МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Задачи с параметром как средство развития исследовательских умений обучающихся

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
60,99 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«27» апреля 2022 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
__________ Суховиенко Е. А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/204-5-1
Коломеец Наталья Сергеевна

Научный руководитель:
к.п.н., доцент кафедры МиМОМ
Севостьянова Светлана Анатольевна

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ 7

1.1 Понятие «исследовательские умения» у обучающихся 7

1.2 Развитие исследовательских умений у обучающихся на уроках математики 8

1.3 Понятие параметра 9

1.4 Типы задач с параметром и способы их решения 11

1.5 Задачи с параметром как средство развития исследовательских умений у обучающихся 14

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ, СПОСОБСТВУЮЩИХ РАЗВИТИЮ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ 19

2.1 Сравнительный анализ школьных учебников на наличие задач с параметром 19

2.2 Анализ задач с параметром из ОГЭ 22

2.3 Система задач с параметром, способствующая развитию исследовательских умений у обучающихся 29

2.4 Технологические карты уроков 71

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 85

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 88

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Анализ учебников Макарычева Ю.Н. 95

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 Анализ учебников Мордковича А.Г. 103

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Анализ учебников Мерзляка А.Г. 123

ПРИЛОЖЕНИЕ 4 Дидактические материалы к ТКУ 7 класс 147

ПРИЛОЖЕНИЕ 5 Дидактические материалы к ТКУ 8 класс 148

ВВЕДЕНИЕ

В Федеральном государственном образовательном стандарте отмечается, что школьники должны обладать научно-исследовательским типом мышления. Для этого у обучающихся необходимо развивать навык самостоятельно добывать, преобразовывать и применять новые знания.

Одним из часто обсуждаемых типов задач при подготовке к экзаменам являются задачи с параметром. Решение задач с параметром является одной из самых интересных и многогранных тем в математике. Но задачи такого рода сложны для обучающихся в технологическом и логическом плане. Они предполагают не только умение различать аналитическую запись функций, знание их свойств, умение производить преобразования, но и умение рассуждать. Необходимо исследовать функцию при различных значениях параметра, чтобы выполнялись определенные условия (уравнение, неравенство, их системы и совокупности имеют указанное количество корней, корни принадлежат указанному промежутку и т.п.).

Изучение этой темы способствует формированию у обучающихся логического мышления, а также организации как творческой, так и исследовательской деятельности. Изучение различных закономерностей, например, физических, экономических и химических приводит к решению задач с параметром.

Решению задач с параметром уделяют большое внимание только в классах с углубленным изучением математики. Но данный тип заданий из года в год присутствует в ОГЭ и ЕГЭ.

На ОГЭ задание с параметром верно выполняет лишь 0,61 % обучающихся. На ЕГЭ за задание с параметром берется 1 % обучающихся из них только 11 % приходят к верному ответу [37]. Дело в том, что в школьной базовой программе задачи с параметром практически не представлены, предлагается рассмотреть их факультативно.

Непривычность формулировки обычно ставит в тупик учащихся, не имеющих опыта решения подобных задач [11].

В методических рекомендациях для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике, отмечают, что «есть существенный резерв роста результатов (по заданиям 14, 18, 19) в части развития геометрической интуиции, логической культуры, умения работать с функциями» [36]. По результатам анализа задания с параметром из ЕГЭ с 2016 по 2019 выявлено, что задание №18 правильно решают лишь 3 % обучающихся.

Поэтому тема, выбранная для исследования является актуальной.

Цель: разработать систему задач с параметром, способствующую развитию исследовательских умений у обучающихся.

Объектом является процесс обучения решению задач с параметром

Предметом является система задач с параметром, формирующая исследовательские умения у обучающихся.

Задачи:

1. Раскрыть понятие исследовательских умений у обучающихся.
2. Изучить развитие исследовательских умений у обучающихся на уроках математики.
3. Рассмотреть понятие параметра в курсе математики основной школы.
4. Описать типы задач с параметром и способы их решения.
5. Представить задачи с параметром как средство развития исследовательских умений у обучающихся.
6. Проанализировать школьные учебники на наличие задач с параметром.
7. Провести анализ задач с параметром из ОГЭ.
8. Разработать систему задач с параметром, способствующую развитию исследовательских умений у обучающихся.

9. Составить технологические карты уроков, на основе разработанной системы задач с параметром.

Гипотеза: использование разработанной системы задач с параметром будет способствовать развитию исследовательских умений у обучающихся при реализации следующих условий:

– выделение трех основных компонентов исследовательских умений: мотивационного, содержательного и технологического;

– построение системы задач, удовлетворяющей требованиям: полноты, наличия ключевых задач, связности, возрастания трудности на каждом уровне, целевой ориентации, целевой достаточности.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

1.1 Понятие «исследовательские умения» у обучающихся

Одним из универсальных способов познания действительности является исследование, способствующее развитию личности. Главной целью формирования исследовательских умений у обучающихся является формирование способности самостоятельно осваивать и применять новые способы деятельности [35].

Сейчас современному миру необходимы люди, которые легко адаптируются в зависимости от изменяющихся обстоятельств, а также находят индивидуальный подход в решении нестандартных ситуаций. Именно поэтому от школьников сейчас требуются навыки саморазвития и совершенствования на протяжении всей жизни. Основу этих навыков составляют исследовательские умения.

Исследовательские умения определяют, как совокупность сложных умений, состоящие из трех основных компонентов: мотивационного, содержательного и технологического (рисунок 1) [27; 29; 30].

Мотивационный компонент проявляется в виде познавательного интереса и формируется под воздействием целей новой деятельности. Для мотивации обучающихся можно предложить неожиданную формулировку задания. Задание, направленное на мотивацию, должно дать обучающимся возможность увидеть больше, чем просто вопрос задания. Это можно реализовать с помощью создания ситуации практического затруднения и расширения кругозора обучающихся. Обучающиеся должны осознавать важность исследовательской деятельности и уметь ее реализовывать для собственных потребностей (в саморазвитии).

Содержательный компонент представляет собой систему знаний, владея которой обучающийся имеет возможность развивать свое мировоззрение и профессиональную деятельность.

Технологический (операционный) компонент включает в себя систему умений и навыков. Данный компонент предполагает, что учебная деятельность сформировалась у обучающегося как система задач, которая способствует использованию определенных учебных действий в любых ситуациях.

Рисунок 1 – Компоненты исследовательских умений

1.2 Развитие исследовательских умений у обучающихся на уроках математики

На уроках математики, как и на уроках других предметов, для облегчения работы обучающихся, создаются некие алгоритмы, соблюдая которые ученики приходят к ответу. Таким образом, давая обучающимся стандартные задания и готовые алгоритмы решения данных заданий, учителя ограничивают обучающихся клипово-алгоритмическим мышлением (наличие алгоритмов среди множества разнообразных несвязанных и неосознанных фрагментов информации). Так, когда обучающиеся встречают формулировку задания, с которой никогда не сталкивались, они даже не приступают к решению задания, а единицы обучающихся, решивших разобрать данное задание или выбирают не тот алгоритм решения, или правильно подобрав алгоритм не могут правильно его применить [31]. Обучающиеся успешнее справляются с заданиями, направленными на знание материала, а не на рассуждения [16].

В. И. Рыжик в своей работе [28] пишет о том, что из-за того, что учителя годами ориентируются на ЗУН (знания, умения и навыки) в школах основным занятием стало усвоение алгоритмов.

Давая обучающимся разнообразные формулировки аналогичных заданий, учитель развивает у обучающихся исследовательские умения, позволяющие обучающимся не пользоваться бездумно алгоритмами, а понимать закономерности и строить собственные рассуждения [31].

1.3 Понятие параметра

В математике величины делятся на два вида: постоянные и переменные (рисунок 2).

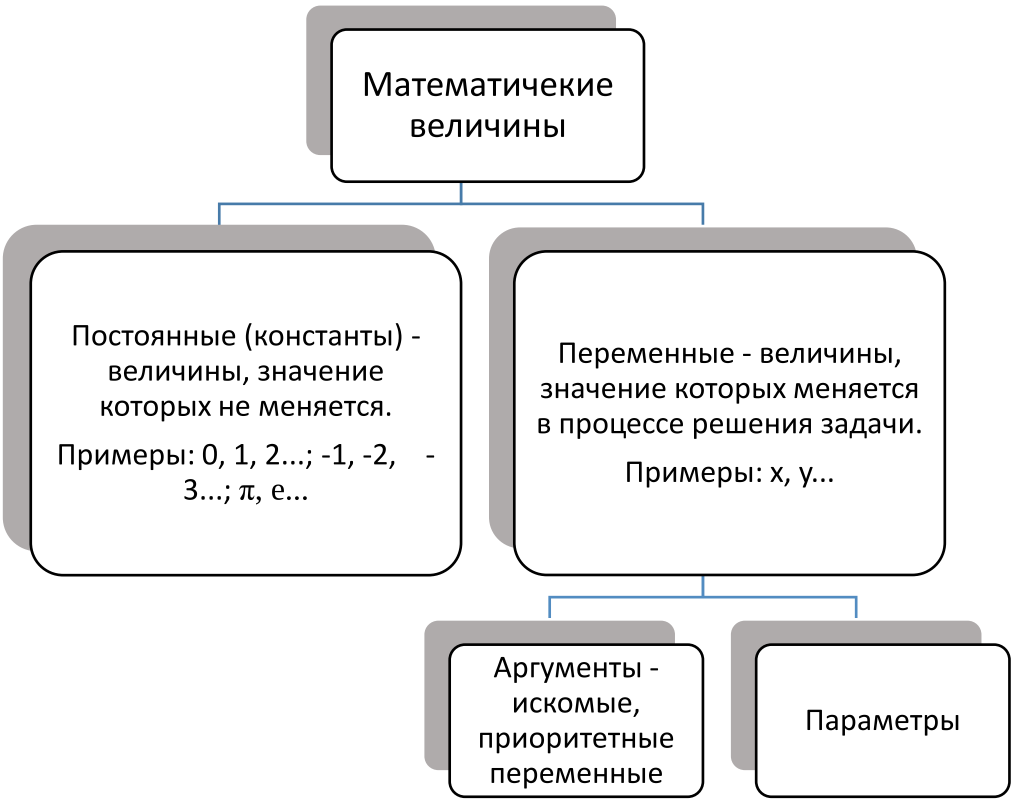

Рисунок 2 – Схема математических величин

Например, в уравнении $2x + 1 = a$ числа 2 и 1 являются постоянными величинами, а величины x и a являются переменными. При этом x может быть аргументом, а переменная a параметром, и наоборот, в зависимости от условия задачи [38].

В школьном курсе математики основные математические модели записываются с помощью переменных и параметров (на которых не акцентируют внимание обучающихся), например, $y = ax + b$, $ax^2 + bx + {}$ $+c = 0$ (где $a \neq 0$), $\sin x = a$, $y = \log_a x$ (где $a > 0, a \neq 1$) и др. [15].

Параметром (от греческого слова parametron – отмеривающий) называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным, фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству [38].

Параметры окружают нас повсюду. Так, например, в зависимости от погодных условий, мы решаем, что одеть и идти ли нам вообще на улицу. В этом случае погода является параметром, от которого зависят наши действия [13].

Решить уравнение с параметром – это значит на множестве действительных чисел решить уравнение при всех действительных значениях параметра [32].

Контрольным значением параметра называется значение параметра, при котором коэффициент при неизвестном обращается в нуль.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве) придать некоторое числовое значение, то возможен один из двух случаев:

– либо получится уравнение (неравенство), содержащее лишь данные числа и неизвестные, и не содержащее параметров;

– либо получится условие, лишенное смысла.

В первом случае значение параметра называют допустимым, во втором – недопустимым.

1.4 Типы задач с параметром и способы их решения

Задачи с параметром можно разбить на пять основных типов:

1. Найти все значения параметра (параметров), при которых уравнение, неравенство, их системы и совокупности имеют данный корень.

Пример. При каком значении параметра a уравнение $ax^2 - 2x + 4 = 0$ имеет корень $x = 2$?

2. Решить уравнение, неравенство, их системы и совокупности для значений параметра (параметров), принадлежащих данному множеству.

Пример. Решить уравнение $ax + 2|4 - x| = x - 2$ в зависимости от значений параметра.

3. Определить количество решений уравнения, неравенства, их системы и совокупности в зависимости от значений параметра (параметров).

Пример. Найти количество решений в зависимости от параметра a:

$$\begin{cases} |x| - |y| = 2, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

4. Найти все значения параметра (параметров), при которых уравнение, неравенство, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Пример. При каких a уравнение $|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$ имеет больше двух корней?

5. Найти все значения параметра (параметров), при которых множество решений уравнения, неравенства, их системы и совокупности удовлетворяет заданным условиям в области определения [33].

Пример. Найти все a, при каждом из которых уравнение

$$x - 2 = \frac{(a+1)(a-5)}{x+4}$$

имеет ровно один корень на промежутке $(0; +\infty)$.

Выделяют три основных метода решения задач с параметром:

1. Аналитический.
2. Графический.
3. Аналитико-графический.

При решении задач с параметром аналитическим способом предполагается решение уравнения, неравенства, их системы и совокупности с помощью анализа уравнения, неравенства, их системы и совокупности с различными значениями параметра. Решение уравнения, неравенства, их системы и совокупности можно производить одним из следующих способов:

– перебор значений параметра;
– замена переменной;
– метод сведения задачи к равносильной;
– выявление необходимых и достаточных условий для выполнения указанных условий [1].

Для применения графического метода при решении задач с параметром необходимо построить графики функций, которые присутствуют в уравнении, неравенстве, их системе и совокупности.

Графический метод во многом облегчает решение задач с параметром. Также данный метод обладает высокой степенью наглядности [14]. Графический метод удобен, когда нужно установить, сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра.

Алгоритм решения задания с параметром графическим методом:

1. Определить область допустимых значений переменной x.
2. Построить графики функций, полученных из уравнения или системы уравнений.
3. Изобразить возможные варианты расположения графиков функций, удовлетворяющих условию задачи.

4. Найти значение параметра для выделенных ранее вариантов.

5. Записать ответ.

Большую часть заданий с параметром из ОГЭ и ЕГЭ можно решить аналитико-графическим методом. Этот метод дает наглядное решение уравнений и неравенств. В задаче может быть поставлен один из следующих вопросов:

– найти количество решений в зависимости от значения параметра;

– найти значение параметра при заданном количестве решений.

Задания при этом имеют два вида. В первом виде присутствует одна переменная x и параметр a. Во втором виде находятся две переменные x, y и параметр a. В первом случае необходимо работать на координатной плоскости xOa, во втором в плоскости xOy.

Используя аналитико-графический метод обучающиеся формируют ряд умений, таких как знание свойств функций, умение строить и преобразовывать графики функций [8].

Решение задач с параметром аналитико-графическим методом имеет следующие преимущества:

– графический образ делает решение более наглядным;

– график функций дает возможность выразить достаточные и необходимые условия для решения задачи;

– экономит время;

– освобождает от сложных и громоздких вычислений [20].

Решая задание с параметром следует придерживаться следующего алгоритма:

1. Выяснить что требуется найти в задаче. Это поможет определить способ по которому будет удобнее решать данное задание.

2. Определить каким является уравнение, данное в задании (линейное, квадратное и т.д.). Это поможет определить какие механизмы решения можно применить к данному типу уравнения.

3. Определить область допустимых значений. Это поможет выяснить будет ли иметь ограничения параметр.

4. Определить имеются ли у параметра контрольные значения. Например, случаи, когда в квадратном уравнении параметром является старший коэффициент или параметр влияет на дискриминант уравнения.

5. В некоторых случаях бывает удобным поменять переменную и параметр местами. Например, уравнение может являться квадратным относительно переменной и линейным относительно параметра [18].

Данный алгоритм можно расширять, но даже пользуясь этими пунктами можно прийти к верному ответу.

Для решения задач с параметром обучающиеся должны обладать следующими навыками и знаниями:

– способы упрощения выражения группировка, вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращенного умножения и т. д.);

– функции, их свойства и графики;

– способы построения графиков функций (по свойствам, метод преобразований, с помощью производной) [21].

1.5 Задачи с параметром как средство развития исследовательских умений у обучающихся

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) включает в себя следующий перечень требований к предметным результатам освоения базового курса «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия»:

1. Сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира.

2. Сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий.

3. Владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

4. Владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств.

5. Сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа.

6. Владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием.

7. Сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин.

8. Владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач [34].

В течение жизни специалисты различных областей сталкиваются с физическими, химическими, экономическими и другими закономерностями, которые приводят к исследованию процесса при изменении параметров [19].

При решении таких заданий с параметром у обучающихся формируются в соответствии со ФГОС СОО умения 1-4. Например:

1. В реальных ситуациях для обобщения можно использовать функцию с параметрами.

2. Для решения заданий с параметром обучающиеся могут использовать любой удобный для них способ, значит, могут работать с уравнениями или графиками функций.

3. В заданиях с параметром необходимо доказывать количество решений.

4. Каким бы не было задание с параметром оно требует от обучающихся знаний стандартных приемов решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем.

Постоянное повторение материала не должно приводить к заучиванию, оно должно приводить к усвоению информации, поэтому на уроках математики целесообразно использовать задания с параметром, которые будут вызывать у обучающихся интерес и тягу к исследованиям. Ушинский писал: «Нет никакой надобности повторять выученное непременно в том же порядке, в каком оно было выучено, а, напротив, гораздо еще полезнее … повторения, вводящие выученное в новые комбинации, т.е. другими словами, тем, что выучено, должно беспрестанно пользоваться» [15].

Задачи с параметром представленные в ОГЭ и ЕГЭ имеют различные формулировки и разновидности, для проявления мотивационного компонента, входящего в исследовательские умения. Поэтому видя нестандартную формулировку задания, обучающиеся должны научиться осмысливать и преобразовывать, полученную ими информацию [17].

При решении заданий с параметром от обучающихся требуется проводить размышления, наблюдать, сравнивать, проводить анализ и подводить итоги проделанных рассуждений [9]. Для этого им необходимо развивать свое мировоззрение и уметь использовать определенные учебные действия в любых ситуациях, что является содержательным и технологическим компонентами исследовательских умений.

Задачи с параметрами изучались М.И. Башмаковым, Г.В. Дорофеевым, М.И. Зайкиным, Т.А. Ивановой, Г.Л. Луканкиным, Я.Л. Крейниным, В.К. Марковым, А.Г. Мордковичем, Н.Х. Розовым, Г.И. Саранцевым, Р.А. Утеевой и другими. Все они подчеркивали важность решения задач с параметрами, большая часть авторов давали задачам с параметрами исследовательский характер, так как данные задачи требуют умений строить логические цепочки и рассуждения [10].

Есть несколько причин, по которым задачи с параметром вызывают сложности у обучающихся:

1. Задачи данного типа входят в школьный курс математики, но большая часть имеет пометку повышенной трудности, поэтому данные задания будут сложны для всего класса, и рассматриваются только на факультативных занятиях.

2. При решении задач с параметром требуется знание свойств функций и уравнений, а также умение проводить логические рассуждения и формулировать выводы.

3. Обучающиеся не имеют ясное понимание решения из-за того, что задачи такого рода не имеют единого способа решения.

4. При решении задач с параметром необходимо рассматривать все возможные значения параметра, которые обучающиеся теряют в записях, либо вовсе не находят.

5. Трудности с заданиями с параметром возникают и у учителя, так как в методических материалах мало освещена данная тема. В интернете имеется огромное количество решенных заданий с параметром, но при этом отсутствует методика решения данного типа заданий.

Решение задач с параметром является средством развития исследовательских умений, так как при решении обучающийся вовлечён в исследовательскую деятельность. В зависимости от значения параметра меняется решение и количество решений [14].

Решая задачи с параметром обучающийся:

– самостоятельно разбирается в формулировке задачи;
– вспоминает теоретические сведения, которыми владеет;
– выбирает способ решения;
– продумывает ход своих действий;
– записывает решение;
– проверяет правильность решения [22].

Пример. При каких значениях a неполным является квадратное уравнение $(a+4)x^2+ax+a^2-16=0$? Найдите корни уравнения для найденных значений a.

Решение.

Данное уравнение будет квадратным, если коэффициент при x^2 будет отличен от нуля $a+4\neq 0 \Rightarrow a\neq -4$.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называется неполным, если один из коэффициентов b или c, или оба коэффициента равны нулю.

1 случай. Если $a=0$, тогда квадратное уравнение примет вид: $4x^2--16=0 \Rightarrow 4x^2=16 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$.

2 случай. Если $a+4\neq 0$ и $a^2-16=0 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4$. Случай, когда $a=-4$ нам не подходит, так как уравнение перестанет быть квадратным. Тогда при $a=4$ квадратное уравнение примет вид: $8x^2+$ $+4x=0 \Rightarrow 4x(2x+1)=0 \Rightarrow x=0$ или $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: если $a=0$, то $x=\pm 2$; если $a=4$, то $x=0$ или $x=-\frac{1}{2}$.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ, СПОСОБСТВУЮЩИХ РАЗВИТИЮ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ

2.1 Сравнительный анализ школьных учебников на наличие задач с параметром

Сравнительный анализ школьных учебников по алгебре на наличие заданий с параметром проводился по следующим учебно-методическим комплексам (далее – УМК): Макарычев Ю.Н. (ПРИЛОЖЕНИЕ 1), Мордкович А.Г. (ПРИЛОЖЕНИЕ 2) и Мерзляк А.Г (ПРИЛОЖЕНИЕ 3).

В УМК Макарычева в 8 классе [5] встречается пункт 27 «Уравнения с параметром», но он имеет пометку «Для тех, кто хочет знать больше». В данном пункте дается определение параметра: «Рассматривая уравнение $ax = 5$, мы придавали буквам a и x различный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a – некоторое фиксированное число. В таких случаях говорят, что a является параметром, а $ax = 5$ – уравнение с параметром». Имеется два разобранных примера и десять упражнений.

В УМК Мордковича в 8 классе [4] в параграфе 25 «Формулы корней квадратных уравнений» впервые встречаются примеры (7 и 8), содержащие параметр. Дается определение параметра: «Это квадратное уравнение отличается от всех рассмотренных до сих пор квадратных уравнений тем, что в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами или уравнениями с параметрами». Затем пример (6), содержащий параметр разбирается в параграфе 34 «Решение квадратных неравенств».

В УМК Мерзляка в 7 классе [23] в параграфе 2 «Линейное уравнение с одной переменной» встречается пример (2), состоящий из двух линейных уравнений, содержащих параметр. Определение «параметра» при этом не дается, задание: «Решите уравнение». Затем в параграфе 12 «Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки» имеется пример (6), в котором необходимо найти значение a, при котором уравнение имеет бесконечно много корней. В 8 классе [24] в параграфе 20 «Формула корней квадратного уравнения» встречается пример (3), содержащий два квадратных уравнения с параметром. В параграфе 21 «Теорема Виета» рассматривается пример (5) решения квадратного уравнения с параметром один корень которого известен, необходимо найти второй корень уравнения и значение параметра. Параграф 22 «Квадратный трёхчлен» содержит пример (3), в котором нужно найти значение параметра, при котором данный трёхчлен содержит указанный множитель.

Анализ учебников на наличие теоретического материала показал, что только в УМК Макарычева и УМК Мордковича дается определение «параметра», в УМК Мерзляка слово «параметр» не встречается ни разу. Количество разобранных примеров, содержащих параметр, в УМК Мерзляка значительно больше, чем в УМК Макарычева и УМК Мордковича.

Анализ на наличие всевозможных заданий с параметром показал, что таких заданий мало, и в большей степени они имеют отметку о повышенной трудности.

В Таблице 1 представлен вывод по анализу школьных учебников из Таблицы 1.1, Таблицы 2.1 и Таблицы 3.1.

Таблица 1 – Анализ учебников за 7 класс

УМК	Уровень задания	Количество заданий, содержащих параметр	Процент от общего количества заданий в учебнике
1	*2*	*3*	*4*
Макарычев Ю.Н.	Простое задание	9	0,73 %
	Задание повышенной трудности	6	0,49 %

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
Мордкович А.Г.	Простое задание	17	1,06 %
	Задание средней трудности	2	0,13 %
	Задание повышенной трудности	12	0,75 %
Мерзляк А.Г.	Простое задание	2	0,16 %
	Задание среднего уровня сложности	26	2,11 %
	Сложное задание	24	1,94 %
	Задание повышенной сложности	6	0,49 %

В Таблице 2 представлен вывод по анализу школьных учебников из Таблицы 1.2, Таблицы 2.2 и Таблицы 3.2.

Таблица 2 – Анализ учебников за 8 класс

УМК	Уровень задания	Количество заданий, содержащих параметр	Процент от общего количества заданий в учебнике
Макарычев Ю.Н.	Простое задание	9	0,7 %
	Задание повышенной трудности	17	1,47 %
Мордкович А.Г.	Простое задание	31	1,86 %
	Задание средней трудности	10	0,6 %
	Задание повышенной трудности	23	1,38 %
Мерзляк А.Г.	Простое задание	14	1,49 %
	Задание среднего уровня сложности	11	1,17 %
	Сложное задание	14	1,49 %
	Задание повышенной сложности	24	2,56 %

В Таблице 3 представлен вывод по анализу школьных учебников из Таблицы 1.3, Таблицы 2.3 и Таблицы 3.3.

Таблица 3 – Анализ учебников за 9 класс

УМК	Уровень задания	Количество заданий, содержащих параметр	Процент от общего количества заданий в учебнике
Макарычев Ю.Н.	Простое задание	13	1,19 %
	Задание повышенной трудности	14	1,28 %
Мордкович А.Г.	Простое задание	32	2,3 %
	Задание средней трудности	8	0,57 %
	Задание повышенной трудности	9	0,65 %
Мерзляк А.Г.	Простое задание	21	2,01 %
	Задание среднего уровня сложности	16	1,53 %
	Сложное задание	14	1,34 %
	Задание повышенной сложности	28	2,68 %

2.2 Анализ задач с параметром из ОГЭ

В ОГЭ также присутствует задание с параметром – задание 22. Это задание находится во второй части.

При оценивании задания учитывается не только правильный ответ, но и логика решения, и ее аргументация [26]. Критерии оценивания представлены в Таблице 4.

Таблица 4 – Критерии оценивания задания 22 ОГЭ

Содержание критерия	Балл
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Задание 22 проверяет владение обучающимися материалом на высоком уровне. Дает возможность определить обучающихся, способных обучаться в профильных классах.

Данное задание проверяет умение выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели.

Выполняя задание 22 ОГЭ, недостаточно выполнять построение графика функции по точкам. Необходимо указывать вид графика функции. Для построения линейной, квадратичной функции и графика обратной пропорциональности можно использовать таблицу значений.

Так же обязательным является обозначение, указание направлений осей и выбор масштаба на координатной плоскости.

При решении задания 22 в 2021 году были выявлены следующие ошибки:

– не найдена область определения функции;

– неправильно построен график функции.

Анализ открытого банка заданий ОГЭ по математике показал, что задание 22 можно разделить на следующие виды:

– квадратичная функция и функция, сводимая к квадратичной (парабола);

– дробно-рациональная функция (гипербола);

– кусочно-заданная функция и функция, содержащая знак модуля, сводимая к кусочно-заданной функции.

Рассмотрим подробное решение каждого вида задания 22.

Квадратичная функция и функция, сводимая к квадратичной (парабола).

Пример. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y == kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте график функции и все такие прямые.

Решение.

1. Прямая $y = kx$ имеет с графиком параболы $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку, если уравнение $x^2 + 4 = kx$ имеет один корень.

$$x^2 - kx + 4 = 0.$$

Найдем дискриминант уравнения:

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16.$$

Уравнение имеет только один корень, если $D = 0$.

$$k^2 - 16 = 0;$$

$$k^2 = 16;$$

$$\left[\begin{array}{l} k = 4, \\ k = -4. \end{array}\right.$$

2. Построим график функции $y = x^2 + 4$.

График функции получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вершины в точку $(0; 4)$ (рисунок 3).

Построим графики функций $y = 4x$ и $y = -4x$ по точкам (рисунок 3).

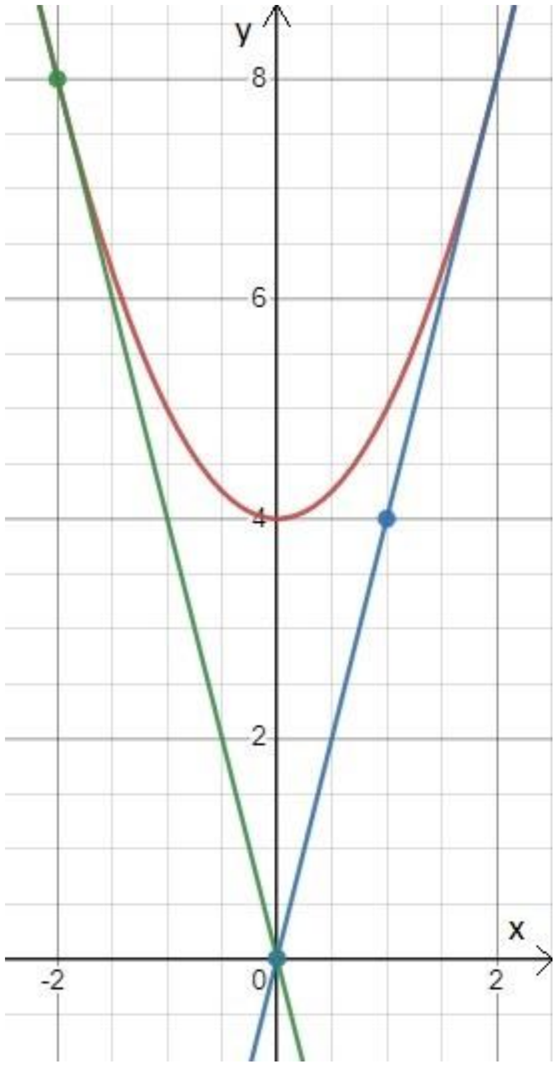

Рисунок 3 – Графики функций $y = x^2 + 4$, $y = 4x$ и $y = -4x$

Ответ: $-4;\ 4$.

Порядок действий:

1. Составление квадратного уравнения и нахождение его корней через дискриминант или теорему Виета.

2. Построение графиков функций.

Дробно-рациональная функция (гипербола).

Пример. Постройте график функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

1. ОДЗ: $2x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x(2x-1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$

При $x \neq \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1-2x}{2x^2 - x} = \frac{1-2x}{x(2x-1)} = -\frac{2x-1}{x(2x-1)} = -\frac{1}{x}.$$

При $x = \frac{1}{2}$

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

2. График функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ отражением через ось Ox и с выколотой точкой $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ (рисунок 4).

3. Прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ только одну общую точку, когда прямая проходит через выколотую точку $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. Найдем значение параметра k, подставив координаты точки, принадлежащей прямой $y = kx$.

$$-2 = k\frac{1}{2} \Rightarrow k = -4.$$

Прямая $y = -4x$ имеет с графиком функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ только одну общую точку (рисунок 4).

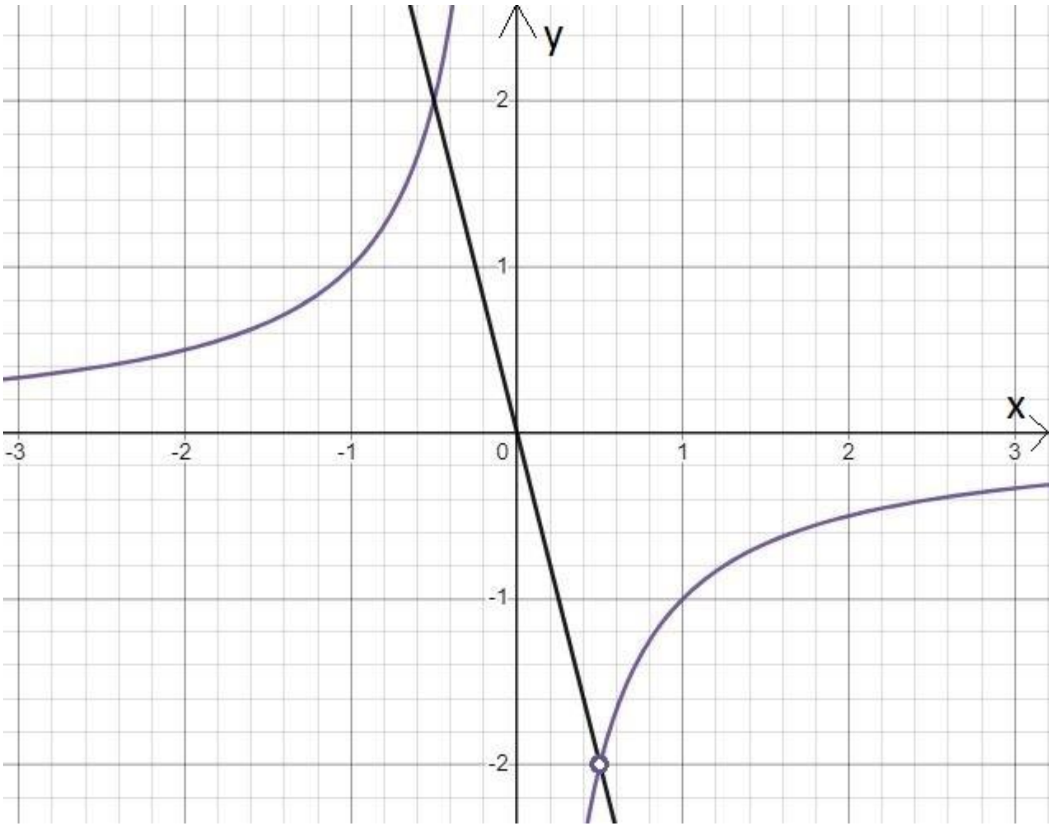

Рисунок 4 – Графики функций $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и $y = -4x$

Ответ: -4.

Порядок действий:

1. Нахождение области определения функции.
2. Построение графика функции.
3. Нахождение значения параметра, удовлетворяющего условию.

Кусочно-заданная функция и функция, содержащая знак модуля, сводимая к кусочно-заданной функции.

Пример. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+3x)|x|}{x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

1. ОДЗ: $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$.

При $x \neq -3$

$$y = \frac{(x^2 + 3x)|x|}{x + 3} = \frac{x(x + 3)|x|}{x + 3} = x|x|.$$

При $x = -3$

$$y = -3 \cdot 3 = -9.$$

2. Рассмотрим функцию $y = x|x| = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ -x^2, x < 0, x \neq -3. \end{cases}$

3. Для того чтобы построить график функции $y = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ -x^2, x < 0, x \neq -3, \end{cases}$ необходимо построить график функции $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$, график функции $y = -x^2$ на промежутке $(-\infty; 0)$ и выколоть точку $(-3; -9)$ (рисунок 5).

4. Прямая $y = m$ не имеет с графиком функции $y = \frac{(x^2+3x)|x|}{x+3}$ ни одной общей точки при $m = -9$.

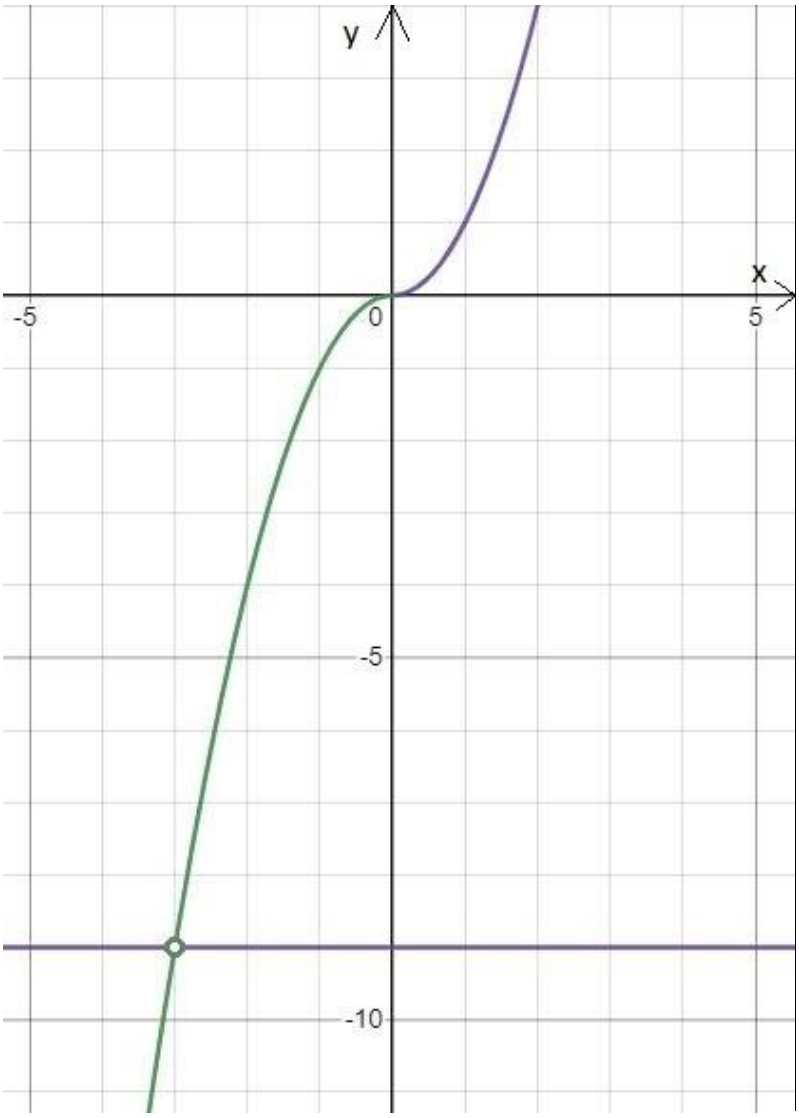

Рисунок 5 – Графики функций $y = \begin{cases} x^2, x \geq 0, \\ -x^2, x < 0, x \neq -3 \end{cases}$ и $y = -9$

Ответ: -9.

Порядок действий:

1. Нахождение области определения функции.
2. Сведение к кусочно-заданной функции.
3. Построение графиков функций на промежутках.
4. Нахождение значения параметра.

Если в задании дана кусочно-заданная функция выполняются только пункты 3-4.

2.3 Система задач с параметром, способствующая развитию исследовательских умений у обучающихся

Система задач должна удовлетворять требованиям:

– полноты (наличие задач на все изучаемые понятия);

– наличия ключевых задач;

– связности (совокупность задач – последовательность уровней от подготовительных вариантов до обобщений;

– возрастания трудности на каждом уровне;

– целевой ориентации (для каждой задачи определено ее место и назначение в блоке уроков);

– целевой достаточности (количество задач оптимально для достижения поставленной цели).

В.А. Далингер провел исследование и написал о том, что систему заданий необходимо рассматривать «как средство развития математической культуры учащихся». В таком случае система заданий будет развивать все компоненты математической подготовки обучающихся: знания и умения, установленные программой обучения; мыслительные операции и методы, присущие математической деятельности, в том числе и метод моделирования; математический стиль мышления; рациональные, продуктивные способы учебно-познавательной деятельности и т.д. [12].

Представленные ниже системы задач с параметром состоят из:

1. Планируемые результаты.
2. Основные понятия.
3. Исследовательские умения.
4. Теоретический блок (определения, значения корней, алгоритм решения).
5. Примеры с подробным решением.
6. Задания для самостоятельной работы.

Системы задач представлены по следующим темам:

1. Простейшие задачи с параметром.
2. Линейные уравнения и неравенства с параметром.
3. Квадратные уравнения и неравенства с параметром.
4. Уравнения и неравенства с параметром, содержащие знак модуля.
5. Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.
6. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.
7. Логарифмические уравнения и неравенства с параметром.
8. Показательные уравнения и неравенства с параметром.

В каждой системе заданий обучающиеся осваивают следующие личностные и метапредметные планируемые результаты:

1. *Личностные.*

Готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

2. *Метапредметные.*

Обучающийся сможет:

– определять необходимые действие(я) в соответствии с учебной и познавательной задачей и составлять алгоритм их выполнения (регулятивное универсальное учебное действие (далее – УУД));

– выбирать из предложенных вариантов и самостоятельно искать средства/ресурсы для решения задачи/достижения цели (регулятивное УУД);

– составлять план решения проблемы (выполнения проекта, проведения исследования) (регулятивное УУД);

– находить достаточные средства для выполнения учебных действий в изменяющейся ситуации и/или при отсутствии планируемого результата (регулятивное УУД);

– строить рассуждение от общих закономерностей к частным явлениям и от частных явлений к общим закономерностям (познавательное УУД);

– строить схему, алгоритм действия, исправлять или восстанавливать неизвестный ранее алгоритм на основе имеющегося знания об объекте, к которому применяется алгоритм (познавательное УУД).

Простейшие задачи с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: целое число, правильная дробь, неправильная дробь;

– проверять справедливость числовых равенств и неравенств.

Основные понятия: постоянные, переменные, параметр, равенство, неравенство, правильная дробь, неправильная дробь.

Исследовательские умения:

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

Математические величины делятся на постоянные и переменные. Постоянные – величины, значение которых не меняется. Переменные –

величины, значение которых меняется в процессе решения задачи.

Пример. Определить постоянные и переменные величины в уравнениях.

1) $3x = 7a$;
2) $5y + 2x = 0$;
3) $x - 1 = 7b$;
4) $t^2 + t + a = 0$;
5) $gx + 2 = -g$.

Ответ: 1) постоянные: 3, 7, переменные: x, a; 2) постоянные: 5, 2, 0, переменные: y, x; 3) постоянные: -1, 7, переменные: x, b; 4) постоянные: 0, переменные: t, a; 5) постоянные: 2, -1, переменные: g, x;

Пример. При каком натуральном значении a верно равенство $a + 3 == 3 + 8$?

Ответ: 8.

Пример. При каких значениях параметра a дробь $\frac{a}{5}$ будет правильной, и при каких значениях неправильной?

Ответ: при $0 < a < 5$ дробь $\frac{a}{5}$ будет правильной; при $a \geq 5$ дробь $\frac{a}{5}$ будет неправильной.

Пример. При каких натуральных значениях b деление $18{:}\,b$ выполнено без остатка?

Ответ: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Пример. При каком целом значении c верно равенство $15c = 15$?

Ответ: 1.

Пример. При каких натуральных значениях a верно неравенство $12 < 3a < 30$?

Ответ: 5, 6, 7, 8, 9.

Для самостоятельной работы.

Задание. При каком натуральном значении a верно равенство $a - 3 == 8 - 3$?

Задание. При каких значениях параметра a дробь $\frac{8}{a+2}$ будет правильной, и при каких значениях неправильной?

Задание. При каких натуральных значениях b при делении $13: b$ в остатке получится 1?

Задание. При каком целом значении b верно равенство $7b = 3 \cdot 5 - 1$?

Задание. При каких натуральных значениях c верно неравенство $3 < 2c < 60$?

Линейные уравнения и неравенства с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– проверять, является ли данное число решением уравнения (неравенства).

Обучающийся получит возможность:

– выполнять разложение многочленов на множители одним из способов: вынесение за скобку, группировка, использование формул сокращенного умножения;

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами.

Основные понятия: линейное уравнение, корни линейного уравнения, линейные неравенства.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

В общем виде линейное уравнение выглядит следующим образом:

$$kx + b = 0.$$

Это уравнение является краткой записью бесконечного множества уравнений с одной переменной. Переменные k и b будем рассматривать как параметры, а x – как аргумент.

При решении таких уравнений относительно параметров k и b получим (Таблица 5):

1. Пусть k и b – любые действительные числа не равные нулю, тогда:

$$kx = -b;$$

$$x = \frac{-b}{k}.$$

Значит, данное уравнение имеет один корень.

2. Пусть $k = 0$ и $b \neq 0$, тогда исходное уравнение примет вид $0 \cdot x == -b$. Очевидно, что решений у данного уравнения нет.

3. Пусть $k = 0$ и $b = 0$, тогда исходное уравнение примет вид $0 \cdot x == 0$. Решением данного уравнения будет являться любое действительное число.

Таблица 5 – Корни уравнения $kx + b = 0$ при различных значениях k и b

Значения k и b	$k \neq 0$ и $b \neq 0$	$k \neq 0$ и $b = 0$	$k = 0$ и $b \neq 0$	$k = 0$ и $b = 0$
Корни уравнения $kx + b = 0$	$x = \frac{-b}{k}$	$x = 0$	Корней нет	Любое действительное число

Алгоритм решения линейных уравнений:

1. Определить контрольные значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль.

2. Решить исходное уравнение относительно x при значениях параметра, которые были получены в первом пункте.

3. Решить исходное уравнение относительно x при значениях параметра, отличных от тех, которые были получены в первом пункте.

4. Записать ответ в следующем виде:

– при (значение параметра) уравнение имеет следующие корни: …

– при (значение параметра) уравнение корней не имеет.

Линейное неравенство имеет один из следующих видов:

$$kx > b, kx < b, kx \geq b, kx \leq b.$$

В каждом их этих неравенств переменные k и b – параметры, а x – аргумент.

Алгоритм решения линейных неравенств с параметром такой же как алгоритм решения линейных уравнений с параметром. Отличие в том, что в ответ нужно указывать промежуток, которому принадлежит корень.

Пример. Решите уравнение $(a-5)x+7=0$.

Решение.

1. Найдем контрольное значение параметра. Если $a-5=0$, то $a == 5$.

2. Если $a=5$, то уравнение примет следующий вид:

$$0 \cdot x + 7 = 0;$$

$$0 \cdot x = -7;$$

$$x = -\frac{7}{0}.$$

Но на ноль делить нельзя, поэтому в данном случае уравнение корней не имеет.

3. Если $a \neq 5$, то $a - 5 \neq 0$, тогда уравнение имеет один корень $x == -\frac{7}{a-5}$.

Отметим найденные значения корней на прямой (рисунок 6).

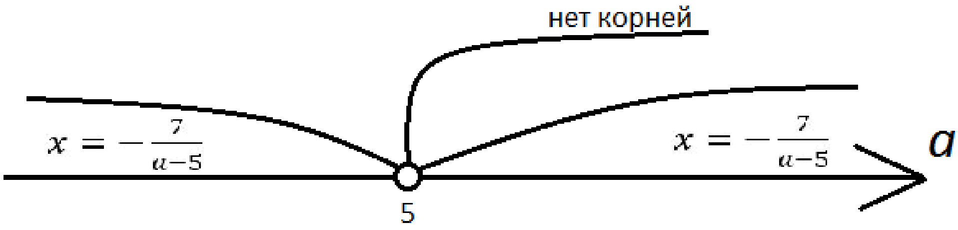

Рисунок 6 – Корни уравнения $(a - 5)x + 7 = 0$ при различных значениях параметра

Ответ: при $a = 5$ уравнение корней не имеет; при $a \neq 5$ уравнение имеет один корень $x = -\frac{7}{a-5}$.

Пример. При каком a уравнение не будет иметь решение $3ax + 8a = = 9x - 7$?

Решение.

Приведем уравнение к стандартному виду:

$$3ax + 8a - 9x + 7 = 0;$$

$$(3a - 9)x + (8a + 7) = 0.$$

1. Если $3a - 9 = 0$, то $a = 3$.

2. Если $a = 3$, то уравнение примет следующий вид:

$$0 \cdot x + (8a + 7) = 0;$$

$$0 \cdot x = -(8a + 7);$$

$$x = -\frac{8a + 7}{0}.$$

Но на ноль делить нельзя, поэтому в данном случае уравнение корней не имеет.

Ответ: при $a = 3$ уравнение корней не имеет.

Пример. Решите неравенство $(a - 4)x < 7a$.

Решение.

1. Определим контрольные значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль. Если $a - 4 = 0$, то $a = 4$.

2. Если $a = 4$, то неравенство примет следующий вид:

$$0 \cdot x < 7 \cdot 4;$$

$$0 \cdot x < 28.$$

Умножая любое действительное число на ноль, мы будем получать ноль. $0 < 28$, значит неравенство будет выполняться при любом действительном x.

3. Если $a - 4 > 0$, то $a > 4$, тогда $x < \frac{7a}{a-4}$.

Если $a - 4 < 0$, то $a < 4$, тогда при делении на $a - 4 < 0$ знак неравенства меняется на противоположный $x > \frac{7a}{a-4}$.

Отметим найденные значения корней на прямой (рисунок 7).

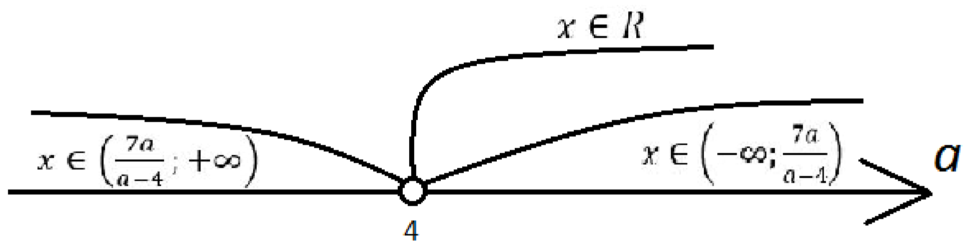

Рисунок 7 – Корни неравенства $(a - 4)x < 7a$ при различных значениях параметра

Ответ: если $a = 4$, то $x \in R$; если $a > 4$, то $x \in \left(-\infty; \frac{7a}{a-4}\right)$; если $a < 4$, то $x \in \left(\frac{7a}{a-4}; +\infty\right)$.

Пример. Что будет с неравенством $8x - a > ax + 5$, если $a = 8$?

Решение.

Приведем неравенство к стандартному виду:

$$8x - ax > a + 5;$$

$$(8 - a)x > a + 5.$$

Если $a = 8$, то $(5 - 8) \cdot x > 8 + 5$

$$0 \cdot x > 13.$$

Умножая любое действительное число на ноль, мы будем получать ноль. Но ноль не может быть больше 13, следовательно если $a = 8$ неравенство не имеет решений.

Ответ: если $a = 8$ неравенство не имеет решений.

Для самостоятельной работы.

Задание. При каких значениях a уравнение $0x = a$ не имеет решений?

Задание. Укажите значение a, при котором число 5 является корнем уравнения $ax = 20$.

Задание. При каком значении параметра a число 4 является корнем уравнения?

1) $ax = -12$;
2) $8x = 2a$.

Задание. Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения $mx = -1$ является целым числом.

Задание. Что будет с уравнением $x = \frac{4}{a-1}$, если $a = 1$?

Задание. Найдите все значения a, при которых $ax = 3$ имеет решение?

Задание. Решите уравнение:

1) $ax = 9$;
2) $5x = b$;
3) $0 \cdot x = c$.

Задание. Решите уравнение $0{,}2x - a = 1$.

Задание. Найдите значения a, при которых уравнение $(a-2)x^2 + $ $+2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

Задание. Решите уравнение $b^2x + b^2 = x + b$.

Задание. Решите уравнение $5x - 3b = 9 - 5b + bx$.

Задание. Решите неравенство $ax > 3$.

Задание. Решите неравенство $(a^2 - 4)x > a + 1$.

Задание. Решите неравенство $4a(a-5)x > a-5$.

Квадратные уравнения и неравенства с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения;

– изображать решения неравенств и их систем на числовой прямой.

Обучающийся получит возможность:

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Основные понятия: квадратное уравнение, дискриминант квадратного уравнения, корни квадратного уравнения, теорема Виета, неполное квадратное уравнение, парабола, вершина параболы, квадратичные неравенства, метод интервалов, промежуток.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

В данном квадратном уравнении a, b, c – параметры, а x – аргумент.

Квадратное уравнение может иметь:

– два действительных корня;

– один действительный корень;

– не иметь корней.

Количество корней квадратного уравнения зависит от дискриминанта.

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, квадратное уравнение имеет единственный (два совпавших корня) корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если b – четное, то $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Если $\frac{D}{4} > 0$, квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} \text{ и } x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}.$$

Если $\frac{D}{4} = 0$, квадратное уравнение имеет единственный (два совпавших корня) корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $\frac{D}{4} < 0$, квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Так же для решения квадратного уравнения можно пользоваться теоремой Виета.

Если x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, то $x_1 + +x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Если один из коэффициентов b или c, или оба коэффициента равны нулю, то квадратное уравнение называется неполным (Таблица 6).

Таблица 6 – Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при различных значениях b и c

Значение коэффициентов	Неполное квадратное уравнение	Значение корней
$a \neq 0$ $b = 0$ $c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$a \neq 0$ $b \neq 0$ $c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
$a \neq 0$ $b = 0$ $-\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Нет корней
$a \neq 0$ $b = 0$ $-\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$y = ax^2 + bx + c$ – квадратичная функция, график функции – парабола (рисунок 8).

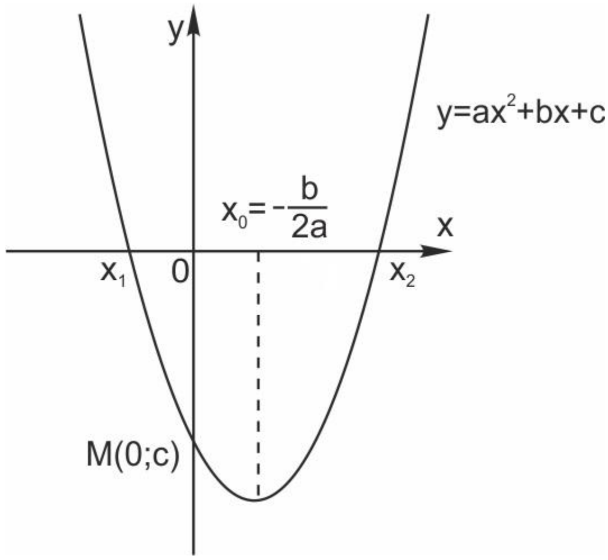

Рисунок 8 – График функции $y = ax^2 + bx + c$

Вершина параболы имеет следующие координаты $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

График параболы пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2, которые являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c$ можно разложить на множители используя корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ следующим образом: $ax^2 + +bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

При решении квадратных неравенств можно использовать рисунок 9.

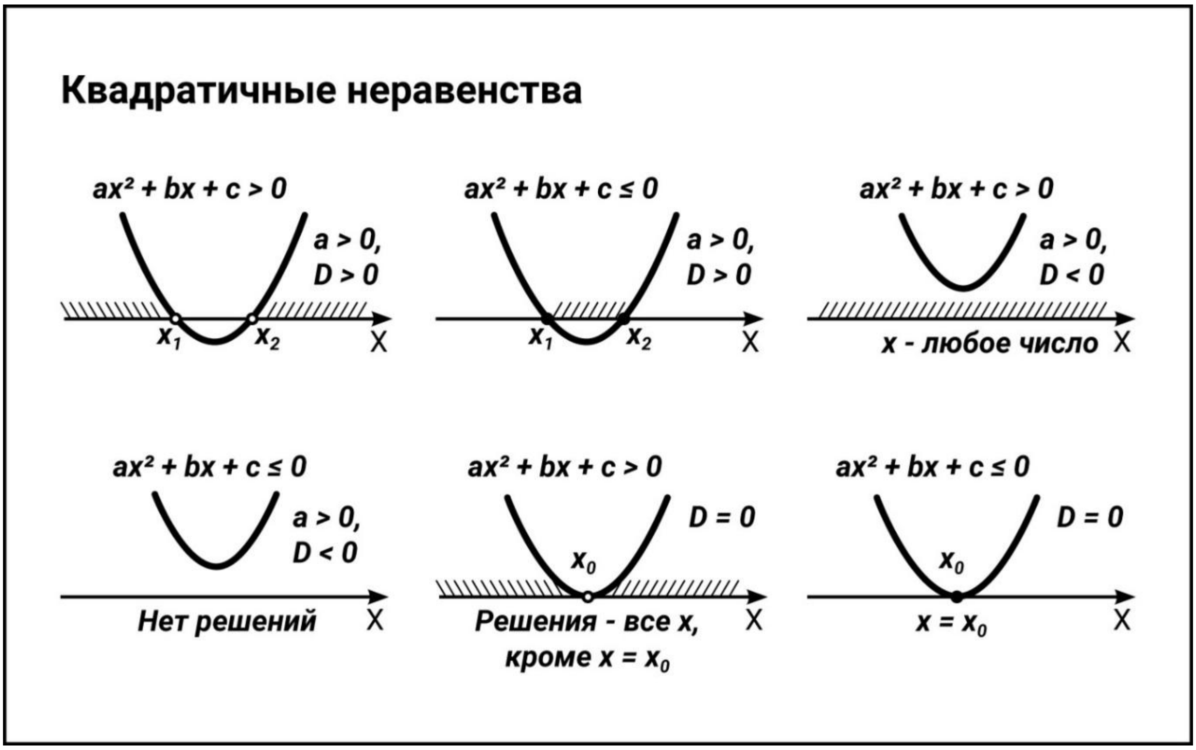

Рисунок 9 – Решение квадратных неравенств

Алгоритм решения неравенств методом интервалов:

1. Найти корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Отметить на координатной прямой корни уравнения. Если неравенство строгое $(<, >)$, нужно отметить корни пустыми (выколотыми) точками. Если нестрогое $(\leq, \geq)$ – закрашенными точками.

3. Определить, какие знаки имеет выражение $ax^2 + bx + c$ на каждом промежутке. И проставить над этими промежутками $+$ или $-$ в соответствии с определенными знаками.

4. Если квадратное неравенство со знаком $>$ или $\geq$ – наносим штриховку над промежутками со знаками $+$.

5. Если неравенство со знаком $<$ или $\leq$, то наносим штриховку над промежутками со знакам $-$.

Пример. Решить уравнение $ax^2 + ax + 1 = 0$.

Решение.

1. Найдем контрольное значение параметра. При $a = 0$ уравнение принимает следующий вид: $1 = 0$, получили неверное равенство, следовательно, при $a = 0$ уравнение корней не имеет.

2. При $a \neq 0$ возможны следующие варианты: $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$

3. Если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня: $D = a^2 - -4a > 0$.

Решим неравенство $a^2 - 4a > 0$ методом интервалов: $(a - 4)a > 0$.

Найдем корни уравнения $(a - 4)a = 0$. Произведение дает ноль тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, $a = 4$ или $a = 0$.

Отметим корни уравнения $(a - 4)a = 0$ на координатной прямой выколотыми точками так как неравенство $a^2 - 4a > 0$ строгое (рисунок 10).

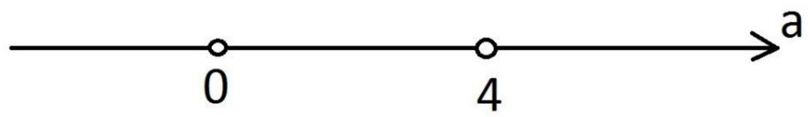

Рисунок 10 – Корни уравнения $(a - 4)a = 0$

Определим, какие знаки имеет выражение $(a - 4)a$ на каждом промежутке. Для этого необходимо выбрать значение из промежутка и подставить в выражение $(a - 4)a$. Над этими промежутками нужно поставить $+$ или $-$ в соответствии с определенными знаками, которые получились при подстановке значения из промежутка в выражение $(a - 4)a$.

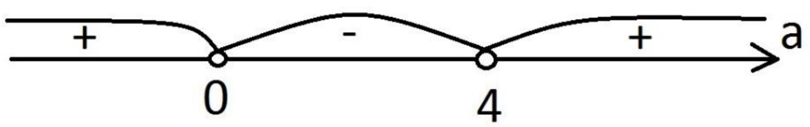

Рисунок 11 – Знаки выражения $(a - 4)a$ на промежутках

Наносим штриховку (рисунок 12).

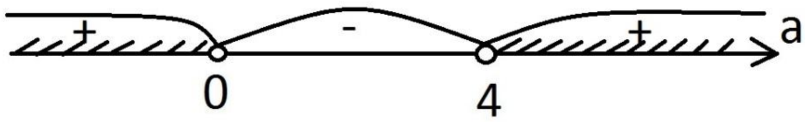

Рисунок 12 – Решение неравенства $a^2 - 4a > 0$

Если $a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, то $x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2a}$.

4. Если $D = 0$, квадратное уравнение имеет единственный корень: $D = a^2 - 4a = 0$.

$D = 0$ если $a = 4$ или $a = 0$. Но из пункта 1 $a = 0$ нам не подходит, так как корней в таком случае нет.

Находим один корень уравнения при $a = 4$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

5. Если $D < 0$, квадратное уравнение не имеет действительных корней: $D = a^2 - 4a < 0$.

Решим неравенство $a^2 - 4a < 0$ методом интервалов: $(a - 4)a < 0$.

Найдем корни уравнения $(a - 4)a = 0$.

Аналогичное уравнение уже было рассмотрено выше (рисунок 11).

Теперь неравенство имеет противоположный знак. Наносим штриховку (рисунок 13).

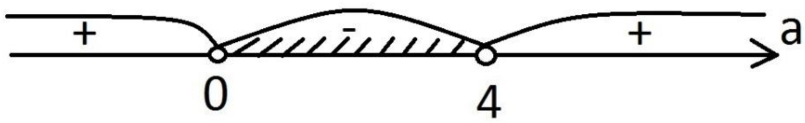

Рисунок 13 – Решение неравенства $(a - 4)a < 0$

Если $a \in (0; 4)$, то уравнение корней не имеет.

Ответ: если $a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, то $x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2a}$; если $a = 4$, то $x = -\frac{1}{2}$; если $a \in [0; 4)$, то уравнение корней не имеет.

Пример. При каких значениях a уравнение $(a+1)x^2+(a+1)x+$ $+1=0$ не имеет решений.

Решение.

1. Найдем контрольное значение параметра. При $a+1=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a=-1$уравнение $(a+1)x^2+(a+1)x+1=0$ принимает следующий вид: $1=0$, но это неверно, следовательно при $a=\ -1$ уравнение корней не имеет.

2. При $a \neq -1$ квадратное уравнение не имеет корней, если $D<0$.

$$D=(a+1)^2-4(a+1).$$

Решим неравенство $(a+1)^2-4(a+1)<0$ методом интервалов.

Пусть $a+1=t$, тогда $t^2-4t<0$

Найдем корни уравнения $t^2-4t=0 \Rightarrow (t-4)t=0$. Произведение дает ноль тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, $t=4$ или $t=0$.

Отметим корни уравнения $(t-4)t=0$ на координатной прямой выколотыми точками так как неравенство $t^2-4t<0$ строгое (рисунок 14).

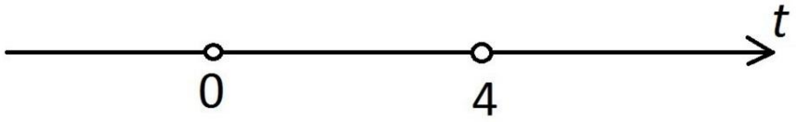

Рисунок 14 – Корни уравнения $(t-4)t=0$

Определим, какие знаки имеет выражение $(t-4)t$ на каждом промежутке. Для этого необходимо выбрать значение из промежутка и подставить в выражение $(t-4)t$. Над этими промежутками нужно поставить $+$ или $-$ в соответствии с определенными знаками, которые получились при подстановке значения из промежутка в выражение $(t-4)t$ (рисунок 15).

Рисунок 15 – Знаки выражения $(t-4)t$ на промежутках

Наносим штриховку (рисунок 16).

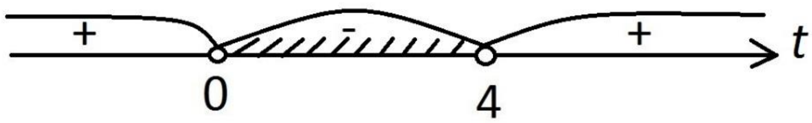

Рисунок 16 – Решение неравенства $t^2-4t<0$

Если $t \in (0;4)$, то уравнение корней не имеет.

$$0<t<4;$$

$$0<a+1<4;$$

$$-1<a<3.$$

Значит, уравнение $(a+1)x^2+(a+1)x+1=0$ не имеет корней при $a \in [-1;3)$.

Ответ: если $a \in [-1;3)$, то уравнение корней не имеет.

Пример. Какое решение будет иметь неравенство $2ax^2+5x-3<0$, если $a=0$?

Решение.

Если $a=0$, то неравенство примет вид: $5x-3<0$.

$$5x<3;$$

$$x<\frac{3}{5}.$$

Ответ: если $a=0$, то $x<\frac{3}{5}$.

Для самостоятельной работы.

Задание. При каких значениях параметра a дискриминант уравнения $x^2+ax+6=0$ будет положительным?

Задание. При каких значениях параметра b дискриминант уравнения

$-2x^2 - 7x + b = 0$ будет отрицательным?

Задание. При каких значениях параметра c дискриминант уравнения $2x^2 + cx + 5 = 0$ будет равен нулю?

Задание. Известно, что первый корень уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ равен 4. Найдите a и второй корень уравнения.

Задание. Известно, что сумма корней уравнения $x^2 - 15x + q = 0$ равна 153. Найдите q.

Задание. При каких значениях параметра c уравнение $cx^2 - 2x - 5 == 0$ имеет два корня?

Задание. При каких значениях параметра c уравнение $cx^2 + x + 1 = = 0$ имеет один корень?

Задание. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(2a - 1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ имеет один корень.

Задание. При каких значениях параметра b уравнение $(b + 2)x^2 + +2(b + 2)x - 3 = 0$ имеет действительные корни?

Задание. Решить неравенство $(b - 1)x^2 - 2(b - 2)x + b + 3 > 0$.

Задание. При каких значениях a неравенство $x^2 - 4x + a > 0$ выполняется при всех действительных значениях x?

Задание. При каких значениях a неравенство $ax^2 + (a - 1)x + +(a - 1) < 0$ не имеет решений?

Уравнения и неравенства с параметром, содержащие знак модуля.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения.

Обучающийся получит возможность:

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Основные понятия: модуль, метод интервалов.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|x| = a$.

1. При $a < 0$ уравнение решений не имеет, так как модуль по определению принимает только неотрицательные значения.

2. При $a = 0$ уравнение имеет одно решение $x = 0$.

3. При $a > 0$ уравнение имеет два решения, $x = a$ и $x = -a$.

Например, $|x| > a$.

1. При $a < 0$ решением неравенства является $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. При $a = 0$ решением неравенства является $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. При $a > 0$ решением неравенства является $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

Например, $|x| < a$.

1. При $a \leq 0$ неравенство не имеет решения.

2. При $a > 0$ решением неравенства является $x \in (-a; a)$.

При решении уравнений, содержащих более одного модуля, следует применять метод интервалов.

Пример. При каких a уравнение $a|x - 3| = x + 4$ имеет один корень?

Решение.

Если $a = 0$, то $0 = x + 4 \Rightarrow x = -4$.

Оставим слева только $|x - 3|$:

$$|x - 3| = \frac{x + 4}{a}.$$

Можем возвести обе части уравнения в квадрат и ввести ограничения для правой части уравнения.

$$\frac{x + 4}{a} \geq 0,$$

так как модуль не может принимать отрицательные значения.

Дробь $\frac{x+4}{a}$ принимает неотрицательные значения, если числитель и знаменатель являются одновременно положительными или отрицательными

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ a > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 4 < 0, \\ a < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -4, \\ a > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -4, \\ a < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(x - 3)^2 = \left(\frac{x + 4}{a}\right)^2;$$

$$x^2 - 6x + 9 = \frac{x^2 + 8x + 16}{a^2};$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x^2 - 8x - 16 = 0;$$

$$(a^2 - 1)x^2 - 2(3a^2 + 4)x + 9a^2 - 16 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение с параметром.

При $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ уравнение примет вид:

$$-2(3a^2 + 4)x + 9a^2 - 16 = 0.$$

Решаем линейное уравнение с параметром.

$$-2(3a^2 + 4)x = -9a^2 + 16;$$

$$x = \frac{9a^2 - 16}{2(3a^2 + 4)}.$$

Если $a = 1$, то $x = -\frac{1}{2}$.

Если $a = -1$, то $x = -\frac{1}{2}$, данный корень нам не подходит, так как не выполняется условие $\begin{cases} x < -4, \\ a < 0. \end{cases}$

При $a^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 1$ решаем квадратное уравнение с параметром.

$$(a^2 - 1)x^2 - 2(3a^2 + 4)x + 9a^2 - 16 = 0.$$

Найдем дискриминант: $D = 4(3a^2 + 4)^2 - 4(a^2 - 1)(9a^2 - 16) =$ $= 36a^4 + 96a^2 + 64 - 36a^4 + 64a^2 + 36a^2 - 64 = 196a^2$.

Квадратное уравнение имеет один корень если $D = 0 \Rightarrow a = 0$.

Ответ: уравнение $a|x - 3| = x + 4$ имеет один корень если $a = 0$ и $a = 1$.

Пример. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x + \frac{a^2}{x} + 1\right| + \left|x + \frac{a^2}{x} - 1\right| = 2$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Пусть $x + \frac{a^2}{x} = t$, тогда уравнение примет вид:

$$|t + 1| + |t - 1| = 2.$$

1. Вычислим корни выражений, заключенных под знаком модуля:

$$\left[\begin{array}{l} t+1=0, \\ t-1=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=1. \end{array}\right.$$

2. Расставим знаки для каждого модуля (Таблица 7)

Таблица 7 – Знаки модулей $|t+1|$ и $|t-1|$ на промежутках

	$(-\infty;-1)$	$[-1;1)$	$[1;+\infty)$
$t+1$	$-$	$+$	$+$
$t-1$	$-$	$-$	$+$

3. Рассмотрим $t \in (-\infty;-1)$. В этом случае оба модуля раскроются со знаком минус.

$$-t-1-t+1=2;$$

$$-2t=2;$$

$$t=-1.$$

4. Рассмотрим $t \in [-1;1)$. В этом случае первый модуль раскроется со знаком плюс, а второй модуль раскроется со знаком минус.

$$t+1-t+1=2;$$

$$2=2.$$

Верное равенство, значит $t \in [-1;1)$ является корнем уравнения.

5. Рассмотрим $t \in [1;+\infty)$. В этом случае оба модуля раскроются со знаком плюс.

$$t+1+t-1=2;$$

$$2t=2;$$

$$t=1.$$

6. Значит, решением уравнения является $t \in [-1;1]$. Произведем обратную замену:

$$\begin{cases} t \geq -1, \\ t \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{a^2}{x} \geq -1, \\ x+\dfrac{a^2}{x} \leq 1. \end{cases}$$

7. Решим каждое неравенство методом интервалов:

8. $x + \frac{a^2}{x} = -1.$

Умножим обе части уравнения на x:

$$x^2 + a^2 = -x;$$

$$x^2 + x + a^2 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет хотя бы один корень если $D \geq 0$:

$$1 - 4a^2 \geq 0;$$

$$4a^2 \leq 1;$$

$$a^2 \leq \frac{1}{4};$$

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

9. $x + \frac{a^2}{x} = 1.$

Умножим обе части уравнения на x:

$$x^2 + a^2 = x;$$

$$x^2 - x + a^2 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет хотя бы один корень если $D \geq 0$:

$$1 - 4a^2 \geq 0.$$

Получили такое же неравенство.

Ответ: при $a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ уравнение $\left|x + \frac{a^2}{x} + 1\right| + \left|x + \frac{a^2}{x} - 1\right| = 2$ имеет хотя бы один корень.

Пример. Решите неравенство $|x - 2| > a$.

Решение.

Решим неравенство графическим методом. Построим графики функций $y = |x - 2|$ и $y = a$ в координатной плоскости xOa (рисунок 17).

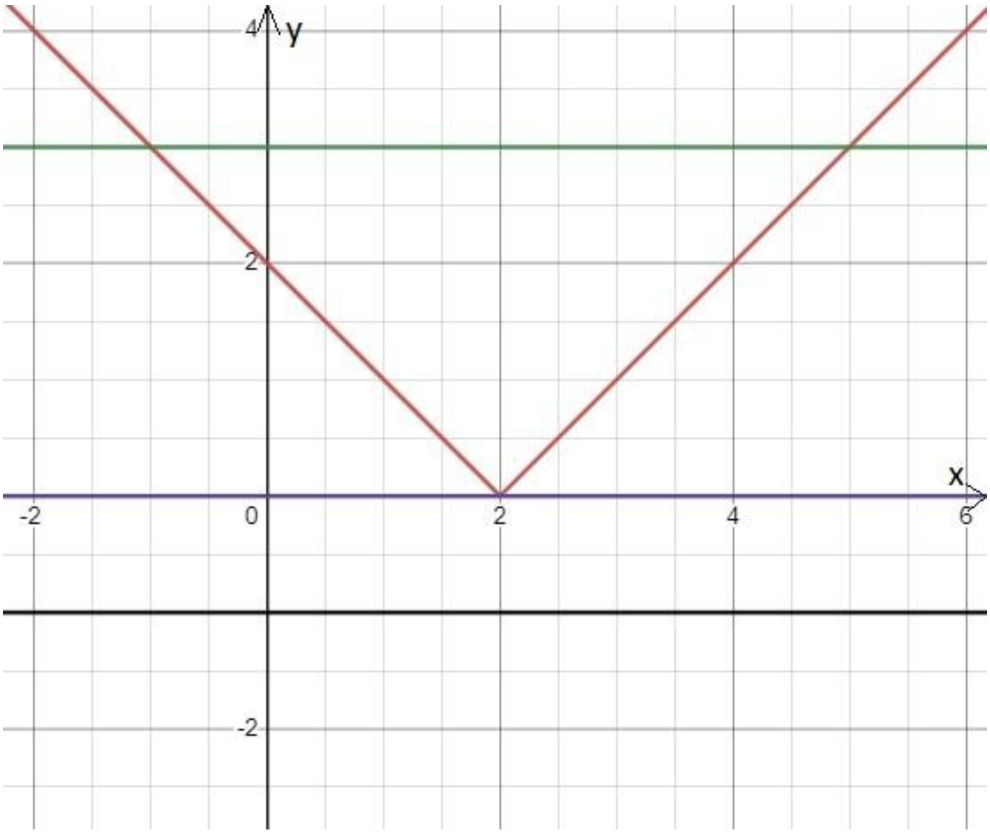

Рисунок 17 – Графики функций $y = |x - 2|$ и $y = a$

1. При $a < 0$ решением неравенства является $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. При $a = 0$ решением неравенства является $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

3. При $a > 0$ решением неравенства является $x \in (-\infty; -a + 2) \cup (a + 2; +\infty)$.

Отметим корни неравенства на прямой (рисунок 18).

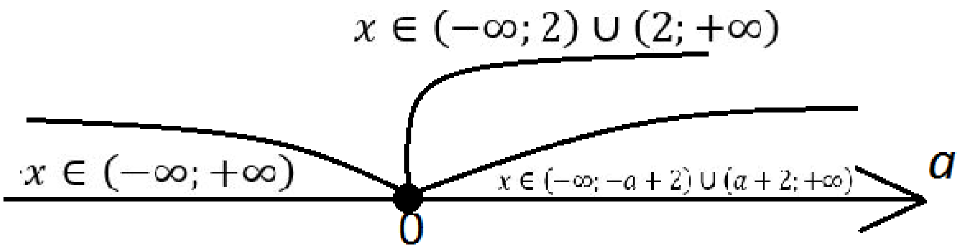

Рисунок 18 – Корни неравенства $|x - 2| > a$ при различных значениях параметра

Ответ: Если $a < 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -a + 2) \cup (a + 2; +\infty)$.

Для самостоятельной работы.

Задание. Решите уравнение $|x - 2a| = a + 6$.

Задание. Для каждого значения a уравнения $|x - 3| = ax + 2a$ найти число корней.

Задание. Решите уравнение $|x + 6| - a|x - 4| = 7$.

Задание. Решите уравнение $a|x - 5| = 3x + 2$.

Задание. Сколько целых значений параметра b, при которых уравнение $\frac{5|x|-9}{|x|-3} = b$ не имеет действительных корней?

Задание. Постройте график уравнения $(|x| - 3)^2 + (a - 2)^2 = 16$.

Задание. Решите неравенство $|x^2 - 1| > b$.

Задание. Решите неравенство $|3x| > ax + 2$.

Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения.

Обучающийся получит возможность:

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– решать простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;

– решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Основные понятия: иррациональное уравнение, рациональное уравнение, радикал, иррациональное неравенство.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

Иррациональным называется уравнение, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень:

$$\sqrt[n]{x} = a.$$

Для решения иррационального уравнения необходимо свести уравнение к рациональному. Для этого нужно возвести обе части в степень корня – n. При этом если корень был четной степени, то извлекать его из отрицательного числа нельзя. В таком случае нужно вводить ограничение, что $a \geq 0$.

Если в уравнении находится два корня, то сводить уравнение к рациональному будет необходимо два раза. Сначала нужно оставить в левой части уравнения один корень, остальное перенести в правую часть. Возвести в нужную степень, чтобы иррациональное выражение, стоящее в левой части уравнения стало рациональным. И проделать те же действия со вторым выражением, стоящим под знаком корня. Тем самым иррациональное уравнение станет рациональным и его можно решать любым известным способом. После того как корни уравнения будут найдены, необходимо их проверить, подставив в исходное уравнение, чтобы исключить посторонние корни.

Есть случай, когда уравнение содержит «вложенные» радикалы: $\sqrt{x+\sqrt{x}}=a$. Алгоритм остается прежним, необходимо два раза возводить в степень, заранее перенося всё, что без корня в другую часть уравнения.

Так же выражения с корнем бывает удобно заменить на новую переменную. Например, $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+9=0$. Пусть $\sqrt[4]{x}=t$, тогда $\sqrt{x}=t^2$. Получилось квадратное уравнение относительно t: $t^2-3t+9=0$.

Аналогично, иррациональным называется неравенство, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень:

$$\sqrt[n]{x}>a, \sqrt[n]{x}\geq a, \sqrt[n]{x}<a, \sqrt[n]{x}\leq a.$$

Неравенства так же, как и уравнения можно возводить в степень, но при этом могут появиться посторонние корни. Нужно не забывать о том, что если степень корня четное число, то подкоренное выражение не может быть отрицательным (Таблица 8).

Таблица 8 – Решения иррационального неравенства

$\sqrt{x}<a$	$\sqrt{x}\leq a$	$\sqrt{x}>a$
$\begin{cases} x\geq 0 \\ a>0 \\ x<a^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x\geq 0 \\ a\geq 0 \\ x\leq a^2 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<0 \\ x\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 0 \\ x>a^2 \end{cases} \end{array}\right.$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x-3}=2x+a$.

Решение.

Степень корня четная, поэтому введем ограничение:

$$2x+a\geq 0.$$

1. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x-3=(2x+a)^2;$$

$$x - 3 = 4x^2 + 4xa + a^2;$$

$$4x^2 + (4a - 1)x + a^2 + 3 = 0.$$

Получили квадратное уравнение с параметром a. Найдем дискриминант:

$$D = (4a - 1)^2 - 4 \cdot 4(a^2 + 3) = 16a^2 - 8a + 1 - 16a^2 - 48 = -8a - 47.$$

2. Если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня:

$$-8a - 47 > 0;$$

$$-8a > 47;$$

$$a < -\frac{47}{8};$$

$$x_1 = \frac{1 - 4a + \sqrt{-8a - 47}}{8} \text{ или } x_2 = \frac{1 - 4a - \sqrt{-8a - 47}}{8}.$$

3. Если $D = 0$, квадратное уравнение имеет единственный корень:

$$-8a - 47 = 0;$$

$$-8a = 47;$$

$$a = -\frac{47}{8};$$

$$x = \frac{49}{16}.$$

4. Если $D < 0$, квадратное уравнение не имеет действительных корней:

$$-8a - 47 < 0;$$

$$-8a < 47;$$

$$a > -\frac{47}{8}.$$

5. Проверяем наличие посторонних корней. Найдем значения a, при которых выполняется неравенство $2x + a \geq 0$:

6. $2 \cdot \frac{1-4a+\sqrt{-8a-47}}{8} + a \geq 0.$

$$\frac{1 - 4a + \sqrt{-8a - 47}}{4} + a \geq 0;$$

$$\frac{1+\sqrt{-8a-47}}{4} \geq 0;$$

$$1+\sqrt{-8a-47} \geq 0;$$

$$\sqrt{-8a-47} \geq -1.$$

Значение корня квадратного всегда неотрицательное число, значит, оно явно больше -1. Поэтому верно при всех $a \in \left(-\infty; -\frac{47}{8}\right)$.

7. $2 \cdot \frac{1-4a-\sqrt{-8a-47}}{8} + a \geq 0$.

$$\frac{1-4a-\sqrt{-8a-47}}{4} + a \geq 0;$$

$$\frac{1-\sqrt{-8a-47}}{4} \geq 0;$$

$$1-\sqrt{-8a-47} \geq 0;$$

$$\sqrt{-8a-47} \leq 1.$$

$1 > 0$, поэтому можем возвести обе части неравенства в квадрат:

$$-8a-47 \leq 1;$$

$$-8a \leq 48;$$

$$a \geq -6.$$

Значит при $x_2 = \frac{1-4a-\sqrt{-8a-47}}{8}$ $a \in \left[-6; -\frac{47}{8}\right)$.

8. $2 \cdot \frac{49}{16} + a \geq 0$.

$$\frac{49}{8} + a \geq 0;$$

$$a \geq -\frac{49}{8}.$$

Значение $a = -\frac{47}{8}$ входит в данный промежуток, значит. Корень не является посторонним.

Отметим корни уравнения на прямой (рисунок 19).

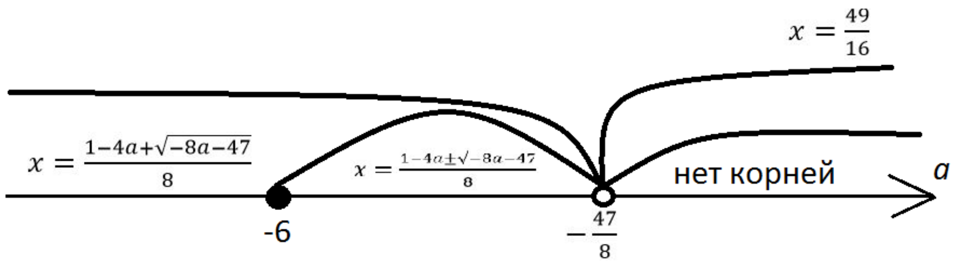

Рисунок 19 – Корни уравнения $\sqrt{x-3} = 2x + a$ при различных значениях параметра

Ответ: если $a \in \left(-\infty; -\frac{47}{8}\right)$, то $x = \frac{1-4a+\sqrt{-8a-47}}{8}$; если $a \in \left[-6; -\frac{47}{8}\right)$, то $x = \frac{1-4a\pm\sqrt{-8a-47}}{8}$; если $a = -\frac{47}{8}$, то $x = \frac{49}{16}$; если $a \in \left(-\frac{47}{8}; +\infty\right)$, то уравнение корней не имеет.

Для самостоятельной работы.

Задание. Решите уравнение $\sqrt{2x-1} = x - a$.

Задание. Решите уравнение $\sqrt{a + \sqrt{x}} = 2$.

Задание. Решите уравнение $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = a$.

Задание. Найти значение b, при котором уравнение $\sqrt{x-2} = -ax +$ $+5$ имеет единственное решение.

Задание. При каких значениях a не имеет корней уравнение $\sqrt[3]{ax+2} = 3$.

Задание. Решите неравенство $\sqrt{x} > x + a$.

Задание. Решите неравенство $\sqrt{x+a} \leq x$.

Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения.

Обучающийся получит возможность:

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Основные понятия: тригонометрическое уравнение, наибольшее значение, наименьшее значение.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.

Рассмотрим частные случаи когда $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$ (Таблица 9)

Таблица 9 – Решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ при $a = -1$, $a = 0$ и $a = 1$

	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим остальные случаи для $\sin x = a$ и $\cos x = a$ (Таблица 10)

Таблица 10 –Решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$ при $|a| > 1$ и $|a| \leq 1$

	$\lvert a\rvert > 1$	$\lvert a\rvert \leq 1$
$\sin x = a$	Нет решений	$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	Нет решений	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$

Для $\operatorname{tg} x = a$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и для $\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arcctg} a + +\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример. При каких значениях a уравнение $\sin x = a^2 + 3a + 1$ имеет решение?

Решение.

1. $\sin x = a^2 + 3a + 1$ имеет решение если $|a^2 + 3a + 1| \leq 1$.

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 \leq 1, \\ a^2 + 3a + 1 \geq -1. \end{cases}$$

2. Решим первое неравенство:

$$a^2 + 3a + 1 \leq 1;$$

$$a^2 + 3a \leq 0;$$

$$a(a + 3) \leq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} a \leq 0, \\ a \leq -3. \end{array}\right.$$

3. Решим второе неравенство:

$$a^2 + 3a + 1 \geq -1;$$

$$a^2 + 3a + 2 \geq 0.$$

Решаем квадратное уравнение относительно a. Найдем дискриминант:

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1;$$

$$a = -1 \text{ или } a = -2.$$

4. Получили следующую систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leq 0, \\ a \leq -3; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = -2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: уравнение $\sin x = a^2 + 3a + 1$ имеет решение при $a = -3$, $a == -2$, $a = -1$ и $a = 0$.

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех x выполняется неравенство $a(6 - \sin x)^4 - 2 + \cos^2 x + 3a > 0$.

Решение.

1. Преобразуем неравенство:

$$a((6 - \sin x)^4 + 3) > 2 - \cos^2 x\,;$$

$$a > \frac{2 - \cos^2 x}{(6 - \sin x)^4 + 3}.$$

Неравенство выполняется для всех x, если значение параметра a будет больше наибольшего значения выражения $\frac{2 - \cos^2 x}{(6 - \sin x)^4 + 3}$.

2. Найдем наибольшее и наименьшее значение числителя:

$$-1 \leq \cos x \leq 1;$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1;$$

$$-1 \leq -\cos^2 x \leq 0;$$

$$1 \leq 2 - \cos^2 x \leq 2.$$

3. Найдем наибольшее и наименьшее значение знаменателя:

$$-1 \leq \sin x \leq 1;$$

$$-1 \leq -\sin x \leq 1;$$

$$5 \leq 6 - \sin x \leq 7;$$

$$625 \le (6 - \sin x)^4 \le 2401;$$

$$628 \le (6 - \sin x)^4 + 3 \le 2404.$$

4. Выражение $\frac{2-\cos^2 x}{(6-\sin x)^4+3}$ принимает наибольшее значение, когда числитель принимает наибольшее значение, а знаменатель наименьшее: $\frac{2}{628} = \frac{1}{314}$.

Ответ: при $a > \frac{1}{314}$ неравенство $a(6 - \sin x)^4 - 2 + \cos^2 x + 3a > 0$ выполняется для всех x.

Для самостоятельной работы.

Задание. Решите уравнение $\sin x = -\frac{5}{a}$.

Задание. Решите уравнение $\cos x = \frac{a^2-4}{3}$.

Задание. При каком значении b уравнение $\cos(a - 1)x = a$ не имеет корней?

Задание. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для всех x выполняется неравенство $|2\sin^2 x + 3a \sin x \cos x + \cos^2 x + +a| \le 5$.

Задание. Решите неравенство $2a\cos^2 x + \sin x - a + 3 > 0$.

Логарифмические уравнения и неравенства с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения.

Обучающийся получит возможность:

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Основные понятия: логарифмическое уравнение, логарифмическое неравенство.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

Логарифмическим называется уравнение, в котором переменная находится под знаком логарифма.

Самое простое логарифмическое уравнение имеет вид:

$$\log_a x = b, a > 0, a \neq 1,$$

содержит множество допустимых значений $x > 0$ и имеет решение $x = a^b$.

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2. $\log_{f(x)} a = \log_{f(x)} b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

3. Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

4. Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

5. $\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Пример. Решите уравнение $\log_a x = 4$.

Решение.

По определению если $a > 0$ и $a \neq 1$: $x = a^4$.

Если $a \leq 0$ и $a = 1$ уравнение $\log_a x = 4$ не имеет корней.

Отметим корни уравнения на прямой (рисунок 20).

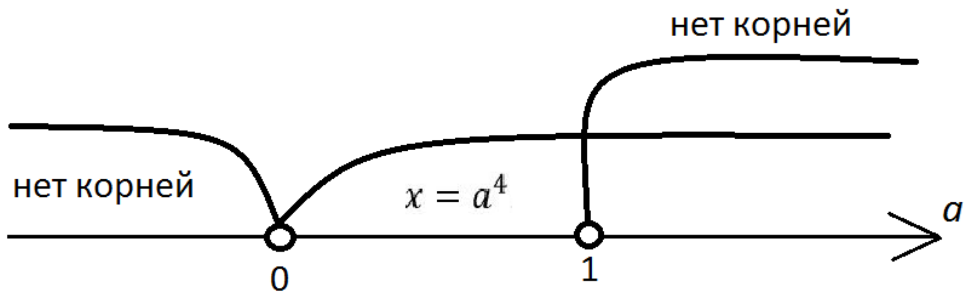

Рисунок 20 – Корни уравнения $log_a x = 4$ при различных значениях параметра

Ответ: если $a \leq 0$ и $a = 1$, то уравнение $\log_a x = 4$ не имеет корней; если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $x = a^4$.

Пример. Решите уравнение $\log_a(2x + a) = \log_a(4x^2 - a^2)$.

Решение.

$$\begin{cases} 2x + a = 4x^2 - a^2, \\ 2x + a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + a = 4x^2 - a^2, \\ 2x > -a; \end{cases}$$

$$2x + a = 4x^2 - a^2;$$

$$2x + a = (2x - a)(2x + a);$$

$$2x + a - (2x - a)(2x + a) = 0;$$

$$(2x + a)(1 - 2x + a) = 0;$$

$$\left[\begin{aligned} 2x + a = 0,\\ 1 - 2x + a = 0;\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} x = -\frac{a}{2},\\ x = \frac{1+a}{2}.\end{aligned}\right.$$

Проверим удовлетворяют ли найденные корни неравенству $2x > -a$:

1. $-a > -a$ неверно, значит, корень $x = -\frac{a}{2}$ посторонний.

2. $1 + a > -a$ верно, значит $x = \frac{1+a}{2}$ является корнем уравнения $\log_a(2x + a) = \log_a(4x^2 - a^2)$.

Отметим корни уравнения на прямой (рисунок 21).

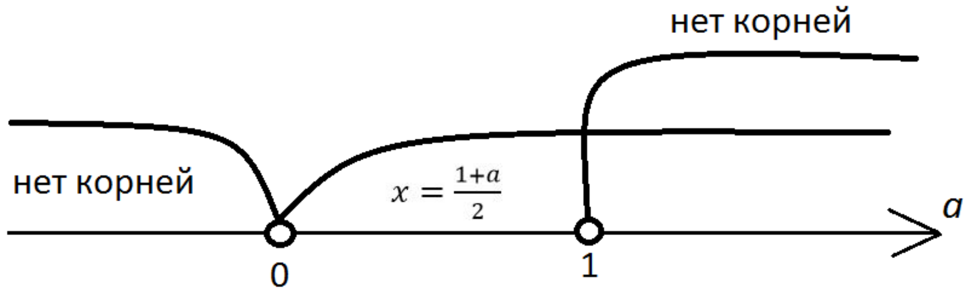

Рисунок 21 – Корни уравнения $log_a(2x + a) = log_a(4x^2 - a^2)$ при различных значениях параметра

Ответ: если $a \leq 0$ и $a = 1$, то корней нет; если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{1+a}{2}$.

Пример. Решите неравенство $\log_a(x + 3) > 2$.

Решение.

$$\log_a(x + 3) > \log_a a^2.$$

1. Если $a \leq 0$ и $a = 1$, то корней нет.
2. Если $a > 1$, то $\begin{cases} x + 3 > a^2, \\ a^2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > a^2 - 3, \\ a > 0. \end{cases}$
3. Если $0 < a < 1$, то $\begin{cases} x + 3 < a^2, \\ x + 3 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a^2 - 3, \\ x > -3. \end{cases}$

Отметим корни неравенства на прямой (рисунок 22).

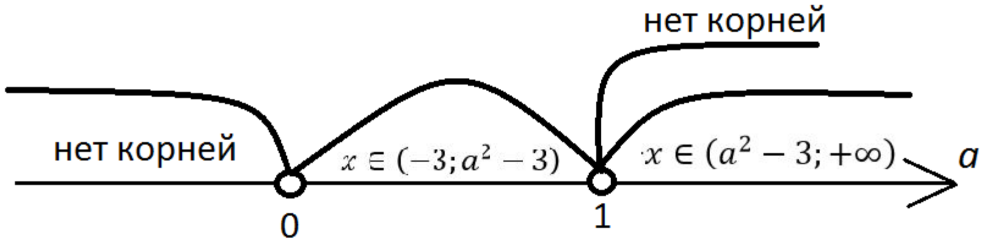

Рисунок 22 – Корни неравенства $log_a(x + 3) > 2$ при различных значениях параметра

Ответ: если $a \leq 0$ и $a = 1$, то корней нет; если $0 < a < 1$, то $x \in (-3; a^2 - 3)$; если $a > 1$, то $x \in (a^2 - 3; +\infty)$.

Для самостоятельной работы.

Задание. Решите $\log_7 x = a$.

Задание. Решите уравнение $\log_x(x + a) = 5$.

Задание. При каких значениях параметра a уравнение $\log_4(16^x +$ $+8a2=x$ имеет два корня?

Задание. При каких значениях параметра a уравнение $\log_4(9^x +$ $+a2=$log$43x$ не имеет корней?

Задание. Решите неравенство $\log_7(x + 3) < a$.

Задание. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(a - 2)$.

Показательные уравнения и неравенства с параметром.

Предметные планируемые результаты.

Обучающийся научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения, числовое неравенство, неравенство, решение неравенства;

– решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

– решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения.

Обучающийся получит возможность:

– оперировать понятиями: уравнение, неравенство, корень уравнения, решение неравенства, равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств);

– решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

– решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

– решать уравнения вида $x^n = a$;

– решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной;

– решать линейные уравнения и неравенства с параметрами;

– решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Основные понятия: показательное уравнение, показательное неравенство.

Исследовательские умения:

– умение выдвигать гипотезы;

– умение устанавливать причинно-следственные связи;

– умение анализировать условия заданной задачи;

– умение обобщать результаты.

Теоретический блок.

Показательным называется уравнение, в котором переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Чтобы решить показательное уравнение или неравенство, можно привести его к квадратному или линейному уравнению с помощью замены.

Пример. При каких значениях a уравнение $9^x - 3^x a + 2 = 0$ имеет два корня? Найдите корни.

Решение.

Пусть $3^x = t, t > 0$.

$$t^2 - at + 2 = 0;$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 2 = a^2 - 8.$$

Квадратное уравнение имеет два корня если $D > 0$:

$$a^2 - 8 > 0;$$

$$a^2 > 8;$$

$$a < -2\sqrt{2} \text{ и } a > 2\sqrt{2};$$

$$t_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2} \text{ и } t_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

Произведем обратную замену:

$$3^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2};$$

$$x = \log_3 \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

Ответ: если $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$, то уравнение $9^x - 3^x a +$ $+2 = 0$ имеет два корня: $x = \log_3 \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}$.

Пример. Решите неравенство $(a - 5)2^x > 2a$.

Решение.

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда $(a - 5)t > 2a$.

1. Определим значения параметра, при которых коэффициент при t обращается в нуль. Если $a - 5 = 0$, то $a = 5$.

2. Если $a = 5$, то неравенство примет следующий вид:

$$0 \cdot t > 2 \cdot 5;$$

$$0 \cdot t > 10.$$

Умножая любое действительное число на ноль, мы будем получать ноль, но $0 < 10$, значит неравенство не имеет корней при $a = 5$.

3. Если $a - 5 > 0$, то $a > 5$, тогда $t < \frac{2a}{a-5}$.

4. Если $a - 5 < 0$, то $a < 5$, тогда при делении на $a - 5 < 0$ знак неравенства меняется на противоположный $t > \frac{2a}{a-5}$.

5. Произведем обратную замену:

$$2^x < \frac{2a}{a-5} \Rightarrow x < \log_2 \frac{2a}{a-5};$$

$$2^x > \frac{2a}{a-5} \Rightarrow x > \log_2 \frac{2a}{a-5}.$$

Отметим корни неравенства на прямой (рисунок 23).

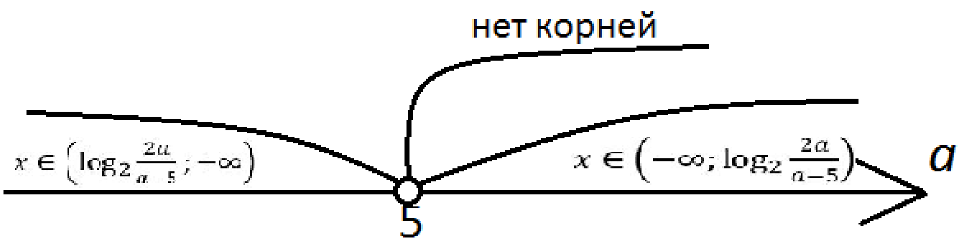

Рисунок 23 – Корни неравенства $(a-5)2^x > 2a$ при различных значениях параметра

Ответ: если $a = 5$, то корней нет; если $a > 5$, то $x \in \left(-\infty; \log_2 \frac{2a}{a-5}\right)$; если $a < 5$, то $x \in \left(\log_2 \frac{2a}{a-5}; +\infty\right)$.

Для самостоятельной работы.

Задание. Решите уравнение $16^x - 2b \cdot 4^x + b^2 - 1 = 0$.

Задание. Решите уравнение $25^x - 4a \cdot 5^x + 2a + 2 = 0$.

Задание. Решите неравенство $9^x - a \cdot 3^x + a \leq 0$.

2.4 Технологические карты уроков

Технологическая карта урока (занятия) (ТКУ)

Класс 7

Тема урока (занятия): «Линейное уравнение с одной переменной»

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний

Цель урока (занятия): обобщить и систематизировать знания по теме «Линейные уравнения»

Планируемые результаты:

1. *Личностные.*

Л1 – готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

2. *Метапредметные.*

Обучающийся сможет:

Р1 – выдвигать версии решения проблемы, формулировать гипотезы, предвосхищать конечный результат;

Р2 – определять необходимые действие(я) в соответствии с учебной и познавательной задачей и составлять алгоритм их выполнения

Р3 – составлять план решения проблемы (выполнения проекта, проведения исследования);

П1 – строить рассуждение от общих закономерностей к частным явлениям и от частных явлений к общим закономерностям;

П2 – строить схему, алгоритм действия, исправлять или восстанавливать неизвестный ранее алгоритм на основе имеющегося знания об объекте, к которому применяется алгоритм

К1 – принимать позицию собеседника, понимая позицию другого, различать в его речи: мнение (точку зрения), доказательство (аргументы), факты; гипотезы, аксиомы, теории.

3. *Предметные.*

Выпускник научится:

Пр1 – оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения;

Выпускник получит возможность научиться:

Пр2 – решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

Пр3 – решать линейные уравнения с параметрами.

Опорные понятия, термины: линейное уравнение, корни линейного уравнения.

Оборудование: доска, раздаточный материал.

Этапы урока:

1. Организационный этап – 2 минуты (Таблица 11).
2. Повторение и обобщение знаний – 5 минут (Таблица 12).
3. Применение знаний в нестандартных условиях – 25 минут (Таблица 13).
4. Самостоятельная работа – 10 минут (Таблица 14).
5. Итоги занятия – 3 минуты (Таблица 15).

Таблица 11 – Организационный этап

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
Приветствует учащихся с целью создания благоприятной атмосферы урока. Отмечает отсутствующих. Говорит о том, что на сегодняшнем уроке ученики систематизируют знания по теме «Линейные уравнения».	Дети рассаживаются по местам. Проверяют наличие принадлежностей. Слушают, наблюдают, настраиваются на восприятие материала урока.			

Таблица 12 – Повторение и обобщение знаний

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Спрашивает какой вид имеет линейное уравнение.	Ученик у доски отвечает и записывает на доске, что линейное уравнение имеет вид: $kx + b = 0$.	Пр1	Л1 Р1	Приложение 4
Раздает распечатку.	Получают распечатку.			
Предлагает заполнить таблицу из задания 1 (Таблица 4.1).	Ученики с места проговаривают как заполняют таблицу. Пусть k и b – любые действительные числа не равные			

Продолжение таблицы 12

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	нулю, тогда: $$kx = -b;$$ $$x = \frac{-b}{k}.$$ Значит, данное уравнение имеет один корень. Пусть $k = 0$ и $b \neq 0$, тогда исходное уравнение примет вид $0 \cdot x = -b$. Очевидно, что решений у данного уравнения нет. Пусть $k = 0$ и $b = 0$, тогда исходное уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$. Решением данного уравнения будет являться любое действительное число.			
Предлагает устно выполнить задание 2.	Ученики по поднятой руке проводят рассуждения и дают ответ.			

Таблица 13 – Применение знаний в нестандартных условиях

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
Предлагает у доски выполнить задание 3. Спрашивает как находить значение параметра a, если известен корень уравнения.	Ученик у доски выполняет задание и отвечает, что чтобы найти значение параметра a, необходимо подставить значение корня вместо x и решить линейное уравнение с одной переменной a.	Пр1 Пр2 Пр3	Р1 Р2 Р3 П1 П2 К1	Приложение 4
Предлагает решить у доски задание 4. Первое уравнение решает у доски. Говорит, что решить уравнение с параметром a, это значит на множестве действительных чисел решить уравнение при всех действительных значениях параметра a. Рассмотрим случай когда $a = 0$, тогда уравнение примет вид $0 \cdot x = 9$, такое уравнение не имеет решений. Рассмотрим случай когда $a \neq 0$, тогда $x = \frac{9}{a}$.	Внимательно слушают учителя и записывают в тетрадь решение первого уравнения. Ученики у доски решают остальные уравнения.			
Предлагает решить задание 5 у доски.	Ученик у доски решает уравнение с параметром.			
Предлагает решить задание 6 у доски. Предлагает сначала записать уравнение в стандартном виде. Просит обратить внимание на таблицу из задания 1, чтобы вспомнить при каких значениях k и b линейное уравнение не имеет корней.	Ученик у доски выполняет задание 6.			

Таблица 14 – Самостоятельная работа

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
Просит самостоятельно выполнить задания 7 и 8 и сдать тетради.	Самостоятельно выполняют задания 7 и 8.	Пр1 Пр2 Пр3	Р1 Р2 Р3 П1 П2 Л1	Приложение 4

Таблица 15 – Итоги занятия

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
Подводит итоги урока: спрашивает, какие действия будут предпринимать ученики, решая линейное уравнение с параметром.	Отвечают, что сначала необходимо определить значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль. Решить данное линейное уравнение при полученных значениях параметра. Решить линейное уравнение при значениях параметра отличных от тех, что были получены ранее.			

Технологическая карта урока (занятия) (ТКУ)

Класс 8

Тема урока (занятия): «Квадратные уравнения»

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний

Цель урока (занятия): обобщить и систематизировать знания по теме «Квадратные уравнения»

Планируемые результаты:

1. *Личностные.*

Л1 – готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

Л2 – осознанное, уважительное и доброжелательное отношение к другому человеку, его мнению, мировоззрению;

Л3 – готовность и способность вести диалог с другими людьми и достигать в нем взаимопонимания.

2. *Метапредметные.*

Обучающийся сможет:

Р1 – выдвигать версии решения проблемы, формулировать гипотезы, предвосхищать конечный результат;

Р2 – определять необходимые действие(я) в соответствии с учебной и познавательной задачей и составлять алгоритм их выполнения

Р3 – составлять план решения проблемы (выполнения проекта, проведения исследования);

П1 – строить рассуждение от общих закономерностей к частным явлениям и от частных явлений к общим закономерностям;

П2 – строить схему, алгоритм действия, исправлять или восстанавливать неизвестный ранее алгоритм на основе имеющегося знания об объекте, к которому применяется алгоритм

К1 – принимать позицию собеседника, понимая позицию другого, различать в его речи: мнение (точку зрения), доказательство (аргументы), факты; гипотезы, аксиомы, теории.

3. *Предметные.*

Выпускник научится:

Пр1 – выполнять несложные преобразования;

Пр2 – оперировать на базовом уровне понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, корень уравнения, решение уравнения;

Пр3 – решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения;

Выпускник получит возможность научиться:

Пр4 – выполнять разложение многочленов на множители одним из способов: вынесение за скобку, группировка, использование формул сокращенного умножения;

Пр5 – решать линейные уравнения и уравнения, сводимые к линейным с помощью тождественных преобразований;

Пр6 – решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным с помощью тождественных преобразований;

Пр7 – решать несложные квадратные уравнения с параметром.

Опорные понятия, термины: квадратное уравнение, неполное квадратное уравнение, корни квадратного уравнения, теорема Виета.

Оборудование: доска, раздаточный материал.

Этапы урока:

1. Организационный этап – 2 минуты (Таблица 16).
2. Повторение и обобщение знаний – 8 минут (Таблица 17).
3. Применение знаний в нестандартных условиях – 30 минут (Таблица 18).
4. Итоги занятия – 3 минуты (Таблица 19).
5. Постановка домашнего задания – 2 минуты (Таблица 20).

Таблица 16 – Организационный этап

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
Приветствует учащихся с целью создания благоприятной атмосферы урока. Отмечает отсутствующих. Говорит о том, что на сегодняшнем уроке ученики систематизируют знания по теме «Квадратные уравнения».	Дети рассаживаются по местам. Проверяют наличие принадлежностей. Слушают, наблюдают, настраиваются на восприятие материала урока.			

Таблица 17 – Повторение и обобщение знаний

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Спрашивает какое уравнение называется квадратным и просит записать его на доске.	Ученик у доски отвечает и записывает на доске, что квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.	Пр2	Л1 Р1	
Спрашивает какое уравнение называется неполным.	Отвечают, что уравнение называется неполным, если один из коэффициентов b или c, или оба коэффициента равны нулю.			

Продолжение таблицы 17

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Спрашивает сколько корней может иметь квадратное уравнение.	Отвечают: два действительных корня, один действительный корень и не иметь корней.			
Спрашивает от чего зависит это количество корней.	Отвечают, что количество корней зависит от дискриминанта. Если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, квадратное уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, квадратное уравнение не имеет действительных корней.			
Просит написать на доске теорему Виета.	Ученик пишет на доске, что если x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2 + bx + +c = 0$, где $a \neq 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.			
Спрашивает, что является графиком квадратичной функции.	Отвечают, что графиком квадратичной функции является парабола.			

Таблица 18 – Применение знаний в нестандартных условиях

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Раздает распечатку с заданиями ученикам.	Получают распечатку	Пр1 Пр3 Пр4 Пр5 Пр6 Пр7	Р1 Р2 Р3 П1 П2 К1 Л2 Л2	Приложение 5
Предлагает выполнить задание 1 устно.	Ученики устно выполняют задание, объясняя свой ответ.			
Предлагает посмотреть на задание 2 и ответить, что изменилось в этом задании.	Ученики выдвигают свои предположения.			
Предлагает по аналогии с заданием 1 выполнить задание 2 письменно.	Ученики у доски рассуждают, что квадратное уравнение является неполным, если один из коэффициентов b или c, или оба коэффициента равны нулю. Отсюда находят значение a, при котором квадратное уравнение является неполным.			
Предлагает решить задание 3 у доски.	Ученик у доски записывает дискриминант квадратного уравнения и находит значение c, при котором дискриминант равен нулю.			
Предлагает задание 4 выполнить самостоятельно в парах, а после проверить ответ.	В паре выполняют задание 4.			
Спрашивает какое значение b получили ученики.	Отвечают, что $b < -\frac{49}{8}$.			

Продолжение таблицы 18

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Просит посмотреть на задание 5. Говорит, что решить уравнение с параметром a, это значит на множестве действительных чисел решить уравнение при всех действительных значениях параметра a. Разбирает подробное решение на доске. Предлагает рассмотреть случай когда $a = 0$, то есть сделать квадратное уравнение линейным. Предлагает рассмотреть случай когда $a \neq 0$, в этом случае просит учеников найти дискриминант и рассмотреть случаи, когда $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$. Показывает, что при написании ответа нужно указывать значение a и корни уравнения, полученные при данном значении a.	Внимательно слушают и делают записи в тетради.			
Вызывает ученика к доске решать задание 6 и помогает при возникновении трудностей.	Ученик у доски выполняет задание 6.			

Таблица 19 – Итоги занятия

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Подводит итоги урока: спрашивает, какие действия будут предпринимать ученики, решая квадратное уравнение с параметром.	Отвечают, что если коэффициент при x^2 содержит параметр, то можно приравнять коэффициент к нулю и получить линейное уравнение. Если			

Продолжение таблицы 19

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	коэффициент x или свободный член содержат параметр, то можно свести квадратное уравнение к неполному. В случаях когда значение параметра такое, что уравнение является квадратным, все коэффициенты и свободный член не равны нулю, необходимо найти дискриминант и рассмотреть случаи, когда $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$.			

Таблица 20 – Постановка домашнего задания

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты		Примечание
		Предметные	УУД, личностные результаты	
В качестве домашнего задания предлагает решить задание 7 и 8.	Записывают домашнее задание.			

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе написания выпускной квалификационной работы были достигнуты следующие результаты:

1. Раскрыто понятие «исследовательские умения».
2. Изучено развитие исследовательских умений обучающихся на уроках математики.
3. Рассмотрено понятие параметра в курсе математики основной школы.
4. Описаны типы задач с параметром и способы их решения.
5. Представлены задачи с параметром, развивающие исследовательские умения обучающихся.
6. Проанализированы школьные учебники основной школы на наличие задач с параметром.
7. Проведен анализ задач с параметром из ОГЭ.
8. Разработаны системы задач с параметром, способствующие развитию исследовательских умений.
9. Составлены конспекты уроков.

Раскрытие понятия «исследовательских умений» показало, что «исследовательские умения» это совокупность сложных умений, состоящих из трёх основных компонентов: мотивационного, содержательного и технологического. Мотивационный компонент проявляется в виде познавательного интереса и формируется под воздействием целей новой деятельности. Содержательный компонент представляет собой систему знаний, владея которой обучающийся имеет возможность развивать свое мировоззрение и профессиональную деятельность. Технологический (операционный) компонент включает в себя систему умений и навыков.

Анализ учебников по алгебре за 7-9 класс авторов Макарычева Ю.Н., Мордковича А.Г. и Мерзляка А.Г. показал, что задания, содержащие параметр, встречаются в учебниках не редко, но в большинстве случаев имеют пометку повышенной сложности. У Макарычева заданий с параметром 1,95 % от общего количества заданий с 7 по 9 класс. У Мордковича заданий с параметром 9,53 % от общего количества заданий. У Мерзляка заданий с параметром 6,22 % от общего количества заданий.

Анализ заданий с параметром из ОГЭ показал, что при оценивании задания 22 проверяется логика и правильность проведенного выпускником исследования. Данное задание проверяет умение выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, строить и исследовать простейшие математические модели.

Разработанные системы заданий с параметром могут быть использованы для урочной и внеурочной деятельности.

Системы заданий с параметром состоят из:

1. Планируемые результаты.
2. Основные понятия.
3. Исследовательские умения.
4. Теоретический блок (определения, значения корней, алгоритм решения).
5. Примеры с подробным решением.
6. Задания для самостоятельной работы.

Они представлены по следующим темам:

1. Простейшие задачи с параметром.
2. Линейные уравнения и неравенства с параметром.
3. Квадратные уравнения и неравенства с параметром.
4. Уравнения и неравенства с параметром, содержащие знак модуля.
5. Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.
6. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.
7. Логарифмические уравнения и неравенства с параметром.

8. Показательные уравнения и неравенства с параметром.

Представленные технологические карты уроков показывают, как можно внедрить задания из системы в урок систематизации и обобщения знаний по темам «Линейное уравнение с одной переменной» и «Квадратные уравнения».

Таким образом, задачи были выполнены и цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Акманова, С. В.** Задания ЕГЭ с параметрами и рекомендации по методам их решения / С. В. Акманова, А. Р. Акманов. – Текст : непосредственный // Modern science. – 2020. – № 5–1. – С. 281–286.

2. Алгебра 7 класс : задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. В 2 частях. Часть 2. Задачник / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская ; под редакцией А. Г. Мордковича ; Министерство образования и науки Российской Федерации. – Москва : Мнемозина, 2013. – 271 с. – 100000 экз. – ISBN 978-5-346-02433-0. – Текст : непосредственный.

3. Алгебра 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под редакцией С. А. Теляковского ; Министерство образования и науки Российской Федерации. – Москва : Просвещение, 2009. – 240 с. – 70000 экз. – ISBN 978-5-09-021255-7. – Текст : непосредственный.

4. Алгебра 8 класс : [в 2 частях] / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская ; под редакцией А. Г. Мордковича ; Министерство образования и науки Российской Федерации. – Москва : Мнемозина, 2010. – 150000 экз. – ISBN 978-5-346-01426-3. – Текст : непосредственный.

Ч. 1 : Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – 215 с. – ISBN 978-5-346-01427-0.

Ч. 2 : Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. – 271 с. – ISBN 978-5-346-01428-7.

5. Алгебра 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под редакцией С. А. Теляковского ; Министерство образования и науки Российской Федерации. – Москва : Просвещение, 2013. – 287 с. – 50000 экз. – ISBN 978-5-09-022881-7. – Текст : непосредственный.

6. Алгебра 9 класс : задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. В 2 частях. Часть 2. Задачник / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Т. Н. Мишустина [и др.] ; под редакцией А. Г. Мордковича ; Министерство образования и науки Российской Федерации. – Москва : Мнемозина, 2010. – 223 с. – 200000 экз. – ISBN 978-5-346-01421-8. – Текст : непосредственный.

7. Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под редакцией С. А. Теляковского ; Министерство образования и науки Российской Федерации. – Москва : Просвещение, 2014. – 271 с. – 75000 экз. – ISBN 978-5-09-032009-2. – Текст : непосредственный.

8. **Алексеевская, А. А.** Функционально-графический метод решения уравнений с параметрами в итоговой аттестации / А. А. Алексеевская. – Текст : непосредственный // Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования : сборник научных трудов по материалам Всероссийской научно-методической конференции / Саратовский источник. – Саратов : Саратовский источник, 2020. – С. 19–23.

9. **Апайчева, Л. А.** Алгоритмизация решения задач с параметрами / Л. А. Апайчева, Л. Е. Шувалова. – Текст : непосредственный // Инновационная наука. – 2016. – № 10–3. – С. 8–11.

10. **Винокурова, Г. И.** Методика формирования умений школьников по решению задач с параметрами / Г. И. Винокурова, М. А. Ляпина. – Текст : непосредственный // Continuum. Математика. Информатика. Образование. – 2016. – № 1 (1). – С. 88–94.

11. **Гунашева, М. Г.** Уравнения и неравенства с параметрами, предлагавшиеся в различные годы в заданиях ЕГЭ / М. Г. Гунашева. – Текст : непосредственный // Сибирский педагогический журнал. – 2010. – № 11. – С. 199–203.

12. **Далингер, В. А.** Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей : [монография] / В. А. Далингер ; Государственный педагогический институт им. А. М. Горького. – Омск : ОмИПКРО, 1993. – 323 с. – ISBN 5-89982-004-7. – Текст : непосредственный.

13. **Демкова, Г. П.** Условия обучения решению заданий с параметрами в соответствии с требованиями ФГОС СОО / Г. П. Демкова. – Текст : непосредственный // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2018. – № 4 (12). – С. 15–19.

14. **Захарова, М. А.** Формирование приемов решения задач с параметром как средство повышения качества математической подготовки / М. А. Захарова, О. В. Потанина. – Текст : непосредственный // Фундаментальная и прикладная наука: состояние и тенденции развития : сборник статей X Международной научно-практической конференции / Международный центр научного партнерства «Новая Наука». – Петрозаводск : МЦНП «Новая Наука», 2021. – С. 109–117.

15. **Калабина, Е. В.** Задания с параметрами как средство обобщающего повторения в конце десятого класса / Е. В. Калабина. – Текст : непосредственный // Современное образование: методы и технологии внедрения ФГОС : материалы региональной научно-практической конференции / Благовещенский государственный педагогический университет. – Благовещенск : ГОУ ВПО БГПУ, 2016. – С. 54–57.

16. **Котюргина, А. С.** Эволюция ЕГЭ и ее влияние на математическую подготовку школьников / А. С. Котюргина, Е. И. Федорова, В. Б. Николаев, Ю.Б. Никитин. – Текст : непосредственный // Образование и наука. – 2020. – Т. 22, вып. 5. – С. 9–36.

17. **Кошелева, Н. Н.** Задачи с параметрами как элемент математического моделирования в школе / Н. Н. Кошелева, С. А. Крылова,

М. Г. Никитина. – Текст : непосредственный // Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования : материалы международной научно-практической конференции / Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина. – Рязань : РГУ им. С. А. Есенина, 2016. – С. 419–422.

18. **Ледовских, И. А.** Задачи с параметрами: с чего начать / И. А. Ледовских, Л. В. Горбанева, Ю. В. Жулидова. – Текст : непосредственный // Международный научно-исследовательский журнал. – 2020. – № 11–3 (101). – С. 107–111.

19. **Логинова, В. В.** Использование задач с параметрами в школьном курсе математики / В. В. Логинова, А. В. Новоселов. – Текст : непосредственный // Актуальные вопросы современной науки. – 2010. – № 16. – С. 161–169.

20. **Маликова, К. Ю.** Функционально-графический метод решения задач с параметрами у учащихся 7-9 классов на уроках математики при изучении темы «Уравнения и неравенства» / К. Ю. Маликова, И. Н. Бурилич. – Текст : непосредственный // Интеграция науки, образования, общества, производства и экономики : сборник научных статей по материалам II Международной научно-практической конференции / Общество с ограниченной ответственностью «Научно-издательский центр «Вестник Науки»». – Уфа : ООО «НИЦ Вестник науки», 2020. – С. 307–313.

21. **Малинникова, Н. А.** Комплексы заданий с параметрами: подготовка к ЕГЭ / Н. А. Малинникова, А. Л. Александрович. – Текст : непосредственный // Ученые записки Брянского государственного университета. – 2019. – № 1 (13). – С. 11–17.

22. **Мельникова, А. А.** Решение задач с параметрами как один из важных факторов развития мышления и умения применять теоретические знания / А. А. Мельникова. – Текст : непосредственный // Вестник

Димитровградского инженерно-технологического института. – 2017. – № 2 (13). – С. 163–167.

23. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир.– Москва : Вентана-Граф, 2015. – 272 с. – 5000 экз. – ISBN 978-5-360-05509-9. – Текст : непосредственный.

24. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир.– Москва : Вентана-Граф, 2019. – 256 с. – 5000 экз. – ISBN 978-5-360-09808-9. – Текст : непосредственный.

25. **Мерзляк, А. Г.** Алгебра 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир.– Москва : Вентана-Граф, 2014. – 304 с. – 5000 экз. – ISBN 978-5-360-05308-8. – Текст : непосредственный.

26. **Пестрикова, А. А.** Обучение учащихся решению логарифмических уравнений и неравенств с параметрами при подготовке к единому государственному экзамену / А. А. Пестрикова, А. М. Сухтаева. – Текст : непосредственный // Информационно-компьютерные технологии в экономике, образовании и социальной сфере. – 2021. – № 2 (32). – С. 49–56.

27. **Редькина, Н. Н.** Развитие исследовательских умений младших школьников в урочное и внеурочное время/Н.Н. Редькина, С.В. Гражданцева. – Текст : непосредственный // Новые технологии в образовании : материалы XVI Международной научно-практической конференции. Центр научной мысли / ООО «Издательство «Спутник +»». – Москва : Спутник +, 2014. – С.62-64.

28. **Рыжик, В. И.** Кризис среднего математического образования глазами учителя / В. А. Рыжик. – Текст : непосредственный // Математика в школе. – 2014. – № 1. – С. 3–9.

29. **Сабирова, Э. Г.** Значимые исследовательские умения в процессе развития универсальных учебных действий младших школьников / Э. Г. Сабирова. – Текст : непосредственный // Образование и саморазвитие. – 2015. – № 4 (46). – С.42–48.

30. **Савенков, А. И.** Методика исследовательского обучения младших школьников : учебное пособие / А. И. Савенков ; Московский городской педагогический университет. – Самара : Учебная литература, 2004. – 78с. – ISBN 5-9507-0177-1. – Текст : непосредственный.

31. **Сапожкова, Н. А.** Обобщающие задания с параметром при изучении нового материала по математике как средство преодоления клипово-алгоритмического мышления / Н. А. Сапожкова. – Текст : непосредственный // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2016. – № 5–2. – С. 160–162.

32. **Севрюков, П. Ф.** Относительно простые задачи с параметрами / П. Ф. Севрюков. – Текст : непосредственный // Аллея науки. – 2018. – Т. 2, вып. 7 (23). – С. 355–367.

33. **Суркова, Е. М.** Когда и как в школьном курсе математики можно вводить параметр в качестве элемента уравнения / Е. М. Суркова. – Текст : непосредственный // Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования : материалы XXI Всероссийской (IX с Международным участием) научно-практической конференции / Самарский государственный социально-педагогический университет. – Самара : СГСПУ, 2018. – С. 309–316.

34. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования : [сайт]. – URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/ (дата обращения 3.11.2021). – Текст : электронный.

35. **Фоминова, А. Н.** Использование исследовательского подхода в процессе освоения учебных дисциплин школьниками и студентами вузов / А. Н. Фоминова. – Текст : непосредственный // От учебного проекта к

исследованиям и разработкам – ICRES’2020 : международная конференция по исследовательскому образованию школьников / Региональная общественная организация «Научно-техническая ассоциация «Актуальные проблемы фундаментальных наук»». – Москва : РОО «НТА «АПФН»», 2020. – С. 204–212.

36. **Ященко, И. В.** Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике / И. В. Ященко, А. В. Семенов, И. Р. Высоцкий. – Текст : непосредственный // Педагогические измерения. – 2019. – № 3. – С. 23–40.

37. **Ященко, И. В.** Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. В. Семенов. – Текст : электронный // Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». – Москва : ФИПИ, 2021. – URL: https://mathb-ege.sdamgia.ru/doc/analytics_2021/ma-mr-2021.pdf (дата обращения 3.11.2021).

38. Stepik : [сайт]. – URL: https://stepik.org/course/98712/syllabus?auth=login (дата обращения 2.03.2022). – Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Анализ учебников Макарычева Ю.Н.

Приведем анализ учебника Макарычева Ю.Н. 7 класс [3].

Таблица 1.1 – Задания из учебника Макарычева Ю.Н. 7 класс

Тема	Задание
1	*2*
Дополнительные упражнения к теме: «Преобразование выражений»	№238 (задание повышенной трудности). При каких значениях коэффициента m уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение m, при котором это уравнение не имеет корней?
	№239 (задание повышенной трудности). При каких значениях коэффициента p уравнение $px = 10$ имеет корень, равный $-5; 1; 20$?
	№245. Найдите все целые значения a, при которых корень уравнения $ax = 6$ является целым числом.
Дополнительные упражнения к теме: «Линейная функция»	№364 (задание повышенной трудности). При каком значении a точка $A(a; -1,4)$ принадлежит графику прямой пропорциональности $y = 3,5x$?
Линейная функция и ее график	№453. Известно, что график функции $y == kx + 5,4$ проходит через точку $A(3,7; -2)$. Найдите значение коэффициента k.
Дополнительные упражнения к теме: «Одночлены»	№562. Известно, что точка $P(-4; b)$ принадлежит графику функции, заданной формулой $y = x^2$. Найдите значение b. Принадлежит ли графику этой функции точка $Q(4; b)$?
Линейные уравнения с двумя переменными и их системы	№1036. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 2y = 8$, если известно, что пара $x = 2$, $y = 1$ является решением этого уравнения.
Дополнительные упражнения к теме: «Линейные уравнения с двумя переменными и их системы»	№1140. Известно, что: а) пара значений переменных $x = 5$, $y = 7$ является решением уравнения $ax - -2y = 1$. Найдите коэффициент a; б) пара значений переменных $x = -3$, $y = 8$ является решением уравнения $5x + +by = 17$. Найдите коэффициент b.
	№1152. В линейном уравнении $ax - y =$ $= 4$ подберите коэффициент a так, чтобы

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*
	график этого уравнения проходил через точку $M(3;5)$. Постройте график этого уравнения.
	№1153. Постройте прямую, которая является графиком уравнения $y-2{,}5x = c$, если известно, что она проходит через точку $K(2;-3)$.
	№1161 (задание повышенной трудности). При каком значении k прямая $y = kx - 4$ проходит через точку пересечения прямых $y = 2x - 5$ и $y = -x + 1$?
	№1165. Укажите какое-либо значение k, при котором система $\begin{cases}2x + y = 7,\\ y - kx = 3\end{cases}$ имеет единственное решение.
	№1166 (задание повышенной трудности). При каком значении c система уравнений $\begin{cases}3x - y = 10,\\ 9x - 3y = c\end{cases}$ имеет бесконечно много решений?
	№1167 (задание повышенной трудности). При каких значениях c система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 2,\\ 5x + 2y = c\end{cases}$ не имеет решений?

Анализ учебника Макарычева Ю.Н. 8 класс [5].

Таблица 1.2 – Задания из учебника Макарычева Ю.Н. 8 класс

Тема	Задание
1	*2*
Неполные квадратные уравнения	№520. При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2 + 15x + a^2 - 4 = 0$ является неполным квадратным уравнением? Выберите верный ответ. 1. $a = -1$. 2. $a = 1$. 3. $a = -2$. 4. $a = 2$.
Формула корней квадратного уравнения	№555 (задание повышенной трудности). Существует ли такое значение a, при

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*
	котором уравнение $$x^2 - ax + a - 4 = 0:$$ а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет два корня?
Теорема Виета	№595. (Для работы в парах.) Уравнение $x^2 + 5x + m = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите при каком значении m: а) сумма квадратов корней равна 35; б) сумма кубов корней равна 40. 1. Обсудите подходы к выполнению задания а) и задания б). 2. Распределите, кто выполняет задание а), а кто – задание б), и выполните их. 3. Проверьте друг у друга правильность полученных ответов. Исправьте замеченные ошибки.
Решение дробных рациональных уравнений	№612 (задание повышенной трудности). С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение $\frac{1}{x} = ax + +b$, где a и b – некоторые числа. Для каждого случая укажите, каким условиям должны удовлетворять числа a и b.
Уравнения с параметром	№640. Какие случаи надо выделить при решении уравнения $bx + 2x = 3b + 6$ с параметром b? Найдите корни уравнения в каждом из этих случаев.
	№641. Решите относительно y уравнение: а) $py - p - 1 = 0$; б) $py - 3y - 4p + 12 = 0$.
	№642 (задание повышенной трудности). Решите уравнение с параметром a: $$ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18.$$
	№643 (задание повышенной трудности). Решите уравнение с параметром b: $$2x^2 - 4x + b = 0.$$
	№644 (задание повышенной трудности). Решите относительно x уравнение: а) $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$; б) $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$.
	№645 (задание повышенной трудности). При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение: а) $3x^2 + tx + 3 = 0$; б) $2x^2 - tx + 50 = 0$; в) $tx^2 - 6x + 1 = 0$;

Продолжение таблицы 1.2

1	*2*
	г) $tx^2 + x - 2 = 0$?
	№646 (задание повышенной трудности). Выясните, при каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 3 = 0$ принимает наименьшее значение, и найдите это значение.
	№647 (задание повышенной трудности). Решите относительно x уравнение $(a-1)x^2 + 2ax + a + 1 = 0$.
	№648 (задание повышенной трудности). Решите уравнение с параметром k: $x^2 - (4k+1)x + 2(2k^2 + k - 3) = 0$.
	№649 (задание повышенной трудности). Выясните, при каких значениях параметра b равна 7 сумма корней уравнения $y^2 - (2b-1)y + b^2 - b - 2 = $ $= 0$.
Дополнительные упражнения к теме: «Квадратное уравнение и его корни»	№659. При каком значении a один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1? Найдите, чему равен при этом значении a второй корень.
	№672. Найдите b и решите уравнение: а) $2x^2 + bx - 10 = 0$, если оно имеет корень 5; б) $3x^2 + bx + 24 = 0$, если оно имеет корень 3; в) $(b-1)x^2 - (b+1)x = 72$, если оно имеет корень 3; г) $(b-5)x^2 - (b-2)x + b = 0$, если оно имеет корень $\frac{1}{2}$.
	№673. Докажите, что уравнение $7x^2 +$ $+bx - 23 = 0$ при любых значениях b имеет один положительный и один отрицательный корень.
	№674. Докажите, что уравнение $12x^2 +$ $+70x + a^2 + 1 = 0$ при любых значениях a не имеет положительных корней.
Числовые промежутки	№820 (задание повышенной трудности). Укажите все дроби вида $\frac{a}{54}$, где $a \in N$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{9}; \frac{1}{6}\right]$.
Решение неравенств с одной переменной	№863 (задание повышенной трудности). Найдите множество значений a, при которых уравнение $(a+5)x^2 + 4x -$

Продолжение таблицы 1.2

1	2
	$-20 = 0$ не имеет корней.
	№864 (задание повышенной трудности). Найдите множество значений k, при которых уравнение $(k-4)x^2 + 16x -$ $-24 = 0$ имеет два корня.
Решение систем неравенств с одной переменной	№896 (задание повышенной трудности). При каких значениях a уравнение $x^2 + +2ax + a^2 - 4 = 0$ имеет два корня, принадлежащие промежутку $(-6; 6)$?
	№897 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $x^2 - -6bx + 9b^2 - 16 = 0$ имеет два отрицательных корня?
Дополнительные упражнения к теме: «Неравенства с одной переменной и их системы»	№946. Найдите, при каких значениях a уравнение имеет положительный корень: а) $3x = 9a$; б) $x + 2 = a$; в) $x - 8 = 3a + 1$; г) $2x - 3 = a + 4$.
	№947. Найдите, при каких значениях b уравнение имеет положительный корень: а) $10x = 3b$; б) $x - 4 = b$; в) $3x - 1 = b + 2$; г) $3x - 3 = 5b - 2$.
	№960 (задание повышенной трудности). При каких значениях a уравнение $x^2 - -4ax + 4a^2 - 25 = 0$ имеет два корня, каждый из которых больше 2?
	№961 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $x^2 - -(2b-2)x + b^2 - 2b = 0$ имеет два корня, принадлежащие интервалу $(-5; 5)$?

Приведем анализ учебника Макарычева Ю.Н. 9 класс [7].

Таблица 1.3 – Задания из учебника Макарычева Ю.Н. 9 класс

Тема	Задание
1	2
Функции и их свойства	№45. При каких значениях a функция $y = (a-2)x + 3$: а) является возрастающей;

Продолжение таблицы 1.3

1	*2*
	б) является убывающей; в) не является ни возрастающей, ни убывающей?
Квадратичная функция и ее график	№100 (задание повышенной трудности). При каких значениях k прямая $y = kx -$ -4 имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку?
	№115. При каких значениях a функция $y = ax^2 + 5$ имеет нули?
	№129 (задание повышенной трудности). Найдите значение b, при котором прямая $y = 6x + b$ касается параболы $y = x^2 +$ $+8$.
	№130 (задание повышенной трудности). При каком значении n графики функций $y = 2x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 - 7x + n$ имеют только одну общую точку? Найдите координаты этой точки.
Дополнительные упражнения к теме: «Квадратный трехчлен»	№216 (задание повышенной трудности). При каком значении p выражение $2px^2 - -2x - 2p - 3$ становится квадратным трехчленом, одним из корней которого является число нуль? Найдите другой корень.
Дополнительные упражнения к теме: «Квадратичная функция и ее график»	№229. При каком значении a график функции $y = ax^2$ проходит через точку: а) $(5; -7)$; б) $\left(-\sqrt{3}; 9\right)$; в) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $(100; 10)$?
	№231. При каких значениях a областью значений функции $y = ax^2$ является промежуток: а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$?
	№232. Докажите, что графики функций $y = ax^2$ и $y = ax$, где $a \neq 0$, пересекаются в точке $(1; a)$. В какой еще точке пересекаются эти графики?
	№240. Найдите значение a при котором осью симметрии параболы $y = ax^2 -$ $-16x + 1$ является прямая $x = 4$.
	№241. При каких значениях a и c квадратичная функция $y = ax^2 + c$ имеет нули?

Продолжение таблицы 1.3

1	2
	№242 (задание повышенной трудности). Найдите значения a и b, при которых график функции $y = ax^2 + bx - 18$ проходит через точки $M(1; 2)$ и $N(2; 10)$.
Неравенства с одной переменной	№310. При каких значениях b уравнение имеет два корня: а) $3x^2 + bx + 3 = 0$; б) $x^2 + 2bx + 15 = 0$?
	№311. При каких значениях t уравнение не имеет корней: а) $2x^2 + tx + 18 = 0$; б) $4x^2 + 4tx + 9 = 0$?
Дополнительные упражнения к теме: «Неравенства с одной переменной»	№379 (задание повышенной трудности). При каких значениях a уравнение $(a + +2)x^2 + 8x + a - 4 = 0$ имеет два корня?
	№380 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $(b - -1)x^2 + 6x + b - 3 = 0$ не имеет корней?
	№381 (задание повышенной трудности). При каких значениях c не имеет корней уравнение: а) $x^4 - 12x^2 + c = 0$; б) $x^4 + cx^2 + 100 = 0$?
	№381 (задание повышенной трудности). При каких значениях k уравнение $x^4 - -13x^2 + k = 0$ имеет: а) четыре корня; б) два корня?
Уравнения с двумя переменными и их системы	№408 (задание повышенной трудности). При каких значениях m графиком уравнения $(x - 4)^2 + (y + m)^2 = 15$ является окружность, центр которой расположен в четвертой координатной четверти?
	№409 (задание повышенной трудности). При каких значениях r окружность $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = r^2$: а) качается оси x; б) касается оси y?
	№425. При каком значении b пара чисел $(18; 3)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 4b, \\ 2x + y = 39? \end{cases}$

Продолжение таблицы 1.3

1	*2*
	№426. При каких значениях a решением системы уравнений $\begin{cases} x+y=a+1, \\ 3x-y=a-1; \end{cases}$ является папа положительных чисел?
	№450 (задание повышенной трудности). При каких значениях k парабола $y=x^2+1$ и прямая $y=kx$ имеют только одну общую точку?
	№451. Окружность $(x-4)^2+(y-6)^2=$ $=25$ и прямая $y=kx$ имеют общую точку $M(1;2)$. Найдите координаты другой общей точки, если такая точка существует.
Дополнительные упражнения к теме: «Уравнения с двумя переменными и их системы»	№521. При каком значении a окружность $(x-a)^2+(y-3)^2=16$ проходит через точку: а) $A(2;3)$; б) $B(7;-1)$; в) $C(-2;7)$; г) $D(1;5)$?
	№525 (задание повышенной трудности). Сколько решений может иметь система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ y=-x^2+4, \end{cases}$ где r – положительное число?
	№526 (задание повышенной трудности). При каких значениях m система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=m; \end{cases}$ имеет: а) одно решение; б) два решения?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Анализ учебников Мордковича А.Г.

Приведем анализ учебника Мордковича А.Г. 7 класс [2].

Таблица 2.1 – Задания из учебника Мордковича А.Г. 7 класс

Тема	Задание
1	*2*
Домашняя контрольная работа №1 по теме: «Математический язык. Математическая модель»	Вариант 1. №8. При каких значениях p корнем уравнения $p(x+4)-(5-p)=$ $=-16$ является число 2?
	Вариант 2. №8. При каких значениях а корнем уравнения $x(6-a)+a(x+2)=$ $=-26$ является число 4?
Линейное уравнение с двумя переменными и его график	№7.26. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax+5y-40=0$, если известно, что решением уравнения является пара чисел: а) $(3;2)$; б) $(9;-1)$; в) $\left(\frac{1}{3};0\right)$; г) $(-2;2{,}4)$.
	№7.27. Найдите значение коэффициента b в уравнении $6x+by-35=0$, если известно, что решением уравнения является пара чисел: а) $(0;1)$; б) $(3;8{,}5)$; в) $\left(\frac{1}{3};11\right)$; г) $(-5;-13)$.
	№7.28. Найдите значение коэффициента c в уравнении $8x+3y-c=0$, если известно, что решением уравнения является пара чисел: а) $(2;-1)$; б) $\left(3\frac{1}{8};-4\frac{1}{3}\right)$; в) $\left(0{,}125;-\frac{2}{3}\right)$; г) $(0;0)$.
	№7.29. При каком значении m решением уравнения $mx+4y-12m=0$ является пара чисел: а) $(0;3)$; б) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

Продолжение таблицы 2.1

1	*2*
	в) $(12; 0)$; г) $\left(-1; 3\frac{1}{4}\right)$?
	№7.39. При каких значениях коэффициентов a, b, c прямая $ax + by +$ $+c = 0$: а) параллельна оси x; б) параллельна оси y; в) проходит через начало координат; г) совпадает с осью x, осью y?
Линейная функция и её график	№8.58. Найдите значение m, если известно, что график линейной функции $y = -5x + m$ проходит через точку: а) $N(1; 2)$; б) $K(0{,}5; 4)$; в) $N(-7; 8)$; г) $P(1{,}2; -3)$.
	№8.59. Найдите значение k, если известно, что график линейной функции $y = kx + 4$ проходит через точку: а) $C(3; 5)$; б) $D\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; в) $E(-6; -8)$; г) $F\left(\frac{1}{3}; -8\right)$.
Линейная функция $y = kx$	№9.6 (задание средней трудности). Задайте линейную функцию формулой $s = kt$, если известно, что ее график на координатной плоскости tOs проходит через начало координат и через точку: а) $A(5; 7)$; б) $B(-2; -8)$; в) $C(9; -3)$; г) $D(-4; 12)$.
Взаимное расположение графиков линейных функций	№10.14. Задайте формулой линейную функцию $y = kx$, график которой параллелен графику данной линейной функции: а) $y = 4x - 3$; б) $y = -3x + 1$; в) $y = \frac{1}{3}x + 2$; г) $y = -0{,}5x - 4$.
	№10.15 (задание средней трудности). Задайте формулой линейную функцию $y = kx$, график которой параллелен прямой:

Продолжение таблицы 2.1

1	2
	а) $x + y - 3 = 0$; б) $2x - 3y - 12 = 0$; в) $2x - y + 4 = 0$; г) $-x + 2y + 6 = 0$.
Домашняя контрольная работа №2 по теме: «Линейная функция»	Вариант 1. №3. Найдите линейную функцию $y = 2x + m$, если известно, что ее график проходит через точку $A(-1; 5)$.
	Вариант 2. №3. Найдите линейную функцию $y = kx - 3$, если известно, что ее график проходит через точку $M(2; -9)$.
Основные понятия о системах двух линейных уравнений с двумя переменными	№11.20 (задание повышенной трудности). а) Дана система уравнений $\begin{cases} x + ay = 25, \\ bx + 2y = 27. \end{cases}$ Известно, что пара чисел $(5; 6)$ является ее решением. Найдите значения a и b. б) Дана система уравнений $\begin{cases} ax - 3y = 7, \\ 5x + by = 26. \end{cases}$ Известно, что пара чисел $(10; 5)$ является ее решением. Найдите значения a и b.
	№11.21 (задание повышенной трудности). Решите графически систему уравнений $\begin{cases} ax + 3y = 11, \\ 5x + 2y = 12, \end{cases}$ если известно, что первое уравнение этой системы обращается в верное равенство при $x = 5$ и $y = -3$.
Метод алгебраического сложения	№13.16 (задание повышенной трудности). При каком значении p график функции: а) $y = px$; б) $y = px + 1$ пройдет через точку пересечения прямых $6x - y = 13$ и $5x + y = 20$?
	№13.17 (задание повышенной трудности). При каких значениях a и b решением системы уравнений: а) $\begin{cases} ax + by = 36, \\ ax - by = 8 \end{cases}$ является пара чисел $(2; -1)$; б) $\begin{cases} ax + by = 2a, \\ ax - by = 16 \end{cases}$ является пара чисел $(-1; 2)$; в) $\begin{cases} ax + by = 4, \\ ax - by = -24 \end{cases}$ является пара чисел $(1; -2)$;

Продолжение таблицы 2.1

1	*2*
	г) $\begin{cases} ax+by=18, \\ ax-by=a+2 \end{cases}$ является пара чисел $(-2;1)$?
	№13.18 (задание повышенной трудности). При каких значениях a и b решением системы уравнений: а) $\begin{cases} (a-10)x+by=2b, \\ ax-(b+4)y=2a-20 \end{cases}$ является пара чисел $(1;1)$; б) $\begin{cases} (a+1)x-by=2b, \\ ax+(b+1)y=5a \end{cases}$ является пара чисел $(-4;-6)$?
Домашняя контрольная работа №3 по теме: «Системы двух линейных уравнений с двумя переменными»	Вариант 1. №5. Чему равны коэффициенты a и b, если известно, что пара чисел $(-1;-2)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 5x+ay=-1, \\ bx-4y=5? \end{cases}$
	Вариант 2. №5. Чему равны коэффициенты a и b, если известно, что пара чисел $(2;1)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} ax-4y=2, \\ 2x+by=9? \end{cases}$
Вынесение общего множителя за скобки	№31.28 (задание повышенной трудности). При каких значениях p график линейной функции $y=p^2-2px$ проходит через заданную точку: а) $(1;0)$; б) $\left(-\frac{1}{2};0\right)$; в) $(-1;0)$; г) $(2{,}5;0)$?
Способ группировки	№32.22 (задание повышенной трудности). При каком значении p заданная пара чисел является решением уравнения $p^2x+py+8=0$: а) $(1;-6)$; б) $(-1;2)$?
	№32.23 (задание повышенной трудности). При каких значениях p график линейной функции $y=p^2-2px$ проходит через заданную точку: а) $(1;3)$; б) $(-2;5)$?
Графическое решение уравнений	№38.16. При каких значениях p данное уравнение имеет один корень:

Продолжение таблицы 2.1

1	2
	а) $\frac{2x^3+6x^2}{2x+6} = p$; б) $\frac{9x^2-3x^3}{3x-9} = p$; в) $\frac{x^4-4x^3}{x^2-4x} = p$; г) $\frac{x^4-2x^3}{x^2-2x} = p$?
Что означает в математике запись $y = f(x)$	№39.43 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $f(x) == b$, где $f(x) = \begin{cases} x+6, \text{если } x \le -2, \\ x^2, \text{если } -2 < x \le 3, \end{cases}$ а) имеет один корень; б) имеет два корня; в) имеет три корня; г) не имеет корней?
	№39.44 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $f(x) == b$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2}, \text{если } x \le -1, \\ x^2, \text{если } -1 < x \le 2, \end{cases}$ а) имеет один корень; б) имеет два корня; в) имеет три корня; г) не имеет корней?
	№39.45 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $f(x) == b$, где $f(x) = \begin{cases} -2x-2, \text{если } x \le -1, \\ -x^2, \text{если } -1 < x \le 2, \end{cases}$ а) имеет один корень; б) имеет два корня; в) имеет три корня; г) не имеет корней?
	№39.46 (задание повышенной трудности). При каких значениях b уравнение $f(x) == b$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{если } x \le 1, \\ -2, \text{если } x > 1, \end{cases}$ а) имеет один корень; б) имеет два корня; в) имеет три корня; г) не имеет корней?
Итоговое повторение на тему: «Функции и графики»	№18. Задайте формулой функцию $y = kx$, график которой проходит через точку: а) $M(-20; 60)$; б) $N(17; -51)$;

Продолжение таблицы 2.1

1	2
	в) $K(45; 15)$; г) $L(-65; -13)$.
	№26. При каких значениях a, b, c график уравнения $ax + by + c = 0$: а) проходит через начало координат; б) расположен параллельно оси x; в) расположен параллельно оси y; г) совпадает с осями координат?

Приведем анализ учебника Мордковича А.Г. 8 класс [4].

Таблица 2.2 – Задания из учебника Мордковича А.Г. 8 класс

Тема	Задание
1	*2*
Функция $y = kx^2$, её свойства и график	№17.17. Найдите коэффициент k в уравнении $y = kx^2$, зная, что парабола проходит через точку: а) $M(2; 20)$; б) $N(-3; 27)$; в) $K(-1; 10)$; г) $L(4; -96)$.
Функция $y = \frac{k}{x}$, её свойства и график	№18.4. Задайте число k так, чтобы график функции $y = \frac{k}{x}$ был расположен: а) в первой и третьей четвертях; б) во второй и четвертой четвертях.
Функция $y = ax^2 + bx + c$, её свойства и график	№22.13 (задание средней трудности). Найдите значение коэффициента c и постройте график функции $y = x^2 - 6x + $ $+c$, если известно, что наименьшее значение функции равно 1.
	№22.14 (задание средней трудности). Найдите значение коэффициента c и постройте график функции $y = -x^2 = 4x + c$, если известно, что наибольшее значение функции равно 2.
	№22.28 (задание средней трудности). 1. Найдите значение коэффициента c, если известно, что график функции $y == x^2 + 4x + c$ пересекает ось ординат в точке $A(0; 2)$. 2. Найдите значение коэффициента c, если известно, что график функции $y = x^2 + 4x + c$ пересекает ось ординат в точке $B(0; 4)$.

Продолжение таблицы 2.2

1	2
	№22.29 (задание средней трудности). 1. Найдите значение коэффициента a, если известно, что график функции $y = = ax^2 + 4x + 5$ пересекает ось абсцисс в точке $M(-10; 0)$. 2. Найдите значение коэффициента a, если известно, что график функции $y = = ax^2 + 4x - 8$ пересекает ось абсцисс в точке $N(4; 0)$.
	№22.30 (задание средней трудности). 1. Найдите значение коэффициента b, если известно, что осью симметрии графика функции $y = x^2 + bx + 4$ является прямая $x = 1$. 2. Найдите значение коэффициента b, если известно, что осью симметрии графика функции $y = 2x^2 + bx - 3$ является прямая $x = 1$.
	№22.48 (задание повышенной трудности). Найдите значение коэффициента a, если известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии графика функции $y = ax^2 - -(a + 6)x + 9$.
	№22.49 (задание повышенной трудности). При каком значении коэффициента c вершина параболы $y = x^2 + 6x + c$ находится на расстоянии 5 от начала координат?
	№22.50 (задание повышенной трудности). При каких значениях коэффициентов b и c точка $A(1; -2)$ является вершиной параболы $y = x^2 + bx + c$?
	№22.51 (задание повышенной трудности). Найдите значения коэффициентов a, b и c, если известно, что точка $A(1; -2)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + +bx + c$ и что парабола пересекает ось ординат в точке $B(0; 2)$.
	№22.52 (задание повышенной трудности). Найдите значения коэффициентов b и c, если известно, что график функции $y == x^2 + bx + c$ проходит через точки $(0; 8)$ и $(3; -1)$.
	№22.53 (задание повышенной трудности). Найдите значения коэффициентов b и c, если известно, что график функции

Продолжение таблицы 2.2

1	2
	$y = x^2 + bx + c$ проходит через точки $(1; 6)$ и $(-1; -2)$.
Графическое решение квадратных уравнений	№23.15 (задание повышенной трудности). При каком значении p уравнение $x^2 - -2x + 1 = p$ имеет один корень?
	№23.16 (задание повышенной трудности). При каких значениях p уравнение $x^2 + +2x + 3 = p$ не имеет корней?
	№23.17 (задание повышенной трудности). При каких значениях p уравнение $x^2 - -4x + 4 = p$ имеет два корня?
	№23.18 (задание повышенной трудности). При каких значениях p уравнение $x^2 + +4x - 6 = p$ имеет хотя бы один корень?
	№23.19 (задание повышенной трудности). При каких значениях p уравнение $x^2 + +6x + 8 = p$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет два корня?
Домашняя контрольная работа №3 по теме: «Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$»	Вариант 1. №10. При каких значениях p уравнение $-x^2 + 4x + 6 = p$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет два корня?
	Вариант 2. №10. При каких значениях p уравнение $-x^2 + 6x - 2 = p$: а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет два корня?
Квадратные уравнения. Основные понятия	№24.31. При каких значениях параметра p заданное уравнение является неполным квадратным уравнением? Решите уравнение при найденных значениях параметра. а) $6x^2 + (p - 1)x + 2 - 4p = 0$; б) $(p - 2)x^2 + 3x + p$; в) $3x^2 - (2p + 3)x + 2 + p = 0$; г) $(6 - p)x^2 + (2p + 6)(x + 12) = 0$.
	№24.32. При каких значениях параметра p уравненеие $(2p - 3)x^2 + (3p - 6)x + +p^2 - 9 = 0$ является: а) приведенным квадратным уравнением; б) неполным неприведенным квадратным уравнением; в) неполным приведенным квадратным

	уравнением;

Продолжение таблицы 2.2

1	*2*
	г) линейным уравнением?
	№24.33. При каких значениях параметра p уравнение: а) $x^2 + px + 24 = 0$ имеет корень, равный 6; б) $2x^2 + px + 68 = 0$ имеет корень, равный 17; в) $x^2 + px - 35 = 0$ имеет корень, равный 7; г) $3x^2 + px - 54 = 0$ имеет корень, равный 9?
	№24.34. При каких значениях параметра p уравнение: а) $x^2 - 8x + p = 0$ имеет корень, равный 4; б) $4x^2 - 24x + p = 0$ имеет корень, равный 0; в) $x^2 + 15x + p = 0$ имеет корень, равный 10; г) $6x^2 + 30x + p = 0$ имеет корень, равный -5?
Формулы корней квадратных уравнений	№25.20 (задание средней трудности). При каких значениях параметра p имеет один корень уравнение: а) $x^2 - px + 9 = 0$; б) $x^2 + 3px + p = 0$; в) $x^2 + px + 16 = 0$; г) $x^2 - 2px + 3p = 0$?
	№25.20 (задание средней трудности). Докажите, что при любом значении параметра p уравнение $3x^2 - px - 2 = 0$ имеет два корня.
	№25.46. Решите уравнение с параметром p: а) $x^2 - (2p - 2)x + p^2 - 2p = 0$; б) $x^2 - \frac{2p+3}{6}x + \frac{p}{6} = 0$; в) $x^2 - (1 - p)x - 2p = 2p^2$; г) $x^2 + \frac{3p-2}{6}x + \frac{p}{6} = 0$.
	№25.47 (задание повышенной трудности). Докажите, что не существует такого значения параметра p, при котором уравнение $x^2 - px + p - 2 = 0$ имело бы только один корень.

Еще одна формула корней квадратного уравнения	№28.21. Решите уравнение: а) $x^2 - 2(p-1)x + p^2 - 2p - 3 = 0$;

Продолжение таблицы 2.2

1	*2*
	б) $x^2 + 2(p+1)x + p^2 + 2p - 8 = 0$; в) $x^2 - 2(p-1)x + p^2 - 2p - 15 = 0$; г) $x^2 + 2(p+3)x + p^2 + 6p - 7 = 0$.
	№28.22 (задание повышенной трудности). Решите уравнение: а) $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$; б) $px^2 - 4x + 1 = 0$; в) $x^2 - 4px + 4p^2 - 1 = 0$; г) $px^2 - 12x + 4 = 0$.
	№28.23 (задание повышенной трудности). Решите уравнение: а) $(p-4)x^2 + (2p-4)x + p = 0$; б) $px^2 + 2(p+1)x + p + 3 = 0$.
Теорема Виета	№29.11 (задание средней трудности). Может ли квадратное уравнение $x^2 +$ $+bx - 8 = 0$: а) не иметь корней; б) иметь равные корни; в) иметь два различных корня разных знаков; г) иметь два различных корня одного и того же знака?
	№29.13 (задание средней трудности). При каких значениях параметра p сумма корней квадратного уравнения $x^2 +$ $+(p^2 + 4p - 5)x - p = 0$ равна нулю?
	№29.14 (задание средней трудности). При каких значениях параметра p произведение корней квадратного уравнения $x^2 + 3x + (p^2 - 7p + 12) = 0$ равно нулю?
	№29.41 (задание повышенной трудности). Дано уравнение $x^2 - (2p^2 - p - 6)x +$ $+(8p - 1) = 0$. Известно, что сумма его корней равна -5. Найдите значения параметра p.
	№29.42 (задание повышенной трудности). Дано уравнение $x^2 - (p+1)x +$ $(2p^2 - -9p - 12) = 0$. Известно, что произведение его корней равно -21. Найдите значения параметра p.
	№29.43 (задание повышенной трудности). При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $2px^2 +$

	$+(p^2-9)x-5p+2=0$ являются противоположными числами. Найдите

Продолжение таблицы 2.2

1	*2*
	эти корни.
	№29.44 (задание повышенной трудности). При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $2px^2+$ $+5x+p+1=0$ являются взаимно обратными числами. Найдите эти корни.
	№29.45 (задание повышенной трудности). Дано уравнение $x^2+(3p-5)x+$ $(3p^2--11p-6)=0$. Известно, что сумма квадратов его корней равна 65. Найдите значение параметра p и корни уравнения.
	№29.46 (задание повышенной трудности). Разность корней уравнения $2x^2-15x+$ $+p=0$ равна 2,5. Найдите значение параметра p и корни уравнения.
	№29.47 (задание повышенной трудности). Один из корней квадратного уравнения $2x^2-14x+p=0$ больше другого в 2,5 раза. Найдите значение параметра p и корни уравнения.
Домашняя контрольная работа №4 по теме: «Квадратные уравнения»	Вариант 1. №3. Докажите, что не существует такого значения k, при котором уравнение $x^2-2kx+k-3=0$ имело бы только один корень.
	Вариант 1. №7. Дано уравнение x^2+ $+(t^2-3t-11)x+6t=0$. Известно, что сумма корней равна 1. Найдите значение параметра t и корни уравнения.
	Вариант 2. №3. Найдите такие значения k, при которых уравнение $x^2-2kx+2k+$ $+3=0$ имеет только один корень.
	Вариант 2. №7. Дано уравнение x^2+ $+(4k-1)x+(k^2-k+8)=0$. Известно, что произведение его корней равно 10. Найдите значение параметра k и корни уравнения.
Решение квадратных неравенств	№34.36. При каких значениях параметра p квадратное уравнение $3x^2-2px-p+$ $+6=0$: а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней?

	№34.37. При каких значениях параметра p квадратное уравнение $2x^2 - 2px + p +$ $+12 = 0$: а) имеет два различных корня;

Продолжение таблицы 2.2

1	*2*
	б) имеет один корень; в) не имеет корней?
	№34.38. При каких значениях параметра p квадратное уравнение $x^2 + 6px + 9 =$ $= 0$: а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней?
	№34.39. Найдите все значения параметра p, при которых не имеет действительных корней уравнение: а) $(p-1)x^2 - 4x + 5 = 0$; б) $(p-15)x^2 + 4px - 3 = 0$; в) $(2p+3)x^2 - 6x + 8 = 0$; г) $(3p-5)x^2 - (6p-2)x + 3p - 2 = 0$.
	№34.40. Найдите все значения параметра p, при которых имеет действительные корни уравнение: а) $x^2 - 6x + p^2 = 0$; б) $x^2 - 12px - 3p = 0$; в) $x^2 - 4x - 2p = 0$; г) $x^2 + 2px + p + 2 = 0$.
	№34.41. Найдите все значения параметра p, при которых имеет действительные корни уравнение: а) $3px^2 - 6px + 13 = 0$; б) $(1-3p)x^2 - 4x - 3 = 0$; в) $px^2 - 3px - 2 = 0$; г) $(p-1)x^2 - (2p-3)x + p + 5 = 0$.
	№34.42. При каких целочисленных значениях параметра p неравенство $(x-2)(x-p) < 0$ имеет три целочисленных решения?
	№34.43 (задание повышенной трудности). При каких значениях параметра p неравенство $x^2 \leq 9p^2$ имеет одно целочисленное решение?
Итоговое повторение	№10. а) Найдите значение параметра a, если известно, что прямая $x = -3$ является осью симметрии параболы $y == ax^2 + (a-5)x + 10$. б) Найдите значение параметра a, если

	известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 +$ $(a + +9)x - 15$.
	№11. а) При каких значениях b и c точка

Продолжение таблицы 2.2

1	*2*
	$M(2; -8)$ является вершиной параболы $y = 2x^2 + bx + c$? б) При каких значениях b и c точка $N(-4; 3)$ является вершиной параболы $y = -3x^2 + bx + c$?
	№21. а) При каких значениях m уравнение $2x^2 - 8x + 5 = m$ имеет один корень, два корня, не имеет корней? б) При каких значениях kуравнение $-3x^2 - 12x - 7 = k$ имеет один корень, два корня, не имеет корней?
	№27. Задайте гиперболу $y = \frac{k}{x}$ формулой, если известно, что она проходит через точку: а) $\left(-\frac{1}{4}; 12\right)$; б) $\left(6\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; в) $\left(\frac{1}{8}; -4\right)$; г) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{27}\right)$.
	№64. Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{если } x < -1, \\ -x^2 + 1, \text{если } x \geq -1. \end{cases}$ С помощью графика определите, при каких значениях p уравнение $f(x) = p$ имеет один корень, два корня, три корня.
	№91. При каком значении a вершина параболы $y = ax^2 + 6x - 5$ отстоит от начала координат на 5 единичных отрезков?
	№99. а) Разность корней квадратного уравнения $-x^2 + 11x + q = 0$ равна 3. Найдите значение параметра q. б) Один из корней квадратного уравнения $3x^2 - 18x + c = 0$ в 5 раз больше другого. Найдите значение параметра c.
	№100 (задание повышенной трудности). а) Найдите значение параметра m в уравнении $x^2 - (m - 1)x + (4m^2 -$ $-45m - 8) = 0$, если произведение

	корней уравнения равно 28. б) Найдите значение параметра m в уравнении $x^2 - (3m^2 + 16m - 8)x +$ $+(m + 9) = 0$, если сумма корней уравнения равна 4.

Продолжение таблицы 2.2

1	*2*
	№144. а) При каких значениях q уравнение $x^2 + 5x + q = 0$ не имеет корней? Укажите такое наименьшее целое значение q. б) При каких значениях q уравнение $x^2 - -7x + q = 0$ имеет два корня? Укажите такое наибольшее целое значение q.
	№145. а) При каких значениях a уравнение $ax^2 + 6x - 3 = 0$ имеет два корня? б) При каких значениях a уравнение $ax^2 + 5x + 15 = 0$ не имеет корней?
	№157. Найдите значение k, при котором квадратное уравнение обладает данным свойством а) $5x^2 - kx + 5 = 0$ имеет два корня; б) $3x^2 + 2kx - (k - 6) = 0$ имеет корни; в) $3x^2 + 2kx + 12 = 0$ не имеет корней; г) $2x^2 - kx + k + 6 = 0$ имеет не более одного корня.

Приведем анализ учебника Мордковича А.Г. 9 класс [6].

Таблица 2.3 – Задания из учебника Мордковича А.Г. 9 класс

Тема	Задание
1	*2*
Линейные и квадратные неравенства	№1.15 (задание средней трудности). При каких значениях параметра p квадратное уравнение $3x^2 - 2px - p + 6 = 0$: а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней; г) имеет хотя бы один корень?
	№1.23 (задание повышенной трудности). Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $(p + 4)x^2 + 2px + 2 = 0$ имеет: а) один корень;

	б) два корня; в) хотя бы один корень.
	№1.24 (задание повышенной трудности). Найдите такое целочисленное значение параметра p, при котором во множестве решений неравенства $(x+2)(p-x) \geq 0$

Продолжение таблицы 2.3

1	*2*
	содержатся: а) четыре целых числа; б) два натуральных числа; в) два целых числа; г) одно целое число.
	№1.25 (задание повышенной трудности). Найдите такое натуральное значение параметра p, при котором во множестве решений неравенства $(7-x)(p-x) < 0$: а) содержатся три натуральных числа; б) не содержится ни одного целого числа.
	№1.26 (задание повышенной трудности). Найдите такое натуральное значение параметра p, при котором во множестве решений неравенства $(x-8)(p+x) \leq 0$ содержатся: а) десять целых чисел; б) два отрицательных целых числа; в) четыре целых неположительных числа; г) только положительные целые числа.
Рациональные неравенства	№2.37 (задание повышенной трудности). Найдите такое целое значение параметра p, при котором множество решений неравенства $x^2(x+2)(p-x) \geq 0$ содержит: а) два целых числа; б) четыре целых числа; в) три целых числа; г) пять целых чисел.
Системы рациональных неравенств	№4.38. При каких значениях параметра p система неравенств имеет решения; не имеет решений: а) $\begin{cases} x < 3, \\ x > p; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leq 7, \\ x \geq p; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leq 5, \\ x > p; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \leq p, \\ x \geq 2? \end{cases}$
	№4.39. Укажите все значения параметра

	p, при которых решением системы неравенств $\begin{cases} x > 3, \\ x > p \end{cases}$ является промежуток: а) $(5; +\infty)$; б) $[3; +\infty)$; в) $(3; +\infty)$; г) $[2; +\infty)$.

Продолжение таблицы 2.3

1	*2*
	№4.40 (задание повышенной трудности). При каких значениях параметра p неравенство $(p-2)x^2 - (p-4)x +$ $+(3p-2) > 0$: а) не имеет решений; б) выполняется при любых значениях x?
Методы решения систем уравнений	№5.36. При каком значении параметр p пара чисел $(1; -2)$ является решением системы уравнений: а) $\begin{cases} p^2x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = p + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} p^2x + 2py = 5, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2p + 3? \end{cases}$
	№5.37 (задание повышенной трудности). При каком значении параметра p система уравнений имеет одно решение: а) $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y + px = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - px + 3 = 0, \\ y = (x-1)^2 - 3? \end{cases}$
	№5.38 (задание повышенной трудности). При каком значении параметра p система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x^2 = p \end{cases}$ имеет: а) три решения; б) одно решение?
Функция $y = x^n (n \in N)$, их свойства и графики	№12.20 (задание средней трудности). Чему равно n, если известно, что график степенной функции $y = x^n$ проходит через заданную точку: а) $(2; 256)$; б) $(-2; -128)$; в) $(3; 243)$; г) $(-4; 256)$?
Функция $y = x^{-n} (n \in N)$, их свойства и графики	№13.15 (задание средней трудности). Чему равно n, если известно, что график степенной функции $y = x^{-n}$ проходит

	через заданную точку: а) $\left(2; \frac{1}{256}\right)$; б) $\left(-2; -\frac{1}{32}\right)$; в) $\left(7; \frac{1}{343}\right)$; г) $\left(\frac{1}{5}; 625\right)$?

Продолжение таблицы 2.3

1	*2*
Функция $y = \sqrt[3]{x}$, её свойства и график	№14.26 (задание повышенной трудности). Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2(x+4)^2, \text{если } -6 \le x \le -2, \\ x^3, \text{если } -2 < x < 0, \\ \sqrt[3]{x}, \text{если } 0 \le x \le 8. \end{cases}$ При каком значении параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет: а) два корня; б) три корня; в) четыре корня; г) не имеет корней?
Домашняя контрольная работа №3 по теме: «Числовые функции»	Вариант 1. №10. Дана функция $y = f(x)$, где: $f(x) = \begin{cases} \lvert x \rvert, \text{если } x < 2, \\ -(x-3)^2 + 3, \text{если } x \ge 2, \end{cases}$ а) постройте график функции $y = f(x)$; б) укажите число корней уравнения $f(x) = p$, где p – любое действительное число.
	Вариант 2. №10. Дана функция $y = f(x)$, где: $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 + 2, \text{если } x < -3, \\ \lvert x \rvert, \text{если } x \ge -3, \end{cases}$ а) постройте график функции $y = f(x)$; б) укажите число корней уравнения $f(x) = p$, где p – любое действительное число.
Итоговое повторение на тему: «Функции и графики»	№52. Функция задана формулой $y = \frac{k}{x}$. Определите значение коэффициента k, если известно, что график функции проходит через точку $(-0{,}3; -2{,}1)$. 1) 6,3; 2) 7; 3) 0,63; 4) $\frac{1}{7}$.
	№53. Функция задана формулой $y = \frac{k}{x+4}$. Определите значение коэффициента k, если известно, что график функции

	проходит через точку $(-8; 2{,}4)$. 1) $-9{,}6$; 2) $-0{,}6$; 3) $28{,}8$; 4) $-15{,}2$.
	№54. Функция задана формулой $y = \frac{k}{x} -$

Продолжение таблицы 2.3

1	*2*
	-27. Определите значение коэффициента k, если известно, что график функции проходит через точку $(6; -87)$. 1) -19; 2) -10; 3) -684; 4) -360.
	№55. Функция задана формулой $y = \frac{k}{x-6} + 24$. Определите значение коэффициента k, если известно, что график функции проходит через точку $(-9; -6)$. 1) 450; 2) 2; 3) -450; 4) 6.
	№135. Найдите значение параметра a, если известно, что прямая $ax + 6y = 4$ проходит через точку $(2; 1)$.
	№136. Найдите значение параметра b, если известно, что прямая $-4x + by = -2$ проходит через точку $(3; 8)$.
	№137. Найдите значение параметра c, если известно, что прямая $2x - 5y + c =$ $= 0$ проходит через точку $(2; -1)$.
	№138. Найдите значение параметра a и b, если известно, что прямая $ax + by = 12$ проходит через точки $(2; 4)$ и $(-3; 0)$. В ответе укажите значение выражения $a + +b$.
	№139. Найдите значение параметра a и b, если известно, что прямая $ax + by = -18$ проходит через точки $(0; -6)$ и $(-20; 4)$. В ответе укажите значение выражения ab.
	№162. Найдите значение b, при котором прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы $y = 3x^2 + bx + 7$.
	№163. Найдите значение b, при котором прямая $x = -2$ является осью симметрии

	параболы $y = -5x^2 + bx + 3$.
	№164. Найдите значение a, при котором прямая $x = -4$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 + 12x - 5$.
	№165. Найдите значение a, при котором прямая $x = 3$ является осью симметрии параболы $y = ax^2 + 18x - 4$.

Продолжение таблицы 2.3

1	*2*
	№166. При каком значении p, где $p = \frac{c}{a}$, вершиной параболы $y = ax^2 + 4x + c$ является точка $(-1; 8)$?
	№167. При каком значении p, где $p = \frac{c}{a}$, вершиной параболы $y = ax^2 + 6x + c$ является точка $(1; 6)$?
	№168. При каком значении q, где $q = \frac{c}{b}$, вершиной параболы $y = -2x^2 + bx + c$ является точка $(3; 6)$?
	№169. При каком значении $q, где\, q = \frac{c}{b}$, вершиной параболы $y = 4x^2 + bx + c$ является точка $(-1; -16)$?
	№170. Определите, при каком значении c наименьшее значение функции $y = 2x^2 +$ $+16x + c$ равно -23.
	№171. Определите, при каком значении c наибольшее значение функции $y = -3x^2 + 30x + c$ равно 27.
Итоговое повторение на тему: «Уравнения и системы уравнений»	№86. Найдите целое значение a, при котором $ax + 5y = 0$, если пара чисел $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$
	№87. Найдите целое значение a, при котором $ax + y = 6$, если пара чисел $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$
	№88. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ \lvert x\rvert - y = a \end{cases}$ имеет три решения?
	№89. При каком значении a система уравнений

	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ \lvert x\rvert + y = a \end{cases}$ имеет одно решение?
Итоговое повторение на тему: «Неравенства и системы неравенств»	№114. При каких значениях n квадратное уравнение $x^2 + (n-2)x - (n-5) = 0$ имеет два корня?
	№115. При каких значениях n квадратное уравнение $x^2 - (n+1)x - (n-2) = 0$

Продолжение таблицы 2.3

1	*2*
	имеет два корня?

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Анализ учебников Мерзляка А.Г.

Приведем анализ учебника Мерзляка А.Г. 7 класс [23].

Таблица 3.1 – Задания из учебника Мерзляка А.Г. 7 класс

Тема	Задание
1	*2*
Линейное уравнение с одной переменной	№53 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a уравнение: 1) $5ax = -45$ имеет корень, равный числу 3; 2) $(a-4)x = -5a + 4x - 7$ имеет корень, равный числу -6?
	№54 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a уравнение: 1) $3ax = 12 - x$ имеет корень, равный числу -9; 2) $(5a+2)x = 8 - 2a$ имеет корень, равный числу 2?
	№55 (задача среднего уровня сложности). Укажите какое-либо значение b, при котором будет целым числом корень уравнения: 1) $0{,}1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.
	№57 (сложная задача). Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения: 1) $mx = 3$; 2) $(m+4)x = 49$ является целым числом.
	№58 (сложная задача). Найдите все целые значения n, при которых корень уравнения: 1) $nx = -5$; 2) $(n-6)x = 25$ является натуральным числом.
	№59 (сложная задача). При каком значении b уравнения: 1) $7 - 3x = 6x - 56$ и $x - 3b = -35$; 2) $2y - 9b = 7$ и $3{,}6 + 5y = 7(1{,}2 - y)$ имеют один и тот же корень?

Продолжение таблицы 3.1

1	2
	№60 (сложная задача). При каком значении c уравнения: 1) $(4x+1)-(7x+2)=x$ и $12x-9=$ $=c+5$; 2) $\frac{1}{7}cx=x+c$ и $6-3(2x-4)=-8x+$ $+4$ имеют один и тот же корень?
	№61 (сложная задача). При каком значении a уравнение: 1) $ax=6$; 2) $(3-a)x=4$; 3) $(a-2)x=a+2$ не имеет корней?
	№62 (сложная задача). При каком значении a любое число является корнем уравнения: 1) $ax=a$; 2) $(a-2)x=2-a$; 3) $a(a+5)x=a+5$?
	№63 (сложная задача). При каких значениях a уравнение: 1) $(a-5)x=6$; 2) $(a+7)x=a+7$ имеет единственный корень?
	№64 (сложная задача). Решите уравнение: 1) $(b+1)x=9$; 2) $(b^2+1)x=-4$.
	№65 (сложная задача). Решите уравнение $(m+8)x=m+8$.
	№70 (задача повышенной сложности). При каких целых значениях a корень уравнения: 1) $x-2=a$; 2) $x+7a=9$; 3) $2x-a=4$; 4) $x+2a=3$ является целым числом, которое делится нацело на 2?
	№71 (задача повышенной сложности). При каких целых значениях b корень уравнения: 1) $x+3=b$; 2) $x-2=b$; 3) $x-3b=8$

	является целым числом, которое делится нацело на 3?

Продолжение таблицы 3.1

1	*2*
	№72 (задача повышенной сложности). При каких значениях b корень уравнения меньше, чем b: 1) $3x = b$; 2) $x = 2b$?
	№73 (задача повышенной сложности). При каких значениях d корень уравнения больше, чем d: 1) $4x = d$; 2) $\frac{1}{5}x = d$?
Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки	№467 (сложная задача). При каком значении a не имеет корней уравнение: 1) $(x+1)(x-3) - x(x-3) = ax$; 2) $x(5x-1) - (x-a)(5x-1) = 4x - $ $-2a$; 3) $(2x-5)(x+a) - (2x+3)(x+1) =$ $= 4$?
	№468 (сложная задача). При каком значении a имеет бесконечно много корней уравнение: 1) $(x-4)(x+a) - (x+2)(x-a) = -6$; 2) $x(3x-2) - (x+2a)(3x+2) = 5a +$ $+6$?
Разность квадратов двух выражений	№557 (сложная задача). При каком значении b уравнение $(b^2-4)x = b-2$: 1) имеет бесконечно много корней; 2) не имеет корней; 3) имеет один корень?
	№558 (сложная задача). При каком значении a уравнение $(a^2-25)x = a +$ $+5$: 1) имеет бесконечно много корней; 2) не имеет корней; 3) имеет один корень?
Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений	№611 (сложная задача). При каком значении a уравнение $(6x-a)^2 +$ $+(8x-3)^2 = (10x-3)^2$ не имеет корней?
	№612 (сложная задача). При каком значении a уравнение $(2a-3x)^2 +$ $+(x-1)^2 = 10(x-2)(x+2)$ не имеет корней?
Линейная функция, её график и свойства	№879 (задача среднего уровня сложности). Найдите значение b, при

	котором график функции $y = -\frac{1}{9}x + b$ проходит через точку $A(-27; 4)$.

Продолжение таблицы 3.1

1	*2*
	№880 (задача среднего уровня сложности). При каком значении k график функции $y = kx - 15$ проходит через точку $B(3; -6)$?
	№881 (задача среднего уровня сложности). График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках $C(0; 4)$ и $D(-8; 0)$. Найдите значения k и b.
	№882 (задача среднего уровня сложности). График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках $M(3; 0)$ и $K(0; -1)$. Найдите значения k и b.
	№883 (задача среднего уровня сложности). Все точки графика функции $y = kx + b$ имеют одинаковую ординату, равную -6. Найдите значения k и b.
	№884 (задача среднего уровня сложности). График функции $y = kx + b$ параллелен оси абсцисс и проходит через точку $A(-2; 3)$. Найдите значения k и b.
	№889 (сложная задача). Графики функций $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке. Найдите значение k. Постройте в одной системе координат графики этих функций.
	№890 (сложная задача). При каком значении b графики функций $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ и $y = 5x + b$ пересекаются в одной точке?
Уравнения с двумя переменными	№917 (задача среднего уровня сложности). График уравнения $4x + 3y = 30$ проходит через точку $A(6; b)$. Чему равно значение b?
	№918 (задача среднего уровня сложности). График уравнения $7x - 5y = 47$ проходит через точку $B(a; -1)$. Чему равно значение a?
Линейное уравнение с двумя переменными и его график	№972 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a пара чисел $(a; 2a)$ является решением уравнения $2x + 7y = 16$?

	№973 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a пара чисел $(-4; 2)$ является решением

Продолжение таблицы 3.1

1	*2*
	уравнения: 1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?
	№974 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a график уравнения $11x - 13y = a + 4$ проходит через начало координат?
	№975 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a через точку $A(5; -3)$ проходит график уравнения: 1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?
	№976 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a график уравнения $ax + 4y = 0$ проходит через точку: 1) $A(12; -4)$; 2) $B(0; 2)$; 3) $O(0; 0)$?
	№977 (задача среднего уровня сложности). При каком значении b график уравнения $5x + by = 0$ проходит через точку: 1) $M(-4; -10)$; 2) $N(0; 1)$; 3) $K(-2; 0)$?
	№986 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a точка пересечения прямых $2x - 3y = -6$ и $4x + y = a$ принадлежит оси абсцисс?
	№987 (задача среднего уровня сложности). При каком значении b точка пересечения прямых $9x + 7y = 35$ и $x + +by = -20$ принадлежит оси ординат?
	№988 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a и b прямая $ax + by = 24$ пересекает оси координат в точках $A(-6; 0)$ и $B(0; 12)$?
Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных	№1014 (задача среднего уровня сложности). Пара чисел $(6; 4)$ является решением системы уравнений:

уравнений с двумя переменными	1) $\begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$ Найдите значения a и b.

Продолжение таблицы 3.1

1	*2*
	№1015 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a и b пара чисел $(-2; 3)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} ax - 3y = -13, \\ 7x + by = 1? \end{cases}$
	№1020 (сложная задача). При каких значениях a не имеет решений система уравнений $\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 8x + 9y = a? \end{cases}$
	№1021 (сложная задача). При каком значении a имеет бесконечно много решений система уравнений: 1) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ 4x + 20y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + ay = 12, \\ 9x - 15y = 36? \end{cases}$
	№1022 (сложная задача). При каких значениях a система уравнений: 1) $\begin{cases} 7x - 12y = 14, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$ не имеет решений; 2) $\begin{cases} 6x + ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?
	№1023 (сложная задача). Подберите такие значения a и b, при которых система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$ 1) имеет бесконечно много решений; 2) имеет единственное решение; 3) не имеет решений.
	№1024 (сложная задача). Подберите такие значения m и n, при которых система уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n: \end{cases}$ 1) имеет бесконечно много решений; 2) имеет единственное решение; 3) не имеет решений.

Решение систем линейных уравнений методом сложения	№1057 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a и b график уравнения $ax + by = 8$ проходит через точки $A(1; 3)$ и $B(2; -4)$?

Продолжение таблицы 3.1

1	*2*
	№1058 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях m и n график уравнения $mx - ny = 6$ проходит через точки $C(2; -1)$ и $D(-6; 5)$?
	№1059 (задача среднего уровня сложности). Запишите уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки: 1) $M(2; 1)$ и $K(-3; 2)$; 2) $P(-4; 5)$ и $Q(4; -3)$.
	№1060 (задача среднего уровня сложности). Запишите уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки: 1) $A(3; 2)$ и $B(-1; 4)$; 2) $C(-2; -3)$ и $D(1; 6)$.
	№1065 (сложная задача). При каком значении k прямая $y = kx + 2$ проходит через точку пересечения прямых $3x +$ $+5y = 5$ и $7x - 4y = 43$?
	№1066 (сложная задача). При каком значении a имеет решение система уравнений: $\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$
Упражнения для повторения курса 7 класса	№1166. При каком значении a уравнение $(x + 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 4) = ax$ имеет бесконечно много корней?
	№1167. При каком значении a уравнение $(3x - 1)(x + a) = (3x - 2)(x + 1)$ не имеет корней?
	№1223 (задача повышенной сложности). При каком значении a сумма $x + y$ принимает наименьшее значение, если: $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$
	№1224 (задача повышенной сложности). При каком значении a разность $x - y$ принимает наименьшее значение, если: $\begin{cases} x - 5y = a^2 + 10a + 1, \\ 4x + y = 4a^2 - 2a + 4? \end{cases}$

Приведем анализ учебника Мерзляка А.Г. 8 класс [24].

Таблица 3.2 – Задания из учебника Мерзляка А.Г. 8 класс

Тема	Задание
1	*2*
Основное свойство рациональной дроби	№60 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение: 1) $ax = 1$; 2) $ax = a$; 3) $(a-6)x = a^2 - 12a + 36$; 4) $(a^2-4)x = a - 2$.
	№61 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение: 1) $(a+3)x = 3$; 2) $(a^2-9a)x = a^2 - 18a + 81$.
Равносильные уравнения. Рациональные уравнения	№219 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение: 1) $\frac{x-1}{x-a} = 0$; 2) $\frac{x-a}{x+5} = 0$; 3) $\frac{a(x-a)}{x-3} = 0$; 4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7} = 0$; 5) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a} = 0$; 6) $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)} = 0$.
	№220 (задача повышенной сложности). При каких значениях a уравнение $\frac{x+a}{x^2-4} == 0$ не имеет корней?
	№221 (задача повышенной сложности). При каких значениях a уравнение $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$ имеет один корень?
Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график	№328 (задача среднего уровня сложности). Найдите значение k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ походит через точку: 1) $A(-5; 4)$;

	2) $B\left(\frac{1}{6};-2\right)$; 3) $C(1{,}5;-8)$.
Квадратные корни. Арифметический квадратный корень	№413 (сложная задача). При каком значении a уравнение $x^2=a+1$: 1) имеет два корня; 2) имеет один корень;

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	3) не имеет корней?
	№416 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение: 1) $a\sqrt{x-1}=0$; 2) $\sqrt{(a-1)x}=0$; 3) $a\sqrt{x-1}=a$; 4) $\sqrt{x-2}=a$.
	№417 (задача повышенной сложности). При каких значениях a уравнение $(\sqrt{x}--1)(x-a)=0$ имеет только один корень?
Функция $y=\sqrt{x}$ и её график	№607 (задача повышенной сложности). Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}==a-x$ в зависимости от значения a?
Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений	№635 (задача среднего уровня сложности). При каком значении m: 1) число 2 является корнем уравнения $x^2+mx-6=0$; 2) число -3 является корнем уравнения $2x^2-7x+m=0$; 3) число $\frac{1}{7}$ является корнем уравнения $m^2x^2+14x-3=0$?
	№636 (задача среднего уровня сложности). При каком значении n: 1) число 6 является корнем уравнения $x^2-nx+3=0$; 2) число 0,5 является корнем уравнения $nx^2-8x+10=0$?
	№642 (задача среднего уровня сложности). При каком значении m не является квадратным уравнение: 1) $(m-4)x^2+mx+7=0$; 2) $(m^2+8m)x^2+(m+8)x+10=0$; 3) $(m^2-81)x^2-6x+m=0$?
	№649 (сложная задача). При каком значении a уравнение $(a-2)x^2+$

	$+(2a-1)x+a^2-4=0$ является: 1) линейным; 2) приведенным квадратным; 3) неполным приведенным квадратным; 4) неполным приведенным квадратным?
	№650 (сложная задача). Определите, при каком значении a один из корней

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения: 1) $x^2+ax+a-4=0$; 2) $4x^2+(a-8)x+a^2+a=0$; 3) $ax^2+(a+3)x+a^2-3a=0$.
Формула корней квадратного уравнения	№672 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a число $\frac{1}{4}$ является корнем уравнения $a^2x^2+4ax-5=0$?
	№673 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a число 2 является корнем уравнения x^2- $-0{,}5ax-3a^2=0$?
	№688 (сложная задача). При каком значении b имеет единственный корень уравнение: 1) $2x^2+4x-b=0$; 2) $3x^2-bx+12=0$?
	№689 (сложная задача). При каком значении b имеет единственный корень уравнение: 1) $6x^2-18x+b=0$; 2) $8x^2+bx+2=0$?
	№690 (сложная задача). Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение: 1) $4x^2-px-3=0$; 2) $x^2+px+p-2=0$.
	№691 (сложная задача). Докажите, что при любом значении m не имеет корней уравнение: 1) $x^2+mx+m^2+1=0$; 2) $x^2-2mx+2m^2+9=0$.
	№692 (сложная задача). Докажите, что при любом значении b уравнение $x^2++bx-7=0$ имеет два корня.
	№693 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение:

	1) $x^2+(3a+1)x+2a^2+a=0$; 2) $x^2-(2a+4)x+8a=0$; 3) $a^2x^2-24ax-25=0$; 4) $3(2a-1)x^2-2(a+1)x+1=0$.
	№694 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение:

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	1) $x^2-(2a-5)x-3a^2+5a=0$; 2) $x^2+(3a-4)x-12a=0$; 3) $ax^2-(a+1)x+1=0$.
	№695 (задача повышенной сложности). При каком значении b имеет единственный корень уравнение: 1) $bx^2-6x-7=0$; 2) $(b+5)x^2-(b+6)x+3=0$; 3) $(b-4)x^2+(2b-8)x+15=0$?
	№696 (задача повышенной сложности). При каком значении b имеет единственный корень уравнение: 1) $bx^2+x+b=0$; 2) $(b+3)x^2+(b+1)x-2=0$?
Теорема Виета	№711. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2+bx+c=0$, если его корнями являются числа: 1) -8 и 6; 2) 4 и 5.
	№712. Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2+bx+c=0$, если его корнями являются числа: 1) -2 и $0{,}5$; 2) -10 и -20.
	№715 (задача среднего уровня сложности). Число -2 является корнем уравнения $x^2-8x+q=0$. Найдите значение q и второй корень уравнения.
	№716 (задача среднего уровня сложности). Число 7 является корнем уравнения $x^2+px-42=0$. Найдите значение p и второй корень уравнения.
	№717 (задача среднего уровня сложности). Число $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $6x^2-bx+4=0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.
	№718 (задача среднего уровня сложности). Число $-0{,}2$ является корнем уравнения $4x^2-5{,}6x+m=0$. Найдите

	значение m и второй корень уравнения.
	№721 (задача среднего уровня сложности). При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx - 17 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	№725 (сложная задача). Один из корней уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 меньше другого. Найдите значение c и корни уравнения.
	№726 (сложная задача). Корни уравнения $x^2 + 20x + a = 0$ относятся как $7:3$. Найдите значение a и корни уравнения.
	№727 (сложная задача). Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 5x_2 = 28$. Найдите корни уравнения и значение m.
	№728 (сложная задача). Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 4x + n = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - x_2 = 8$. Найдите корни уравнения и значение n.
	№737 (задача повышенной сложности). Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$. Найдите значение a.
	№738 (задача повышенной сложности). Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - ax + 8 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Найдите значение a.
	№739 (задача повышенной сложности). Верно ли утверждение: 1) уравнение $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ имеет кони разных знаков при любом значении a; 2) если уравнение $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ имеет корни, то независимо от значения a они оба отрицательны?
	№740 (задача повышенной сложности). Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение: 1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

	№741 (задача повышенной сложности). Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение: 1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.
	№742 (задача повышенной сложности). Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равны его коэффициентам b и c. Найдите b и c.

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	№743 (задача повышенной сложности). При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна: 1) 12; 2) 6?
	№744 (задача повышенной сложности). При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a-1)x - 2a = 0$ равна 9?
Квадратный трёхчлен	№759 (сложная задача). При каком значении b разложение на линейные множители трёхчлена: 1) $2x^2 - 5x + b$ содержит множитель $(x-3)$; 2) $-4x^2 + bx + 2$ содержит множитель $(x+1)$; 3) $3x^2 - 4x + b$ содержит множитель $(3x-2)$?
	№760 (сложная задача). При каком значении a разложение на линейные множители трёхчлена: 1) $2x^2 - 7x + a$ содержит множитель $(x-4)$; 2) $4x^2 - ax + 6$ содержит множитель $(2x+1)$?
	№767 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение: 1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$; 2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.
	№768 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64$.
Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнения	№796 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите

	уравнение: 1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$; 2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$; 3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$; 4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0$.
	№797 (задача повышенной сложности). При каких значениях a уравнение

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	$\frac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ имеет единственный корень?
Упражнения для повторения курса алгебры 8 класса	№846. Для каждого значения a решите уравнение: 1) $(a+2)x=7$; 2) $(a+6)x=a+6$; 3) $(a+3)x=a^2+6a+9$; 4) $(a^2-4)x=a-2$.
	№871. Для каждого значения a решите уравнение: 1) $\frac{x+2}{x+a}=0$; 2) $\frac{x-a}{x-1}=0$.
	№920. Для каждого значения a решите уравнение: 1) $x^2+(5a-1)x+4a^2-a=0$; 2) $x^2-(2a+3)x+6a=0$; 3) $a^2x^2-10ax+16=0$.
	№924. Не вычисляя дискриминант, найдите, при каком значении a уравнение: 1) $x^2+22x+a=0$; 2) $x^2-ax+81=0$ имеет единственный корень. Найдите этот корень.
	№925. При каком значении b корнями уравнения $x^2+bx-23=0$ являются противоположные числа? Найдите эти корни.
	№926. Число $-\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $12x^2-bx+5=0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.
	№927. Число 0,2 является корнем уравнения $8x^2-3{,}2x+k=0$. Найдите значение k и второй корень уравнения.
	№928. Корни x_1 и x_2 уравнения x^2- $-bx+20=0$ удовлетворяют условию

	$x_1 = 5x_2$. Найдите значение b и корни уравнения.
	№932. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-2ax+3}{x-2} = 0$ имеет единственный корень?
	№934. Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение: 1) $x^2 + bx - 6 = 0$;

Продолжение таблицы 3.2

1	*2*
	2) $x^2 + bx + 21 = 0$.
	№935. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - (2a-5)x + a^2 - 7 = 0$. При каком значении a выполняется равенство $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?
	№936. При каком значении a произведение корней уравнения $x^2 + (a+9)x + a^2 + 2a = 0$ равно 15?

Приведем анализ учебника Мерзляка А.Г. 9 класс [25].

Таблица 3.3 – Задания из учебника Мерзляка А.Г. 9 класс

Тема	Задание
1	*2*
Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки	№142 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a уравнение: 1) $x^2 + 3x - a = 0$ не имеет корней; 2) $2x^2 - 8x + 5a = 0$ имеет хотя бы один действительный корень?
	№143 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях b уравнение: 1) $3x^2 - 6x + b = 0$ не имеет два различных корня; 2) $x^2 - x - 2b = 0$ не имеет корней?
	№157 (сложная задача). При каких значениях a уравнение: 1) $4x + a = 2$ имеет положительный корень; 2) $(a+6)x = 3$ имеет отрицательный корень; 3) $(a-1)x = a^2 - 1$ имеет единственный положительный корень?

	№158 (сложная задача). При каких значениях m уравнение: 1) $2 + 4x = m - 6$ имеет неотрицательный корень; 2) $mx = m^2 - 7m$ имеет единственный отрицательный корень?
	№159 (задача повышенной сложности). Найдите все значения a, при которых имеет два различных действительных

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	корня уравнение: 1) $ax^2 + 2x - 1 = 0$; 2) $(a+1)x^2 - (2a-3)x + a = 0$; 3) $(a-3)x^2 - 2(a-5)x + a - 2 = 0$.
	№160 (задача повышенной сложности). Найдите все значения a, при которых не имеет корней уравнение $(a-2)x^2 +$ $+(2a+1)x + a = 0$.
	№161 (задача повышенной сложности). Существует ли такое значение a, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение): 1) $ax > 3x + 4$; 2) $(a^2 - a - 2)x \leq a - 2$?
	№162 (задача повышенной сложности). Существует ли такое значение a, при котором любое число является решением неравенства (в случае утвердительного ответа укажите это значение): 1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)x \geq a + 4$?
	№163 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите неравенство: 1) $ax > 0$; 2) $ax < 1$; 3) $ax \geq a$; 4) $2(x - a) < ax - 4$; 5) $(a-2)x > a^2 - 4$; 6) $(a+3)x \leq a^2 - 9$.
	№164 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите неравенство: 1) $a^2x \leq 0$; 2) $a + x < 2 - ax$; 3) $(a+4)x > 1$.

Системы линейных неравенств с одной переменной	№207 (задача повышенной сложности). При каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств: 1) $\begin{cases} x \geq 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq a? \end{cases}$
	№208 (задача повышенной сложности). При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq a? \end{cases}$
	№209 (задача повышенной сложности). При каких значениях a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \geq a \end{cases}$ является промежуток: 1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?
	№210 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < 2, \\ x \leq a. \end{cases}$
	№211 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$
	№212 (задача повышенной сложности). При каких значениях a множество решений системы неравенств $\begin{cases} x \geq 7, \\ x < a \end{cases}$ содержит ровно четыре целых числа?
	№213 (задача повышенной сложности). При каких значениях b множество решений системы неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \geq b \end{cases}$ содержит ровно три целых числа?
	№214 (задача повышенной сложности). При каких значениях a наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \geq 6, \\ x > a \end{cases}$ является число 9?
	№215 (задача повышенной сложности). При каких значениях b и наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \leq b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число -6?

	№216 (задача повышенной сложности). При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ меньше числа 5?
	№217 (задача повышенной сложности). При каких значениях a корни уравнения $x^2 - (4a-2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ принадлежит промежутку $[-2; 8]$?
	№218 (задача повышенной сложности). При каких значениях a один из корней уравнения $3x^2 - (2a+5)x + 2 + a -$

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	$a^2 = 0$ меньше -2, а другой – больше 3?
Свойства квадратичной функции	№270 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a функция $y = x^2 + (2a-1)x + a^2 + a$ имеет два нуля?
	№271 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a функция $y = x^2 + 6x + a$ не имеет нулей?
	№272 (задача среднего уровня сложности). При каком наибольшем целом значении n функция $y = (8 - -3n)x - 7$ является возрастающей?
	№273 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях m функция $y = mx - m - 3 + 2x$ является убывающей?
	№279 (задача повышенной сложности). При каких значениях a функция $f(x) = = (a-1)x^2 + 2ax + 6 - a$ имеет единственный нуль?
	№280 (задача повышенной сложности). Постройте график функции $f(x) = x^2$, определённой на промежутке $[a; 2]$, где $a < 2$. Для каждого значения a найдите наибольшее и наименьшее значения функции.
Построение графика функции $y = kf(x)$	№288. При каких значениях a точка $A(a; 16)$ принадлежит графику функции $y = 4x^2$?
	№289. При каких значениях b точка $B(-2; b)$ принадлежит графику функции $y = -0{,}2x^2$?
	№290. Известно, что точка $M(3; -6)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a.

	№291. Известно, что точка $K(-5;10)$ принадлежит графику функции $y = ax^2$. Найдите значение a.
Квадратичная функция, её график и свойства	№343. График функции $y = -6x^2 + x +$ $+c$ пересекает ось ординат в точке $M(0;-8)$. Найдите значение c.
	№364 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях p и q график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $M(-1;4)$ и

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	$K(2;10)$?
	№365 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a и b нулями функции $y = ax^2 + bx + 7$ являются числа -2 и 3?
	№366 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a и b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходит через точки $C(-3;8)$ и $D(1;4)$?
	№369 (задача среднего уровня сложности). При каком значении b промежуток $(-\infty;2]$ является промежутком возрастания функции $y == -4x^2 - bx + 5$?
	№370 (задача среднего уровня сложности). При каком значении b промежуток $(-\infty;-3]$ является промежутком убывания функции $y == 3x^2 + bx - 8$?
	№371 (задача среднего уровня сложности). При каком значении a функция $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ является квадратичной и её график имеет с осью абсцисс одну общую точку?
	№372 (сложная задача). При каких значениях a функция $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x?
	№373 (сложная задача). При каких значениях a функция $y = -4x^2 - 16x +$ $+a$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях x?
	№374 (сложная задача). При каком значении c наибольшее значение функции $y = -5x^2 + 10x + c$ равно -3?

	№375 (сложная задача). При каком значении c наименьшее значение функции $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ равно -1?
	№378 (сложная задача). При каких значениях p и q вершина параболы $y == x^2 + px + q$ находится в точке $A(2; 5)$?
	№379 (сложная задача). Парабола $9 = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке $C(4; -10)$ и проходит через точку

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	$D(1; -1)$. Найдите значения коэффициентов a, b и c.
	№388 (сложная задача). Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя построенный график, определите, при каких значениях a уравнение $x^2 + 2x - 3 = a$: 1) имеет два корня; 2) имеет один корень; 3) не имеет корней.
	№389 (сложная задача). Постройте график функции $y = -x^2 - 4x + 5$. Используя построенный график, определите, сколько корней имеет уравнение $-x^2 - 4x + 5 = a$ в зависимости от значения a.
	№390 (задача повышенной сложности). Пусть x_1 и x_2 – нули функции $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$. При каких значениях a выполняется неравенство $x_1 < -2 < x_2$?
	№391 (задача повышенной сложности). Известно, что x_1 и x_2 – нули функции $y = 2x^2 - (3a - 1)x + a - 4$, $x_1 < x_2$. При каких значениях a число 1 принадлежит промежутку $[x_1; x_2]$?
Решение квадратных неравенств	№422 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях a не имеет корней уравнение: 1) $x^2 - ax + 4 = 0$; 2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$; 3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?
	№423 (задача среднего уровня сложности). При каких значениях b имеет два различных действительных корня уравнение:

	1) $x^2-8bx+15b+1=0$; 2) $2x^2+2(b-6)x+b-2=0$?
	№435 (задача повышенной сложности). При каких значениях a данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x: 1) $x^2-4x+a>0$; 2) $x^2+(a-1)x+1-a-a^2\geq 0$; 3) $-\frac{1}{4}x^2+5ax-9a^2-8a<0$; 4) $(a-1)x^2-(a+1)x+a+1>0$?

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	№436 (задача повышенной сложности). При каких значениях a не имеет решений неравенство: 1) $-x^2+6x-a>0$; 2) $x^2-(a+1)x+3a-5<0$; 3) $ax^2+(a-1)x+(a-1)<0$?
	№437 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите систему неравенств: 1) $\begin{cases} x^2-5x+4>0, \\ x>a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2-3x-1\leq 0, \\ x<a. \end{cases}$
	№438 (задача повышенной сложности). Для каждого значения a решите систему неравенств: 1) $\begin{cases} x^2-x-72<0, \\ x>a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-9x+8>0, \\ x<a. \end{cases}$
Системы уравнений с двумя переменными	№470 (сложная задача). При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x-y=a \end{cases}$ 1) имеет одно решение; 2) имеет два решения; 3) не имеет решений?
	№471 (сложная задача). При каких значениях k система уравнений $\begin{cases} y-x^2=4, \\ y=kx+3 \end{cases}$ 1) имеет одно решение; 2) имеет два решения; 3) не имеет решений?
	№472 (задача повышенной сложности). Сколько решений в зависимости от

	значения a имеет система уравнений: 1) $\begin{cases} y = \lvert x \rvert, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \lvert x \rvert = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$
	№473 (задача повышенной сложности). Сколько решений в зависимости от

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	значения a имеет система уравнений: 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \lvert y \rvert = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - \lvert x \rvert; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$
Упражнения для повторения курса алгебры 9 класса	№954. При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение: 1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq a? \end{cases}$
	№955. При каких значениях a система неравенств не имеет решений: 1) $\begin{cases} x < 6, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 5, \\ x > a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leq -8, \\ x \geq a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leq a? \end{cases}$
	№956. При каких значениях a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x \geq 3, \\ x > a \end{cases}$ является: 1) промежуток $[7; +\infty)$; 2) промежуток $[3; +\infty)$; 3) промежуток $(-2; +\infty)$; 4) пустое множество?
	№957. При каких значениях a уравнение $x^2 - (2a + 2)x - 2a - 3 = 0$ имеет два

	различных отрицательных корня?
	№958. При каких значениях a уравнение $x^2-(2a-1)x+a^2-a-$ $-6=0$ имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $[-3;2]$?
	№966. Найдите значения b и c, при которых функция $y=x^2+bx+c$: 1) имеет единственный нуль в точке $x==-3$; 2) принимает наименьшее значение, равное 4, в точке $x=0$;

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	3) имеет нули в точках $x=-2$ и $x=5$.
	№968. При каком значении c график функции $y=x^2-6x+c$: 1) проходит через начало координат; 2) имеет с осью абсцисс только одну общую точку; 3) пересекает ось ординат в точке $A(0;-4)$; 4) пересекает ось абсцисс в точке $B(2;0)$?
	№969. При каком значении b график функции $y=x^2+bx+2$: 1) имеет с осью абсцисс только одну общую точку; 2) не имеет с осью абсцисс общих точек; 3) пересекает ось абсцисс в точках, расстояние между которыми равно 4?
	№970. График функции $y=x^2+px+q$ проходит через точки $A(1;1)$ и $B(2;2)$. Проходит ли этот график через точку: 1) $C(-1;-1)$; 2) $D(3;5)$?
	№971. Парабола $y=ax^2+bx+c$ проходит через точку $(0;10)$, а её вершиной является точка $(6;-2)$. Найдите коэффициенты a, b и c.
	№972. Значение квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ в точке $x=-1$ равно 0, а при $x=\frac{1}{4}$ функция принимает наименьшее значение, равное $-\frac{25}{8}$. Найдите коэффициенты a, b и c.
	№973. При каком значении m: 1) наименьшее значение функции

	$y == x^2 - 6x + m$ равно -8; 2) наибольшее значение функции $y == -x^2 + 4x - m$ равно 12?
	№975. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax +$ $+a - 2 = 0$ будет принимать наименьшее значение?
	№981. При каких значениях a имеет два различных корня уравнение: 1) $2x^2 + ax + a - 2 = 0$; 2) $(2a - 1)x^2 + (a - 3)x + 1 = 0$;

Продолжение таблицы 3.3

1	*2*
	3) $ax^2 - (3a + 1)x + a = 0$?
	№982. При каких значениях a множеством решений неравенства является множество действительных чисел: 1) $5x^2 - x + a > 0$; 2) $ax^2 - 10x - 5 < 0$; 3) $ax^2 - 2(a - 1)x + 4a \leq 0$; 4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$?
	№987. При каком значении a система уравнений имеет единственное решение: 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y = a? \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Дидактические материалы к ТКУ 7 класс

Тема: Линейные уравнения с одной переменной.

№1 Заполните таблицу.

Таблица 4.1 – Таблица к заданию 1

Значения k и b	$k \neq 0$ и $b \neq 0$	$k = 0$ и $b \neq 0$	$k = 0$ и $b = 0$
Корни уравнения			

№2 Найдите корни линейного уравнения:

1) $5 + x = 7 - x$;
2) $6x + 3 = 6x - 5$;
3) $7x + 2 = 7x + 2$.

№3 При каком значении параметра a число 4 является корнем уравнения?

1) $ax = -12$;
2) $8x = 2a$.

№4 Решите уравнение:

1) $ax = 9$;
2) $5x = b$;
3) $0 \cdot x = c$.

№5 Решите уравнение $(a - 3)x - 6 = 0$.

№6 При каком a уравнение не будет иметь решение $ax - 5a = 7x - -3$?

№7 Решить уравнение $b^2x + b^2 = x + b$.

№8 Решить уравнение $5x - 3b = 9 - 5b + bx$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Дидактические материалы к ТКУ 8 класс

Тема: Квадратные уравнения.

№1 Является ли квадратное уравнение неполным?

1) $7x^2 - 14 = 0$;
2) $3x^2 + 4x = 0$;
3) $2x^2 = 0$.

№2 При каком значении a уравнение является неполным?

1) $7x^2 - a = 0$;
2) $3x^2 + ax = 0$;
3) $2x^2 + (a + 3)x = 0$;
4) $4x^2 + a^2 - 4 = 0$;
5) $(a - 2)x^2 + a^2 - 4 = 0$.

№3 При каких значениях параметра c дискриминант уравнения $2x^2 + +cx + 5 = 0$ будет равен нулю?

№4 При каких значениях параметра b дискриминант уравнения $-2x^2 - 7x + b = 0$ будет отрицательным?

№5 Решить уравнение $ax^2 + ax + 1 = 0$.

№6 При каких значениях a уравнение $(a + 1)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ не имеет решений.

№7 При каких значениях параметра c уравнение $cx^2 - 2x - 5 = 0$ имеет два корня?

№8 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(2a - 1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ имеет один корень.