МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения тождественным преобразованиям выражений в условиях реализации ФГОС ОО

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.01– «Педагогическое образование»

Направленность программы бакалавриата
«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
65% авторского текста
Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована
«15» мая 2020 г.
и. о. зав. кафедрой ММОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513-087-5-1
Хусаинова Юлия Сайфитдиновна

Научный руководитель:
Доцент, кандидат пед. наук
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных преобразований выражений и формул занимает значительную часть учебного времени в курсе школьной математики. Простейшие преобразования, опирающиеся на свойства арифметических операций, производятся уже в начальной школе и в IV-V классах. Но основную нагрузку по формированию умений и навыков выполнения преобразований несет на себе курс школьной алгебры.

В курсе алгебры основной школы 7-9 классов сконцентрирована основная нагрузка по формированию умений и навыков выполнения тождественных преобразований. Это связано со значительным увеличением числа, а также с разнообразием совершаемых преобразований. Осуществляется развитие культуры выполнения тождественных преобразований, а также, на основе закрепленных знаний свойств операций и алгоритмов их выполнения развивается культура вычислений [2]. Высокий уровень выполнения тождественных преобразований проявляется в умении правильно обосновать преобразования, в умении проследить за изменением области определения в последовательной цепочке тождественных преобразований, в быстроте и безошибочности выполнения преобразований, в умении найти кратчайший путь решения к окончательному виду преобразований [1].

Обеспечение высокой культуры вычислений и тождественных преобразований представляет важную проблему обучения математике. Однако эта проблема решается еще далеко не удовлетворительно. Доказательство этому – статистические данные Федерального Института Педагогических Измерений [40], в которых ежегодно констатируются ошибки и нерациональные приемы вычислений и преобразований, допускаемые учащимися. Таким образом, мы получаем противоречие между недостаточно высоким уровнем культуры вычислений тождественных преобразований в средней школе и необходимостью обеспечить высокий уровень вычислений и тождественных преобразований. Недостаточно высокий уровень культуры вычислений и тождественных преобразований в средней школе является следствием формализма в знаниях учащихся, отрыва теории от практики.

В документе об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего образования обязательный минимум содержания основных образовательных программ по тождественным преобразованиям базового уровня являются следующие:

- выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем;
- выполнять несложные преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые;
- использовать формулы сокращенного умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений;
- выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями [38].

Авторы Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова, выделяют четыре этапа изучения тождественных преобразований:

- пропедевтический (5-6 классы);
- первый этап (начало 7 класса), использование нерасчлененной системы преобразований;
- второй этап (8-9 классы), рассмотрение конкретных видов преобразований;
- третий этап, формирование целостной системы преобразований (10-11 классы) [34].

Объект: процесс обучения математике в школе.

Предмет: линия тождественных преобразований, на примере темы «Степени и корни».

Цель данного исследования: разработать факультативный курс по теме «Степени и корни».

Задачи:

1. Разобрать основные понятия и содержания линии тождественных преобразований в школьном курсе алгебры основной школы.
2. Рассмотреть методическую схему обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы и представить методику обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.
3. Рассмотреть тождественные преобразования в теме «Степени и корни».
4. Проанализировать современные учебники школьного курса математики.
5. Рассмотреть типичные ошибки учащихся и рекомендации по их устранению.
6. Разработать факультативный курс по математике по теме «Степени и корни».

Гипотеза: изучение темы «Степени и корни» будет эффективно, если:

- учесть последовательность изучения разделов тождественных преобразований всех видов выражений;
- использовать дифференцированный подход;
- уделять больше времени на разбор типичных ошибок.

База исследования: школа № 138 г. Челябинска, учащиеся 8 класс в количестве 20 человек.

Практическая значимость работы определяется тем, что в ней проанализированы учебные материалы, использующиеся в школьном курсе математики; указаны типичные ошибки учащихся, разработан факультативный курс.

Методы исследования: анализ, синтез, тест.

Апробация. Теоретические выводы были апробированы на всероссийской научно-практической конференции студентов и магистрантов высших учебных заведений «Актуальные вопросы математики, ее история и методика преподавания».

ГЛАВА 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

1.1 Основные понятия и содержание линии тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы

Линия тождественных преобразований входит в одну из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Начиная с начальных классов и на протяжении все курса математики изучается линия тождественных преобразований. В первом параграфе будут рассмотрены основные понятия данной содержательной линии такие как: «выражение», «тождественно равные выражения», «тождество» и «тождественные преобразования выражений» [7].

Определение. *Выражением* в математике называют запись, состоящую из чисел, букв (обозначающих постоянные или переменные величины), знаков математических действий. В числовых множествах имеют дело с числовыми выражениями [30].

Школьный курс математики подразделяется на два класса основных математических выражений: *алгебраические и неалгебраические (трансцендентные)*.

Определение. Алгебраическим выражением называется выражение, составленные из конечного числа букв и цифр, соединенных знаками действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечения корня) [31].

Определение. Трансцендентными называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими (тригонометрические, логарифмические и показательные) [31].

Выражения являются предметом изучения, поэтому можно выделить в каждом из этих классов следующие подклассы математических выражений (рисунок 1) [32].

Рисунок 1 – Подклассы математических выражений

Основы тождественных преобразований изучаются еще в начальной школе (законы арифметических действий). В 7 класс эти вопросы изучаются в курсе алгебры систематически и углубленно. Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы представлена в Таблице 1 [33].

Талица 1 – Последовательность изучения тождественных преобразований

Класс	Виды выражений
7	Целые (одночлены и многочлены)
8	Дробные (дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни)
9 (10)	Иррациональные (Степень с рациональным показателем, корни n-й степени)
10	Тригонометрические выражения
11	Логарифмические выражения

Впервые понятие тождество сформулировано в 7 классе. В учебнике А.Г. Мордковича даются следующие определения.

Определение. *Тождество* – это равенство, верное при любых допустимых значениях, входящих в его состав переменных [36].

Например: $a + b = b + a, ab = ba.$

В дальнейшем вводится определение тождественно равных выражений.

Определение. Два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными [36].

Далее дается понятие тождественного преобразования выражений.

Определение. *Тождественное преобразование выражения* – это замена исходного выражения на выражение, тождественно равное ему [36].

В этом определении слово «тождественное» иногда опускают, и говорят просто «преобразование выражения», при этом понимают, что речь идет о тождественном преобразовании [7].

Далее приводятся примеры поясняющие сформулированное выше определение.

Пример 1. Данное выражение $5x + 11 - 4$ можно заменить тождественно равным ему выражением $5x + 7$, т.е. эта замена есть тождественное преобразование выражения $5x + 11 - 4 = 5x + 7$.

Пример 2. Замена выражения $\frac{2a}{6}$ выражением $\frac{a}{3}$ является тождественным предобразованием, т.е. $\frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$.

Контрпример: Выражение x тождественным преобразованием выражения x^2 не является, так как эти выражение не тождественно равны.

На уроках математики, в пропедевтическом курсе, начинают отрабатываться навыки тождественных преобразований, такие как:

- приведение подобных слагаемых;
- раскрытие и заключение в скобки;
- вынесение за скобки общего множителя.

В 7 классе при изучении тождественных преобразований на уроках алгебры при изучении темы: «Многочлены», обучающиеся вырабатывают навыки работы с тождественными преобразованиями, которые применяются на протяжении всего учебного курса изучения линии тождественных преобразований. Основные законы и свойств арифметических действий:

- $a + b = b + a$ – сложение коммутативно;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ – сложение ассоциативно;
- $a \cdot b = b \cdot a$ – умножение коммутативно;
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – умножение ассоциативно;
- $a + 0 = 0 + a = a$ – сложение с нулем;
- $a - 0 = a;\ a - a = 0$ – вычитание с нулем;
- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ – умножение с нулем;
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – умножение с единицей;
- $a - (b + c) = a - b - c$ – вычитание суммы из числа;
- $(a + b) - c = (a - c) + b$ – вычитание числа из суммы;
- $a \cdot (b + c) = ab + ac$ – умножение дистрибутивно относительно операции сложения.

Изучения тождественных преобразований в школьном курсе делятся на два этапа:

1. Основное свойство дроби и тождества сокращенного умножения.
2. Тождества, которые связывают основные элементарные функции (показательные, тригонометрические, логарифмические, степенные и др.) и арифметические операции [8].

Таким образом, мы рассмотрели основные понятия данной содержательной линии такие как: «выражение», «тождественно равные выражения», «тождество» и «тождественные преобразования выражений». Подклассы математических выражений в курсе алгебры основной школы делятся на две большие группы: алгебраические и неалгебраические. В курсе алгебры основной школы, начиная с 7 класса последовательность изучения тождественных преобразований следующая: сначала изучаются тождественные преобразования на целых выражения (одночлены и многочлены), далее на дробных выражениях (дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни), и потом на иррациональных выражениях (степень с рациональным показателем, корни n-й степени).

1.2 Формирование навыков применения конкретных видов преобразований

На протяжении изучения всего курса математики используется система приемов и правил преобразования, изучаемая на начальном этапе изучения алгебры. При последовательном изучении линии тождественных преобразований вводятся новые свойства операций и функций, а также новые формулы. Каждый новый материал включает в себя знания из предыдущего этапа изучения.

Освоение соответствующих видов преобразований начинается с введения формул сокращенного умножения. Затем рассматриваются преобразования, связанные с операцией возведения в степень, с различными классами элементарных функций – показательных, степенных, логарифмических, тригонометрических. Каждый из этих типов преобразований проходит этап изучения, на котором внимание сосредоточивается на усвоении их характерных особенностей.

По мере накопления материала появляется возможность усовершенствовать понятие «Тождественное преобразование».

Следует обратить внимание на то, что понятие тождественного преобразования дается в школьном курсе алгебры не в полной общности, а только в применении к выражениям.

Преобразования разделяются на два класса: тождественные преобразования – это преобразования выражений, и равносильные – преобразования с помощью формул.

Когда необходимо упростить одну часть формулы, то в этой формуле выделяется выражение, которое служит основой для применения тождественного преобразования.

Основная цель организации целостной системы преобразований состоит в формировании гибкого и мощного аппарата, который можно использовать в решении разнообразных учебных заданий.

Для формирования целостной системы преобразований необходимо уделять внимание каждому этапу изучения преобразований, отрабатывать навыки и формировать умения.

Тождественные преобразования алгебраических выражений изучаемые в курсе алгебры основной школы выражения можно разделить на три групп:

- рациональны целые выражения;
- рациональные дробные выражения;
- иррациональные выражения.

Рассмотрим изучения этих тем в школьном курсе алгебры более подробно. Методические схемы обучения тождественным преобразованиям приведены в Таблице 2 [24].

Таблица 2 – Методические схемы обучения тождественным преобразованиям

Раздел	Методические приемы вычислений
1	*2*
Целые рациональные выражения (одночлен, многочлен)	1.Приведение одночленов и многочленов к стандартному виду, выполнение основных действий с целыми рациональными выражениями (раскрытие и заключение в скобки, выполнение арифметических действий); 2. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки, способ группировки); 3.Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения); 4. Специальный прием разложение квадратного трехчлена на линейные множители, выделения полного квадрата в трехчлене; 5. Обобщенный прием упрощения целого рационального выражения (приведение подобных членов); 6. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$; 7.Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).
Дробные рациональные выражения	1. Приемы записи преобразований дробных рациональных выражений; 2. Сокращение рациональных дробей; 3. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю; 4. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей; 5. Возведение рациональной дроби в целую степень; 6. Обобщенный прием упрощения рационального выражения (приведение подобных членов, прибавление и вычитание одного и того же числа); 7. Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения).

Продолжение таблицы 2

1	*2*
Иррациональные выражения	1. Специальные приемы основных простейших преобразований арифметических корней (выполняются с использованием свойств корня); 2. Преобразования выражений со степенями с рациональны показателем (выполняются с использованием свойств степени); 3. Прием доказательства неравенств. 4.Обобщенный прием упрощения иррационального выражения (приведение подобных членов, умножение на сопряженное выражение); 5. Приемы доказательства тождества (применяются так называемые формулы – тождества); 6. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки).

В курсе алгебры и начал анализа целостная система преобразований, в основных чертах уже сформированная, продолжает постепенно совершенствоваться. К ней также добавляются некоторые новые виды преобразований, однако они только обогащают ее, расширяют ее возможности, но не меняют ее структуру. В методической схеме обучения тождественным преобразованиям показано как проходит изучение линии тождественных преобразований на протяжении школьного курса алгебры. Для формирования целостной системы преобразований необходимо уделять внимание каждому этапу изучения преобразований, отрабатывать навыки и формировать умения.

1.3 Методические особенности обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы

Авторы Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова в своей книге предлагают такую схему математических выражений (рисунок 2) [41].

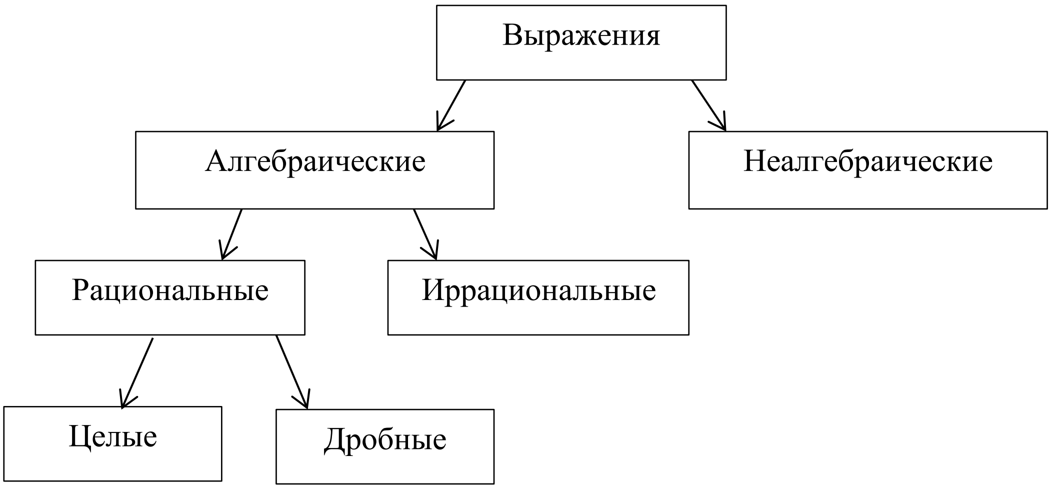

Рисунок 2 – Виды выражений

Выделяют среди выражений [39]:

1. Выражение без переменных.
   1.1. Термы (обозначающее число и не содержащие знака отношения).
   1.2. Формула (содержащее один из знаков отношений).
2. Выражение с переменными.
   1.1. Термы (числовая форма, выражающая числовую функцию числовой переменной, например $8 + x$).
   1.2. Формула (высказывательная форма, выражающая логическую функцию числовой переменной – предикат).

Начиная с 5 класса по учебнику Н.Я. Виленкина закладывается понятие о тождественных преобразованиях, но по школьной программе термины «тождество» и «тождественное преобразование» еще не вводились. В 5-х классах выполняются задания в которых присутствуют простейшие преобразования числовых выражений и тех выражений, которые содержат переменные, тождественные преобразования, арифметические действия, выполняемые на основе свойств. Ученики ознакомляются с первыми основными тождествами $(a + b) + c = a + (b + c), a(b + c) = ab + ac$ и др. Далее используют их при решении различного рода упражнений следующего типа: при каких значениях переменной истинно равенство, сократить дробь, найти значение выражения.

С помощью таких упражнения, идет подготовка учащихся к введению такого понятия как тождественное преобразование, и к пониманию целесообразности тех или иных преобразований.

Понятие коэффициента вводится в 6-ых классах, там учащиеся сталкиваются с выражениями вида: $4a, -2ab. 7ab$, то есть встречают понятие одночлена. Внедрение подобных слагаемых приводится как пример использования распределительного свойства к сумме произведений с идентичными буквенными множителями:

$$4a + 8b + 3a = a(4 + 3) + 8b = 7a + 8b$$

Впервые формулировка определение тождества вводится для учащихся в 7-м классе. Автор А.Г. Мордкович рассматривает три подхода к определению тождества.

Определение. Тождество – это равенство, верное при любых значениях переменной [36].

Целые рациональные выражения этому определению удовлетворяют, но равенства вида $\frac{a^2}{a} = a$ или с радикалами $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ под это определение уже не подходят, поэтому в 8-м классе в учебнике А.Г. Мордковича под ред. Теляковского, когда появляются дробные рациональные выражения, внедряется уже другое определение.

Определение. Тождество – это равенство верное при всех допустимых значениях, входящих в него переменных [37].

Данное определение расширяет множество выражений, к которым применимо понятие тождества, но на примере $\sqrt{t} = \sqrt{-t}$, мы видим, что такое тождество не имеет смысла [37]. В связи с этим, учащимся в учебнике А.Г. Мордковича предлагают рассмотреть другую трактовку определения.

Определение. Тождество рассматривается на некотором множестве как равенство, верное для любых значений переменных из данного множества [37].

Это множество является подмножеством общей области определения выражений, стоящих в левой и правой частях равенства.

Например: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – тождество на множестве действительных чисел; $\sqrt{t^2} = t$ – тождество принадлежит множеству положительных действительных чисел; $\sqrt{y(y+1)} = \sqrt{y}\sqrt{y+1}$ – тождество при $y > 0$ [39].

В настоящее время наличие линии тождественных преобразований видны достаточно явно, в ее содержание входит: изучение тождеств в числовой системе, применение их к решению уравнений и упрощению выражений, изучение тождеств в классе элементарных функций.

В своей частной методике преподавания математики в средней школе Р.С. Черкасов рассматривает организацию обучению отдельных тождеств, и предлагает применение специальных циклов заданий. Применительно к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом. Задания связаны с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла, вместе с исполнительными, входят задания, предусматривающие распознавания применимости изучаемого тождества.

Рассматриваемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика заданий на данную тему. Авторы Р.С. Черкасов, А.А. Столяр задания разбивают на две группы:

I группа. Первоначальный этап, применяется для отработки заданий в явно видной ситуации и усвоения тождества, вместе с его формулировкой определения. Весь материал методически построен для несколько идущих подряд уроков.

II группа. Этап углубленного изучения тождества. Материал связывает изучаемое тождество с различными его применениями за счет рассмотрения его в сложных ситуациях в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам школьного курса.

Для формирования навыков тождественных преобразований, автор И.В. Баум считает, что задача учителя стоит в том, чтобы добиться от учащегося устно выполнять некоторые промежуточные преобразования не только при устном счете, но и в процессе решения различных задач [7].

Все тождества, которые рассматриваются в теоретической части школьных курсов алгебры и алгебры и начал анализа, широко используются в упражнениях на преобразование выражений, при решении уравнений и неравенств, при доказательстве новых тождеств. Запоминая краткие формулировки, учащиеся забывают условия, при которых соответствующие тождества доказывались, что приводит к появлению ошибок при решении задач. Поэтому необходимо требовать от учащихся воспроизведения полных формулировок.

Рассмотрим последовательную цепочку обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений (Таблица 3), с помощью которой, можно выявить общие методические рекомендации для усвоения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

Таблица 3 – Последовательная цепочка обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений в курсе алгебры основной школы

Раздел		Выполнения основных действий	Замечания	Виды преобразований
1		*2*	*3*	*4*
Целые рациональные выражения	Одночлен – знать: определение одночлена, понятие степени и его свойства, стандартный вид.	Умножение одночленов, деление и возведение в степень одночленов.	Для выполнения деления одночленов необходимо придерживаться двух условий: 1. Показатель степени переменной делимого должен быть больше показателя степени той же переменной делителя. 2. Делитель не должен содержать переменных, которых нет в делимом.	
	Многочлен – знать: определение многочлена, стандартный вид, понятие степени и его свойства, дистрибутивный закон.	Производятся все четыре основные действий с многочленами (сложение, вычитание, умножение и деление), возведение в степень, прием разложения на множители многочленов.	Для выполнения деления многочленов необходимо придерживаться двум условиям: 1. Степень делимого должен быть больше степени делителя. 2. Деление может быть, как с остатком, так и без остатка.	− приведение подобных слагаемых; − раскрытие и заключение в скобки; − формулы сокращенного умножения; − приведение к стандартному виду; − разложение на множители двучлена $x^n - a^n$; − возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).

Продолжение таблицы 3

Дробные рациональные выражения – знать: определение дробного выражения, основное свойство дробного выражения и следствия из него, правила действий с числовыми дробями.	Производятся все четыре основные действий с дробными рациональными выражениями (сложение, вычитание, умножение и деление), возведение в степень дробных выражений.	Устанавливать область определения исходного дробного выражения с переменной.	Приведение дробей к общему знаменателю, сокращение дробей.
Иррациональные выражения – знать: определение иррациональных выражений, понятие и основное свойство арифметического корня, теоремы о преобразованиях корней.	Умножение, деление, возведение в степень корней извлечение корня из произведения, дроби, степени, корня.	Устанавливать область определения исходного иррационального выражения.	Внесение рационального множителя под знак радикала, сокращение показателей корня и подкоренного выражения, вынесение и уничтожение иррациональности в дроби.

Таким образом, мы рассмотрели, какие три определения понятия «тождество» даются учащимся. Учитываю специфику изучения данной темы их можно разделить на две группы первоначальный этап и этап углублённого изучения тождества. А так же рассмотрели цепочку обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений, с помощью, которой, можно выявить общие методические рекомендации для усвоения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

Выводы по первой главе

Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных разделов содержательных линий школьного курса алгебры (учение о функции, числе, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она изучается в течение всего курса математики, начиная с начальных классов.

Школьный курс математики выделяет два основных класса математических выражений: алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

В курсе алгебры основной школы, начиная с 7 класса последовательность изучения тождественных преобразований следующая: сначала изучаются тождественные преобразования на целых выражения (одночлены и многочлены), далее на дробных выражениях (дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни), и потом на иррациональных выражениях (степень с рациональным показателем, корни n-й степени).

В курсе алгебры и начал анализа целостная система преобразований, в основных чертах уже сформированная, продолжает постепенно совершенствоваться. К ней также добавляются некоторые новые виды преобразований, однако они только обогащают ее, расширяют ее возможности, но не меняют ее структуру. В методической схеме обучения тождественным преобразованиям показано как проходит изучение линии тождественных преобразований на протяжении школьного курса алгебры.

В цепочке обучения тождественным преобразованиям всех видов выражений, можно выявить общие методические рекомендации для усвоения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы.

ГЛАВА 2. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТЕМЕ «СТЕПЕНИ И КОРНИ»

2.1 Разные подходы к введению понятия корня. Доказательства свойств корня n-ой степени

Базовым, опорным понятием в 8 классе является арифметический квадратный корень, которое можно ввести на примере решения задачи о нахождении стороны квадрата по его площади (алгебраический подход).

Математической моделью такой задачи является уравнение вида $x^2 - 25$; $x^2 - 64$; $x^2 - a$ – полный квадрат.

При решении такого уравнения мы получаем два корня: x_1 и x_2 – квадратные корни 5 и –5; неотрицательному значению квадратного корня даем имя арифметический и присваиваем значок √.

Логическим путем выясняем, что $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$. На последующих уроках с помощью графического решения уравнения $x^2 = a$ выясняется, что a необязательно может быть полным квадратом. Это происходит, когда мы вводим числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ... Хотя само понятие иррационального числа детям уже знакомо (объяснено).

Таким образом, формулируется строгое определение арифметического квадратного корня из числа a.

Определение. Число b называется квадратным корнем из числа a, если $b^2 = a$.

Из определения вытекает два следствия:

1. $\sqrt{a} \geq 0$;
2. $(\sqrt{a})^2 = a$.

Выполнение тождественных преобразований основано на четырех тождествах:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \text{при } x \geq 0;$$

$$\sqrt{x^2} = |x|;$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ , x \geq 0, y \geq 0\ .$$

Свойства квадратных корней:

1. Корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел:

для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$.

2. Корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел:

для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

В 9 классе происходит расширение и углубление знаний, связанных с тождественными преобразованиями, при изучении темы корень n-й степени. Употребляется значок $\sqrt[n]{a}$ для записи корня n-ой степени из числа a. Возможны два случая: n – четное, n – нечетное.

Определяется арифметический корень $\sqrt[n]{\ }$ из неотрицательного числа: $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{27}$.

Через арифметический корень можно выразить корень нечетной степени из отрицательного числа $\sqrt[3]{-8}$ – имеет смысл. Это можно выразить через арифметический корень третьей степени $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Рассматривается следующее тождество $\sqrt{x^2} = |x|$.

Для доказательства этого тождества пользуемся определением арифметического квадратного корня, то есть, проверяем, имеют ли место два условия:

1) $|x| \geq 0$;
2) $|x|^2 = x^2$.

Проверим первое условие. По определению модуля $|x| \geq 0$. Второе условие:

1) $x \geq 0\ ,\qquad |x| = x \quad \Rightarrow x^2 = x^2;$

2) $x < 0$, $|x| = -x$, $(-x)^2 = x^2$, $x^2 = x^2$.

Вывод: так как выполнены оба условия из определения арифметического корня, то $\sqrt{x^2} = |x|$ является тождеством.

Определение. Корнем n-ой степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.

Согласно данному определению корень n-ой степени из числа а – это решение уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. Как известно, на промежутке $[0; \infty)$ эта функция при любом n возрастает и принимает все значения из промежутка $[0; \infty)$. По теореме о корне уравнение $x^n = a$ для любого $a \in [0; \infty)$ имеет неотрицательный корень и при том только один. Его называют арифметическим корнем n-ой степени из числа a и обозначают $\sqrt[n]{a}$; число n называют показателем корня, а само число a – подкоренным выражением. В учебнике Дорофеева 8 классе описано происхождение слова радикал (корень): нельзя не обратить внимания и на совпадение в терминах – квадратный корень и корень уравнения. Это совпадение закономерно. Уравнения вида $x^2 = a$. Исторически были первыми «сложными» уравнениями, и их решения были названы корнями – возможно, по метафоре, что из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Этот термин стал употребляться в дальнейшем и для произвольных уравнений. Название «радикал» тоже связано с термином «корень»: по-латыни корень – radix (он же «редис» – корнеплод). Заметьте также, что слово «радикальный» в русском языке является синонимом слова «коренной». Происхождение же символа связывают с рукописным написанием латинской буквы r [8].

Определение. Арифметическим корнем n-ой степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

При четных n функция $f(x) = x^n$ четна. Отсюда следует, что если $a > 0$, то уравнение $x^n = a$, кроме корня $x_1 = \sqrt[n]{a}$, имеет также корень $x_2 = -\sqrt[n]{a}$. Если $a = 0$, то корень один: $x = 0$; если $a < 0$, то это уравнение корней не имеет, поскольку четная степень любого числа неотрицательна.

При нечетных значениях n функция $f(x) = x^n$. возрастает на всей числовой прямой; её область значений – множество всех действительных чисел. Применяя теорему о корне, находим, что уравнение $x^n = a$ имеет один корень при любом a и, в частности, при $a < 0$. Этот корень для любого значения a обозначают $\sqrt[n]{a}$.

Для корней нечетной степени справедливо равенство$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. В самом деле,$(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n * \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = -1 * a = -1$, т.е. число $-\sqrt[n]{a}$ есть корень n-й степени из $-a$. Но такой корень при нечетном n единственный. Следовательно, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Замечание 1: для любого действительного x:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{если } n \text{ четно,} \\ x, \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Замечание 2: удобно считать, что корень первой степени из числа a равен a. Корень второй степени из числа a называют квадратным корнем, а корень третьей степени называют кубическим корнем [7].

Напомним известные свойства арифметических корней n-ой степени.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных целых чисел a и b справедливы равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$;

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $(b \neq 0)$;

3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a},\ (k > 0)$;

4. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} - \sqrt[n]{a}, (k > 0)$;

5. $\sqrt[k]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k (\text{если k} \leq 0, \text{то } a \neq 0.$

2.2 Анализ школьных учебников по изложению темы «Степени и корни»

Проведём логико-математический анализ темы «Степени и корни» в различных школьных учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, представленных в Таблице 4.

Таблица 4 – Анализ школьных учебников с 7-9 класс.

Сравнение учебников 7 класса		
Критерий	Г. В. Дорофеев «МАТЕМАТИКА. Арифметика. Алгебра. Анализ данных»,7 класс	А. Г. Мордкович «Алгебра», 7 класс
1	*2*	*3*
Степень с натуральным показателем	Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, $n > 1$. Степенью числа а с показателем, равным 1 , называется само число a: $a^1 = a$.	Определение 1. Под a^n, где n =2,3,4,5,…, понимают произведение n одинаковых множителей, каждый из которых является число a. Выражение a^n называют степенью, число a – основанием степени, число n – показателем степени. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, a^n-степень с натуральным показателем; a-основание степени; n-показатель степени. Определение 2. Степенью числа a с показателем 1 называется само это число: $a^1 = a$.

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*
Свойства степени с натуральным показателем	1.Если $a -$ любое число и m, и n – любые натуральные числа, то $a^m * a^n = a^{m+n}$. 2.Если a – любое число, не равное 0, и m и n – любые натуральные числа, причем $m > n$, то $a^m : a^n = a^{m-n}$ 3.Если a – любое число m и n – любые натуральные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$ 4.Если a и b – любые числа и n – любое натуральное число, то $a^n * a^n = (ab)^n$ 5.Если а и b – любые числа, причем $b \neq 0$, и n- любое натуральное число, то $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.	Теорема 1. Для любого числа а и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство: $a^n * a^k = a^{n+k}$. Теорема 2. Для любого числа а $\neq 0$ и любых натуральных чисел n и k, таких, что $n > k$, справедливо равенство: $a^n : a^k = a^{n-k}$. Теорема 3. Для любого числа а и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство: $(a^n)^k = a^{nk}$. Формулирует эти три теоремы в виде правил 1-2-3. После на основе примеров выводит следующие формулы: $a^n * a^n = (ab)^n$ $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$ Формулирует их в виде правил 4-5. Определение: Если а $\neq 0$, то $a^0 = 1$.
Сравнение учебников 8 класса		
Критерий	Г. В. Дорофеев «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных», 8 класс	А. Г. Мордкович «Алгебра», 8 класс
Степень с целым показателем	1) Для любого числа а, не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. 2) Для любого числа а, не равного нулю, $a^0 = 1$ 3) Стандартным видом числа называется его запись в виде произведения а $* 10n$, где $1 \leq$ а ≤ 10 и n-целое число.	Если n – натуральное число и а≠0, то под a^n понимают: $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.
Свойства степени с целым показателем	$a^m * a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n: $a^n * a^n = (ab)^n$, $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$.	Считаем, что а $\neq 0$, $b \neq 0$,s и t – произвольные целые числа: 1. $a^s * a^t = a^{s+t}$, 2. $a^s : a^t = a^{s-t}$, 3. $(a^s)^t = a^{st}$, 4. $a^s * a^s = (ab)^s$, 5. $(\frac{a}{b})^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*
Квадратный корень	Число b называется квадратным корнем из числа a, если $b^2 = a$	Квадратным корнем из неотрицательного числа а называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен а. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число а при этом называют подкоренным числом. -если а – неотрицательное число, то: 1) $\sqrt{a}$ ≥0; 2) $(\sqrt{a})^2 = a$.
Свойства квадратных корней	1.Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$. 2.Для любых $a\ \geq 0$ и $b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.	Теорема 1. Квадатный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$. Теорема 2. Если $a\ \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Замечание: если $a\ \geq 0$ и $n -$ натуральное число, то $\sqrt{a^{2n}} = a^2$.
Преобразование квадратных корней	+	+
Сравнение учебников 9 класса		
Критерий	Г. В. Дорофеев «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных», 9 класс	А. Г. Мордкович «Алгебра», 9 класс
Степень с рациональным показателем	-	10 класс
Свойства степени с рациональным показателем	-	10 класс
Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями	-	+
Корень n-ой степени	-	10 класс
Свойства арифметического корня n-степени	-	10 класс

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова «Алгебра» 7 класс.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №3 «Степень с натуральным показателем», параграф 6 «Степень и её свойства».

В пункте 16. «Определение степени с натуральным показателем» вводится определение степени числа с натуральным показателем, так же даются некоторые замечания про возведение в степень положительного и отрицательного числа (с четным и нечетным показателем), рассматриваются примеры.

В пункте 17. «Умножение и деление степеней» рассматриваются два свойства степеней с одинаковыми показателями и даются соответствующие правила, рассматриваются примеры. Заканчивается пункт определением: степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице.

Изучение данной темы останавливается на пункте 18. «Возведение в степень произведения и степени» в нем вводятся два свойства, даются соответствующие правила, рассматриваются примеры.

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова «Алгебра» 8 класс.

В данном учебнике вводится сначала понятие квадратного корня, а затем степени.

Изучение корней начинается в главе №2 «Квадратные корни», параграф 5 «Арифметический квадратный корень».

В пункте 11. «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень» понятие квадратного корня вводится после рассмотрения задачи про площадь квадрата, после поясняется, что такое арифметический квадратный корень, даются некоторые замечания, рассматриваются примеры.

В пункте 12. «Уравнение $x^2 = a$» рассматривается решение уравнения, выделяются три возможных случая и рассматриваются примеры.

В пункте 13. «Нахождение приближенных значений квадратного корня» отмечаются приемы для нахождения приближенных значений квадратного корня, рассматриваются примеры.

В пункте 14. «Функция $y = \sqrt{x}$ и её график» решается задача о зависимости площади квадрата от его стороны и наоборот, записываются соответствующие формулы, строятся графики и формулируются некоторые свойства функции.

В параграфе 6. «Свойства арифметического квадратного корня», пункт 15. «Квадратный корень из произведения и дроби» вводятся свойства квадратного корня в виде теорем (1), (2), рассматриваются примеры.

В пункте 16. «Квадратный корень из степени» также описывается теоремы и рассматриваются примеры.

В параграфе 7. «Применение свойств арифметического квадратного корня» в данной теме подразделяются на два пункта, в которых доступно рассказывается о способах применения свойств корня.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №5 «Степень с целым показателем», параграф 13 «Степень с целым показателем и её свойства».

В пункте 33. «Определение степени с целым отрицательным показателем» дается определение, замечание о выражение не имеющем смысла и рассматриваются примеры.

В пункте 34. «Свойства степени с целым показателем» рассматриваются свойства (1), (2), (3), (4), (5) и закрепляются на конкретных примерах.

Заканчивается изучение данной темы в пункте 35. «Стандартный вид числа» дается определение, рассматриваются некоторые примеры.

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова «Алгебра» 9 класс.

В данном учебнике понятия степени и корня рассматриваются в одной главе №4. в параграфе 10. «Корень n-ой степени», пункт 23. «Определение корня n-ой степени» дается определение корня n-ой степени, на основе степенной функции (с четным и нечетным показателем) выводится следствие, после чего дается определение арифметического корня n-ой степени, рассматриваются 4 примера.

В пункте 24. «Свойства арифметического квадратного корня n-ой степени» отмечается, что все известные свойства арифметического квадратного корня справедливы и для корня n-ой степени и при $n > 2$, формулируются теоремы (1), (2) некоторые следствия и рассматриваются 4 примера.

В параграфе 11. «Степень с рациональным показателем и её свойства», пункт 25. «Определение степени с дробным показателем» дается определение степени для дробного показателя с положительным основание, а также с основанием равным нулю.

В пункте 26. «Свойства степени с рациональным показателем» сначала говорится, что известные свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с любым рациональным показателем, все пять свойства записаны, после примеров выводятся некоторые замечания. Заканчивается рассмотрение данной темы пунктом 27. «Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями»

В конце каждого пункта имеются упражнения, которые разделены на задания для устной работы, задания обязательные (не обязательные) для общеобразовательных классов, задания повышенной трудности и упражнения для повторения.

«МАТЕМАТИКА. Арифметика. Алгебра. Анализ данных» 7 класс. Г.В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №1 «Степень с натуральным показателем».

В пункте 1.2. «Степень с натуральным показателем» вводится определение степени числа с натуральным показателем, так же даются некоторые замечания про возведение в степень положительного и отрицательного числа (с четным и нечетным показателем), рассматриваются примеры.

Возвращается автор к данной теме в главе №6 «Свойства степени с натуральным показателем».

В пункте 6.1. «Произведение и частное степеней» рассматриваются два свойства степеней с одинаковыми показателями и даются соответствующие правила, рассматриваются примеры.

Заканчивается изучение данной темы в пункте 6.2. «Степень степени, произведения и дроби» в нем вводятся три свойства, даются соответствующие правила, рассматриваются примеры.

Г.В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных» 8 класс.

В данном учебнике сначала вводится понятие степени с целым показателем глава №1 «Алгебраические дроби», а затем понятие квадратного корня глава №2 «Квадратные корни».

Изучение степеней в данном учебнике начинается с пункта 1.5. «Степень с целым показателем» в нем дается определение, замечание о степени с нулевым показателем, также вводится определение о стандартном виде числа и рассматриваются примеры.

В пункте 1.6. «Свойства степени с целым показателем» говорится, что известные свойства степени с натуральным показателем распространяются и на степень с любым целым показателем, рассматриваются эти свойства и закрепляются на конкретных примерах.

Изучение корней начинается с пункта 2.1. «Задача о нахождении стороны квадрата» в нем рассматривается задача, выделяется способ для выражения стороны квадрата через его площадь, после чего вводится новый символ (знак корня). После этого пункта рассматриваются иррациональные числа и теорема Пифагора, пункты 2.2-2.3.

В пункте 2.4. «Квадратный корень – алгебраический подход» решается задача про площадь квадрата, вводится определение квадратного корня, после чего рассматривается общий случай существования квадратных корней из произвольного числа с построением графика, результаты записываются в виде следствий.

В пункте 2.5. «Свойства квадратных корней» вводятся свойства квадратного корня, рассматриваются примеры. В пункте 2.6. рассматривается применение квадратного корня.

Отдельно выделен пункт 2.7. «Кубический корень» в нем доступно объясняется, что такое кубический корень, строится график и выделяются некоторые свойства. Заканчивается изучение данной темы памяткой о двойных радикалах.

Г.В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева «МАТЕМАТИКА. Алгебра. Функции. Анализ данных» 9 класс.

Если сравнить данный учебник с учебником Ю. Н. Макарычева, то можно заметить, что в 9 классе не рассматривается понятие степени с рациональным показателем (в пункте 1.1 дается определение рационального числа), а также и нет упоминаний о корне n-ой степени.

В конце каждой главы имеются упражнения разной сложности, а также пометки: вопросы для повторения к главам; задания для самопроверки к главам; для тех, кому интересно!

А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская «Алгебра» 7 класс.

Изучение степеней в данном учебнике начинается в главе №2 «Степень с натуральным показателем и её свойства».

В параграфе 4. «Что такое степень с натуральным показателем» весьма подробно разбирается понятие степени с натуральным показателем, закрепляется оно тремя примерами, после дается определение степени с показателем равным 1 и разбирается пример, на основе которого выводятся свойства возведения отрицательного числа в степень (четную, нечетную).

В параграфе 5. «Таблица основных степеней» представлена таблица степеней с основанием 1, 0, -1 и рассматриваются соответствующие примеры.

В параграфе 6. «Свойства степеней с натуральным показателем» открываются, формулируются и доказываются свойства степеней. Сначала свойства записываются в качестве теорем 1-2-3, в конце параграфа даются правила, замечание и закрепляется все примерами.

В отдельном параграфе 7. «Умножение и деление степеней с одинаковым показателем» выделены ещё два свойства 4-5, закрепленные примерами.

Заканчивается изучение данной темы в параграфе 8. «Степень с нулевым показателем» введением понятия степени с нулевым показателем, после чего подведены основные результаты.

А.Г. Мордкович, Л.А. Александрова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская «Алгебра» 8 класс.

В данном учебнике введение понятия степени начинается в главе №1 «Алгебраические дроби», понятия квадратного корня в главе №2 «Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратного корня.»

Тема степени изучается в параграфе 8. «Степень с отрицательным целым показателем» в котором, на основе примеров, формулируются определение степени с отрицательным целым показателем и свойства 1-2-3-4-5, с пояснением, что свойства степеней с натуральным показателем справедливы и для отрицательных целых показателей.

Изучение корня начинается в параграфе 10. «Понятие квадратного корня из неотрицательного числа» с решения графически сначала уравнения $x^2 = 4$, затем уравнения $x^2 = 5$, рассматривается метод от противного, вводится определение квадратного корня из неотрицательного числа, записываются два свойства, также приводится сравнительная таблица (возведения в квадрат и извлечение квадратного корня), приведены примеры.

В следующих параграфах рассматриваются иррациональные числа, множество действительных чисел и функция $y = \sqrt{x}$.

В параграфе 14. «Свойства квадратного корня» в качестве теорем вводятся свойства квадратного корня (из произведения и дроби), формулируются замечания к каждой теореме, рассматриваются примеры.

Заканчивается изучение данной темы параграфом 15. «Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня».

А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская «Алгебра» 9 класс.

В данном учебнике для 9 класса в сравнении с рассмотренными ранее не вводится ни понятие степени с рациональным показателем, ни понятие корня n-ой степени.

А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс.

В данном учебнике понятия степени с рациональным показателем и понятие корня n-ой степени изучается в одной главе №6. «Степени и корни. Степенные функции».

В параграфе 39. «Понятие корня n-ой степени из действительного числа» сначала рассматривается решение графически уравнения $x^4 = 1$, затем уравнения $x^4 = 5$, на основе решения данных уравнений вводятся понятия корня четвертой степени и корня n-ой степени, формулируются замечания, также вводится понятие корня нечетной степени n из отрицательного числа, рассматриваются примеры.

Далее в параграфе 40 изучаются функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики.

В параграфе 41. «Свойства корня n-ой степени» формулируются свойства корня n-ой степени в виде теорем, приводится краткая запись доказательства каждой теоремы (таблица), рассматриваются примеры.

В параграфе 43. «Обобщение понятия о показателе степени» сначала вводится определение: $a^{\frac{p}{g}} = \sqrt[g]{a^p}$, после оно закрепляется на примерах и формулируется определение: $a^{\frac{-p}{g}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{g}}}$, которое также закрепляется на конкретных примерах.

Хочется отметить, что учебники А. Г. Дорофеева удобны тем, что после каждой главы, помимо номеров разной сложности, есть небольшой пункт «Основные результаты», в котором кратко и ясно изложена основная информация изученной темы.

Вывод по второй главе

Мы рассмотрели цепочку изучения тему «Корни», так в 8 классе опорным понятием является арифметический квадратный корень, которое можно ввести на примере решения задачи о нахождении стороны квадрата по его площади (алгебраический подход). Так же знакомим ребят со значком корня $\sqrt{}$, и индуктивным путем выясняем, что $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$. На последующих уроках с помощью графического решения уравнения $x^2 = a$ выясняется, что a необязательно может быть полным квадратом. Формулируем строгое определение арифметического квадратного корня из числа a.

В 9 классе происходит расширение и углубление знаний, связанных с тождественными преобразованиями, при изучении темы корень n-й степени.

Употребляется значок $\sqrt[n]{a}$ для записи корня n-ой степени из числа a. Возможны два случая: n – четное, n – нечетное.

Также рассмотрели теорему о доказательстве корня n-ой степени и свойства корня n-ой степени.

Были проанализированы учебники с 7 по 9 класс по следующим критериям представленными ниже.

7 класс: степень с натуральным показателем, свойства степени с натуральным показателем;

8 класс: степень с целым показателем, свойства степени с целым показателем, квадратный корень, свойства квадратных корней, преобразование выражений, содержащих квадратные корни;

9 класс: степень с рациональным показателем, свойства степени с рациональным показателем, преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями, корень n-ой степени, свойства арифметического корня n-степени.

ГЛАВА 3. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТЕМЕ «СТЕПЕНИ И КОРНИ» НА ПРАКТИКЕ

3.1 Типичные ошибки учащихся при изучении данной темы и рекомендации по их устранению

В ходе продолжения практики на базе школы № 138 мы проведи исследование. В исследовании участвовали учащиеся 8 класс в количестве 20 человек. Данный класс занимается по учебнику: Дорофеев Г.В, Шарыгин И.Ф. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: «Просвещение». Для изучения темы «Степень с целым показателем и ее свойства» отводится 5 часов, на изучение темы «Квадратные корни и их свойства» – 4 часа.

Исследование заключалось в следующем: учащимся выдавался тест, составленный на основе дидактического материала [16], на выполнение теста давалось 40 минут.

В тест входят задания по темам: степень с целым показателем и ее свойства, квадратные корни и их свойства.

Критерии оценивания: оценивался тест по 5-ти бальной шкале. Для выполнения теста на «5» необходимо выполнить 8 заданий, на «4» – 7 заданий, на «3» 6-4 заданий, отрицательный результат за тест получают ученики, выполнившие менее 4 заданий.

После проверки теста мы получили следующие результаты, представленные в Таблице 5.

Таблица 5 – Результаты исследования

Оценки	Оценка «5»	Оценка «4»	Оценка «3»	Оценка «2»
Количество учащихся получивших эту оценку	2	5	8	5

Таким образом, мы получили, что 65% учащихся не справились с заданиями.

При проверке работ, учащихся были выявлены следующие типичные ошибки:

1. Незнание правил, определений, формул.
2. Непонимание правил, определений, формул.
3. Неумение применять правила, определения, формулы.
4. Неверное применение формул.
5. Невнимательное чтение условия и вопроса задания.
6. Вычислительные ошибки.
7. Логические ошибки.
8. Раскрытие скобок и применение формул сокращенного умножения.
9. Потеря знака.

Причины ошибок по математике могут служить:

1. Пропуски занятий приводят к незнанию материала, пробелам в знаниях.
2. Поверхностное, невдумчивое восприятие нового материала приводят к непониманию его.
3. Отсутствие разбора ошибок.
4. Нехватка времени для отработки навыка у учащегося.
5. Неряшливый, неаккуратный почерк ученика приводит к досадным ошибкам. Учащиеся не всегда сами понимают, что именно они написали.
6. Усталость. Чрезмерная нагрузка и недостаточный сон приводит к снижению внимания, скорости мышления и, как следствие, к многочисленным ошибкам.
7. Мотивация. Следствие низкой мотивации – потеря внимания и ошибка [21].

В ходе изучения данной темы мы получили противоречие между низкой успеваемостью учащихся и нехваткой времени на уроке для изучения линии тождественных преобразований.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что темы «Степень с целым показателем и ее свойства» и «Квадратные корни и их свойства», не усвоены всеми учащимися.

Мы предполагаем, что факультативный курс по теме «Степени и корни» поможет учащимся отработать вычислительные навыки и углубить знания по данной теме. В факультативном курсе будут учтены последовательность изучения разделов тождественных преобразований всех видов выражений, рассмотрены различные типы заданий, для разного уровня учащихся. А так же уделяется время на разбор типичных ошибок.

3.2 Структура и содержание факультативного курса по теме: «Степени и корни»

Требования, предъявляемые учебной программой, рассчитаны на среднеуспевающего ученика. Но уже в начальной школе выделяются ученики, как с трудом овладевающие обязательными результатами обучения, так и ученики, проявляющие повышенный интерес и способности к учёбе.

Всё это приводит к необходимости использования дифференцированного подхода в обучении. Но даже при таком подходе временные рамки урока не позволяют окончательно ликвидировать пробелы в знаниях отстающих учеников и наиболее полно раскрыть возможности и углубить знания способных. На помощь приходит внеклассная работа с учениками.

Под внеклассной работой понимаются необязательные систематические занятия учащихся с преподавателем во внеурочное время. Различают два вида внеклассной работы по математике:

1) дополнительные занятия с отстающими учениками, основной целью которых является ликвидация пробелов в знаниях по курсу математики;

2) внеклассная работа с учениками, проявляющими повышенный интерес и способности к изучению математики.

Факультативный курс по теме: «Степени и корни» направлен на дополнительные занятия с отстающими учениками. Рассчитан курс на 15 часов, по 2 часа в неделю.

Целями проведения факультативного курса по математики являются:

- предметные – оперировать понятиями степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем, квадратный корень; выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целыми отрицательными показателями, переходить от записи в виде степени с целым отрицательным показателем к записи в виде дроби; выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни, отработать вычислительные навыки;
- метапредметные – умение выбирать наиболее эффективные способы решения умение адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения; умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач; умение планировать;
- личностные – сформированность целостного мировоззрения умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности; способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

Факультатив – учебный курс, изучаемый учащимися по их желанию для углубления и расширения научно теоретических знаний. В отличие от математического кружка и других форм внеклассной работы, факультативные занятия предусматриваются с восьмого класса. Если в 5-7 классах интерес у учеников неустойчивый, и целью внеклассной работы является формирование интереса учеников к математике с помощью занимательных задач и игр, то в 8-9 классах ученики осознанно выбирают факультатив по математике, чтобы углубить знания, полученные на уроках, справится с трудности возникающими при решении заданий.

Задачи факультативного курса:

1. Рассмотреть теоретический материал по теме.
2. Проведение практических занятий.
3. Сформировать представления о методах и способах решения уравнений, неравенств и систем, содержащих степени и корни.

Содержание факультативного курса определяется государственными программами. Содержание курса представлено в Таблице 6.

Таблица 6 – Содержание факультативного курса

Тема	Кол-во часов
Степень с натуральным показателем и ее свойства	2
Квадратный корень и его свойства	2
Решения уравнений, неравенств и систем, содержащих степени и корни	10
Итоговое занятие по факультативному курсу	1

Методика работы на факультативных занятиях отличается от методики работы на уроке. Эти отличия заключаются в следующем:

- особое внимание уделяется формированию приемов мыслительной деятельности (наблюдение и сравнение, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, отыскание и применение аналогий, построение гипотез и планирование действий и др.);
- в учебной деятельности большое место отводится общим и частным рассуждениям;

- систематически проводится работа по выработке умения применять эвристические приемы в различных сочетаниях;
- постоянно осуществляется диалог учителя с учащимися при изучении теоретического материала и поиске способа решения любой предлагаемой задачи.

Каждый учащийся, приходящий на факультативный курс, имеет разный знания по математике. Особенностями данного курса является то, что при работе с учащимися используется дифференцированный подход, который в рамках факультативного курса позволяет ликвидировать пробелы в знаниях отстающих учеников и наиболее полно раскрыть возможности и углубить знания способных.

Так же во время практических занятий происходит активная устная отработка основных УУД и уделяется время на разбор ошибок. Для исправления и предупреждения многих ошибок на факультативном занятии формируются навыки самоконтроля: умение найти ошибку, объяснить, в чем эта ошибка заключается, и исправить ее.

В процессе занятий на факультативном курсе применяются приёмы самоконтроля, которые помогают учащимся обнаружить допущенные ошибки и своевременно их исправить. К приемам самоконтроля относятся:

1. Проверка вычисления и тождественного преобразования путём выполнения обратного действия или преобразования.
2. Проверка правильности решения задач путём составления и решения задач, обратных к данной.
3. Оценка результата решения задачи с точки зрения здравого смысла.
4. Проверка аналитического решения графическим способом.

Для того что бы сами задания были доступны и понятны учащимся, а как следствие исключение такой ошибки, как не понимание задания, все задания на факультативном курсе удобны для восприятия: грамотно сформулированы, хорошо читаемы; подобраны задания, вызывающие интерес, формирующие устойчивое внимание; прочному усвоению (а значит, отсутствию ошибок) способствуют правила, удобные для запоминания, четкие алгоритмы, следуя которым заведомо придешь к намеченной цели.

Для объяснения нового материала используется ряд определений и теорем, которые были изучены ранее.

В качестве примера проведения занятий по факультативному курсу разработано методическая разработка конспекта итогового занятия по факультативу и представлена в Приложении**.**

В отличие от других форм внеклассных работ факультативный курс по математике снабжает учащихся большим объёмом научно-теоретических знаний, развивает способности, формирует мировоззрение, характеризует содержательной связью с историей науки. Факультатив включает учащихся в различные формы самостоятельной деятельности с помощью использования на занятиях эвристического, проблемного, частично-поискового методов, совмещает математическую строгость изложения материала с математической красотой и математической занимательностью, обладает большими возможностями в формировании культуры мышления учеников.

Вывод по третьей главе

При проведении исследования мы получили, что 65% учащихся не справились с заданиями.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что темы «Степень с целым показателем и ее свойства» и «Квадратные корни и их свойства», не усвоены всеми учащимися.

Мы предполагаем, что факультативный курс по теме «Степени и корни» поможет учащимся отработать вычислительные навыки и углубить знания по данной теме. В факультативном курсе будут учтены последовательность изучения разделов тождественных преобразований всех видов выражений, рассмотрены различные типы заданий, для разного уровня учащихся. А также уделяется время на разбор типичных ошибок.

В параграфе 3.2 мы разработали структуру и содержание факультативного курса по теме: «Степени и корни».

Целями проведения факультативного курса являются:

- пробуждение и развитие интереса учащихся к математике;
- расширение знаний учеников по теме: «Степени и корни»;
- развитие математических способностей и культуры математического мышления;
- отработка вычислительных навыков;

Особенностями факультативного курса является то, что при работе с детьми используется дифференцированный подход. Так же во время практических занятий происходит активная устная отработка основных УУД и уделяется время на разбор ошибок. Для исправления и предупреждения многих ошибок на факультативном занятии формируются навыки самоконтроля. Для объяснения нового материала используется ряд определений и теорем, которые были изучены ранее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В квалификационной работе по теме «Методика обучения тождественным преобразованиям в условиях реализации ФГОС ОО» нами было рассмотрено введение материала в обучение в школьном курсе алгебры и начала анализа.

Проанализировав современные учебники по изучению темы «Степени и корни», был сделан вывод, что не во всех учебниках достаточное количество заданий для закрепления темы, а также не учтена последовательность изучения разделов тождественных преобразований всех видов выражений.

Была представлена схему обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы и предоставлена методика обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы, а также выделены наиболее частые ошибки учащихся в изучении темы. Очевидна необходимость пропедевтики в формировании умений у учащихся решать задачи подобного типа.

Подводя итоги, следует отметить, что достигнуты цель и все поставленные задачи курсовой работы.

В работе были решены следующие задачи:

1. Разобраны основные понятия и содержания линии тождественных преобразований в школьном курсе алгебры основной школы.
2. Рассмотрена методическую схему обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы и предоставлена методика обучения тождественным преобразованиям в курсе алгебры основной школы.
3. Рассмотрены тождественные преобразования в теме «Степени и корни».
4. Проанализированы современные учебники школьного курса математики.

5. Рассмотрены типичные ошибки учащихся и рекомендации по их устранению.

6. Разобрана структура и содержание факультативного курса.

Практическая значимость работы определяется тем, что в ней проанализированы учебные материалы, использующиеся в школьном курсе математики; указаны типичные ошибки учащихся, разработан факультативный курс.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Барыбин К. С. Методика преподавания алгебры: пособие для учителя / К. С. Барыбин. – Москва : Просвещение, 2006. − 345 с.
2. Баум И. В. Тождественные преобразования выражений : учеб. Пособие / И. В. Баум, Ю. Н. Макарычев. – Москва : Просвещение, 1980. – 90 с.
3. Блох А. Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика : учеб. пособие / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев [и др]; Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат спец. – Москва : Просвещение, 1987. – 416 с.
4. Блох А. Я. О тождественных преобразованиях в курсе алгебры VI-VIII кл. : Метод. рекомендации и указания по методике преподавания математики в средней школе / А. Я. Блох. – Москва : [б. и.], 2005. − 83 с.
5. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики : книга для учителя / Я. И. Груднев. – Москва : Просвещение, 1990. – 224 с.
6. Гусев В. А. Внекласная работа по математике в 6-8 классах : учеб. пособие / В. А. Гусев, А. И. Орлов, А. Л. Розенталь. – Москва : Просвещение, 2012. – 289 с.
7. Дорофеев Г. В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учеб. заведений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суварова, Е. А. Бунимович; под ред. Г.В. Дорофеева. – Москва : Дрофа, 2014. – 288 с.
8. Дорофеев Г. В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учеб. заведений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суварова, Е. А. Бунимович; под ред. Г.В. Дорофеева. – Москва : Дрофа, 2011. – 304 с.

9. Дорофеев Г. В. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учеб. заведений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суварова, Е. А. Бунимович; под ред. Г.В. Дорофеева. – Москва : Дрофа, 2014. – 352 с.
10. Зимняя И. А. Основы педагогической психологии : учеб. пособие / И. А. Зимняя. – Москва : Просвещение, 2014. – 264 с.
11. Иванова Т. А. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учеб. пособие / Т. А. Иванов, Е. Н. Перевощиков, Т. П. Григорьева [и др] ; НГПУ. – Нижний Новгород : НГПУ, 2010. – 320 с.
12. Ивашина Т. Г. Формирование учебной самостоятельности школьников. История проблемы / Т. Г. Ивошина, Л. В. Шварева // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. – 2011. – № 24. – С. 945–950.
13. Канин Е. С. К формированию умений и навыков в вычислениях и тождественных преобразованиях / Е. С. Канин // Математика в школе. – 2012. – № 5. – С. 24–35.
14. Кондрушко Е. М. Тождественные преобразования выражений в школьном курсе математики : учеб. пособие / Е. М. Кондрушко. – Москва : Просвещение, 2011. – 128 с.
15. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников : учеб. пособие / В. А. Крутецкий. – Москва : Просвещение, 1968. – 432 с.
16. Кузнецова Л. В. Контрольные работы. Алгебра 7-9 класс / Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева. – Москва : Просвещение, 2016. – 110 с.
17. Кучугурова Н. Д. Интенсивный курс общей методики преподавания математики : учеб. пособие / Н. Д. Кучугурова. – Москва : МПГУ, 2014. – 152 с.
18. Лернер И. Я. Познавательные задачи в обучении гуманитарным наукам : учеб. пособие / И. Я. Лернер. – Москва : Педагогика,1997. – 364 с.

19. Липатникова И. Г. Технология разработки рабочих учебных программ по математике : учеб. пособие / И. Г. Липатникова ; УрГПУ. – Екатеринбург : Издательство УрГПУ, 2013. – 195 с.
20. Макарычев Ю. Н. Тождественные преобразования многочленов / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. С. Муравин // Математика в школе. − 1973. – № 3. – С. 15−20.
21. Малова И. Е. Теория и методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие / И. Е. Малова, С. К. Горохова, Н. А Малинникова. – Москва : ВЛАДОС, 2013. – 445 с.
22. Матушкина З. П. Методика обучению решению задач : учеб. пособие / З. П. Матушкина ; КГУ. – Курган : Изд-во КГУ, 2006. – 154 с.
23. Миндюк Н. Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений / Н. Г. Миндюк // Математика в школе. – 1985. − № 5. С. 48 – 56.
24. Мишин В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика : учеб. пособие / В. И. Мишин. – Москва : Просвещение, 2003.− 421 с.
25. Мордкович А. Г. Алгебра 7 класс. В 2 ч. Ч.1. : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2018. – 234 с.
26. Мордкович А. Г. Алгебра 7 класс. В 2 ч. Ч.2. : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2018. – 256 с.
27. Мордкович А. Г. Алгебра 8 класс. В 2 ч. Ч.1. : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2016. – 215 с.
28. Мордкович А. Г. Алгебра 9 класс. В 2 ч. Ч.1. : учебник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – Москва : Мнемозина, 2016. – 231 с.

29. Педагогика. Учебное пособие / под. Ред. П. И. Пидкасистого. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд-во Юрайт, 2014. – 512 с.
30. Прохучаев В. Г. Вычисления и их роль в практической подготовке учащихся средней школы : пособие для учителей / В. Г. Прохучаев. – Москва : [б. и.], 1992. – 251 с.
31. Роботова А. С. Введение в педагогическую деятельность : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / А. С. Роботова, Т. В. Леонтьева, И. Г. Шапошникова [и др]. – 4-е изд.,перераб. – Москва : Академия, 2017. – 224 с.
32. Саранцев Г. И. Общая методика преподавания математики : учеб пособие для студ. мат. спец. Пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 2002. – 224 с.
33. Сергеева Т. А. Проектирование учебного занятия : метод. Рекомендации / Т. А. Сергеева, Н. М. Уварова. – Москва : Знание, 2013. – 295 с.
34. Стефанова Н. Л. Методика и технология обучения математике : учеб. пособие / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова. – Москва : Дрофа, 2008. – 416 с.
35. Теляковский С. А. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учрежедений / С. А. Теляковский, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – 17-е изд. – Москва : Просвещение, 2011. – 181 с.
36. Теляковский С. А. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учрежедений / С. А. Теляковский, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – 19-е изд. – Москва : Просвещение, 2011. – 276 с.
37. Теляковский С. А. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. Учрежедений / С. А. Теляковский, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – 17-е изд. – Москва : Просвещение, 2011. – 214 с.
38. Федеральный государственный образовательный стандарт общегоосновнаго образования : министерство образования и науки РФ. – Москва. : Просвещение. – 2010. – 50 с.

39. Шаталина Е. Г. Активизация познавательной деятельности на уроках математики / Е. Г. Шаталина // Открытый урок. – 2011. – № 6. – URL: http://festival.1september.ru/articles/559342 (дата обращения: 21.02.2020)
40. Ященко И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. В. Семенов // Педагогические измерения. – 2019. – № 3. – С. 23–40.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Конспект итогового занятия по факультативному курсу по теме: «Степени и корни» в формате «Своей игры»

Цели занятия:

1. Образовательные:

– стимулирование мотивации и интереса в области предмета изучения;

– поддержание и усиление значения полученной информации по данной теме;

– выявление уровня сформированности знаний по теме и умений применять свойства степени с натуральным показателем и свойства арифметического квадратного корня для вычисления значений квадратного корня и преобразования выражений, содержащих степени квадратные корни.

2. Развивающие:

– развитие навыков принятия решений;

– развитие и формирование у учащихся навыков логического мышления;

– развитие реакции на ситуативность;

– правильной и грамотной речи, быстрой реакции.

3. Воспитательные:

– воспитание познавательной активности, настойчивости в учебе;

– воспитание объективности в самооценке, духа соревновательности, стремления к самоутверждению личности.

Задачи:

1. Повторить определение степени и арифметического квадратного корня.

2. Отработать навык решения задания различного уровня по теме: «Степень с натуральным показателем и ее свойства».

3. Отработать навык решения задания различного уровня по теме: «Квадратный корень и его свойства».

4. Развить навыки устного счета.

Форма проведения занятия: урок-игра.

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Оборудование: проектор, компьютер, бланк для подсчета результатов.

Ход занятия

Сегодня мы проведем итоговое занятие по факультативному курсу.

Предлагаю вам проявить все ваши знания и умении полученные на факультативном курсе и сыграть в «Свою игру»

Правила игры:

Необходимо разделиться на 4 команды и выбрать капитана в каждой команде. Перед вами представлены 4 раздела. Вопросы расположены от простых за 10 баллов, к сложным за 50 баллов. Вам по очереди необходимо выбрать вопрос и в течение 2 минут посовещаться и ответить на него, в случае если ответа нет или ответили не верно, возможность ответа предоставляется команде, первой поднявшей руку. Победителем считается та команда, которая набрала больше баллов.

Проведем жеребьевку:

1. Название, какого раздела математики происходит от греческого слова «число»? (Арифметика)
2. Назовите первые «математические знаки». (Это цифры)
3. Кто впервые разделил числа на четные и не четные, простые и составные? (Пифагор)

Очередность определена.

Начинаем!

10

Сформулируйте определение степени числа с натуральным показателем больше 1.

Ответ: Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, \text{ где } n > 1.$$

20

Сформулируйте определение квадратного корня.

Ответ: Число b называется квадратным корнем из числа a , если $b^2 = a$.

30

Сформулируйте определение степени числа с отрицательным показателем.

Ответ: Для любого числа a, не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

40

Заполните пропуски. Сформулируйте соответствующее правило.

$$a^m \cdot a^n = \cdots$$

Методическая рекомендация: обратить внимание на правильность произношения.

Ответ:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, a – любое число m и n – произвольные натуральные числа.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

50

Сформулируйте свойства квадратного корня, назовите какие условия должны соблюдаться.

Методическая рекомендация: обратить внимание на правильность произношения свойства.

Ответ: Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$,

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$.

Для любых $a \geq 0$ и $b > 0$,

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Раздел Степень

10

Вычислите:

$$-6^2 - (-1)^4$$

Методическая рекомендация: В случае затруднения обратить внимание на то, что знак минуса у 6 находится не в скобочках, а так правильная последовательность действий.

Ответ: $-36 - 1 = -37$.

20

Выполните действие

$6x^2y^3 \cdot \frac{2x^3}{18y^2}$.

Методическая рекомендация: Правильность применения свойства степени.

Ответ: $\frac{4yx^5}{3}$.

30

Представите выражение $(x^{-2})^{-3} \cdot x^{-8}$ *в виде степени с основанием* x *и найдите его значение при* $x = \frac{1}{5}$

Методическая рекомендация: правильность применения свойств степени, последовательность действий, сложение отрицательных чисел.

Ответ: 25.

40

Верно ли утверждение?

Если к отрицательному числу прибавить его квадрат, то получится положительное число.

Методическая рекомендация: вспомнить про дробные числа.

Ответ: Нет, например: $-0{,}1+(-0{,}1)^2= -0{,}1+0{,}01 = -0{,}09$.

50

Сократите дробь

$$\frac{5^n - 5^{n-1}}{5^{n-2}}$$

Методическая рекомендация: применение свойства в обратную сторону, умение увидеть общий множитель.

Решение:

$$\frac{5^n - 5^{n-1}}{5^{n-2}} = \frac{5^n - (5^n \cdot 5^{-1})}{5^n \cdot 5^{-2}} = \frac{5^n(1 - 5^{-1})}{5^n \cdot 5^{-2}} =$$

$$= \frac{1-5^{-1}}{5^{-2}} = \frac{1-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5^2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{25}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{1} = 20.$$

Ответ: 20.

Раздел Квадратный корень

10

Вычислите $(\sqrt{5})^2$

Ответ: 5.

20

Найдите значение выражения $\sqrt{x + y^2}$ при $x = 15$ и $y = -7$

Методическая рекомендация: проверить правильность выполнения действий, возведение отрицательного числа в квадрат.

Ответ: 8.

30

Из формулы площади круга $S = \frac{\pi d^2}{4}$ *, где d—диаметр круга, выразите* d.

Методическая рекомендация: проверить правильность цепочки рассуждений.

Ответ: $\sqrt{\frac{4S}{\pi}}$.

40

Упростите выражение

$\frac{2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}$.

Методическая рекомендация: правильность применения свойства корня.

Ответ: $\frac{7}{\sqrt{7}}$.

50

Докажите, что $\sqrt{3} + 4 = \sqrt{8\sqrt{3} + 19}$.

Решение:

$$\left(\sqrt{3} + 4\right)^2 = \left(\sqrt{8\sqrt{3} + 19}\right)^2$$

$$\sqrt{3}^2 + 8\sqrt{3} + 4^2 = 8\sqrt{3} + 19$$

$$8\sqrt{3} + 19 = 8\sqrt{3} + 19$$

Методическая рекомендация: проверить правильность логических рассуждение, порядок выполнения действий, понимание понятия тождественно равное выражения.

Ответ: 50.

Раздел считаю в уме

10

Вычислить 2^8.

Ответ: 32.

20

Вычислить 5^8.

Ответ: 625.

30

Вычислить $(7\sqrt{3})^2$.

Ответ: 147.

40

Представить число в виде степени с данным показателем

$$-0{,}001 = (\quad)^3$$

Ответ: -0,1.

50

Вычислить

$$\frac{\sqrt{0{,}25} - \sqrt{0{,}09}}{5}$$

Ответ: 0,04.

Подводим итоги, подсчитываем баллы.

Рефлексия: Вам было интересно на занятии?

Что узнали нового?

Чему научились?

Подведение итогов факультативного курса.