курсе математики все чаще применяются так называемые комбинированные задачи, т.е. задачи, включающие в себя использование различных разделов математики. Например, к таким задачам можно отнести задачи на использование так называемых «Неравенств треугольника», т.е. применение алгебраических методов при решении геометрических задач. Также в современной практике используются задачи на комбинирование тригонометрии и алгебры и др.

Проанализируем некоторые из данных задач на предмет формирования при их решении логической культуры учащихся.

№1. Числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$. Доказать, что $|ac-bd|\le 1$. Поскольку $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$, то можно сделать замену, и существуют такие α и β, что $a=\sin\alpha, b=\cos\alpha, c=\sin\beta, d=\cos\beta$. Имеем ac-bd$=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta)$. Следовательно, $|ac-bd|\le 1$. [16]

№2. Известно, что $m^2+n^2=1, p^2+q^2=1, mp+nq=0$. Вычислить mn+pq. Решение: положим $m=\sin\alpha, n=\cos\alpha, p=\sin\beta, q=\cos\beta$. Отсюда $mp+nq=\cos(\alpha-\beta)$. Из условия следует, что $\cos(\alpha-\beta)=0$. Далее $mn+pq=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0$.

№3. Решить уравнение: $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

Решение: $|x|\le 1$. $x=\cos\alpha, \alpha\in[0;\ \pi]$, приходим к уравнению

$\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ или $]\sin\alpha] = \cos 3\alpha$. Поскольку $\sin\alpha \geq 0$, то $\sin\alpha = \cos 3\alpha$ или $\cos 3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$. Уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \text{где n и k} - \text{целые} \end{array}\right.$$

Из полученных двух серий корней выберем те, которые удовлетворяют условию $0 \leq \alpha \leq \pi$. Получим $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}, \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $x = \cos\frac{\pi}{8}$, или $x = \cos\frac{5\pi}{8}$, или $x = \cos\frac{3\pi}{4}$.

В ходе решения данных задач учащимися применяется анализ, синтез и ряд других логических операций.

В частности, это проявляется при использовании тригонометрических формул и соотношений при решении алгебраических задач.

Как известно, главенствующую роль при изучении математики играет решение задач. На протяжении всего школьного курса учащимися решались различные задачи. Через задачу у учащихся происходит формирование и развитие всевозможных навыков.

Согласно федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования современное общество нуждается в людях, умеющих творчески и подходить к поставленным задачам.

В связи с этим, возникает необходимость в разработке и внедрении так называемых нестандартных задач, которые нельзя отнести к классу алгоритмически разрешимых.

Нестандартная задача – задача, для решения которой не существует готового алгоритма решения.

Как правило, такие задачи поначалу вызывают у школьников негативное впечатление. Однако, если вводить такие задачи постепенно с самого начала обучения, то учащиеся овладевают навыками подхода к решению таких задач, и они не вызывают столь негативного отношения. [8]

Отсутствие алгоритма, необычные формулировки и многие другие элементы таких задач заставляют школьников задуматься и начать размышлять. Следовательно, наличие элемента развития логической культуры в таких задачах наиболее очевидно.

Рассмотрим некоторые виды нестандартных задач и выявим в них элементы, способствующие развитию логической культуры учащихся:

1. Задачи на переливание:

Данные задачи имеют следующий вид: с помощью некоторого количества сосудов определенного объема необходимо набрать некоторое количество жидкости.

Проанализируем подобную задачу:

Какое наименьшее число переливаний потребуется для того, чтобы в четырехлитровую кастрюлю с помощью крана и пятилитровой банки налить 3 литра воды?

Применим анализ и построим математическую модель, составив таблицу:

Таблица №3.

5	1	1	0	5	2	2	0	5	3
0	4	0	1	1	4	0	2	2	4

Таким образом, можно сделать вывод, что при решении задач такого типа происходит развитие логической культуры учащихся.

2. Задачи на взвешивание: имеется определенное количество монет и чашечные весы без гирь. Одна из этих монет – фальшивая. В некоторых случаях в задаче не говорится, легче она или тяжелее.

Учащимся предлагается либо найти фальшивую монету, либо определить, легче или тяжелее она, чем настоящие?

Решим задачу:

Имеется 8 монет. Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты. Определите за 3 взвешивания какая из монет фальшивая.

Решение

Делим монеты на две равные кучки – по 4 монеты в каждой. Взвешиваем. Ту кучку, которая легче, опять делим на две одинаковых кучки – теперь по две монеты

в каждой. Взвешиваем. Определяем, какая из них легче. Кладем на чаши весов по 1 монете из этой кучки. Фальшивая та, которая легче. Задача решена.

При решении задачи мы использовали дедукцию, следовательно, здесь также имеет место развитие логической культуры учащихся.

3. Задачи о рыцарях и лжецах — разновидность увлекательных математических задач, в которых фигурируют персонажи: Лжец (плут, вампир, сумасшедший, оборотень) — человек, всегда говорящий ложь.
Рыцарь (правдолюбец, правдец) - человек, говорящий всегда правду. Решение подобных задач обычно сводится к перебору вариантов с исключением тех, которые приводят к противоречию.

Решим такую задачу:

На острове правдолюбцев и лжецов местный житель К говорит о себе и другом жителе М острова: «По меньшей мере один из нас лжец». Кем являются К и М?

Решение: предположим, что К – лжец. Тогда его утверждение ложно, а значит, К и М – правдолюбцы.

Но это противоречит нашему предположению, следовательно, К – правдолюбец. Тогда его утверждение истинно, откуда М является лжецом.

Ответ: К – правдолюбец, М – лжец.

Входе решения данной задачи были использованы анализ и синтез, а также приемы работы с высказываниями, состоящие в выявлении противоречий.

4. Еще одним типом логических задач являются задачи на принцип Дирихле.

Рассмотри одну из них:

Докажите, что среди любых n+1 натуральных чисел найдутся 2 числа таких, что их разность делится на n.

Решение: возьмем любые 2 числа a и b из данных n+1 натуральных чисел и разделим их на n с остатком:

$$a = nq_1 + r_1, b = nq_2 + r_2.$$

Здесь 2 остатка r_1 и r_2 не отрицательны и меньше n. Вычтем эти равенства почленно:

$$a - b = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Пусть разность a-b делится на n. Тогда и разность $r_1 - r_2$делится на n. Но так как последняя разность по модулю меньше n, то делиться на n она может только тогда, когда обращается в 0: $r_1 - r_2 = 0,$ откуда $r_1 = r_2$.

Обратно, если $r_1 = r_2,$ то очевидно, разность a-b делится на n.

В результате мы получили другую, более простую формулировку данной задачи, равносильную первой: докажите, что среди любых n+1 натуральных чисел найдутся 2 числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

Будем решать задачу в этой новой форме. Разделим каждое из n+1 чисел на n с остатком; получим n+1 остатков. Остатки могут принимать значения 0, 1, 2…n-1, а, следовательно, не более n различных значений.

Принцип дирихле предполагает работу с ящиками и раскладываемыми по ним предметами. Здесь роль ящиков играют различные значения остатка, а роль предметов, раскладываемых по ящикам, - данные n+1 натуральных чисел. Поскольку предметов больше, чем ящиков, то по принципу Дирихле существует ящик, в который попадет больше одного предмета, т.е. среди данных чисел найдутся по меньшей мере 2 числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

При решении данной задачи широко применялись основные приемы доказательств, а также математическое моделирование и использование таких логических операций, как, например, анализ, индукция и др.

Следовательно, при решении данных задач происходит развитие логической культуры учащихся.

Глава 3. Экспериментальная проверка гипотезы исследования

В ходе прохождения педагогической практики было проведено анкетирование среди учителей математики школ г. Челябинска. Анкета содержала следующие вопросы:

Оцените уровень сформированности логической культуры у учащихся 10 классов от 1 до 5, где 1 – низший балл, 5 – высший балл;

Предпринимаются ли вами меры по развитию логической культуры учащихся?

1. Да;
2. Нет.

Какие меры по развитию логической культуры учащихся предпринимаются вами?

Считаете ли вы необходимым развитие логической культуры учащихся в процессе обучения математики? Объясните свой ответ.

после проведения анкетирования среди преподавателей были получены следующие результаты:

- В среднем уровень сформированности у учащихся логической культуры равен примерно 3,7 баллов;
- Большинство учителей в ходе своей работы предпринимают меры по развитию логической культуры учащихся, такие как, например, введение различных элективных курсов по данной теме, внедрение задач логического характера в другие темы курса алгебры и геометрии и т.д.

Среди учащихся было проведено 2 диагностические работы.

1-я проводилась до изучения темы «Элементы математической логики». Она включала в себя 4 задачи занимательного характера на различные темы (задачи, решаемые с помощью таблиц, задачи типа «рыцари и лжецы» и т.д.). Она была направлена на диагностику уровня логической культуры учащихся перед изучением темы «Элементы математической логики».

Контрольная работа №1.

№1.

Вариант 1. Можно ли, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 12 л и 9 л, набрать из речки ровно 4 л воды?

Решение: Так как начальные емкости ведер делятся на 3, то при любом переливании из одного ведра в другое, и набирании воды из речки в каждом из них будет находиться количество воды с объемом, делящимся на 3.

Но поскольку 4 на 3 не делится, то 4 литра воды получиться не могут.

Ответ: нельзя.

Вариант 2. Как с помощью двух пустых бидонов емкостью 17 л и 5 л отлить из молочной цистерны ровно 13 л молока?

Таблица №4.

0	5	5	10	10	15	15	17	0	3	3	8	8	13
5	0	5	0	5	0	5	3	3	0	5	0	5	0

Вариант 3. Как, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 12 л и 7 л, а также водопроводным краном и раковиной, налить ровно 1 л воды?

Таблица №5.

0	7	7	12	0	2	2	9	9	12	0	4	4	11	11	12	0	6	6	12
7	0	7	2	2	0	7	0	7	4	4	0	7	0	7	6	6	0	7	1

№2.

Вариант 1.

А, Б, В и Г – друзья. Один из них – врач, другой – журналист, третий – тренер спортивной школы и четвертый – строитель.

Журналист написал статьи об А и Г. Тренер и журналист вместе с Б ходили в туристический поход. А и Б были на приеме у врача. У кого какая профессия?

Таблица №6.

	Врач	Журналист	Тренер	Строитель
А	-	-	+	-
Б	-	-	-	+
В	-	+	-	-
Г	+	-	-	-

Ответ: А – тренер, Б – строитель, В – журналист, Г – врач.

Вариант 2. В одном дворе живут 4 друга. Вадим и шофер старше Сергея.; Николай и слесарь занимаются боксом; Электрик – младший из друзей; По вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.

Таблица №7.

	Шофер	Слесарь	Электрик	Токарь
Вадим	-	-	-	+
Сергей	-	+	-	-
Николай	-	-	+	-
Антон	+	-	-	-

Ответ: Вадим – токарь, Сергей – слесарь, Николай – электрик, Антон – шофер.

Вариант 3. Встретились 3 друга – Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу, одетому в серый костюм: «Интересно, что на одном из нас белый костюм, на другом – серый и на третьем – черный, но ка каждом костюм цвета, не соответствующего фамилии. Какой цвет костюма у каждого из друзей?

Таблица №8.

	Белый	Черный	Серый
Белов	-	-	+
Чернов	+	-	-
Серов	-	+	-

Ответ: Белов одет в серый костюм, Чернов – в белый, Серов – в серый.

№3.

Вариант 1. Один человек является правдолюбцем, но, когда ему дважды задали один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Укажите хотя бы один такой вопрос.

Решение: в данном случае можно задать любой вопрос, связанный с изменением времени, например, спросить о возрасте правдолюбца.

Вариант 2. Один человек является правдолюбцем, другой – лжецом. Найдите хотя бы один вопрос, который нужно задать каждому из них, чтобы они дали на него одинаковые ответы.

Решение: в данном случае можно задать вопрос о сущности человека, например, спросить у лжеца, лжец ли он.

Вариант 3. На острове, где живут только правдолюбцы и лжецы, путешественник встретил одного из местных жителей. Укажите хотя бы один вопрос, который он должен задать жителю для того, чтобы понять, кто он – правдолюбец или лжец?

Решение: можно задать жителю вопрос о том, из данного ли он города. Если прозвучит положительный ответ, то можно сделать вывод о том, что данный местный житель – правдолюбец. Если же прозвучит отрицательный ответ, то данный местный житель – лжец.

№4.

Вариант 1. Среди 18 монет одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая.

Решение: разделим монеты на 3 равные кучки по 6 монет. После первого взвешивания возможно 2 случая:

1. Взвешиваемые кучки находятся в равновесии. Следовательно, в них содержатся настоящие монеты. Далее мы взвешиваем одну кучку, состоящую из настоящих монет, и оставшуюся кучку, в которой, как нам стало известно, есть фальшивая монета. После данного взвешивания мы можем сделать вывод о том, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета.

2. Во втором случае для простоты пронумеруем кучки монет. Сравним сначала 1-ю и 2-ю кучки. Их вес различен, Т.к. Одна из кучек содержит фальшивую монету, то мы, взвесив 1-ю и 3-ю кучки, можем определить, какая из кучек содержит фальшивую монету, и, соответственно, легче или тяжелее фальшивая монета.

Ответ: за 2 взвешивания.

Вариант 2. Среди 25 деталей одна бракованная, остальные – стандартные. Все стандартные детали весят одинаково. Бракованная отличается по массе от стандартных. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно установить, легче или тяжелее бракованная деталь, чем стандартная?

Решение, разделим детали на 4 кучки: в 3 из них содержится по 8 деталей, а в 4-й – 1 деталь.

Пронумеруем кучки и взвесим 1-ю и 2-ю кучки.

Возможно несколько случаев.

1. Кучки находятся в равновесии. В этом случае взвешиваем 2-ю и 3-ю кучки. Здесь также возможно 2 случая:

1. 2-я и 3-я кучки находятся в равновесии. В этом случае бракованной является единственная деталь из 4-й группы. И, сравнив ее с любой из стандартных деталей, мы можем определить, легче она или тяжелее.

2. 2-я и 3-я кучки имеют различный вес. Мы знаем, что 2-я кучка содержит только стандартные детали, и поэтому мы можем сделать вывод, что в 3-й кучке содержится бракованная деталь. Также можно определить, легче она или тяжелее.

2. 1-я и 2-я кучки имеют разный вес. Взвешиваем 1-ю и 3-ю кучки. Если кучки в равновесии, то бракованной является последняя деталь. Сравнив ее с любой из стандартных, мы можем определить, легче она или тяжелее.
Если 1-я и 3-я кучки имеют различный вес, то бракованная деталь в 1-й кучке, и мы можем определить, легче она или тяжелее.

Ответ: минимальное количество взвешиваний равно 3.

Вариант 3.

Среди 13 деталей одна бракованная, остальные – стандартные. Все стандартные детали весят одинаково. Бракованная отличается по массе от стандартных. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно установить, легче или тяжелее бракованная деталь, чем стандартная?

Решение, разделим детали на 4 кучки: в 3 из них содержится по 4 детали, а в 4-й – 1 деталь.

Пронумеруем кучки и взвесим 1-ю и 2-ю кучки.

Возможно несколько случаев.

2. Кучки находятся в равновесии. В этом случае взвешиваем 2-ю и 3-ю кучки. Здесь также возможно 2 случая:

3. 2-я и 3-я кучки находятся в равновесии. В этом случае бракованной является единственная деталь из 4-й группы. И, сравнив ее с любой из стандартных деталей, мы можем определить, легче она или тяжелее.

4. 2-я и 3-я кучки имеют различный вес. Мы знаем, что 2-я кучка содержит только стандартные детали, и поэтому мы можем сделать вывод, что в 3-й кучке содержится бракованная деталь. Также можно определить, легче она или тяжелее.

3. 1-я и 2-я кучки имеют разный вес. Взвешиваем 1-ю и 3-ю кучки. Если кучки в равновесии, то бракованной является последняя деталь. Сравнив ее с любой из стандартных, мы можем определить, легче она или тяжелее.
Если 1-я и 3-я кучки имеют различный вес, то бракованная деталь в 1-й кучке, и мы можем определить, легче она или тяжелее.

Ответ: минимальное количество взвешиваний равно 3.

По окончании темы была проведена 2-я диагностика, представляющая собой решение контрольной работы по теме «Элементы математической логики, направленная на оценку уровня сформированности у учащихся логической культуры после изучения темы.

Контрольная работа №2.

№1. С помощью таблицы истинности установить, верна ли формула?

Вариант 1: $\big(A \vee (B \Rightarrow C) \sim (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)\big)$

Таблица №9.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \vee (B \Rightarrow C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И	Л	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И

Ответ: формула верна.

Вариант 2. $\big(A \wedge (B \Rightarrow C) \sim (A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge C)\big)$

Таблица 10.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	И
Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	И
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	И
Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И

Ответ: формула не верна.

Вариант 3. $\big(A \Rightarrow (B \wedge C) \sim (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)\big)$

Таблица №11.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \Rightarrow (B \wedge C)$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И	И	И	И

Л	И	Л	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И	И

Ответ: формула верна.

№2. Построить отрицание формулы и упростить полученную формулу.

Вариант 1. $A\overline{B} \vee (B \Rightarrow A) \vee AB$; $\overline{A\overline{B} \vee (B \Rightarrow A) \vee AB} \equiv \overline{A\overline{B}} \wedge \overline{\bar{A} \vee B} \wedge \overline{AB} \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge \overline{\bar{A} \vee B} \wedge \overline{AB} \equiv Л \wedge \overline{AB} = Л$

Вариант 2. $(\overline{A}B) \vee (\overline{B}A) \vee (AB)$; $\overline{(\overline{A}B) \vee (\overline{B}A) \vee (AB)} \equiv \overline{(\overline{A}B)}\,\overline{(\overline{B}A)}\,\overline{(AB)} \equiv (A \vee \overline{B})(\overline{A} \vee \overline{B})(\overline{A} \vee B) \equiv \bar{B}(\overline{A} \vee B) \equiv Л \vee (\bar{A}\bar{B}) \equiv \bar{A}\bar{B}$

Вариант 3. $B\overline{A} \vee (B \Rightarrow \overline{A}) \vee \overline{(AB)}$; $\overline{B\overline{A} \vee (B \Rightarrow \overline{A}) \vee \overline{(AB)}} \equiv \overline{B\overline{A}} \wedge \overline{(B \Rightarrow \overline{A})} \wedge \overline{(AB)} \equiv (\bar{B} \vee A) \wedge (\bar{B} \vee \bar{A}) \wedge \overline{(A \vee B)} \equiv (\bar{B} \vee A) \wedge (\bar{B} \vee \bar{A}) \wedge (\bar{A} \wedge \bar{B}) \equiv \bar{B} \wedge \bar{A} \wedge \bar{B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$

№3. Записать символически с помощью кванторов следующее высказывание:

Вариант 1. Существует 3 натуральных числа, сумма и произведение которых равны 1.

$$\exists a \in n \exists b \in N \exists c \in N(a + b + c = 1 \wedge abc = 1)$$

Вариант 2. В ряду натуральных чисел существуют 100 идущих подряд составных чисел.

Пусть S – множество составных чисел. Тогда $\exists n \in N \forall k \in N(k \leq 100 \Rightarrow n + k \in S)$

Вариант 3. В прямоугольном треугольнике, длины сторон которого выражаются натуральными числами, длины обоих катетов не могут быть нечетными числами.

Пусть Т – множество прямоугольных треугольников. Н – множество нечетных чисел. Тогда:

$$\forall t \in T(A(t) \in N \wedge B(t) \in N \wedge C(t) \in N \Rightarrow A(t) \notin H \vee B(t) \notin H)$$

№4. Запишите символически с помощью кванторов следующую теорему и сформулируйте (не в символическом виде) для нее теоремы: обратную, противоположную и противоположную к обратной.

Вариант 1. Если на плоскости 2 прямые перпендикулярны третьей, то они либо параллельны между собой, либо совпадают.

Пусть L – множество прямых на плоскости. Тогда: $\forall a \in L \forall b \in L \forall c \in L \exists a \perp b (b \perp c \Rightarrow a \parallel c \vee a = c)$

Обратная теорема: Если две прямые параллельны или совпадают, и одна из них перпендикулярна некоторой прямой, то другая прямая также перпендикулярна этой прямой.

Противоположная теорема: Если одна из двух прямых перпендикулярна третьей, а другая – не перпендикулярна, то эти прямые не параллельны и не совпадают.

Теорема, противоположная к обратной: Если две прямые не параллельны и не совпадают, и одна из них перпендикулярна некоторой прямой, то другая прямая не перпендикулярна этой прямой.

. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$

Пусть m(n) – множество н-угольников; MV(n) – множество выпуклых n-угольников, S(m) – сумма внутренних углов n-угольника. Тогда:

$$\forall n \in N \forall m \in M(n) \big(MV(n) \Rightarrow S(n) = 180°(n-2)\big)$$

Обратная теорема: Если сумма внутренних углов некоторого n-угольника равна $180°(n-2)$, то этот многоугольник выпуклый.

Противоположная теорема. Если n-угольник невыпуклый, то сумма его внутренних углов не равна $180°(n-2)$.

Теорема, противоположная к обратной: Если сумма углов некоторого n-угольника не равна $180°(n-2)$, то этот $n-$ угольник невыпуклый.

Вариант 3. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Пусть P – множество плоскостей, L – множество прямых в пространстве, Через $A(a, \alpha)$ – неопределенное высказывание «прямая a пересекает плоскость α». Тогда:

$$\forall a \in L \forall b \in L \forall \alpha \in P\big(a \parallel b \wedge A(a, \alpha) \Rightarrow A(b, \alpha)\big)$$

Обратная теорема: Если одна из двух прямых пересекает данную плоскость, то прямая, параллельная данной тоже пересекает эту плоскость.

Противоположная теорема: если две прямые не параллельны, или одна из них не пересекает произвольную плоскость, то и другая прямая не пересекает эту плоскость.

Теорема, противоположная к обратной: Если одна прямая не пересекает произвольную плоскость, то и другая прямая не пересекает эту плоскость, либо эти прямые не параллельны.

Результаты диагностических работ представлены в таблицах.

Таблица №12. Результаты диагностической работы №1.

Оценка	Число учащихся (%)	Количество учащихся
«Отлично»	16,7%	6
«Хорошо»	36,1%	13
«Удовлетворительно»	25%	9
Неудовлетворительно	22,2%	8

Таблица №13. Результаты диагностической работы №8.

Оценка	Число учащихся (%)	Количество учащихся
«Отлично»	38,9%	14
«Хорошо»	47,2%	17
«Удовлетворительно»	8,3%	3

Неудовлетворительно	5,6%	2

Проверим гипотезу исследования при помощи критерия знаков (G-критерий).

Сформулируем гипотезу H_0: «Проведение элективного курса «Элементы математической логики», а также введение задач, направленных на развитие логической культуры, в другие разделы математики не способствует формированию логической культуры учащихся».

Тогда альтернативная гипотеза H_1 будет иметь вид: «Проведение элективного курса «Элементы математической логики», а также введение задач, направленных на развитие логической культуры, в другие разделы математики будет способствовать формированию логической культуры учащихся».

Перепишем результаты выполнения контрольных работ в виде таблицы:

Таблица №14.

Учащийся (№)	Результат выполнения первой работы	Результат выполнения второй работы	Знак разности отметок
1	5	5	0
2	5	5	0
3	5	5	0
4	5	5	0
5	5	5	0
6	5	5	0
7	4	5	+
8	4	5	+

9	4	5	+
10	4	5	+
11	4	5	+
12	4	5	+
13	4	5	+
14	4	5	+
15	4	4	0
16	4	4	0
17	4	4	0
18	4	4	0
19	4	4	0
20	3	4	+
21	3	4	+
22	3	4	+
23	3	4	+
24	3	4	+
25	3	4	+
26	3	4	+
27	3	4	+
28	3	4	+
29	2	4	+
30	2	4	+
31	2	4	+
32	2	3	+
33	2	3	+
34	2	3	+
35	2	2	0
36	2	2	0

Здесь типичным является положительный сдвиг, следовательно, $G_{эмп}$=0. $G_{крит}$=5 при уровне значимости 0,01.

$G_{эмп} < G_{крит}$, следовательно, гипотеза H_0 не верна, а значит, имеет место гипотеза H_1.

Заключение

В 2018 году исполняется 25 лет со дня принятия Конституции Российской Федерации, ч. 3 ст. 43 которой гласит: «Каждый вправе на конкурсной основе бесплатно получить высшее образование в государственном или муниципальном образовательном учреждении и на предприятии». [1]

Получение высшего образования способствует повышению конкурентоспособности граждан, а, следовательно, и развитию экономических отношений не только с точки зрения производства товаров и услуг, но и с точки зрения потребительского рынка. И неотъемлемой частью успешного процесса получения высшего образования является высокий уровень сформированности логической культуры учащегося.

Исходя из вышеизложенного, актуальность проблемы формирования логической культуры учащихся в процессе обучения математике не вызывает сомнений.

В первой главе настоящей работы был исследован теоретический аспект логического мышления и логической культуры, а также была проанализирована современная учебная литература по математике для 5-11 классов на предмет наличия в ней элементов, способствующих формированию логической культуры.

Во второй главе была представлена разработка элективного курса «Элементы математической логики», а также исследована проблема формирования логической культуры в процессе изучения других разделов математики и решения комбинированных и нестандартных задач.

В третьей главе посредством экспериментальной проверки было выяснено, что введение элективного курса «Элементы математической логики», а также решение комбинированных и нестандартных задач при изучении других разделов математики способствует более успешному формированию логической культуры учащихся в процессе обучения математики.

Итак, в процессе настоящего исследования нами было сделано следующее:

1. Проанализирована современная литература по математике на предмет наличия в ней элементов, способствующих формированию логической культуры учащихся;
2. Разработан и апробирован элективный курс «Элементы математической логики», направленный на развитие логической культуры учащихся;
3. Экспериментально проверена гипотеза исследования.

Таким образом можно сделать вывод о том, что задачи исследования решены, гипотеза подтверждена, цель достигнута.

Настоящее исследование нельзя считать завершенным. Так, его можно расширить, введя задачи, направленные на развитие логической культуры, в другие, не рассмотренные нами разделы математики. Также продолжением работы можно считать исследование формирования логической культуры в процессе изучения математики в высших учебных заведениях.

Список литературы

1. "Конституция Российской Федерации" (принята всенародным голосованием 12.12.1993) (с учетом поправок, внесенных Законами РФ о поправках к Конституции РФ от 30.12.2008 N 6-ФКЗ, от 30.12.2008 N 7-ФКЗ, от 05.02.2014 N 2-ФКЗ, от 21.07.2014 N 11-ФКЗ) [электронный ресурс] // СПС КонсультантПлюс. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_28399/ (дата обращения: 28.06.2017).
2. Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 N 2506-р <Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации> [электронный ресурс] // СПС КонсультантПлюс. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_156618/ (дата обращения: 28.06.2017).
3. Приказ Минобрнауки России от 06.10.2009 N 373 (ред. от 31.12.2015) "Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта начального общего образования" (Зарегистрировано в Минюсте России 22.12.2009 N 15785) [электронный ресурс] // СПС КонсультантПлюс. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_96801/ (дата обращения: 28.06.2017).
4. Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 N 413 (ред. от 31.12.2015) "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования" (Зарегистрировано в Минюсте России 07.06.2012 N 24480) [электронный ресурс] // СПС КонсультантПлюс. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_131131/ (дата обращения: 28.06.2017).

5. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике: задачи логич. Характера: КН. Для учащихся 5 – 11 кл. М.: просвещение; учебная литература, 1996. – 160 с.

6. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. Пособие для учащихся 7–11 кл. - Челябинск: «Взгляд», 2004. – 448 с.

7. Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. Пособие для учащихся 7-11 кл. – Челябинск: «Взгляд», 2005. – 271 с.

8. Давыдова М.Ю. Нестандартные задачи в школьном курсе математики. Молодой ученый №8/2011.

9. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 5 класс. Часть 1. – изд. 2-е, перераб. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М.: издательство «Ювента», 2011. – 176 с.

10. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Математика. 6 класс. Часть 1. – изд. 2-е, перераб. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М.: издательство «Ювента», 2010. – 112 с.

11. Дорофеев Г.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. I: учебник для общеобразоват. учреждений: / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2005. – 316 с.

12. Дорофеев Г.В. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. II: задачник для общеобразоват. учреждений: / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2005. – 302 с.

13. Козлова С.А. Математика. 5 кл.: учеб. Для общеобразоват. Учреждений: в 2 ч. Ч. 1 / С.А. Козлова, А.Г. Рубин. – 2-е изд. – М.: Баласс, 2013. – 208 с.

14. Логика : учебное пособие / Л. Ю. Ларина. – Орел : ОрелГТУ, 2005. – 228 с.

15. Мерзляк А.Г. Математика: 5 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Вентана-Граф, 2013. – 30. – 304 с.

16. Мерзляк А.Г. Неожиданный шаг или 113 красивых задач / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Киев: Агрофирма «Александрия», 1993. – 60 с.
17. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1: учеб. Для общеобразоват. Учреждений / А.Г. Мордкович. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2007. – 375 с.
18. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2: задачник Для общеобразоват. Учреждений / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред А.Г. Мордковича. – 8-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2007. – 315 с.
19. Никольский С.М. Математика. 5 класс: учеб. Для общеобразоват. Организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 272 с.
20. Пойа Д. Как решать задачу. — М., Учпедгиз, 1959. – 208 с.
21. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - изд. 2-е. - М.: Глав. Ред. Физ.-мат. Лит., 1975. – 464 с.
22. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? Пер. с английского и предисл. Ю. А. Данилова. М.: Мир, 1981. — 238 с.
23. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? Пер. с английского И. Е. Зино. М.: ИД Мещерякова, 2009. — 352 с.
24. Циулина М.В. **Методология психолого-педагогических исследований:** учебное пособие / М.В. Циулина. - Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2015. - 239 с.
25. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса / М. И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 424 с.
26. Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М. И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 477 с.