МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Методика обучения тождественным преобразованиям рациональных выражений

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата
«Математика.Экономика»

Проверка на объем заимствований:
54,2 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 4 » апреля 2017 г.
зав. кафедрой М. МОМ
(название кафедры)
Суховиенко Фамилия И.О.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Умутбаева Юлия Сергевна

Научный руководитель:
доцент, кандидат педагогических наук
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Актуальность. Линия тождественных преобразований является одной из основных содержательных линий школьного курса алгебры (учение о числе, функции, уравнения и неравенства). Отдельной темой школьного курса математики тождественные преобразования рациональных выражений не является, она изучается на протяжении всего курса арифметики, алгебры, начал анализа. Начиная с 5-6 классов опираются на законы и свойства арифметических действий. В курсе алгебры основной школы 7-9 классов сконцентрирована основная нагрузка по формированию умений и навыков выполнения тождественных преобразований. Это связано со значительным увеличением числа. А также с разнообразием совершаемых преобразований. Осуществляется развитие культуры выполнения тождественных преобразований, а так же, на основе закрепленных знаний свойств операций и алгоритмов их выполнения развивается культура вычислений. Высокий уровень выполнения тождественных преобразований проявляется в умении правильно обосновать преобразования, в умении проследить за изменением области определения в последовательной цепочке тождественных преобразований, в быстроте и безошибочности выполнения преобразований. В умении найти кратчайший путь решения к окончательному виду преобразований.

В документе об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего образования обязательный минимум содержания основных образовательных программ по тождественным преобразованиям базового уровня являются следующие:

- выполнять несложные преобразования для вычислений значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем;

- выполнять несложные преобразования целых выражений, раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые;

-использовать формулы сокращенного умножения(квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычисления значений выражений;

Также в работе рассматриваются подходы к понятию тождество.

Объект исследования: Процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: Тождественные преобразования в курсе основной школы.

Цель исследования: разработать методические рекомендации обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

-выделить основные понятия линии тождественных преобразований;

-рассмотреть методическую схему обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы;

-охарактеризовать методические особенности тождественных преобразований;

Для решения задач были использованы следующие *методы исследования*: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта учителей математики по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на уроках математики в 9 классе на базе школы №153 г. Челябинск.

Гипотеза исследования: разработка и проведение факультатива для учащихся по теме: «Тождественные преобразования алгебраических выражений» позволит повысить уровень и их умения выполнять тождественные преобразования.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ.

§1. Основные понятия и содержание линии тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Тождественные преобразования изучаются начиная с начальных классов и продолжаются в течение всего курса. В первом параграфе рассмотрим основные понятия такие как: «выражение», «тождественно равные выражения», «тождество» и «тождественные преобразования выражений» [7].

Определение. *Выражением* в математике называют запись, состоящую из чисел, букв (обозначающих постоянные или переменные величины), знаков математических действий.[30].

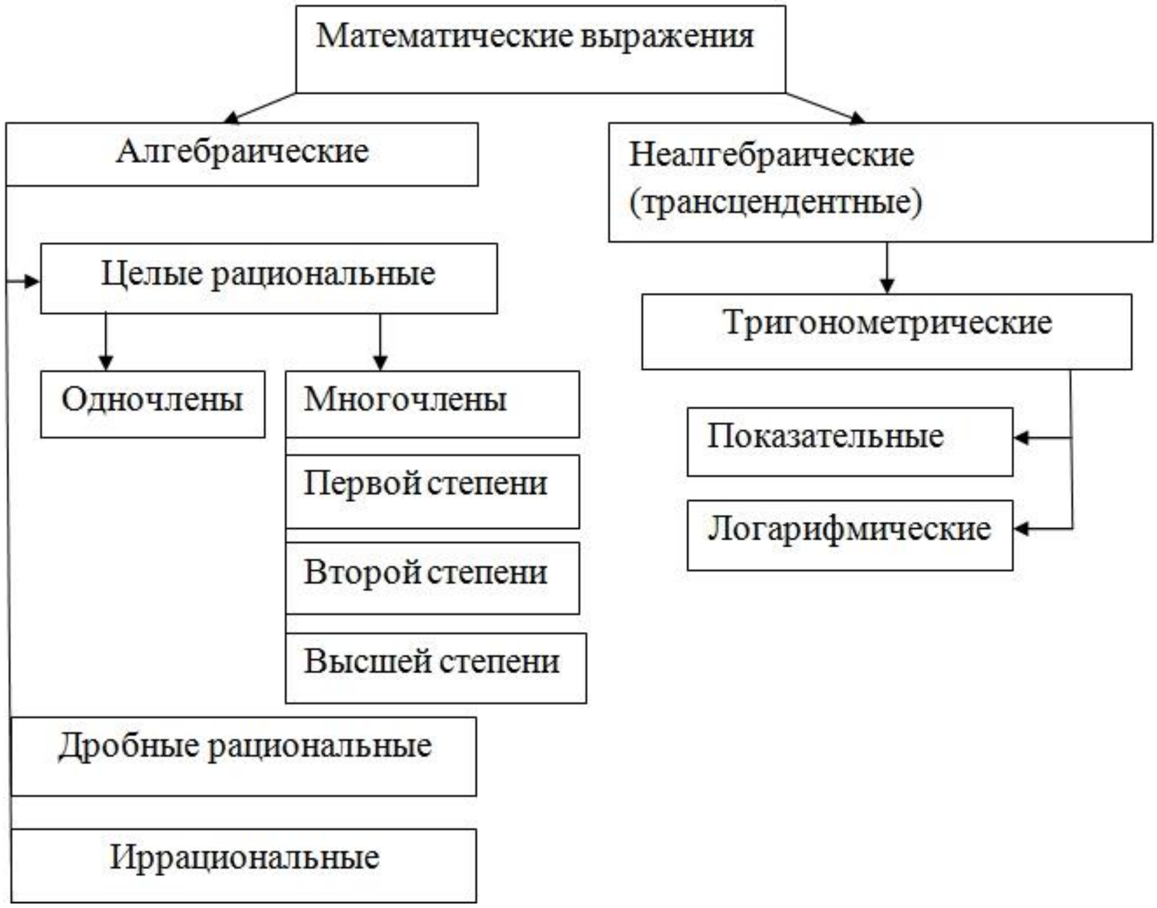
В школьном курсе математики выделяются два основных класса математических выражений: *алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).*

Определение. Алгебраическим выражением называется выражение, составленное из конечного числа букв и цифр, соединенных знаками действий (сложение, умножение, вычитание, деление, извлечения корня и возведение в целую степень) [31].

Определение. Трансцендентными называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими (логарифмические, тригонометрические, и показательные) [31].

Так как выражения это предмет нашего изучения, то в каждом из этих классов можно выделить следующие подклассы математических выражений (схема 1) [32].

Схема 1



Еще в начальной школе закладываются основы тождественных преобразований (законы арифметических действий). А более углубленно и систематически эти вопросы изучаются в курсе алгебры, начиная с седьмого класса. Рассмотрим последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы (Таблица 1) [33].

Таблица 1

Класс	Виды выражений
7	Целые (одночлены и многочлены)
8	Дробные (дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни)
9(10)	Иррациональные (степень с рациональным показателем, корни *n-й* степени)
10	Тригонометрические выражения
11	Логарифмические выражения

Иногда для решения задачи нужно заменить одно выражение другим более удобным или более простым. Иначе говоря, необходимо совершать тождественные преобразования выражений.

Существуют несколько подходов к понятию тождества. При всем разнообразии словесных формулировок понятий тождества, тождественного преобразования двух выражений, тождественного равенства двух выражений можно выделить лишь три подхода, которые рассматриваются следующими определениями:

Определение 1: Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством.[36]

Выражения, связанные знаком тождественного равенства, называют тождественно равным.

Например: $a + b = b + a, ab = ba$

(Впервые это определение формулируется в 7 классе)

Замену одного выражения другим, ему тождественно равным, называют *тождественным преобразованием* этого выражения [36].

В этом определении слово «тождественное» иногда опускают, и говорят просто «преобразование выражения», при этом понимают, что речь идет о тождественном преобразовании [7].

Приведем примеры для пояснения данного определения.

Пример 1. **В**ыражение $6x + 11 - 4$ можно заменить тождественно равным ему выражением $6x + 7$, т.е. эта замена есть тождественное преобразование выражения $6x + 11 - 4 = 5x + 7$ [10].

*Пример 2***.** Замена выражения $\frac{2a}{6}$ выражением $\frac{a}{3}$ является тождественным преобразованием, т.е $\frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$ [10].

Контрпример: Выражение y не является тождественным преобразованием выражения y^2, так как выражения y и y^2 не тождественно равные [10].

Определение 2. Равенство, верное при всех допустимых значениях переменных, называется тождеством.

Под допустимыми значениями переменных в данном случае подразумеваются все значения переменных, при которых имеет смысл правая и левая части данного равенства.

Тождественное преобразование одного выражения в другое и тождественное равенство двух выражений, определяется аналогично тому, как в первом случае.

Определение 3: Равенство, верное при любых значениях переменной (пар значений переменных, троек значений переменных и т. д.), принадлежащих данному множеству, называется тождеством на этом множестве.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему на данном множестве, называют тождественным преобразованием этого выражения на указанном множестве.

Рассмотрим достоинства и недостатки данных определений.

Определение 1 имеет краткую формулировку. Оно удобно, если ограничится рассмотрением целых рациональных выражений. Однако, придерживаясь определения 1, нельзя считать тождественным даже такие равенства, как

$$\frac{a^2}{a} = a \text{ и } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

(первое из них ложно при $a = 0$, второе ложно, например, при $a = -1$ и $b = -4$)

Отмеченных недостатков лишено определение 2.

Все равенства, которые являются тождествами по определению 1, будут так же тождествами по определению 2. Кроме того, определению 2 удовлетворяют и ряд равенств, которые по определению1 являлись тождествами. Приведем примеры таких равенств:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\ , (a^{-3})^{-3} = a^6, (\sqrt{a})^2 = a\ ,$$

$$\lg a + \lg b = \lg(ab),\ \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0.$$

К сожалению, определению 2 удовлетворяют не только приведенные выше равенства, как $\sqrt{-x} = \sqrt{x},\ \sqrt{1-x^4} = \sqrt{x-1}$.

Очевидно, что такие «тождества» с практической точки зрения не представляют интереса.

Кроме того определение 2 имеет ряд и других дефектов.

Как известно , ценность тождеств состоит в том, что одно выражение заменяют другим, тождественно равным первому, второе – третьим и т. д. Иначе говоря, представляют интерес такие тождества которые обладают свойством из того, что А тождественно В и В тождественно С, следует, что А тождественно С.

Указанным свойством не обладает ряд равенств, которые являются тождественными по определению 2. Действительно, равенства $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ и $(\sqrt{x})^2 = x -$ тождества, а равенство $\sqrt{x^2} = x$ не является тождеством. Таких примеров можно привести сколько угодно, например:

1) $\sqrt{1-x^8} = \sqrt{x-1}$ и $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x^2}$ - тождества, $\sqrt{1-x^8} = \sqrt{1-x^2}$ не тождественно (например при $x = \frac{1}{2}$ это равенство ложно, хотя при этом значении x обе части равенства имеют смысл);

2)$10^{\frac{1}{2}lga^2} = 10^{lga}$ и $10^{lga} = a$ – тождества, однако равенство $10^{\frac{1}{2}lga^2} = a$ не является тождеством (при любом отрицательном a левая и правая части равенства $10^{\frac{1}{2}lga^2} = a$ имеют смысл, но принимают противоположные значения).

Использование многих равенств, являющихся тождествами, согласно второму определению тождества, при решении уравнений может привести к уравнению, неравносильному данному. Например, замена выражения $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+3}$ тождественно равным ему выражением $\sqrt{x(x+3)}$ при решении уравнения $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+3} = 2$ приводит к уравнению $\sqrt{x(x+3)} = 2$ неравносильному данному.

Уравнению $\sqrt{x(x+3)} = 2$ удовлетворяет корень -4, который, однако, является «посторонним» корнем для исходного уравнения.

Замена выражения $\sqrt[3]{x^2}$ тождественно равным ему выражением $x^{\frac{2}{3}}$ при решении уравнения $\sqrt[3]{x^2} = 1$ приводит к уравнению $x^{\frac{2}{3}} = 1$, неравносильному данному. В этом случае происходит «потеря» корня. Корень данного уравнения – число -1 – не является корнем второго уравнения.

Если, например, при решении уравнения $\sqrt{-x} = 1$ воспользоваться равенством $\sqrt{-x} = \sqrt{x}$, которое является тождеством по определению 2. Тогда получится уравнение $\sqrt{x} = 1$, которое имеет единственный корень 1. Этот корень является «посторонним» для исходного уравнения и в то же время «потерян» корень -1 данного уравнения.

В результате произошла и «потеря» корня, и приобретение «постороннего» корня.

Указанных недостатков не имеет определение 3.

Из определения тождества на множестве непосредственно следует, что отношение тождественного равенства на данном множестве между выражениями рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Таким образом, отношение тождественного равенства на данном множестве между выражениями является отношением эквивалентности. Это означает, что оно определяет разбиение всех выражений, определенных на данном множестве M, на классы эквивалентности, т. е. на классы выражений, тождественно равных друг другу на данном множестве M.

Тождественное преобразование выражения на данном множестве с этой точки зрения состоит в замене одного выражения другим из того же класса, второго - третьим и т. д.

Тождественные преобразования выражений, вообще говоря, и производятся с той целью, чтобы данное выражение заменить другим, ему тождественно равным (т. е. из того же класса эквивалентности), но более удобным для решения рассматриваемой задачи. Например, чтобы построить график функции $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$, выражение $\frac{3x-1}{x-1}$ целесообразно представить в виде $3 + \frac{2}{x-1}$. Этот вид показывает, что график функции f есть образ графика функции $y = \frac{2}{x}$ при параллельном переносе, который начало координат отображает на точку $O'(1;3)$.

В каждой области знаний, которая использует математику, возникает потребность в замене одно выражение другим, для простоты и удобства в решении рассматриваемой задачи. Другими словами, появляется необходимость в выполнении тождественных преобразований. Рассмотрим приведенные ниже упражнения.

1. Упростить выражение: $x^2 + y^3 - 3y^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}3y^3$
2. Решить уравнение: $4x + 2x + x = 14$;
3. Доказать, что выражение: $\frac{(2k+1)^4-1}{4k^2+4k++2}$, где $k = N$, кратно 8.

Обязательным условием для решения данных упражнений, отличающихся друг от друга по содержанию, является предварительное выполнение тождественных преобразований содержащихся в них выражений [7].

В пропедевтическом курсе уроков математики начинают отрабатываться навыки тождественных преобразований, такие как:

а) приведение подобных слагаемых:

б) раскрытие и заключение в скобки;

в) вынесение за скобки общего множителя.

Преобразования такого рода продолжают применяться на уроках алгебры при изучении темы: «Многочлены» в 7 классе.

Выполнение преобразований учащимися происходит на основе законов и свойств арифметических действий:

- $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

- $(a + b) + c = a + (b + c)$ – (ассоциативность сложения);

- $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

- $a + 0 = 0 + a = a$ (сложение с нулем);

- $a - 0 = a$; $a - a = 0$ (вычитание с нулем);

- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (умножение на ноль);

- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (умножения на единицу);

- $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (умножение дистрибутивно относительно операции сложения);

- если $a = b$, то $b - a$; если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ – свойства равенств [25].

Тождества школьного курса делятся на два этапа:

а) тождества сокращенного умножения и основное свойство дроби;

б) тождества, связывающие основные элементарные функции (показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические и др.) и арифметические операции [8].

§2. Методика изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы

2.1. Выражения и их виды

В школьном курсе математики рассматриваются различные выражения, например:

$$x^2-5x+7,\ \ \frac{y+2x}{3x-y},\ \ \sqrt{a+1},\ x^{-\frac{3}{7}},\ \ \lg(b^2-8),\ \ \cos x,\ \ |c-3|.$$

Выражение $\frac{y+2x}{3x-y}$ содержит операции сложения, вычитания, умножения и деления; выражение $\sqrt{a+1}$ – операции сложения и извлечения квадратного корня; выражение $x^{-\frac{3}{7}}$ - операции возведения в степень с дробным показателем. Выражение $\lg(b^2-8)$, кроме действий возведения в степень и вычитания, содержит также знак логарифма; выражение $cos\ x$ – знак косинуса.

Выражения, которые не содержат иных действий над переменными, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения корня, возведения в степень с рациональным показателем, называют алгебраическими.

Приведем примеры алгебраических выражений:

$$5,\ \ a,\ \ y^2+1,\ \ \frac{x}{a+3},\ \ \sqrt[3]{b^4-b+1},\ \ \frac{a^{-2}}{b^{\frac{3}{4}}+1}.$$

Алгебраические выражения можно разбить на два класса рациональные и иррациональные. К рациональным относят выражения, которые не содержат других действий над переменными. Кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. К иррациональным выражениям относят все остальные алгебраические выражения, т. е. выражения, содержащие извлечение корня или возведение в степень с дробным показателем.

Примерами рациональных выражений служат:

$$x^2-5x+7,\ \ \frac{a+5}{b+3},\ \ \frac{y^{-2}+x}{y^3-x^{-3}}.$$

Рациональные выражения также можно разбить на два класса: на множество целых выражений и множество дробных. К целым рациональным относят рациональные выражения, которые не содержат деления на выражение с переменными. Дробными считаются те рациональные выражения, которые не являются целыми. Иначе говоря, к дробным выражениям относят такие рациональные выражения, которые содержат деление на выражение с переменными и возведение переменной в степень с отрицательным показателем.

Кроме алгебраических в школьном курсе рассматриваются выражения, которые содержат переменные под знаками lg, sin, cos, tg, знаком модуля, а также выражения, содержащие операцию возведения в степень с иррациональным показателем. Такие выражения называют неалгебраическими.

Заметим, что выражения $lg\ 2, sin\ 1$, хотя и содержат знаки логарифма и синуса, являются алгебраическими, так как под знаком логарифма, знаком синуса находятся не переменные, а числа. Классификация выражений представлена (схемой 1)

Проведенная классификация относит то или иное выражение к определенному классу по «внешнему виду», т. е. в зависимости от производимых операций. Эта точка зрения проводится в 4 – 5 классах. А основная нагрузка по формированию умений и навыков выполнения тождественных преобразований лежит на курсе школьной алгебры. Это связано с увеличением числа и разнообразием совершаемых преобразований; с усложнением деятельности по их обоснованию и выяснению условий их применимости; с выделением и изучением обобщенных понятий тождества, равносильного преобразования, тождественного преобразования, логического следования.

Выделяются следующие этапы освоения применений преобразований формул и буквенно-числовых выражений.

Начала алгебры. На этом этапе используется нерасчлененная система преобразований; она представлена правилами выполнения действий над одной или обеими частями формулы. Приведем типичный пример.

Пример 1. Решить уравнение а) $5x - 3x = 2$

Упростим уравнение, воспользовавшись распределительным законом

$$5x - 3x = (5 - 3)x.$$

Основанное на этом тождестве тождественное преобразование переводит данное уравнение в равносильное ему уравнение $2x = 2$

Идея решения лежит в упрощении данных формул с помощью нескольких правил.

Пример 2. б) $5x = 3x + 2$

Это уравнение для своего решения требует как тождественного, так и равносильного преобразования $5x - 3x = 2$

Здесь переносятся члены уравнения из одной части в другую, при этом изменяется знак. Видно, что уже в решении данного задания используется оба типа преобразований – равносильное и тождественное.

Цель этого типа – достичь беглости в выполнении заданий на решение простейших уравнений, упрощение формул.

Формирование навыков применения конкретных видов преобразований. Система правил и приемов проведения преобразований имеет очень широкую область приложений, то есть изучается на протяжении всего курса математики и используется на этапе начал алгебры. Однако эта система нуждается в дополнительных преобразованиях, которые учитывают особенности структуры преобразуемых выражений. С введения формул сокращенного умножения начинается освоение соответствующих видов преобразований. Далее рассматриваются преобразования, которые связанны с операцией возведения в степень, а так же с различными классами элементарных функций – степенных, показательных, тригонометрических, логарифмических. Каждый из этих типов преобразований должен пройти этап изучения, на котором сосредотачивается внимание на освоении их характерных особенностей.

По мере накопления материала появляется возможность на основе выделения общих особенностей рассматриваемых преобразований ввести понятия тождественного равносильного преобразований.

Преобразования разделяют на два класса: тождественные преобразования как преобразования выражений и равносильные преобразования как преобразования формул. Если возникает потребность упростить одну часть формулы, то в ней выделяется выражение, которое и служит аргументом применяемого тождественного преобразования. Соответствующий предикат при этом считается неизменным. Например, уравнение $5x - 3x = 2$ и $2x = 2$ считаются не только равносильными, но и одинаковыми.

Организация целостной системы преобразований (синтез).

Основной целью этого этапа, считается формирование гибкого и мощного аппарата, который будет пригоден для использования в решении различных учебных заданий.

Второй этап изучения преобразований разворачивается на протяжении всего курса алгебры неполной средней школы. Переход к третьему этапу происходит при итоговом повторении курса в ходе осмысления уже известного материала усвоенного по частям, по отдельным типам преобразований.

Целостная система преобразований в курсе алгебры и начал анализа, продолжает постепенно совершенствоваться, хотя в основных чертах она уже сформирована. Добавляются новые виды преобразований (относящиеся к тригонометрическим функциям, например), которые обогащают ее структуру. Необходимо упомянуть об одном типе преобразований, специфическом для курса алгебры и начал анализа. Это преобразования выражений, которые основаны на правилах дифференцирования и интегрирования; выражений, которые содержат предельные переходы, и преобразования. Рассмотрим основное отличие «алгебраических преобразований» преобразований от «аналитических». Оно состоит в характере множества, которое пробегают переменные в тождествах. В алгебраических тождествах переменные пробегают числовые области, а в аналитических этими множествами являются определенные множества функций. Наиболее отчетливо это видно в простейшем примере формулы, выражающей правило дифференцирования суммы: $(f+g)' = f' + g'$; где f и g – переменные. Пробегающие множество дифференцируемых функций с общей областью определения. Несмотря на то. Что отмеченное различие не фиксируется в обучении в курсе алгебры и начала анализа, практика показывает, что рассматриваемые преобразования усваиваются достаточно уверенно; этому способствует их внешнее сходство с преобразованиями алгебраического типа.

Тождества, изучаемые в школьном курсе алгебры можно разделить на два класса. Первый образован тождествами сокращенного умножения, которые справедливы для любого коммутативного кольца, и тождества $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}, a \neq 0$, справедливо в любом поле. Второй класс состоит из тождеств, связывающих основные элементарные функции и арифметические операции, а так же композиции элементарных функций. Большинство тождеств второго класса также имеет общую математическую основу, состоящую в том, что степенная, показательная и логарифмическая функции являются изоморфизмами различных числовых групп. Например, имеет место утверждение: существует единственное непрерывное изоморфное отображение f аддитивной группы действительных чисел в мультипликативную группу положительных действительных чисел, при котором 1 отображается в заданное число a >0 $a \neq 0$; это отображение задается показательной функцией с основанием a: $f(x) = a^x$. Аналогичные утверждения имеются и для степенной и логарифмической функций. С их помощью могут быть строго доказаны все изучаемые в курсе школьной математики тождества для рассматриваемых функций.

2.2. Целые рациональные выражения

В справочных материалах В.А. Гусева, А.Г. Мордковича рассмотрено следующее определение целых рациональных выражений:

Определение: Целыми рациональными выражениями называются алгебраические выражения, которые не содержат деления на переменные и извлечения корня (возведения в степень с дробным показателем, в частности) [31].

Пример: $3a^2b - 2ab^2, x + y + \frac{c}{s}, (\sqrt[3]{2} - u)^4$

Рассмотрим понятия допустимые значения переменных b область определения алгебраического выражения.

Определение: Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют *допустимым значением переменных* [31].

Определение: Множество всех допустимых значениях переменных называют *областью определения алгебраического выражения* [28].

Целое рациональное выражение имеет смысл для любого значения переменной. Так, целые рациональные выражения имеют смысл при любых значениях переменных

$$3a^2b - 2ab^2, x + y + \frac{c}{s}, (\sqrt[3]{2} - u)^4$$

Понятия одночленов и многочленов, а также действия над ними рассматриваются в разделе целые рациональные выражения. В учебнике Ю.Н. Макарычева (7 класса под ред. С.А. Теляковского) трактуются следующие определения:

Определение: Одночленом называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными. Например, $3x^2y \cdot (3{,}5x^3), (-21a^2b^3) \cdot 3a^2b \cdot 25a^4, 4u \cdot (-2{,}5u^2)$ [27].

Определение: Многочленом называют сумму одночленов.

Например, $3{,}6z^2 \cdot 2x^4z^3 + 4xz^3 - 2x^2z,\ u^2v\,v^3 + 4uv^2$ [27].

В.И. Мишин, своей частной методике при изучении тождественных

преобразований целых рациональных выражений, выделяет следующие важные аспекты:

- на множестве одночленов целесообразно рассматривать только операцию умножение;

- деление многочленов следует рассматривать в разделе «рациональные дроби»;

- тождественно равными полезно считать два целых рациональных выражения, значения которых совпадают при одинаковых значениях, входящих в них переменных;

- тождественные преобразования лучше строить на основе законов арифметических действий (аксиом полугруппы и кольца), считать их аксиомами тождественных преобразований [32].

В таблице 2 рассмотрена методическая схема обучения тождественным преобразованиям целых рациональных выражений.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям целых рациональных выражений

Таблица 2

Раздел	Методические приемы вычислений
Целые рациональные выражения (одночлен, многочлен)	1. Приведение одночленов и многочленов к стандартному виду, выполнение основных действий с целыми рациональными выражениями (раскрытие и заключение в скобки, выполнение арифметических действий); 2. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки, способ группировки); 3.Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения); 4. Специальный прием разложение квадратного трехчлена на линейные множители, выделения полного квадрата в трехчлене; 5. Обобщенный прием упрощения целого рационального выражения (приведение подобных членов); 6. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$; 7. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).

2.3. Дробные рациональные выражения

В конце 7 и в начале 8 класса курса алгебры основной школы рассматриваются: представление выражения в виде дроби, тождественные преобразования алгебраических дробей; сокращение дробей.

Определение: Дробными рациональными выражениями называются алгебраические выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражение с переменными [37]. Так формулируется определение дробных рациональных выражений в справочных материалах В.А. Гусева, А.Г.Мордковича

Примеры: $\frac{4y^2+4y+1}{y-1}$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{r}{3})^3$, Любое дробное выражение можно записать в виде $\frac{P}{Q}$,

где P и Q – рациональные выражения, причем Q обязательно должно содержать переменные. Дробь вида $\frac{P}{Q}$ называют рациональной дробью.

Например $\frac{y+1}{2y+\frac{1}{3}}$, $\frac{(y+2)(y^2-3)}{a+2b+5c}$

Основное свойство дроби дается в учебнике алгебры 8 класса Ю.Н. Макарычева, (под ред. С.А. Теляковского)

Определение: Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Основное свойство дроби используется для перемены знаков у членов дроби.

На уроках алгебры в 8 классе учащиеся встречают различные по содержанию упражнения, например:

1) $\frac{x^2-y^2}{x+y}:\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 2) $\frac{x^2+2xy+y^2}{a^2-b^2}:\frac{x+y}{a+b}$; 3) $(3b-6b)*\frac{a+b}{2a-4b}$;

4) $\frac{a+a^2+b^2+b}{x^2-y^2+x+y}:\frac{3a+3b}{2x-2y}$; 5) $\frac{4f^2}{2f-b}:\frac{12f^3}{4f^2-b^2}:\frac{2f^2}{6f^2-3fb}$

Выполнение заданий такого типа проходит поэтапно. На первом этапе происходит умение распознавать формулы сокращенного умножения происходит на первом этапе, само преобразование, (использование формулы-тождества) производится на втором этапе [43].

На первых порах ученики записывают последовательно каждый шаг преобразований, далее некоторые операции выполняют устно. Затем ученики используют несколько тождеств при решении одного упражнения [24]. Рассмотрим ниже пример:

Упростить выражение: $\left(\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}-\frac{4x^2}{x^2-1}\right):(\frac{1}{x^2-x^3}-\frac{1+x}{x^2}-1)$

Задания такого типа направлены на то, что бы учащиеся усвоили структуру тождества, а также поняли, что тождество можно как свернуть, так и развернуть (т.е. на обратимость преобразований). Общей целью заданий является углубление понимания тождеств посредством рассмотрения различных упражнений в разных ситуациях, в сочетании с другими темами курса математики [24]. Существует два подхода при изучении тождественных преобразований дробных рациональных выражений:

1) *Алгебраический подход* (состоит в том, что изучаются действия над выражениями). Данный подход не представляется возможным для рассмотрения в школе, потому что для обоснования действий над рациональными выражениями необходимо знание таких понятий, как поле рациональных дробей и кольцо многочленов.

2) *Теоретико-функциональный подход* (рассматривается многочлен как целая рациональная функция (одного или нескольких переменных), а алгебраическая дробь как дробно-рациональная функция [32].

Для школьной алгебры эти две позиции полезно объединять, потому что, в первом случае, сосредоточивается внимание учеников на алгебраической стороне вопроса, во втором - представляет интерес функциональная сторона. [32]. Методическая схема обучения тождественным преобразованиям дробных рациональных выражений рассмотрена в таблице 3.

Таблица 3

Раздел	Методические приемы вычислений
Дробные рациональные выражения	1.Приемы записи преобразований дробных рациональных выражений; 2. Сокращение рациональных дробей; 3. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю; 4. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей; 5. Возведение рациональной дроби в целую степень; 6. Обобщенный прием упрощения рационального выражения (приведение подобных членов, прибавление и вычитание одного и того же числа); 7. Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения).

§3. Методические особенности обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры

С понятием тождественное преобразование ученики знакомятся еще в 5 классе (учебник Н.Я. Виленкина) но термины «тождественное преобразование» и «тождество» и еще не вводятся. Выполняются задания, где присутствуют простейшие преобразования числовых выражений и тех выражений, которые содержат переменные, арифметические действия, тождественные преобразования, которые выполняются на основе свойств. Учащиеся знакомятся с первыми основными тождествами

$(a + b) + c = a + (b + c)$, $a(b + c) = ab + ac$ и др., что бы использовать их при решении различных упражнений:

а) При каких значениях переменной истинны равенства:

$11(x + 4) = 11x + 44$; $(27 + v) \cdot 5 = 27 \cdot 5 + v \cdot 5$;

б) Сократить дробь:

$$\frac{18}{129} = \frac{18}{43 \cdot 3} = \frac{6}{43}$$

в) Выполнить действия:

$144 \cdot 15 = (198 - 22) \cdot 15 = 4250 – 15$;

с) Найти значение выражения:

$128 \cdot 23 + 23 \cdot 48 = 23 \cdot (128 + 48)$.

Такие упражнения подготавливают учащихся к введению понятия «тождественное преобразование», и к пониманию целесообразности разного рода преобразований [10].

В 6-ых классах вводится понятие коэффициента, здесь ученики сталкиваются с выражениями вида: $4x, -5xy, 7xy$, то есть встречается понятие одночлена, но термин «одночлен» на данной ступени не вводится. Внедрение подобных слагаемых приводится как пример использования распределительного свойства к сумме произведений с идентичными буквенными множителями:

$4x + 8y + 3x = x(4 + 3) + 8y = 7x + 8y$ [18].

В 7-м классе (авт.А.Г. Мордкович) впервые вводится определение тождества и рассматривается три подхода к этому определению.

(Эти три подхода рассмотрены в первом параграфе данной работы)

авт. В.И. Мишин в частной методике дифференцирует понятия:

- *тождества-равенства* (свойства степени с натуральным показателем, формулы сокращенного умножения, и др.)
- *тождества-действия* (приведение подобных слагаемых, вынесение общего множителя за скобку и др.) или тождественные преобразования.

В своей частной методике преподавания математики в средней школе Р.С. Черкасов рассматривает организацию обучению отдельных тождеств, и предлагает применение специальных циклов заданий. Перечень заданий на материале именно этой темы, автор считает последовательным соединением упражнений нескольких аспектов изучения и приемов расстановки материала. Применительно к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом. Задания связаны с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла, вместе с исполнительными, входят задания, предусматривающие распознавания применимости изучаемого тождества [46].

Рассматриваемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика заданий на данную тему. Авторы Р.С. Черкасов, А.А. Столяр, задания разбивают на две группы:

I группа. Первый этап, применяемый для отработки заданий в явно видимой ситуации и для усвоения тождества с формулировкой его определения. Материал методически построен для нескольких уроков, идущих подряд.

II группа. Этап, где более углубленно изучается тождество. Материал связывает данное тождество и его применение в сложных ситуациях в сочетании с материалом, который используется в других темах школьного курса[46].

На основе данных двух групп, представим методическую систему упражнений для усвоения тождества – разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (Таблица 4) [32].

Таблица 4

Задания	Методические указания
I группа 1.Представить в виде произведения: а) $x^2 - y^2$; б) $a^2 - 6^2$; в) $121 - b^2$.	Задания направлены на знания и понимания учащимися, прежде всего словесной формулировки свойства, тождества.
2.Проверить справедливость равенства: $(10^2 - 1)(10^2 + 1) = 10^4 - 1$.	Задание на отработку двустороннего преобразования.
3. Раскрыть скобки в выражении: $(2xy + 7x^2)(2xy - 7x^2)$	Умение правильно раскрывать скобки и отрабатывается применение тождества.
4.Вычислить: $26^2 - 23^2$; $25 \cdot 121$.	Эта группа упражнений развивает навыки применения тождества и углубляет представление об операции подстановки.
5. Разложить на множители: $a^4 - b^4$; $16\,(xy)^2 - (x - y)^2$.	Применение изучаемое тождество дважды
6.Упростить: $(a + b)^2 - (a - b)^2$.	Переосмысление изучаемого тождества в терминах отношений компонентов арифметических действий.

II группа 1.Разложить на множители: $x^2 - 10$. 2.Исключить иррациональность в знаменателе дроби: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 3. Доказать, что если к - нечетное число, к − 1 кратно 4 4. Функция задана выражением $f(x) = \frac{x^2+2\lvert x\rvert+1}{x^2-1}$ Упростить, раскрыв знак модуля.	Идет привлечение новой операции – извлечение корня. Задания предполагают наличие уже сформированных навыков использования изучаемого тождеств для разности квадратов. Цель заданий – углубить понимание тождеств с различными его применениями при рассмотрения его в сложных ситуациях в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам школьного курса.

Автор И.В. Баум считает, что для формирования навыков тождественных преобразований учитель должен добиться от учащегося устного выполнения некоторых промежуточных преобразований не только при устном счете, но и при решении различных задач [7]. Можно отметить, что когда выполняются тождественные преобразования, мы сталкиваемся с выражением, область определения которого задана. Она может сужаться или расширяться.

Пример 1. $y \neq 0, y \neq 3$

$\frac{y+2}{y(y+3)} - \frac{1}{3y+9} = \frac{3y+6-y}{3y(y+3)} = \frac{2}{3y}$ - область определения расширилась

Пример 2. $x \neq 1, x \neq 0$

$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ -область определения сузилась

Что бы этого избежать, осуществив преобразования на области определения исходного выражения:

$$\frac{x+1}{x-1} = \begin{cases} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \text{ если } x \neq 0, \\ -1, \text{если } x = 0 \end{cases} \quad x \neq 1$$

Большинство тождеств, изучаемых в курсе математики, доказываются. Доказательства опираются на определения используемых понятий и свойства арифметических операций.

Можно выделить виды доказательств в зависимости от уровня строгости:

а) доказательства, которые основаны на неполной индукции;

б) доказательства, которые опираются на свойства арифметических действий и не используют свойства числовой системы;

в) доказательства, которые используют условия разрешимости уравнения $f(x) = a$, где $f(x)$ - элементарная функция [22].

К типу а) можно отнести вывод формул n -го члена геометрической и арифметической прогрессий, доказательства свойств степени с натуральным показателем.

Для осознания учащимися структуры доказательства рассматриваются частные случаи для различных значений натуральных чисел..

Например,

$$x^5 \cdot x^4 = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^9 = x^{5+4};$$

$$x^9 \cdot x^5 = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^{14} = x^{9+5};$$

$$x^{324} \cdot x^{250} = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = x^{574} = x^{324+250}.$$

В данных рассуждениях роль переменных играют показатели степени. По приведенному образцу для любых значений показателей степени можно повторять данные рассуждения рассуждения.

К типу б) относятся более распространенные доказательства школьного курса алгебры. Их необходимо проводить в развернутом виде, при этом пояснять все выполняемые шаги, простые и доступные для учащихся. Например, при доказательстве тождеств

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2, (x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

С помощью использования правил: умножается многочлен на многочлен, раскрываются скобки и приводятся подобные слагаемые, основанные на распределенном свойстве умножения относительно сложения. Распределительное свойство умножения относительно сложения знакомо учащимся с начальной школы и неоднократно отрабатывалось при изучении различных чисел. Поэтому и суть доказательства учащимся понятна [22].

Доказательства типа в) наиболее трудные в школьном курсе алгебры, так как в них используются достаточно сложные логические средства. Эти доказательства применяются при выводе свойств степени с рациональным показателем и логарифмической функции. Например, при рассмотрении свойства логарифмов пользуются тем фактом, что логарифм числа b по основанию a – это единственный корень уравнения $a^x = b$ при $b > 0, a > 0$, $a \neq 1$. При $b \leq 0$ указанное уравнение решений не имеет. Таким образом получаем, что при $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$.

Тогда $x \cdot y = a^{log_a x} \cdot a^{log_a y} = a^{log_a x + log_a y}$.

Поскольку $xy > 0,$ то $log_a(xy) = 27log_a x + log_a y$. Основная идея доказательства в типа в) сопоставление двух взаимно обратных функций. Эта идея может быть полностью осознана только в том случае, если учащиеся знакомы с понятиями «обратная функция», «функция, обратная данной», «взаимно обратные функции». В общеобразовательных классах изучение указанных понятий программой не предусмотрено [24].

Все тождества, которые рассматриваются в теоретической части школьных курсов алгебры и алгебры и начал анализа, широко используются в упражнениях на преобразование выражений, при решении уравнений и неравенств, при доказательстве новых тождеств. Запоминая краткие формулировки, учащиеся забывают условия, при которых соответствующие тождества доказывались, что приводит к появлению ошибок при решении задач. Поэтому необходимо требовать от учащихся воспроизведения полных формулировок [17].

При доказательстве тождеств весьма распространена логическая ошибка, которую продемонстрируем на примере. Пусть требуется доказать тождество $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$. Очень часто можно увидеть такое доказательство:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

$$x^3 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

$$x^3 + y^3 = x^3 + y^3$$

Значит, тождество верно [8].

Рассуждения в таком доказательстве проводятся от искомого к данным в виде нисходящего анализа. Предполагают, что тождество верно и стараются получить из него верное следствие. Если верное следствие получено, то обязательным этапом доказательства является обратимость рассуждений. В том случае, когда все рассуждения обратимы, доказываемое тождество верно. В противном случае следует искать другой способ доказательства. В приведенном примере вывод должен быть сделан после проверки обратимости рассуждений. А именно: «Так как к правой части последнего равенства можно

добавить многочлен $3x^2y + 3xy^2 - 3x^2y - 3xy^2$ тождественно равный нулю, а затем перегруппировать слагаемые, вынести общий множитель за скобки и использовать тождество

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$, то все проведенные рассуждения обратимы и тождество доказано». Проверка обратимости обязательна, так как из неверного утверждения можно получить верное следствие. Например, из неверного утверждения $5 = -5$ получаем возведением в квадрат обеих частей верное равенство $5^2 = (-5)^2$ [25].

Примерами необратимых рассуждений являются следующие:

1. Если $a = b \neq 0$, то $a^2 = b^2 \neq 0$;

2. Если $\alpha = \beta$, то $cos\alpha = cos\beta$;

3. Если $\alpha = \beta$, то $sin\alpha = sin\beta$;

4. Если $\alpha = \beta$, то $tg\alpha = tg\beta$;

5. Если $\alpha = \beta$, то $ctg\alpha = ctg\beta$;

6. Если $\sqrt{t} = a$, то $t = a^2$.

Рассмотрим из того, что $a^2 = b^2 \neq 0$ следует, что $a = b$ или $a = -b$; из того, что $sin\alpha = sin\beta$; следует, что $\alpha = \beta + 2\pi k$ или $\alpha = \pi - \beta + 2\pi k$,

где $k \in Z$ [14].

Другими способами доказательства тождества A = B являются:

1. Рассмотрение разности A – B и ее преобразование к нулю;

2. Преобразование правой части B к левой части A;

3. Преобразование левой части A к правой части B;

4. Преобразование отдельно левой части A и правой части B к одному и тому же выражению.

Учитель математики Л.П. Морозова, рассматривает примеры преобразований в качестве методических задач, выполненных учениками.

Пример 1. Вычислить $((-2)^2)^{\frac{1}{2}}$

Четыре ученика дали различные решения этой задачи.

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = (-2)^1 = -2$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = -2$$

Кто решил правильно? В чем причина ошибок остальных?

В первом и третьем вариантах ответа ученики допустили ошибки так как не усвоили правил возведения в степень одночленов. Второй и третий варианты решения являются верными, но в третий вариант более подробно рассмотрел пример.

Рассмотрим последовательную цепочку обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений (Таблица 5), с помощью которой, можно выявить общие методические рекомендации для усвоения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы [32].

Последовательная цепочка обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы

Таблица 5

Раздел		Выполнения основных действий	Замечание	Виды преобразований
Целые рациональные выражения	**Одночлен** - знать: определение одночлена, понятие степени и его свойства, стандартный вид	Умножение одночленов, деление и возведение в степень одночленов	Для выполнения деления одночленов необходимо придерживаться двум условиям: 1) Показатель степени переменной делимого должен быть больше показателя степени той же переменной делителя; 2) Делитель не должен содержать переменных, которых нет в делимом.	
	Многочлен -знать: определение многочлена, стандартный вид, понятие степени и его свойства, дистрибутивный закон.	Производятся все четыре основные действий с многочленами (сложение, вычитание, умножение и деление), возведение в степень, прием разложения на множители многочленов.	Для выполнения деления многочленов необходимо придерживаться двум условиям: 1) Степень делимого должен быть больше степени делителя; 2) Деление может быть как с остатком так и без остатка.	- деление на основе разложения на множители; - приведение подобных слагаемых; -раскрытие и заключение в скобки; - формулы сокращенного умножения; - приведение к стандартному виду; - разложение на множители двучлена $x^n - y^n$; - возведение двучлена в

				натуральную степень (бином Ньютона).
Дробные рациональные выражения -знать: определение дробного выражения, Основное свойство дробного выражения и следствия из него, правила действий с числовыми дробями		Производятся все четыре основные действий с дробными рациональными выражениями (сложение, вычитание, умножение и деление), возведение в степень дробных выражений.	Устанавливать область определения исходного дробного выражения с переменной.	Приведение дробей к общему знаменателю, сокращение дробей.

§4 Основные типы преобразований и этапы их изучения.

Основной принцип организации любой системы заданий – предъявлений их от простого к сложному с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций. Указанный основной принцип требует конкретизации применительно к особенностям данного учебного материала. Для описания различных систем заданий в методике математики используется понятие цикла упражнений. Цикл упражнений характеризуется соединением в последовательности упражнений нескольких аспектов изучения и приемов расположения материала. По отношению к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом.

Цикл упражнений связан с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла наряду с исполнительными входят задания, требующие распознавания применимости рассматриваемого тождества. Изучаемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика тождества; в частности, организуются связанные с ним обороты речи.

Задания в каждом цикле разбиты на две группы. К первой группе относятся задания, выполняемые при первоначальном знакомстве с тождеством. Они служат учебным материалом для нескольких идущих подряд уроков, объединенных одной темой. Вторая группа упражнений связывает изучаемое тождество с различными приложениями. Эта группа не образует композиционного единства – упражнения здесь разбросаны по различным темам.

Описанная структура цикла относится к этапу формирования навыков применения конкретных видов преобразований. На заключительном этапе – этапе синтеза циклы видоизменяются. Во-первых объединяются обе группы заданий, образующие «развернутый» цикл, причем из первой группы исключаются наиболее простые по формулировкам или по сложности выполнения задания. Оставшиеся типы заданий усложняются. Во-вторых, происходит слияние циклов, относящиеся к различным тождествам, в силу чего повышается роль действий по распознаванию применимости того или иного тождества.

Приведем конкретный пример цикла.

Пример 1. Цикл заданий для тождества

Выполнение первой группы заданий этого цикла происходит в следующих условиях. Ученики только что ознакомились с формулировкой тождества (вернее, с двумя формулировкам: «Разность квадратов двух выражений равно произведению суммы и разности данных выражений» и «Произведение суммы и разности двух выражений равно…»), его записью в виде формулы, доказательством. После этого приведено несколько образцов использования основанного на этом тождестве преобразования; в число разнообразных примеров, в частности, могут входить примеры, аналогичные приведнным ниже. Наконец, ученик приступают к самостоятельному выполнению упражнений.

Первая группа заданий

а) Представить в виде произведения:

$a_1)\ a^2 - b^2;\quad a_2)\ c^2 - 5^2;\quad a_3)\ 121 - k^2.$

б) Проверить верность равенства: $(100 + 1) \cdot (100 - 1) = 10000 - 1.$

в) Раскрыть скобки в выражении: $(4xy + 5x^2) \cdot (4xy - 5x^2).$

г) Вычислить:

$г_1)\ 49 \cdot 51;\ г_2) 25^2 - 24^2;\ г_3)(10^2 - 1)(10^2 + 1).$

д) Разложить на множители:

$д_1) 49 \cdot 51;\quad д_2)\ 25^2 - 24^2;\quad д_3)\ (10^2 - 1)(10^2 + 1)$

е) Упростить выражение: $(a + b)^2 - (a - b)^2$

Вторая группа заданий:

ж) Используя тождество $a = (\sqrt{a})^2$ при $a \geq 0$ разложить на множители многочлен $x^2 - 5.$

з) Исключить иррациональность в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

и) доказать, что если k – нечетное число, то $k^2 - 1$ делится на 4.

к) Функция задана аналитическим выражением $f(x) = \frac{x^2+2|x|+1}{x^2-1}$. Избавиться от знака модуля. Рассмотрев два случая: $x \geq 0$ и $x < 0$.

л) Решить уравнение $x^3 - 4x = 15$

Приступим к методическому анализу представленной системы типов заданий.

Задание a_1) имеет целью фиксировать структуру изучаемого тождества. Это достигатся заменой букв, используемых в нормативной записи тождества (x и y), другими буквами. Задания этого типа позволяют уточнить связь между словесным выражением и символической формой тождества. Задание a_2) ориентровано на установление связи данного тождества с числовой системой. Выполнение задания опирается на сопоставление знаковых структур тождества и преобразуемого выражения; последнее является уже не чисто буквенным, буквенно-числовым. Для описания производимых действий необходимо использовать понятие замещения буквы числом в тождестве. Развитие навыков применения операции замещения и углубление представления о ней осуществляется при выполнении заданий типа г$_2$).

Следующий шаг в освоении тождества для разности квадратов иллюстрируется заданием a_3). В этом задании предложено для выполнения преобразования выражение не имеет вида разности квадратов; преобразование становится возможным лишь тогда, когда ученик заметит, что число |2| можно представить в виде квадрата числа и что, следовательно, имеется полное совпадение структуры левой части тождества. Таким образом, выполнение этого задания производится не в один шаг, а в два: на перовом происходит распознание возможности приведения данного выражения к виду разности квадратов, на втором производится преобразование, используещее тождество. На первых порах освоение тождества производится запись каждого шага: $|2| - k^2 = 11^2 - k^2 = (11-k)(11+k)$, в дальнейшем некоторые операции по распознаванию выполняются учениками устно. В данном примере распознание осуществляется особенно просто; в заданиях $д_2)$, $д_3)$, $ж)$ оно усложняется, причем сразу в двух отношениях. Во-первых, изучаемое тождество выполняет в этих примерах прикладную роль, т. е. цель заданий состоит в указании возможных способов его использования. Во-вторых, знаковые структуры выражений, с которыми приходится действовать, уже не столь просты. Как раньше: в примере $д_2)$ требуется установление связи данного тождества и других, относящиеся к действиям с одночленами; в $д_3)$ оказывается возможным применить тождество для разности квадратов дважды; в ж) ученикам придется преодолеть определенный психологический барьер, осуществляя выход в область иррациональных чисел. Пример ж) помещен во вторую часть цикла, потому что его «естественное» место в курсе алгебры – в разделе, посвященном нахождению формулы корней квадратного уравнения.

Задания типа б) направлены на формирование навыков замены $(x-y)(x+y)$ на x^2-y^2. В дальнейшем изучении тождества оно рассматривается как основа для проведения двухсторонних преобразований. Аналогичную роль играют задания типа в). Примеры типа г), в которых требуется выбрать одно из направлений преобразований, завершает развитие этой идеи в цикле. Помимо указанной, задания типов б) – е) выполняют и другие нагрузки. Например, приведению выкладок привлекаются «сопутствующие» тождества $(a^k)^2 = a^{2k}$ и др. В дальнейшем в решении одного упражнения использование нескольких тождеств становится обычным явлением. Следует отметить постепенное возрастание роли операций по распознаванию применимости тождества и оценке целесообразности его применения; этот аспект заданий наиболее четко виден в примере $г_1$.

В целом задания первой группы ориентированы на усвоение структуры тождества, операции замещения в простейших, принципиально наиболее важных случаях, и представления об обратимости преобразований, осуществляемых тождеством. Очень важное значение имеет также обогащение языковых средств, показывающих различные аспекты тождества.

Представление об этих аспектах дают тексты заданий; учителю необходимо специально обращать на них внимание учеников.

Основные особенности и цели, раскрытые нами при рассмотрении первой группы заданий приведенного цикла, относятся к любому циклу упражнений, формирующему навыки использования тождества. Несмотря на то, что по мере изучения материала курса алгебры и в дальнейшем курсе алгебры и начал анализа , происходит постепенное формирование элементов алгебраической культуры , для любого вновь вводимого тождества первая группа заданий в цикле должна сохранять описанные здесь особенности; различия могут быть только в количестве заданий, на которых учитель рассказывает те или иные особенности изучаемого тождества.

В отличие от первой вторая группа заданий в цикле направлена на возможно более полное использование и учет специфики именно данного тождества. Задания второй группы предполагают уже сформированные навыки использования изучаемого тождества для разности квадратов (в наиболее простых случаях); цель заданий этой группы – углубить понимание тождества за счет рассмотрения разнообразных приложений его в различных ситуациях, в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам курса математики.

Рассмотрим с этой точки зрения решение задания л):

$x^3 - 4x = 15 \Leftrightarrow x^3 - 9x = 15 - 5x \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 5(3-x) \Leftrightarrow$ $x = 3,$ или $x(x+3) = -5.$

Уравнение $x(x+3) = -5$ корней (действительных) не имеет, поэтому $x = 3$ - единственный корень уравнения.

Мы видим, что использование тождества для разности квадратов составляет лишь часть в решении примера, являясь ведущей идеей проведения преобразований.

Отметим особенности циклов заданий, связанных с тождествами для элементарных функций. Эти особенности обусловлены тем, что, во-первых, соответствующие и тождества изучаются в связи с изучением функционального материала и, во-вторых, они появляются позже тождеств первой группы и изучаются с использованием уже сформированных навыков проведения тождественных преобразований. Каждая вновь вводимая элементарная функция резко расширяет область чисел, которые могут быть обозначены и названы индивидуально. Поэтому в первую группу заданий циклов должны войти задания на установление связи этих новых числовых областей с исходной областью рациональных чисел. Приведем пример таких заданий.

Пример 2. Вычислить:

1) $(\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{2}$; 5)$\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$;

2)$2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

3)$\lg 2 + \lg 3$; 7) $\lg a + \lg b = \lg ab$

4)$cos^4\, 22{,}5° - sin^4\, 22{,}5°$; 8) $cos\, 2x = cos^2 x - sin^2 x.$

Рядом с каждым выражением указано тождество. В циклах, по которым могут присутствовать предлагаемые задания. Цель таких заданий – в освоении особенностей записей, включающих символы новых операций и функций, и в развитии навыков математической речи.

Значительная часть использования тождественных преобразований, связанных с элементарными функциями, приходится на решение иррациональных и трансцендентных уравнений: сведение его путем замены неизвестного к алгебраическому уравнению.

Последовательность шагов при этом способе решения такова а) найти функцию найти функцию $\varphi,$ для которой данное уравнение $f(x) = 0$ представимо в виде $F(\varphi(x)) = 0;$ б)произвести подстановку $y = \varphi(x)$ и решить уравнение $F(y) = 0$; в) решить каждое из уравнений $\varphi(x) = y_k$, где $\{y_k\} -$ множество корней уравнения $F(y) = 0.$ При использовании описанного способа зачастую шаг б) выполняется в неявном виде, без введения обозначения $\varphi(x)$. Кроме того, ученики зачастую предпочитают из различных путей, ведущих к нахождению ответа, выбирают тот, который быстрее и проще приводит к алгебраическому уравнению.

Пример 3:

$$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x = 0$$

$$(2^2)^x - 3 \cdot 2^x = 0$$

$$2^x(2^x - 3) = 0$$

Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителенй равен нулю. Так как число в любой степени есть число положительное, то 2^x не может быть нулем. Следовательно решение $2^x - 3 = 0$ отсюда $2^x = 3$

$$x = log_2 3$$

Здесь видно, что при первом способе шаг а) сложнее, чем при втором. Первым способом «труднее начать», хотя дальнейший ход решения значительно проще. С другой стороны, у второго способа имеются достоинства, состоящие в большей легкости, большой отработанности в обучении сведения к алгебраическому уравнению.

Для школьного курса алгебры типичны задания, в которых переход к алгебраическому уравнению осуществляется даже еще проще, чем в данном примере. Основная нагрузка таких заданий относится к выделению шага в) как самостоятельной части процесса решения, связанного с использованием свойств изучаемой элементарной функций.

Пример 4. Решить уравнение:

а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; б) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ в) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

Первые два уравнения сводятся к уравнениям:

а) $2^{2x} = 2$ или $2^x = 1$;

б) $2^x = 4$ или $2^x = -1$.

Для решения этих уравнений требуется знание лишь простейших фактов о показательной функции: ее монотонность, область значений. Как и задание предыдущего примера, уравнения а) и б) можно отнести к первой группе цикла упражнений на решение квадратно-показательных уравнений.

В отличие от этого задание в) при внешнем сходстве с рассмотренными уравнениями требует значительно более уверенного владения свойствами показательной функции. Оно сводится к уравнениям $2^x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, в записи которых присутствуют иррациональные числа. Ответ в этих уравнениях может быть записан только в общей форме, с использованием знака логарифма: $x_1 = log_2(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ Кроме того, составной частью процесса решения должен быть анализ уравнения, включающий доказательство неравенства $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$ (В заданиях а) и б) также приходится учитывать область значений показательной функции, но это производится гораздо проще, без вкладок.)

Таким образом, приходим к классификации заданий в циклах, относящихся к решению трансцендентных уравнений, включающих показательную функцию:

1) уравнения, сводящиеся к уравнениям вида $a^x = y_0$ и имеющие простой, общий по форме ответ: $x = log_a y_0$;

2) уравнения, сводящиеся к уравнениям $a^x = a^k$, гдн k – целое число, или $a^x = b,$ где $b \leq 0$;

3) уравнения, сводящиеся к уравнениям $a^x = y_0$ и требующие явного анализа формы, в которой записано число y_0 .

Аналогично можно классифицировать задания и для других элементарных функций.

Большую пользу приносят задания, в которых тождественные преобразования используются для построения графиков при упрощении формул, задающих функции. Этот прием эффективно используется в теории квадратичной функции (выделение полного квадрата), при изучении графического метода решения уравнений и неравенств.

ГЛАВ 2. ФАКУЛЬТАТИВ «ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ»

Факультативный курс по теме:

«Тождественные преобразования алгебраических выражений »

Пояснительная записка.

Программа предназначена для подготовки учащихся 9 класса, выбирающих в старшей школе математику в качестве профильного предмета.

Факультатив проводился на производственной практике в ноябре-декабре 2016 учебного года в 9 «г» классе МАОУ СОШ №153 г. Челябинска. Уроки проводились в соответствии с разработанной системой заданий.

В школах подготовка к экзаменам осуществляется на уроках, а так же во внеурочное время на факультативных и индивидуальных занятиях.

Оптимальной формой подготовки к экзаменам являются факультативные курсы, которые позволяют повторить, расширить и углубить изучаемый материал по школьному курсу, развивают мышление и исследовательские знания учащихся; формирую базу общих универсальных приемов и подхлдов к решению задач соответствующих типов.

Цели:

1) реализовать интерес к предмету «математика» как к предмету, освоение которого нужно для обучения по выбранному профилю;

2) дать возможность уточнить учащимся их готовность и способность осваивать выбранный предмет на повышенном уровне;

3) подготовить учащихся к сдаче ОГЭ в соответствии с требованиями, предъявляемыми новыми образовательными стандартами**.**

Тема выбрана не случайно. Несмотря на свое название (часто встречающееся в базовой школе) тема объединяет большое количество материала как изучаемого в основной школе, так и выходящего за рамки программы общеобразовательной программы.

В ходе проведения занятий учащимся предлагается решать домашние контрольные работы, которые проверяются учителем. Результаты сравниваются, рассматриваются задания с наибольшим количеством вопросов. При окончании курсов ставится общая оценка учителем, и подводятся итоги занятий.

Включенный в программу материал может применяться и для тех учащихся, которые не склонны к серьезному изучению физико-математических дисциплин. Полученные знания им помогут при сдаче экзамена по алгебре.

Структура

Факультатив рассчитан на 10 занятий

Включенный в программу материал предполагает повторение и углубление следующих разделов алгебры:

- «Разложение целого многочлена на множители.»
- «Сокращение дробей».
- «Квадратные уравнения».
- «Теорема Виета».
- « Преобразование алгебраических выражений».

Учебно-тематическое планирование.

№ п\п	Кол-во часов	Тема занятия	Форма проведения	Содержание работы и деятельность учащихся
1.	2	Разложение на множители.	Лекция, практикум	В ходе беседы с учащимися учитель напоминает известные способы разложения на множители и знакомит с новыми. На уроке рассматриваются примеры, решаются задачи.
2	2	Сокращение дробей.	Лекция, практикум	В ходе лекции рассматриваются новые способы сокращения дробей, приводятся примеры. Учащимся предлагаются аналогичные и более трудные задачи.
3	2	Квадратные уравнения.	Лекция, практикум	Рассматриваются примеры исследования квадратных уравнений. Ученики решают аналогичные задачи, а на последующих занятиях и более трудные.
4	2	Теорема Виета	Лекция, практикум	Рассматриваются примеры. Ученики решают задачи от простых к более сложным.
5	1	Преобразование дробно-рациональных выражений	практикум	На занятиях рассматриваются задания из сборника для поступающих в ВУЗы с применением всех изученных ранее тем.
6	1	Итоговая контрольная работа.		

Занятия 1-2.

При решении уравнений и неравенств, при решении задач на делимость и в ряде других случаев часто приходится раскладывать многочлен на множители. Эта задача более сложная, чем преобразование целого выражения в многочлен.

Если в преобразованиях целого выражения в многочлен обычно можно руководствоваться определенными правилами, то при решении обратной задачи - разложение многочлена на множители – приходится зачастую самостоятельно отыскивать те или иные приемы.

Сначала рассмотрим примеры, в которых многочлен можно разложить на множители путем предварительного преобразования: добавить или вычесть одночлен или разбить его на два слагаемых, представив тем самым многочлен в виде разности квадратов или в виде разности или суммы кубов.

Пример 1. Разложите на множители многочлен:

А) x^2+4x-5**;** **Б)** x^4+x^2+1**;** **В)** $x^9+6x^6+11x^3+8$**.**

Решение:

А) $x^2+4x-5=x^2+(5x-x)-5=(x^2+5x)-(x+5)=x(x+5)-(x+5)=$

$=(x+5)(x-1)$**.**

Б) $x^4+x^2+1=x^4+x^2+1+x^2-x^2=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2=$

$(x^2+1-x)(x^2+1+x)$**.**

В) $x^9+6x^6+11x^3+8$**.**

Этот многочлен напоминает разложение куба двучлена. Действительно, $x^9=(x^3)^3$; $8=2^3$, $6x^6=3(x^2)^2 2$. Единственный член $11x^3$ не подходит. На этом месте должен быть $3x^3 2^2=12x^3$. Это несоответствие можно исправить: прибавим и вычтем x^3.

$$x^9+6x^6+11x^3+8+x^3-x^3=(x^9+6x^6+12x^3+8)-x^3=(x^3+2)^3-x^3=$$

$$(x^3+2-x)((x^3+2)^2+x(x^3+2)+x^2)=(x^3+2-x)(x^6+x^4+x^2+2x+4).$$

Иногда, прежде чем раскладывать выражение на множители бывает выгодно использовать временные обозначения, т.е. производить замену выражения переменной.

Пример 2.

Представим выражение $(x+2y+1)(x+2y-5)-(x-2y)(x-2y+4)+5$ **в виде произведения.**

Нетрудно заметить, что в это выражение входит лишь два буквенных выражения - двучлены $x+2y$ и $x-2y$. С целью упрощения выкладок введем подстановку: $x+2y=a$ и $x-2y=в$. Тогда исходное выражение примет вид:

$$(a+1)(a-5)-в(в+4)+5=a^2-4a-в^2-4в=(a^2-в^2)-4(a+в)=$$
$$(a-в)(a+в)-4(a+в)=(a+в)(a-в-4).$$

Произведем обратную замену, получим:

$$(x+2y+1)(x+2y-5)-(x-2y)(x-2y+4)+5=2x(4y-4)=8x(y-1).$$

Выражение $a^n-в^n$ при $n=2$ и $n=3$ можно разложить на множители . Это формулы разности квадратов и разности кубов. Напомним их:

$$a^2-в^2=(a-в)(a+в),$$

$$a^3-в^3=(a-в)(a^2+aв+в^2).$$

Выведем аналогичную формулу для $n=4$:

$$a^4-в^4=(a^2-в^2)\,(a^2+в^2)=(a-в)(a+в)(a^2+в^2)=$$
$$(a-в)(a^3+a^2в+aв^2+в^3).$$

Правая часть этих формул - произведение разности $a-в$ на некоторый многочлен, в структуре которого хорошо просматривается определенная закономерность.

1)Этот многочлен расположен по убывающим степеням переменной $в$;

2) все его коэффициенты равны 1;

3) каждый член многочлена имеет одну и ту же степень, равную степени многочлена. Естественно предположить, что при любом n имеет место тождество $a^n-в^n=(a-в)(a^{n-1}+a^{n-2}в+...+aв^{n-2}+в^{n-1})$.

Возможно также разложение на множители суммы n-х степеней.

Пусть n - нечетное натуральное число. Тогда $a^n + в^n = a^n - (-в^n)$.

Применим формулу разности n-х степеней, получим: $a^n + в^n =$

$(a+в)(a^{n-1} - a^{n-2}в + ... - aв^{n-2} + в^{n-1})$.

Пример 3. Докажем, что при всяком натуральном n значение выражения $7^n \cdot 2^{3n} - 3^{2n}$ кратно 47.

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$7^n \cdot 2^{3n} - 3^{2n} = 7^n \cdot (2^3)^n - (3^2)^n = (7 \cdot 8)^n - 9^n = 56^n - 9^n =$

$(56-9)(56^{n-1} + 56^{n-2}9 + ... + 56 \cdot 9^{n-2} + 9^{n-1}) =$

$47(56^{n-1} + 56^{n-2}9 + ... + 56 \cdot 9^{n-2} + 9^{n-1})$.

Первый множитель 47, а второй множитель целое число.

Значит, данное выражение делится на 47.

Занятие 3-4.

Тема: «Сокращение дробей».

Одна из важных и часто встречающихся операций в преобразовании рациональных дробей – сокращение дробей. Чтобы сократить дробь, нужно, как известно, ее числитель и и знаменатель разложить на множители. В общеобразовательной программе наиболее часто встречающиеся приемы: использование формул сокращенного умножения и разложение на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки или использование способа группировки. Покажем другие приемы сокращения рациональной дроби:

1) Числитель и знаменатель дроби умножается на одно и то же число с целью упрощения выкладок.

Пример 1:

Сократить дробь: $\dfrac{a^8+a^6+a^4+a^2+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}$**.**

Можно заметить, что знаменатель данной дроби представляет собой второй множитель в разложении по формуле двучлена a^5-1, а числитель также представляет собой второй множитель в разложении двучлена $\left(a^2\right)^5-1$. Поэтому, умножив числитель и знаменатель данной дроби на a^2-1**,** мы сможем упростить эту дробь, а затем выполнить ее сокращение

$$\frac{a^8+a^6+a^4+a^2+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}=\frac{(a^8+a^6+a^4+a^2+1)(a^2-1)}{(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^2-1)}=\frac{a^{10}-1}{(a^5-1)(a+1)}=$$

$$\frac{(a^5-1)(a^5+1)}{(a^5-1)(a+1)}=\frac{a^5+1}{a+1}=a^4-a^3+a^2-a+1.$$

Пример 2. Зная, что $\dfrac{3a+7в}{3a-в}=2$**, найдите значение дроби**

$\dfrac{a^3-2a^2в+aв^2+6в^3}{a^3+a^2в-9в^3}$**.**

Числитель и знаменатель дроби - однородные многочлены третьей степени (т.е. каждый член многочлена имеет степень, равную степени многочлена). Поэтому, если числитель и знаменатель этой дроби разделить на $в^3$, то получим дробь, значение которой зависит от $\dfrac{a}{в}$:

$$\frac{\left(\frac{a}{в}\right)^3-2\left(\frac{a}{в}\right)^2+\frac{a}{в}+6}{\left(\frac{a}{в}\right)^3+\left(\frac{a}{в}\right)^2-9}.$$

Из условия $\dfrac{3a+7в}{3a-в}=2$, находим значение $\dfrac{a}{в}$:

$$3a + 7в = 2(3a - в),$$

$$3a + 7в = 6a - 2в,$$

$$3a = 9в,$$

$$\frac{a}{в} = 3.$$

Подставив это значение в преобразованную дробь, найдем:

$$\frac{3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 + 6}{3^3 + 3^2 - 9} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3. При каких целых значениях n **дробь** $\frac{4n^2 + 7n - 32}{n + 3}$ **является целым числом?**

Выделим в числителе дроби множитель $n + 3$:

$$4n^2 + 7n - 32 = 4n^2 + 12n - 5n - 15 - 17 =$$
$$4n(n + 3) - 5(n + 3) - 17 = (n + 3)(4n + 5) - 17.$$

Получим:

$$\frac{4n^2 + 7n - 32}{n + 3} = \frac{(n + 3)(4n - 5) - 17}{n + 3} = 4n - 5 - \frac{17}{n + 3}.$$

Если $n \in Z$, то $(4n - 5) \in Z$. Дробь $\frac{17}{n + 3}$ окажется целым числом тогда и только тогда, когда 17 делится на $n + 3$. Число 17- простое, его делителями являются числа –17;-1;1;17.

Значит, n может принимать значения –20;-4;-2;14.

Таким образом, данная дробь является целым числом , при $n \in \{-20; -4; -2; 14\}$.

Выделенное в примере преобразование называют выделением целой части из рациональной дроби.

Занятие 5-6.

Тема: «Квадратные уравнения».

Квадратным называется уравнение вида $ax^2 + вx + c = 0$, где *а, в, с*- действительные числа и $a \neq 0$. Если a=1, то квадратное уравнение называется приведенным.

Впервые квадратное уравнение сумели решить математики Древнего Египта. В одном из математических папирусов содержится задача: « Найти стороны поля, имеющего форму прямоугольника, если его площадь 12, а 3\4 длины равна ширине».

Рассмотрим ее.

Пусть x - длина поля. Тогда $3x/4$-его ширина, $S = \frac{3x^2}{4}$ - площадь. Получилось квадратное уравнение $\frac{3x^2}{4} = 12$.

В папирусе дано правило для его решения: « Раздели 12 на 3\4».

Итак, $x^2 = 16$. « Длина поля равна 4»- указано в папирусе.

Задача о стае обезьян.

Составив квадратное уравнение, решите древнеиндийскую задачу о стае обезьян.

На две партии разбившись

Забавлялись обезьяны.

Часть восьмая их в квадрате

В роще весело резвилась.

Криком радостным двенадцать

Воздух свежий оглашали.

Вместе сколько, ты мне скажешь

Обезьян там было в роще?

Решение:

Пусть x – искомое количество обезьян

Тогда $(\frac{1}{8}x)^2$- «в роще весело резвилась»,

12- «Воздух свежий оглашали»

Составим квадратное уравнение и найдем x:

$$(\frac{1}{8}x)^2 + 12 = x$$

$\frac{1}{64}x^2 + 12 - x = 0$, умножим обе части уравнения на 64

$x^2 - 64x + 768 = 0$,

$D = 64^2 - 4 * 1 * 768 = 4096 - 3072 = 256$

$\boldsymbol{x_{1/2} = \frac{64 \pm 16}{2}}$; $\boldsymbol{x_1 = 16}$, $\boldsymbol{x_2 = 48}$,

Ответ: 16, 48.

Рассмотрим примеры исследования квадратного уравнения.

Пример 1. Не решая уравнения, выясним, имеет ли уравнение корни и если имеет, то каковы их знаки:

А) $6x^2 - 11x - 3175 = 0$**;** **б)** $x^2 + 5\sqrt{2}x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$**.**

Решение: Определим сначала знак дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Не выполняя вычислений, можно установить, что $D > 0$, так как $a > 0$ и $c < 0$. Значит, уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2**.** Так как $x_1 \cdot x_2 = -\frac{3175}{6} < 0$, то знаки корней различные. Из условия $x_1 + x_2 = \frac{11}{6} > 0$ следует, что положительный корень уравнения имеет больший модуль, чем отрицательный**.**

Б) Определим сначала знак дискриминанта. В этом уравнении $c = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8} > 0$, поэтому сразу сказать, будет дискриминант положительным или отрицательным числом, нельзя. Выполним вычисления:

$D = \left(-5\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 50 - 12 + 8\sqrt{2} = 38 + 8\sqrt{2} > 0$. Дискриминант положителен, значит, уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2. Так как $x_1 \cdot x_2 = 3 - 2\sqrt{2} > 0$,то знаки корней одинаковые.

Учитывая, что $x_1 + x_2 = -5\sqrt{2} < 0$, можно сделать вывод, что оба корня отрицательные.

Занятие 7-8.

Тема: «Теорема Виета».

Если в квадратном уравнении коэффициент при x^2 равен 1, то уравнение принимает вид $x^2 + px + q = 0$, где p и q -некоторые числа.

Уравнения такого вида называют **приведенным квадратным уравнением**.

Зависимость между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения выражает, как, известно, теорема Виета, получившая свое название по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета:

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Пусть x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Если квадратное не приведенное уравнение $ax^2 + вx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{в}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Если условиться считать, что при $D = 0$ квадратное уравнение имеет два равных корня, то теорема Виета верна и в этом случае. О квадратном уравнении, имеющем единственный корень, говорят иногда, что оно имеет корень двойной кратности или что оно имеет два равных корня.

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

Если m и n таковы, что их сумма равна p, а произведение равно q ,то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Пример 1. Найдем корни уравнения $1998x^2 - 907x + 1091 = 0$.

Решение: Нетрудно заметить, что 1998-907+1091=0, значит один из корней уравнения равен 1. Зная, что x_1=1, найдем x_2,воспользовавшись теоремой Виета. Имеем $x_1\,x_2 = \dfrac{1091}{1998}$, т.к. x_1=1, то $x_2 = \dfrac{1091}{1998}$.

Ответ: $x = \left\{1; \dfrac{1091}{1998}\right\}$.

Пример 1. Решая уравнение $9x^2 + 513x - 172 = 0$, нашли, что оно имеет корни $x_1 = -57\dfrac{1}{3}$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$. Выясним, правильно ли решено уравнение.

Решение: Чтобы выполнить проверку, можно подставить в уравнение данные значения x и выяснить, обращается ли уравнение в верное равенство. Однако можно избежать громоздких вычислений, если воспользоваться теоремой обратной теореме Виета. Найдем сумму и произведение корней: x_1+ $x_2=-57\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$=-57; $\quad x_1 * x_2= -57\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = -\frac{172}{9}$.

По теореме, обратной теореме Виета, числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2+57x-\frac{172}{9}=0$, а значит, и равносильного ему уравнения $9x^2+513x-172=0$, которое получается из него умножением обеих частей уравнения на 9. Итак, можно сделать вывод, что корни уравнения найдены правильно.

Пример 3. Составим приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1=7+\sqrt{3}$ и $x_2=2-\sqrt{3}$.

Решение: Один из путей решения состоит в том, чтобы составить уравнение вида $(x-x_1)(x-x_2)=0$, т.е. уравнение вида $(x-7-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$, и, выполнив умножение, привести его к виду $x^2+px+q=0$.

Можно поступить иначе. Вычислим сумму и произведение этих чисел:

$x_1+x_2= 7+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=9$;

$x_1 * x_2= (7+\sqrt{3})*(2-\sqrt{3})= 14 - 5\sqrt{3}-3=11-5\sqrt{3}$. По теореме, обратной теореме Виета, получаем, что указанные корни имеет приведенное квадратное уравнение $x^2-9x+11-5\sqrt{3}=0$.

Теорема Виета позволяет решать задачи, в которых требуется найти коэффициенты квадратного уравнения по известному соотношению между его корнями. Решение таких задач сводится к решению системы уравнений, в которую, кроме уравнения, заданного условием, входит еще уравнение, составленное на основе теоремы Виета.

Пример 4. Найдем c в уравнении $x^2+12x+c=0$, если известно, что разность квадратов корней равна 288.

Решение: Пусть x_1 и x_2 - Корни уравнения. По условию задачи $x_1^2 - x_2^2 = 288.$

По теореме Виета $x_1 + x_2$=-12.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 288, \\ x_1 + x_2 = -12. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 288, \\ x_1 + x_2 = -12. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 288, \\ x_1 + x_2 = -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -24, \\ x_1 + x_2 = -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -18, \\ x_2 = 6. \end{cases}$

По теореме Виета $c = x_1 \cdot x_2 = -108.$

Ответ: c=-108.

Экзаменационная задача.

Эту задачу предлагали решить поступающим в Московский университет на физический факультет.

Уравнение $ax^2 + вx + 2 = 0$**, где** $a\langle 0$ **имеет одним из своих корней число 3.**

Решите уравнение $ax^4 + вx^2 + 2 = 0$**.**

Решение: Применим теорему Виета к первому уравнению: $x_1\, x_2 = \frac{2}{a}$, и, следовательно, x_2<0. Обозначим $x^2 = t$, тогда второе уравнение примет вид $at^2 + bt + 2 = 0$. Сравнив это уравнение с исходным, получим t_1=3; $t_2 = \frac{2}{3a}$, t_2 <0. Учитывая, что $x^2 = t$, значение t_2 отбрасываем, а из равенства t_1=3 находим $x^2 = 3$, т.е. $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

Занятие 9-10.

Тема: « Преобразование алгебраических выражений».

Пример 1. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{a^2-4ав+4в^2}}{\sqrt{a^2+4ав+4в^2}}-\frac{8ав}{a^2-4в^2}+\frac{2в}{a-2в},\ 0<a<2в.$$

Решение:

Имеем $\sqrt{a^2-4ав+4в^2}=\sqrt{(a-2в)^2}=|a-2в|=2в-a.$

Аналогично, $\sqrt{a^2+4ав+4в^2}=\sqrt{(a+2в)^2}=|a+2в|=2в+a.$

Следовательно, $\dfrac{\sqrt{a^2-4ав+4в^2}}{\sqrt{a^2+4ав+4в^2}}=\dfrac{2в-a}{2в+a}.$

Теперь находим

$$\frac{2в-a}{2в+a}-\frac{8ав}{a^2-4в^2}+\frac{2в}{a-2в}=\frac{(2в-a)(a-2в)-8ав+2в(a+2в)}{a^2-4в^2}=\frac{a}{2в-a}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{2в-a}$.

Пример 2. Упростите выражение:

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},x>1.$$

Решение:

Разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби:

$f(x)=\dfrac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}}$**.** Так как $x>1$,то в силу соотношения $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит, $f(x)=$

$\dfrac{\sqrt{x-1}((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})}$**,** откуда после сокращения получим

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Пример 3.

Проверить справедливость равенства $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2$**.**

Решение:

Рассмотрим равенство $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$**.**

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство.

Пусть $a=\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$; $в=2+\sqrt{3}$**.** Легко установить, что $a>0$ и $в>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=в^2$, то $a=в$. Находим

$$a^2=\frac{(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}})^2}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$в^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=в^2$, то $a=в$, т.е. заданное равенство справедливо.

2 способ.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренные выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно:

$7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ и $19-8\sqrt{3}=\left(4-\sqrt{3}\right)^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и 2=2.

Пример 4. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ **и** $\sqrt{8-t^2}$ **, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной** t **находить не нужно)?**

Решение:

Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}$ - $\sqrt{8-t^2}$ =2. Используя формулу $a+в=\frac{a^2-в^2}{a-в}$, получим $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8.$

Выводы по главе

В результате прохождения таких курсов, на мой взгляд, ученики получат необходимые им знания для подготовки к экзамену.

В ходе занятий контролируются знания учащихся, как учителем, так и самими учениками. Оценки ставятся условно, они не проставляются в журнал, то есть ученики не боятся получить «2». Вместе с тем они должны быть заинтересованы в получении знаний, так как приходят на такие курсы, прежде всего, ученики настроенные на углубление математики, на получение новых знаний.

В данные курсы не вошли, например, такие важные темы, как: «Решение неравенств», «Прогрессии», «Тригонометрия», «Функции» и др. Было бы логично проводить курсы по этим темам параллельно с данными курсами или продолжить рассмотрение этих тем в 10-11 классах в ходе подготовки к ЕГЭ.

В результате углубления знаний по данной теме курса ученики, с которыми проводился данный спецкурс, легко справились с письменным экзаменом по алгебре и успешно перешли в 10 класс.

Программа данных курсов позволяет оценить свои потребности и возможности и сделать обоснованный выбор профиля обучения в старшей школе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она изучается в течение всего курса математики, начиная с начальных классов.

Сформулируем основные выводы и полученные результаты бакалаврской работы:

1. В данной работе были рассмотрены основные понятия и содержание линии тождественных преобразований.

2. Подклассы математических выражений в курсе алгебры основной школы.

3. Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

4. Представлена методическая схема обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы.

5. Выявлены методические особенности тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

6. Обзор основных тождественных преобразований, используемых в основной школе на основе опыта работы учителей.

7. Методические рекомендации обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.

8. Основные приемы, способствующие сознательному усвоению учащимися тождественных преобразований.

9. Разработка факультатива по теме «Тождественные преобразования алгебраических выражений»

Цели, поставленные в данной работе, достигнуты, задачи решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Актуальные вопросы теории и методики обучения математике в средней школе: сборник научный статей. Вып. 1. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 111 с.

2. Александрова Л. А. Алгебра. 9 класс. Самостоятельные работы для учащихся общеобразовательных учреждений : к учебнику А. Г. Мордковича, П. В. Семенова / Л. А. Александрова ; под ред. А. Г. Мордковича. — 9-е изд., стер. — М., 2014. — 88 с.

3. Алгебра и начала анализа: Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / И. Р. Высоцкий, Л . И. Звавич, Б.П. Пигарев и др.; Под ред. С.А. Шестакова - 2-е изд., испр.- М.: Внесшигма- М., 2004. – 207с.

4. Александров П.С., Колмогоров А.Н. Алгебра: Пособие для учащихсясредней школы.– М.: Наука, 2013. – 287 с.

5. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др.Алгебра: Пособие для учащихся. –.: М.: Просвещение, 2014. – 255 с.

6. Барыбин К.С. Методика преподавания алгебры: Пособие для учителя.– М.: Просвещение, 2006.– 345 с.

7. Баум И.В. Тождественные преобразования выражений/ И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев// Преподавание алгебры в 6-8 классах./ Сост. Ю.Н.Макарычев Н.Г.Миндюк.– М.: Просвещение, 1980.С. 77-90.

8. Блох А.Я. О тождественных реобразованиях в курсе алгебры VI-VIII кл. [Текст] / Метод. рекомендации и указания по методике преподавания математики в средней школе: Сб. статей / А.Я. Блох. - М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 2005.– 83 с.

9. Виленкин Н.Я. и др. Современные основы школьного курса математки.— М.: Просвещение, 2001.– 240 с.

10. Виленкин Н.Я. Равенства, тождества, уравнения, неравенства Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд// Математика в школе. - 2000. - № 4.

11. Виленкин Н.Я., Чесноков А. С., Шварцбурд С.И., Жохов В. И. Математика. Учеб. для 6 кл. сред. шк. — М.: Просвещение, 2008. — 256 с.
12. ГИА 2015, Математика: сборник зданий: 9 класс/ В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. – М.: Эксмо, 2014.− 336 с.
13. ГИА. Алгебра Сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе/ Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова Е.А. Бунимович и др. – 6-е изд., М.: Просвещение, 2015.−240 с.
14. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 224 с.
15. Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внекласная работа по математике в 6—8 классах.— М.: Просвещение, 2007.−289 с.
16. Далингер В.А., Самостоятельная деятельность учащихся - основа развивающего обучения. // Математика в школе, №6, 1994.
17. Иванова Т.А., Теоретические основы обучения математике в средней шко ле;Учебное пособие/ Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. проф. Т.А. Ивановой. - Н. Новгород: НГПУ, 2010 − 320 с.
18. Канин Е.С. К формированию умений и навыков в вычислениях и тождественных преобразованиях / Е.С. Канин// Математика в школе. − 2002. − №5.
19. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова.− М.: Просвещение. 2015.− 384 с.
20. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Ивлиев Б.М., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала анализа Учеб. для 10–11 кл. сред. шк.−М.: Просвещение, 2010. − 320 с.
21. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. М.: Просвещение, 2005.− 324 с.
22. Колягин Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики.−М.: Просвещение, 2007. – 480 с. 72

23. Колягин Ю.М., Луканин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики.− М.: Просвещение, 2014. −367 с.

24. Кондрушенко Е.М. Тождественные преобразования выражений в школьном курсе математики.— Великий Новгород: МОУ ПКС «Институт образовательного маркетинка и кадровых ресурсов», 2006. — 72 с.

25. Крючкова В.В. Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены». В.В. Крючкова// Математика в школе. - 2004. - №5.

26. Ларин А.А. Курс высшей математики. Учеб. для студентов втузов /Под ред. А. А. Шестакова. Часть 1.- 2004.− 320 с.

27. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского.— М.: Просвещение, 2014.− 235 с.

28. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского М.: Просвещение, 2014.−235 с.

29. Макарычев Ю.Н. Об учебниках алгебры 6 и 7 классов/ Ю.Н.Макарычев, Г.Миндюк, С.Б. Суворова// Математика в школе. - 2002. - №3.

30. Макарычев Ю.Н. Тождественные преобразования многочленов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.С. Муравин // Математика в школе. - 1973. -№ 31. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др; Сост. В.И. Мишин.- М.: Просвещение, 1987.-Гл.5.− 416 с.

32. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / Сост. В.И. Мишин. — М.: Просвещение, 2003.− 421 с.

33. Миндюк Н.Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов/ Н.Г. Миндюк// Математика в школе. - 1985. - №5.

34. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 9 кл.: в 2 ч. 4.I: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович.- М.: Мнемозина, 2013

35. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа . 9 кл.: В 2 ч. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович
Л.О. Денищева,Т.А. 73
Корешкова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под ред. А.Г. Мордковича. - М.: Мнемозина, 2013.
36. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 кл.: в 2 ч. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2013. – 240 с.
37. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 кл.: учебник для классов с углубленным изучением математики / А.Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2013. −228 с.
38. Морозова Л.П.Обучающая самостоятельная работа как метод активизации деятельности учащихся при изучении теории на уроках математики. [Электронный ресурс]/Л.П. Морозова.− URL: http://festival.1september.ru/articles/213464/
39. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб.пособие для студ.мат. спец.пед.вузов и ун-тов.- М.: Просвещение, 2002.−224 с.
40. Ситникова Е.В. Самостоятельная работа учащихся в процессе личностно ориентированного обучения в современной школе. [Электронный ресурс] /Е.В. Ситникова.− URL: http://festival.1september.ru/articles/214474/
41. Стефанова Н.Л. , Подходова Н.С. Методика и технология обучения математике. Учеб. пособие / Н.Л. Стефанова и др. М. : Дрофа, 2008.−416 с. 42. Столяр А.А. Методы обучения математике.−Минск: Высшая школа, 1996.−191 с.
43. Тождественные преобразования выражений. Математика. 8-9 кл./ М.В. Шабанова, О.Л. Безумова, С.Н. Котова и др. – М.: Дрофа. 2010.− 77 с.
44. Тосуниди Е.Г. Активизация мыслительной деятельности при проведении устного счета на уроках математики. [Электронный ресурс] /Г.Р. Тосуниди.− URL: http://festival.1september.ru/articles/566201/
45. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования. / М-во образования и науки РФ.−М.: Просвещение, 2010. – 50 с. URL: http://минобр-науки.рф/документы/2365 (дата обращения

22.04.2016).
46. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика преподавания математикив средней школе. М.: Просвещение, 2010.−336 с.
47. Шаталина Е.Г. Активизация познавательной деятельности на уроках математики. [Электронный ресурс] /Е.Г. Шаталина.− URL: http://festival.1september.ru/articles/559342/