МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ Физико-математический

КАФЕДРА Математики и методики обучения математике

Особенности методики обучения решению иррациональных уравнений и неравенств

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата/магистратуры

«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Юлдыбаева Аэлита Сабиржановна

Проверка на объем заимствований:
61,44 % авторского текста

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 4 » 04 2017 г.
зав. кафедрой мат. и МОМ
(название кафедры)
_______ ФИО

Челябинск
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ Физико-математический

КАФЕДРА Математики и методики обучения математике

Особенности методики обучения решению иррациональных уравнений и неравенств

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы бакалавриата/магистратуры

«Математика. Экономика»

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513/086-5-1
Юлдыбаева Аэлита Сабиржановна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры ММОМ
Коржакова Светлана Васильевна

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована

« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой _______________
(название кафедры)
_____________ ФИО

Челябинск
2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Математика находится в непрерывном развитии, что обусловлено, потребностями жизненной практики и внутренними потребностями становления математики как науки.

Изучение предмета математики, получаемое в общеобразовательной школе, является основой общего образования. Практически все, что окружает современного человека, так или иначе связано с математикой.

В курсе алгебры средней школы в общеобразовательных классах иррациональные уравнения и неравенства находят свое должное место. Тема «Иррациональные уравнения и неравенства» изучается в 10-11 классе, учащиеся рассматривают различные методы решения заданий по данной теме. С каждым учебным годом на последующих этапах изучения данной темы учащиеся углубленно рассматривают материал для дальнейшего решения задач.

Важно отметить, что в материалы Единого Государственного Экзамена входят задания на иррациональные уравнения и неравенства. Однако практика показывает, что данная тема вызывает затруднения у учащихся, многие часто допускают ошибки при решении, поэтому целесообразно дополнительно изучать данную тему на факультативных занятиях. Необходимо научиться решать предложенные задачи быстро, эффективно и без ошибок.

Обучающиеся должны знать и уметь применять различные методы при решении иррациональных уравнений и неравенств, в этом и состоит актуальность данной темы.

Объект исследования – процесс обучение математике в 9-11 классах.

Предмет исследования – изучение темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в школе.

Цель данного исследования: изучение особенностей изложения темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в школе и разработка системы тестовых заданий и факультативного курса, раскрывающих тему «Иррациональные уравнения и неравенства» для учащихся основной школы.

Гипотеза: если выделить основные типы иррациональных уравнений и неравенств и методы их решения, а также разработать и провести факультативные занятия, то это будет способствовать качественному обучению решать иррациональные уравнения и неравенства.

Исходя из цели и гипотезы исследования, можно выделить следующие **задачи:**

- Проанализировать современные школьные учебники по теме исследования;
- Раскрыть типы иррациональных уравнений и неравенств и методы их решений;
- Проанализировать материал ЕГЭ с целью выявления заданий на тему «Иррациональные уравнения и неравенства»;
- Разработать тестовые задания по типу ЕГЭ для учащихся 10-11 классов по данной теме
- Разработать факультативный курс для учащихся 10-11 классов по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

Для достижения поставленных целей, проверки гипотезы и решения сформулированных выше задач были использованы следующие **методы исследования:**

- Изучение научной и методической литературы по теме исследования;
- Сравнительный анализ учебников в аспекте содержания темы «Иррациональные уравнения и неравенства»;
- Анализ материалов ЕГЭ за 2011 – 2017 гг.;

Данная работа включает в себя: введение, две главы основной части, приложение, заключение и список использованной литературы.

Во введении обоснована актуальность, поставлены цели и задачи, сформулирована гипотеза, перечислены методы для их решения.

Первая глава посвящена теории иррациональных уравнений и неравенств, где даются определения основных понятий, рассматриваются свойства степени и арифметического корня, а также типы и методы решения иррациональных уравнений и неравенства. Также проведен анализ изучения данной темы в школьных учебниках.

Во второй главе представлен анализ контрольно-измерительных материалов ЕГЭ за последние 7 лет по теме: «Иррациональные уравнения и неравенства», разработан факультативный курс для подготовки к ЕГЭ по данной теме.

В заключении проводятся итоги проделанной работы.

ГЛАВА1. КОРНИ И СТЕПЕНИ В ШКОЛЕ

§1.Основы построения теории корни и степени

1.1 Понятие степени и корня. Свойства.

Истоки понятия степени находятся в глубокой древности; дошедшие до нас глиняные плитки древних вавилонян содержат записи таблиц квадратов, кубов и их обратных значений.

Первоначально под степенью понимали произведение нескольких одинаковых сомножителей. Способы записи степеней и связанных с ними обратных величин – корней из числа менялись с течением времени, пока не приняли современную форму.

Степенью называется выражение вида a^n. Число *a* называется основанием степени, число *n* — показателем степени.

Степенью числа a *с натуральным показателем* n, большим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равняется ***a***.

Степень числа ***a*** с показателем *n* обозначают a^n, например:

$a^1 = a,\quad a^2 = a \cdot a,\quad a^3 = a \cdot a \cdot a,\quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \ldots.$

В общем случае при *n* > 1 имеем

$$a^n = aa \ldots a \qquad (1)$$

Рассмотрим основные свойства действий со степенями:

1. *При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.*

   Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (2)$$

   для доказательства используем определние стпени и свойства умножения. Представим выражение $\mathbf{a^m a^n}$ сначала в виде произведения множителей, ккаждый из которых равен a, затем в в иде степени $a^m a^n = (aa\ldots a)(aa\ldots a) = aa\ldots a = a^{m+n}$

Таким образом, $a^m a^n = a^{m+n}$

Доказанное равеснство выражает соновное свойство степени. Оно распространяется на произведение трех и более степеней. Например, $a^m a^n a^k = a^{m+n} a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}$

Например: $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

$3^1 \cdot 3^4 = 3^{1+4} = 3^5$

2. *При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются.*

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ m>n,\ a\neq 0 \qquad (3)$$

рассмотрим произведение $a^{m-n} \cdot a^n$. Мы знаем, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются (по свойству 1). Сложив показатели $m - n$ и n, получим $(m - n)+n = m$. Итак, $a^{m-n} \cdot a^n = a^n$, а это как раз и означает, что $a^m : a^n = a^{m-n}$. Теорема доказана.

Например: $2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2$

$3^8 : 3^5 = 3^{8-5} = 3^3$

3. *При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются.*

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (4)$$

По определению степени с натуральным показателем имеем:

$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m \cdot a^m = a^{m+m+\ldots+m} = a^{mn}$

Например: $(2^5)^2 = 2^{5\cdot 2} = 2^{10}$

$(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6$

4. *При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.*

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad (5)$$

По определению степени с натуральным показателем имеем

$(ab)^n = (ab)(ab)\ldots(ab)$

Сгруппировав отдельно множители a и множители b, получим:

(ab)·(ab)…(ab) = (aa…a)·(bb…b)

Воспользовавшись определением степени, находим:

(aa…a)·(bb…b) = a^n b^n

Следовательно, $(ab)^n = a^n b^n$

Например: $(3 \cdot 2)^2 = 3^2 2^2 = 6^2 = 36$

5. *При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0 \qquad (6)$$

По определению степени с натуральным показателем имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Например: $\frac{12^6}{4^6} = \left(\frac{12}{4}\right)^6 = 3^6 = 729$

Часто в вычислениях используются степени с рациональным показателем. При этом удобным оказалось такое обозначение:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (7)$$

Квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют подкоренным числом.

Итак, если a – неотрицательное число, то:

1. $\sqrt{a} \geq 0$
2. $(\sqrt{a})^2 = a$

Если a <0, то уравнение x^2 = a не имеет корней, говорить в этом случае о квадратном корне из числа a не имеет смысла. Таким образом, выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл лишь при a≥ 0.

Операцию нахождение квадратного корня из неотрицательного числа называют извлечением квадратного корня. Эта операция является обратной по отношению к возведению в квадрат.

Корень нечетной степени n всегда существует. Корень четной степени $2n$ из отрицательного числа не существует. Существуют два противоположных числа, которые являются корнями четной степени из положительного числа $a > 0$.

Положительный корень n- ой степени из положительного числа называют арифметическим корнем.

Арифметическим квадратным корнем из данного неотрицательного числа b называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен b.

Рассмотрим основные свойства действий с арифметическим корнем:

1. Квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad (8)$$

Для того чтобы доказать, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ есть арифметический квадратный корень из ab, надо доказать, что:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$

2) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$

По определению квадратного корня $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} \geq 0$, поэтому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. По свойству степени произведения и определению квадратного корня

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (a)^2 \cdot (b)^2 = ab$$

Например: $\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{9} = 6 \cdot 8 \cdot 3 = 144$

2. Корень из дроби равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ если } a \geq 0, b > 0 \qquad (9)$$

Требуется доказать, что:

1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$

2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$

Так как $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} > 0$, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$.

По свойству возведения дроби в степень и определению квадратного корня получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$$

3. Для любого числа а справедливо равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ (10)

Рассмотрим два случая: $a \geq 0$ и а < 0.

1) Если а$\geq 0,$ то по определению арифметического корня $\sqrt{a^2} = a$

2)Если а < 0, то (– а) > 0 и поэтому $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$

Таким образом, $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$ т.е. $\sqrt{a^2} = |a|$

4. Если a>b>0, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ (11)

Если допустить, что $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим а $\leq b$, что противоречит условию а > b

Если степень корня n = 2, то показатель корня обычно не пишется.

Кубический корень из числа a— это число, куб которого равен a. Кубический корень определен для всех a. Его можно извлечь из любого числа: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Корень n-ой степени

Корень n-й степени из числа a— это число, n-я степень которого равна a.

Если n— чётно.

– Тогда, если а < 0 корень n-ой степени из а не определен.

– Или если a ≥ 0, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется арифметическим корнем n-ой степени из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$

Если n— нечётно.

– Тогда уравнение $x^n = a$имеет единственный корень при любом a.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Свойства арифметического корня n-й степени

1. Если a≥0 и b≥ 0, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (12)

   Пусть a≥0 и b≥ 0. тогда каждое из выражений $\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и имеет смысл. Докажем, что выполняются условия:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

Значение выражения $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательно, так как по определению арифметического корня$\sqrt[n]{a} \geq 0$ и $\sqrt[n]{b} \geq 0$. Кроме того, по свойству степени произведения $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

Значит, по определению арифметического корня й степени верно равенство $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. Если a≥ 0 и , то b>0, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (13)

   Доказательство проводится аналогично доказательству свойства 1.

Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

3. Если n и k – натуральные числа и a≥ 0, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ (14)

Так как a≥ 0, то выражения $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ и $\sqrt[nk]{a}$ имеют смысл и неотрицательны. Кроме того,

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k} = a$$

Следовательно, по определению арифметического корня верно равенство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

4. Если n, k и m – натуральные числа и a≥ 0, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^{m}}$ (15)

По свойству 3 имеем: $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^{m})^{k}}} = \sqrt[n]{a^{m}}$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.

1.2 Иррациональные уравнения.

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

Областью определения иррационального уравнения, или областью допустимых значений называется множество значений подкоренных выражений, при которых они имею смысл (т.е. определены левая и правая части уравнения)

Пример, областью определения уравнения $\sqrt{x-5} = 0$ является $[5;\infty)$.

Два уравнения f(x)=g(x) и r(x)=s(x) называются равносильными (эквивалентными), если они имеют одинаковые корни (или, в частности, если оба уравнения не имеют корней).

Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному, либо является его следствием.

Методы решения иррациональных уравнений

Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

При решении иррациональных уравнений используется следующие методы:

- возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень
- введение новых (вспомогательных) переменных [5].

1. Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Теорема: Если обе части уравнения

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

возвести в натуральную степень n, то уравнение

$$f^{n}(x) = \varphi^{n}(x) \qquad (2)$$

является следствием данного уравнения .

Доказательство: если выполняется числовое равенство $f(a) = \varphi(a)$, то по свойствам степени выполняется равенство $f^n(a) = \varphi^n(a)$, т.е. каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), это значит, что уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Если n=2k+1, то справедлива обратная теорема. В этом случае уравнения (1) и (2) равносильны.

Если n=2k, равенство $f^{2k}(a) = \varphi^{2k}(a)$справедливо, если выполняется хотя бы одно из равенств f(a) = φ(a) и f(a) = – φ (a). Значит уравнения (1) и (2) в этом случае не равносильны. Поэтому, если в ходе решения иррационального уравнения $\sqrt[2k]{f(x)} = \varphi(x)$приходилось возводить обе его части в степень с четным показателем, то могли появиться посторонние корни. Чтобы отделить их, проверки можно избежать, введя дополнительное требование $\varphi(x) \geq 0$. В этом случае уравнение $\sqrt[2k]{f(x)} = \varphi(x)$равносильно системе $\begin{cases} f(x) = \varphi^{2k} \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$. В системе отсутствует требование f(x)>0, обеспечивающее существование корня степени 2k, т.к. оно было бы излишним в связи с равенством $f(x) = \varphi^{2k}$.

Пример 1: Решить уравнение $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-5}$

Решение.

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-5}\right)^2$

x+2 =2x – 5

x = 7

Проверка.

x= 7: $\sqrt{7+2} = \sqrt{2 \cdot 7 - 5} \Leftrightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9}$. Это верное числовое равенство, значит, число 7 является корнем данного уравнения.

Ответ: x = 7

Пример 2: Решить уравнение $\sqrt{x^2-5x+1} = \sqrt{x-4}$

Решение.

$\left(\sqrt{x^2-5x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x-4}\right)^2$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\left[\begin{aligned} x &= 1, \\ x &= 5. \end{aligned}\right.$

Проверка.

x= 1 : $\sqrt{1 - 5 \cdot 1 + 1} = \sqrt{1 - 4} \Leftrightarrow \sqrt{-3} = -3$. Это неверное числовое равенство, значит, число 1 не является корнем данного уравнения.

x= 5: $\sqrt{25 - 5 \cdot 5 + 1} = \sqrt{5 - 4} \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1$. Это верное числовое равенство, значит, число 5 является корнем данного уравнения.

Ответ: x= 5.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, переходим к уравнению-следствию: $x^2+x - 3 = 1 - 2x$, решая его находим корни $x_1=1$, $x_2 = -4$. Понятно, что найденные значения переменной должны быть подвергнуты проверке. Проверка подстановкой показывает, что $x_1= -4$ – корень уравнения, $x_2=1$ посторонний корень.

Проверка.

x= -4 : $\sqrt{(-4)^2 + (-4) - 3} = \sqrt{1 - 2 \cdot (-4)} \Leftrightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9}$. Это верное числовое равенство, значит, число -4 является корнем данного уравнения.

x= 1: $\sqrt{1 + 1 - 3} = \sqrt{1 - 2 \cdot 1} \Leftrightarrow \sqrt{-1} = -1$ Это неверное числовое равенство, значит, число 1 не является корнем данного уравнения.

Ответ: x= – 4.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{3 - x} = x - 3$.

Решение. Возведем обе части этого уравнения в квадрат

$(\sqrt{3 - x})^2 = (x - 3)^2$ и получим $3 - x = x^2 - 6x + 9 \leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$, откуда следует, что x= 3 или x= 2 .

Проверка.

x= 3 : $\sqrt{3 - 3} = 3 - 3 \Leftrightarrow 0 = 0$. Это верное числовое равенство, значит, число 3 является корнем данного уравнения.

$x = 2$: $\sqrt{3 - 2} = 2 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{1} = -1$. Это неверное числовое равенство, значит, число 2 не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x = 3$.

2. Сведение к равносильной системе уравнений

Проверка, осуществляемая подстановкой найденного решения в исходное уравнение, может быть легко реализована, если проверяемые корни – «хорошие» числа, а для «громоздких» корней проверка может быть сопряжена со значительными вычислительными трудностями. Поэтому нужно уметь решать иррациональные уравнения с помощью равносильных преобразований, так как, выполняя равносильные преобразования, можно не опасаться ни потери корней, ни приобретения посторонних решений [13].

Аккуратное возведение в четную степень уравнения вида $\sqrt[2k]{F(x)} = G(x)$ состоит в переходе к равносильной ему системе:

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ G(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Неравенство $B(x) \geq 0$ в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в четную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки [13].

Поскольку после возведение в четную степень получаем уравнение-следствие $A(x)=B(x)$, нам необходимо выяснить принадлежат ли найденные корни ОДЗ исходного уравнения, то есть выполняется ли неравенство $A(x) \geq 0$ (или $B(x) \geq 0$). На практике из этих систем выбирают для решения ту, в которой неравенство проще [15].

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4} = \sqrt{6}$

Решение.

Перейдем к системе, равносильной данному уравнению:

$$\begin{cases} (x-1)(x+4) = 6, \\ x - 1 \geq 0, \\ x + 4 \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x+4) = 6, \\ x \geq 1, \\ x \geq 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5, \\ x = 2, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

x= 2 : $\sqrt{2-1}\sqrt{2+4}=\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6}$. Это верное числовое равенство, значит, число 2 является корнем данного уравнения.

Ответ: x=2.

Пример 2: Решить уравнение $\sqrt{x-1}\sqrt{2x+6}=x+3$

Решение.

$$\begin{cases}(x-1)(2x+6)=(x+3)^2,\\ x-1\geq 0,\\ 2x+6\geq 0.\end{cases} \quad \begin{cases}(x-1)(2x+6)=x^2+2x+9,\\ x\geq 1,\\ x\geq 3.\end{cases} \quad \begin{cases}x_1=-3,\\ x_2=5,\\ x\geq 1.\end{cases}$$

x= 5 : $\sqrt{5-1}\sqrt{2\cdot 5+6}=5+3 \Leftrightarrow 8=8$. Это верное числовое равенство, значит, число 5 является корнем данного уравнения.

Ответ: x=5.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+3}=-x-4$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x+3=(-x-4)^2\\ -x-4\geq 0.\end{cases}, \quad \begin{cases}x^2+8x+16=x+3\\ x\leq -4.\end{cases}, \quad \begin{cases}x^2+7x+13=0\\ x\leq -4.\end{cases},$$

У входящего в систему квадратного уравнения дискриминант $D=7^2-52<0$, следовательно, действительных корней оно не имеет.

Примечание. Можно сразу заметить, что решений нет, если рассмотреть D(y) исходного уравнения и E(y). E(y) – область изменения функции, стоящей в левой части уравнения.

В данном случае $y=\sqrt{x+3}$, $E(y)=[0;\infty)$.

$$\begin{cases}x+3\geq 0\\ -x-4\geq 0.\end{cases}$$

Ответ: решений нет.

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $x^2+x-2=0$ и получим корни $x_1=1$ и $x_2=-2$. Второй корень не удовлетворяет неравенству системы и, следовательно, является посторонним корнем исходного уравнения.

Ответ: x =1.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{|x-5|}=x-3$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x-5| = (x-3)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3, \\ (|x-5|)^2 = (x-3)^4 \end{cases}$$

Так как $|a|^2=a^2$, имеем

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ ((x-3)^2 + x - 5)((x-3)^2 - x + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 7x + 14) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x^2 - 7x + 14 = 0 - \text{решений нет} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x = 4 \\ x = 1 \end{cases} \quad x=4$$

x= 4: $\sqrt{|4-5|} = 4 - 3 \iff 1 = 1$. Это верное числовое равенство, значит, число 4 является корнем данного уравнения.

Ответ: x=4

3. Умножение обеих частей уравнения на сопряженное выражение.

Иногда иррациональное уравнение удается решить довольно быстро, если обе его части умножить на удачно подобранную функцию. Конечно, при умножении обеих частей уравнения на некоторую функцию могут появиться посторонние решения, ими могут оказаться нули самой этой функции. Поэтому предлагаемый метод требует обязательного исследования получающихся значений [14].

Пример 1. Решить уравнение $\frac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}$.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части уравнения, на $\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}$. Эта операция приведет к следующему уравнению, равносильному исходному:

$$\frac{21+\sqrt{21-x}\cdot\sqrt{21+x}}{x} = \frac{21}{x}$$

Это уравнение, в свою очередь, равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}21 - x = 0\\ 21 + x = 0\end{array}\right.$$

Ответ: x=21 или x= – 21.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$

Решение.

Выберем функцию s(x)= $\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}$

Умножим обе части уравнения на выбранную функцию, получим

$3x^2+5x+8-3x^2+5x+1 = \sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1}$

Приведем подобные слагаемые и получим равносильное уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 7$$

Сложим исходное уравнение и последнее, получим:

$$\sqrt{3x^2+5x+8} = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1\\ x_2 = -2\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $-2\frac{2}{3}$; 1

Пример 3. Решить уравнение $\frac{8}{\sqrt{10-x}} - \sqrt{10-x} = 2$

D(y): 10−x>0

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{10-x}$. Дополнив полученное уравнение требованиями D(y), составим систему:

$$\begin{cases} 8-\left(\sqrt{10-x}\right)^2 = 2\sqrt{10-x}\\ 10-x > 0\end{cases} \quad \begin{cases} 8-10+x = 2\sqrt{10-x}\\ x < 10\end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2 = 2\sqrt{10-x}\\ x < 10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2\\ x < 10\\ x^2-4x+4 = 40-4x\end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x < 10\\ x^2 = 6^2\end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x < 10\\ x = 6\\ x = -6\end{cases}$$

Ответ: x= 6.

4. Введение новой переменой

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 1. Решить уравнение $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$

Решение.

$$x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$$

Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=t,\ \ t>0$

$y^2+4y-12=0$

$y_1=2$

$y_2=-6$ – посторонний корень.

Сделаем обратную замену:

$\sqrt{x^2+3x-6}=2$, возведем обе части уравнения в квадрат

$x^2+3x-6=4,$

$x^2+3x-10=0$

$$\left[\begin{matrix} x_1=-5 \\ x_2=2 \end{matrix}\right.$$

Ответ: -5, 2.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{2-x}=a, \sqrt[3]{7+x}=b$. Тогда

$$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ a^3+b^3=9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)^2-3ab=3, \\ a+b=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab=2, \\ a+b=3; \end{cases}$$

$$\left[\begin{matrix} \begin{cases} a=1, \\ b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases} \end{matrix}\right.$$

Теперь можно записать $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=1,\\ \sqrt[3]{7+x}=2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=2,\\ \sqrt[3]{7+x}=1.\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-6\end{array}\right.$

Ответ: x= 1 или x= -6

Пример 3. Решить уравнение $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$

Решение.

Пусть $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}$=t, t≥ 0. Тогда, возведя в квадрат обе части последнего равенства, получим: $2x+2\sqrt{x^2-16}$ = t^2.

Теперь данное уравнение становится таким: $\frac{t}{2}=\frac{t^2}{2}-6$

Отсюда t=4 или t= -3. Следовательно, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}$ = 4. Далее,

$\begin{cases} x\geq 4,\\ 2x+2\sqrt{x^2-16}=16;\end{cases}$ $\begin{cases} x\geq 4,\\ \sqrt{x^2-16}=8-x;\end{cases}$

$\begin{cases} 4\leq x\leq 8,\\ x^2-16=64-16x+x^2;\end{cases}$ $\begin{cases}4\leq x\leq 8,\\ x=5.\end{cases}$

Проверка.

x= 5: $\frac{\sqrt{5+4}+\sqrt{5-4}}{2}=5+\sqrt{5^2-16}-6 \Leftrightarrow 2 = 2$. Это верное числовое равенство, значит, число 5 является корнем данного уравнения.

Ответ: x=5.

5. **Уединение радикала**

Метод уединение радикала заключается в том, что корень оставляют в одной части уравнения, а все остальные члены уравнения переносят в другую сторону. Далее обе стороны уравнения возводят в степень, показатель которой равен показателю уединенного радикала. Если уравнение содержит несколько радикалов, то процедура уединения производится над одним из них, после чего повторяется вплоть до полного избавления уравнения от корней [15].

Пример 1. Решить уравнение $1+\sqrt{5x+1} = x$

Решение.

Найдем ОДЗ.

$5x+1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{5}$, $x \in \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$

Уединим радикал, получаем $\sqrt{5x+1} = x - 1$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5x + 1 = (x-1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 5x + 1 = x^2 - 2x + 1 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 7x = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Проверка.

$x= 7$: $1 + \sqrt{5 \cdot 7 + 1} = 7 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{36} = 7$. Это верное числовое равенство, значит, число 7 является корнем данного уравнения.

Ответ: 7

Пример 2. Решить уравнение $x+\sqrt{2x-1} = 8$

Решение.

Найдем ОДЗ.

$2x-1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$, $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Уединим радикал, получаем $\sqrt{2x-1} = 8 - x$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 1 = (8-x)^2 \\ 8 - x \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 1 = 64 - 16x + x^2 \\ x \leq 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 65 = 0 \\ x \leq 8. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ x = 13 \\ x \leq 8. \end{cases}$$

Проверка.

$x=5$: $5+\sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 8 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{9} = 8$. Это верное числовое равенство, значит, число 5 является корнем данного уравнения.

Ответ: 5.

1.3 Иррациональные неравенства

Неравенством называются соотношения между числами или величинами, указывающие, какие из них больше других.

Областью определения или областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства f(x)>g(x) называется множество таких значений x, при которых и функция f(x) b g(x) определены. Другими словами, это ОДЗ неравенства f(x)>g(x) – это пересечение областей определения функции f(x) и ОДЗ функции g(x).

Частным решением неравенства f(x)>g(x) называется любое удовлетворяющее ему значение переменной x. Решением неравенства называется множество всех его частных решений.

Иррациональным неравенством называется неравенство вида f(x)>0.

Два неравенства f(x)>g(x) и r(x)>s(x) называются равносильными (эквивалентными), если множество решений первого неравенства совпадает с множеством решений второго неравенства.

Два неравенства f(x)>g(x) и r(x)>s(x) называются равносильными на множестве M, если совпадают множества их решений, принадлежащих множеству M.

Методы решения иррациональных уравнений.

1. **Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же степень.**

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{x+3}$

Решение.

Так как $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\geq 0$ и $\sqrt{x+3}\geq 0$, то исходное неравенство равносильно: $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\right)^2>(\sqrt{x+3})^2$

$$\begin{cases}2x-3+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}>x+3\\ x+3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{(x-1)(x-2)}>6-x,\\ x-2\geq 0,\\ x+3\geq 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sqrt{(x-1)(x-2)}>6-x\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4(x-1)(x-2)>(6-x)^2\\ 6\geq x\geq 2\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)(x-2)\geq 0,\\ x>6.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}4(x-1)(x-2)>(6-x)^2\\ 2\leq x\leq 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(x^2-3x+2)>x^2-12x+36\\ 2\leq x\leq 6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3x^2-28>0\\ 2\leq x\leq 6\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{28}{3}}\leq x\leq 6.$$

Решим вторую систему.

Заметим, что при $x > 6$ неравенство $(x-1)(x-2)\geq 0$ выполнено, поэтому $x>6$.

Ответ: $(\sqrt{\frac{28}{3}};+\infty)$

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}x+6\geq 0\\ x+7\geq 0\\ 2x-5\geq 0\\ x+6>x+7+2\sqrt{(x+7)(2x-5)}+2x-5\end{cases} \qquad \begin{cases}x\geq 2{,}5\\ \sqrt{(x+7)(2x-5)}<2-x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geq 2{,}5\\ 2-x\geq 0\\ (x+7)(2x-5)\geq 0\\ (x+7)(2x-5)<(2-x)^2\end{cases} \quad \emptyset$$

Отсюда следует, что неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}<2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

Решение.

Возведем обе части неравенства в третью степень: $1+\sqrt{x} < 8 - 3 \cdot 4\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2} - 1 + \sqrt{x}$

Перенесем $1+\sqrt{x}$ в правую часть и поделим выражение почленно на 6:

$0<1-2\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow (1-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}})^2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Ответ: (0;∞)

2. Метод интервалов

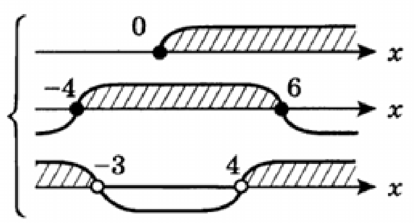
Это самый универсальный метод решения неравенств, потому что подходит для решения практически всех видов неравенств. Алгоритм решения состоит в следующем: находим область определения функции, далее отмечаем в этой области нули функции, которые разбивают область определения на промежутки, внутри каждого из которых функция определена, непрерывна и сохраняет знак. Для определения знака функции на конкретном промежутке находим знак в любой точке этого промежутка.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{24+2x-x^2} < x$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \\ 24+2x-x^2 < x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ -(x-6)(x+4) \geq 0 \\ (x-4)(x+3) > 0 \end{cases}$$



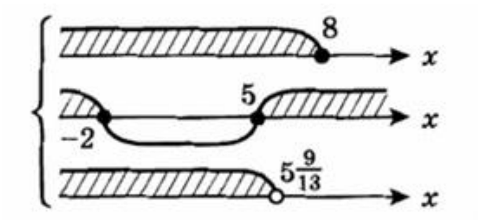
Ответ: (4;6].

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-5)} < 8-$ x.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ (x+2)(x-5) < (8-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ 13x < 74 \end{cases}$$



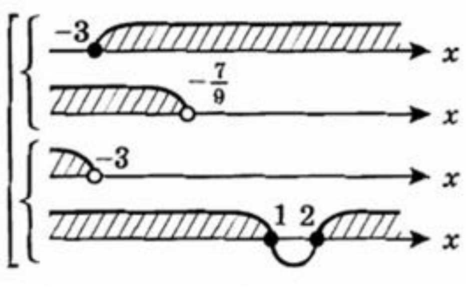
Ответ: $(-\infty;-2] \cup [5;5\frac{9}{13})$.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} < \mathrm{x}+3$.

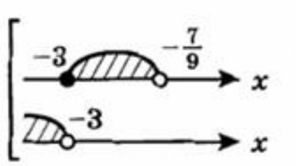
Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности системе неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathrm{x}+3 \geq 0 \\ \mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+2 > (\mathrm{x}+3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x}+3 < 0 \\ \mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathrm{x} \geq -3 \\ \mathrm{x} < -\frac{7}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{x} < -3 \\ (\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-2) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



или



Ответ: $(-\infty;\ -\frac{7}{9})$

3. Сведение к равносильной системе

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности систем рациональных неравенств.

Наиболее простые иррациональные неравенства имеют вид:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;
2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;
3) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

Иррациональное неравенство $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} A(x) < b^2(x) \\ A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} A(x) \le B^2(x) \\ A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Первое неравенство в системе (1) является результатом возведения исходного неравенства в степень, второе неравенство представляет собой условие существования корня в исходном неравенстве, а третье неравенство системы выражает условие, при котором это неравенство можно возводить в квадрат.

Иррациональное неравенство $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{A(x)} > B^2(x) \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{или} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{A(x)} \ge B^2(x) \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Обратимся к первой системе схемы (2). Первое неравенство этой системы является результатом возведения исходного неравенства в квадрат, второе – условие, при котором это можно делать.

Вторая система схемы (2) соответствует случаю, когда правая часть отрицательна, и возводить в квадрат нельзя. Но в этом и нет необходимости: левая часть исходного неравенства – арифметический корень – неотрицательна при всех x , при которых она определена. Поэтому исходное неравенство выполняется при всех x , при которых существует левая часть. Первое неравенство второй системы и есть условие существования левой части.

Иррациональное неравенство $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \geq B(x) \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Поскольку обе части исходного неравенства неотрицательны при всех x, при которых они определены, поэтому его можно возвести в квадрат. Первое неравенство в системе (3) является результатом возведения исходного неравенства в степень. Второе неравенство представляет собой условие существования корня в исходном неравенстве, понятно, что неравенство $\text{A(x)} \geq 0$ выполняется при этом автоматически.

Схемы (1)–(3) – наш основной инструмент при решении иррациональных неравенств, к ним сводится решение практически любой задачи. Разберем несколько примеров [14].

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{\text{x}^2 - 3\text{x} + 1} \geq \sqrt{3\text{x} + 4}$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geq 3x - 4, \\ 3x - 4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-5)(x-1) \geq 0, \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 1, \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \geq 5$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2 \\ 2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1, \\ (x-3)(x+2) < 0, \\ (x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ -2 < x < 3, \\ x \leq -1, \\ x \geq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{5}{2} \leq x < 3$.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

a) $\begin{cases} 6 - x < 0, \\ x^2 + 7x + 12 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 6, \\ x \leq -4 \\ x \geq -3; \end{cases} \qquad x > 6.$

b) $\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x^2 + 7x + 12 > (6-x)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 6, \\ x > \frac{24}{19} \end{cases} \qquad \frac{24}{19} < x \leq 6$

Ответ: $x > \frac{24}{19}$.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-3}$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(x-5)} + x - 5 \leq x - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 5, \\ 2\sqrt{(x-2)(x-5)} \leq 4 - x \end{cases}$$

Понятно, что эта система решений не имеет.

Ответ: решений нет.

4. Введение новой переменой.

Иррациональные неравенства, так же как и иррациональные уравнения можно решать способом введения новой переменой. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1.$

Решение.

Введем новую переменную. Пусть $3x^2+5x+7=t, t\geq 0.$

Тогда $\sqrt{t+5}-\sqrt{t}>1, \sqrt{t+5}>\sqrt{t}+1$

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} t\geq 0, \\ t+5>t+2\sqrt{t}+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t\geq 0, \\ \sqrt{t}<2. \end{cases}$$

Отсюда $0\leq t<4$. Теперь достаточно решить систему, сделав замену

$$\begin{cases} 3x^2+5x+2\geq 0, \\ 3x^2+5x+2<4. \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+\frac{2}{3})\geq 0, \\ (x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0. \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq -1, \\ x\geq -\frac{2}{3}, \\ -2<x<\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $-2<x\leq -1$ или $-\frac{2}{3}\leq x<\frac{1}{3}$

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-4x}>1$

Решение.

Пусть $t=\sqrt{x^2-4x}$, тогда для решения исходного неравенства достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{t^2+3}>1+t \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+3>1+2t+t^2 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>t \\ t\geq 0 \end{cases}$$

Следовательно, $0\leq \sqrt{x^2-4x}<1$

Полученное двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 4x < 1 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5} \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5} \\ x \geq 4,\ \ x \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: $(2-\sqrt{5}; 0] \cup [4; 2+\sqrt{5})$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{4-3x}{2x-1} + 11\sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}} > 24$

Решение.

Пусть $t = \sqrt{\frac{3x-4}{2x-1}}$, тогда для решения исходного неравенства достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 11t - t^2 > 24 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(t-8) < 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < t < 8.$$

Далее получим: $9 \leq \frac{3x-4}{2x-1} < 64$

Рассмотри случаи:

1) Если $2x-1 > 0$ то данное неравенство приводится к системе, не имеющей решений:

$$\begin{cases} 18x - 9 < 3x - 4, \\ 3x - 4 < 128x - 64, \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

2) Если $2x-1 < 0$ то данное неравенство приводится к системе:

$$\begin{cases} 18x - 9 > 3x - 4, \\ 3x - 4 > 128x - 64, \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x > 5, \\ 60 > 125x, \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ \frac{12}{25} > x, \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{12}{25}$$

Ответ: $(\frac{1}{3}; \frac{12}{25})$.

§ 2.Анализ школьных учебников по теме «Иррациональные уранения и неравенства».

Проведем логико-математический анализ темы «Иррациональные уранения и неравенства» в различных школьных учебниках.

При изучении иррациональных уравнений и неравенств в школьных учебниках возникает проблема изложения данной темы. Пропедевтикой изучения данной темы является введение понятия арифметического корня и его свойства.

В рассматриваемых учебниках исследуемой теме отводится разное место. Например, Г.В. Дорофеев в учебнике «Алгебра 8 класс» вводит понятие квадратного корня, также его свойства. С.М. Никольский разбивает понятие арифметического квадратного корня и корня n-ой степени. В учебнике «Алгебра 8 класс» рассматривает арифметический квадратный корень и его свойства. А в учебнике «Алгебра 9 класс» вводит понятие корня степени n, арифметического корня n-ой степени и рассматриваются свойства арифметического корня n-ой степени. В учебнике А.Г. Мордкович «Алгебра 8 класс» рассматривается понятие квадратного корня и его свойства. Также в этом учебнике есть параграф, отведенный иррациональным уравнениям.

Таблица 1.

Сравнительный анализ темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в школьных учебниках.

Класс	Критерий	Авторы учебников		
		А. Ш. Алимов «Алгебра» 7-9кл., «Алгебра и начала анализа», 10-11 класс	С. М. Никольский «Алгебра» 7-11 кл.	А. Г.Мордкович «Алгебра» 7-11 кл. (профильный уровень)
7 класс	Понятие степени	+	+	+
	Свойства степени	+	+	+
	Преобразование рациональных выражений			+

8 класс	Понятие квадратного корня	+	+	+
	Свойства квадратных корней	+	+	+
	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	+		+
9 класс	Понятие корня n-ой степени		+	+
	Свойства корней степени n		+	+
10 класс	Понятие корня n-ой степени		+	
	Свойства корней степени n		+	
11 класс	Иррациональные уравнения	+	+	+
	Иррациональные неравенства	+	+	+

Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. «Алгебра», учебник для 7-9 класс, «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов

Изучение степеней в данном учебнике рассматривается в главе 3 «Свойства степени с натуральным показателем».

Впервые с темой степень учащиеся встречаются в 6 классе при работе возведения чисел в степень. В 7 классе уже дается представление о нахождении значений степени, также рассматриваются свойства степени с натуральным показателем.

В учебнике для 7 класса более значимым становится прикладной аспект обучения, усиливается внимание к вопросам применения математики в реальной жизни.

В 8 классе впервые вводится тема «Арифметический квадратный корень», дается определение квадратного корня и его свойства, вводится понятие иррационального числа.

В 9 классе в главе 2 «Степень с рациональным показателем» вводится тема «Степень с целым показателем». Учащиеся уже знакомы со степенями и у них есть некоторый опыт преобразований выражений, содержащих степени, на основе определения. Сформированные умения могут найти применение при выполнении заданий на сокращение дробей, числители и знаменатели которых – произведения, содержащие степени. Также рассматривается тема «Арифметический корень натуральной степени и его свойства», вводятся основные свойства, которые доказываются с помощью определения арифметического корня и рассматриваются примеры.

В учебнике 10-11 класса в главе 2 рассматривается тема «Иррациональные уравнения и неравенства». Тема «Иррациональные уравнения» вводится в параграфе 9, дается определение иррациональные уравнения, следствие из определения и в конце параграфа приводятся примеры для закрепления изученной темы. Автор тему «Иррациональные неравенства» рассматривается в параграфе 10 и начинает с задач, в ходе которых вводится определение иррациональных неравенств и в конце параграфа даются примеры.

После каждого параграфа приведен ряд упражнения, которые имеют разный уровень сложности: обязательные задачи, дополнительные более сложные задачи и трудные задачи.

Также в конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе II».

С. М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин «Алгебра» 7 – 11 кл.

Изучение степеней в данном учебнике начинается с параграфа 8 «Степень с целым показателем». Данный параграф начинается с понятия степени с целым показателем, и рассматриваются основные свойства.

Подчеркивается значимость осознанного изучения чисел и вычислений, но в то же время уделяется достаточное внимание алгебраическому и геометрическому материалу, который расположен так, что не мешает развитию арифметических идей. Принципиальная особенность учебника – его ориентированность на формирование вычислительных навыков и развитие мышления учащихся.

В 8 классе также рассматриваются корни в параграфе 3 «Квадратные корни». С.М. Никольский вводит понятие квадратного корня, арифметический квадратный корень и свойства арифметических квадратных корней.

Пункт «приближенное вычисление квадратных корней» отмечен звездочкой, т.е. как дополнительный материал повышенной сложности.

В конце каждой главы имеется дополнительный материал, в нем учащимся предложено ознакомление с историческими сведениями, а также «Задания для повторения», которые содержат в себе большое количество текстовых задач и вычислительных упражнений.

В 9 классе в главе 2 «Степень числа» автор вводит понятие корня n-ой степени и его свойства. Параграф начинается с понятия корень степени n из числа a, учащиеся уже знакомы с понятием квадратного и кубического корня, в связи с этим им легче дается материал, в конце приводятся примеры на закрепление изученной темы.

В 10 классе в 1 главе «Корни, степени, логарифмы» в 3 параграфе «Корень степени n» вводит понятие корня n-ой степени и его свойства, понятие арифметического корня и корень степени n из натурального числа.

В 11 классе в главе 2 «Уравнения, неравенства, системы» в 10 параграфе «Равносильность уравнения на множествах» в пункте 10.2

возведения уравнения в четную степень рассматриваются иррациональные уравнения и примеры с пояснением решения данных уравнений.

В конце каждого пункта имеются упражнения, которые разделены на задания для устной работы, задания обязательные (не обязательные) для общеобразовательных классов и задания повышенной трудности.

Учебник дает учащимся хорошую подготовку по алгебре в объёме традиционной общеобразовательной программы или программы для классов с углублённым изучением математики.

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов «Алгебра» 7-9 класс, «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс (профильный уровень).

Данное учебное пособие состоит из двух частей: учебника и задачника.

Рассмотрим учебник 7 класса. В первой части данного учебного пособия материал, посвящённый степеням, изложен в главе 4 «Степени с натуральным показателем и ее свойства». Глава начинается с понятия степень с натуральным показателем, затем идет знакомство учащихся с основными свойствами степени с натуральным показателем. При изучении данной темы формулируются и доказываются три теоремы, причем ряд теорем предложен в учебнике в виде общей закономерности.

Большая часть математических утверждений проходит в своем становлении три этапа. На первом этапе ученик в ряде конкретных случаев подмечает одну и ту же закономерность. На втором этапе он пытается сформулировать подмеченную закономерность в общем виде, т.е. предполагает, что эта закономерность действует не только в рассмотренных случаях, но и во всех других аналогичных случаях. На третьем этапе он пытается доказать, что закономерность, сформулированная в общем виде, на самом деле верна. При доказательстве можно ссылаться только на уже известные факты.

В конце главы А.Г. Мордкович приводит основные результаты, т.е. определения, свойства, теоремы, формулы, правила, которые изучили в данной главе. Все записано без комментариев, поскольку комментарий были обоснованы в указанных параграфах.

В 8 классе А.Г. Мордкович рассматривает понятие квадратного корня в главе 2 «Функция. Свойства квадратного корня» в параграфе «Понятие квадратного корня из неотрицательного числа». Впервые вводят новое понятие, а затем изучают свойства этого понятия.

В 10 - 11 классе А.Г. Мордкович впервые вводит тему «Иррациональные уравнения и неравенства». Рассматривает понятие иррациональные уравнения и неравенства, приводит примеры и делает проверку, т.к. при возведении обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, когда из-за неравносильности преобразования могут появиться посторонние корни, а потому обязательна проверка всех найденных корней.

В задачнике «Алгебра и начала математического анализа 11 класс» к данному учебнику к каждому параграфу приведены задания трех уровней: обязательные задачи, более сложные задачи и трудные задачи. Большое количество и разнообразие упражнений дает возможность закрепить изученный материал.

Анализ учебников показал, что для выполнения простейших заданий, содержащих иррациональные уравнения и неравенства, необходимо привлечение дополнительных источников по теме. Во всех трех учебниках недостаточно изложен теоретический материал, но в достаточном количестве имеются примеры с решением и доказательства свойств. Но при подготовке к экзамену в форме ЕГЭ необходимо уделить особое внимание заданиям повышенной сложности, которые в большей степени встречаются в ЕГЭ по математике, и которые мало встречаются или почти не встречаются в данных учебниках.

В учебнике С. М. Никольского тема «иррациональные уравнения и неравенства» изучается в 11 классе. Материал представлен в логической последовательности и достаточно в сжатой форме, но для закрепления данной темы у автора приведено недостаточно практических заданий.

У Ш. А. Алимова иррациональные уравнения и неравенства изучаются в 11 классе. Практические задания на закрепление темы разделены по трем уровням сложности: обязательные задачи, дополнительные более сложные задачи и трудные задачи. Для более успешного усвоения материала в конце главы включены упражнения для самопроверки.

А. Г. Мордкович также как и другие авторы начинает изучение иррациональных уравнений и неравенств в 11 классе. В данном учебнике представлено огромное разнообразие решенных примеров, многие из которых встречаются в экзамене в форме ЕГЭ. А также в задачнике к данному учебнику представлен широкий спектр упражнений, который разделен на 3 уровня сложности.

Выводы по главе 1.

В первой главе мы рассмотрели теоретические основы иррациональных уравнений и неравенств. Данная глава включает в себя понятие об иррациональных уравнениях и неравенствах. Особое внимание уделяется методам решения. Важным является умение пользоваться любым из методов и выбирать в определенном случае оптимальный.

Также представлен анализ школьных учебников. Для сравнительного анализа учебников по алгебре 7 – 11 класс была составлена таблица, состоящая из тем в исследуемых учебниках.

При анализе школьных учебников было выявлено, что отсутствуют задачи повышенного уровня. Для решения этой проблемы необходимо на уроках использовать дополнительную литературу.

ГЛАВА 2 ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА».

§ 1. Анализ контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

Структура и содержание ЕГЭ по математике определяет необходимость адаптации выпускников школ к новым требованиям, прежде всего к изменению сроков, формы и методики оценивания качества знаний, многообразию типов экзаменационных заданий, мобильности их выполнения.

ЕГЭ (Единый государственный экзамен) — это обязательный для учащихся экзамен, который проводится в одно время (если не учитывать часовые пояса) по всему государству. Каждому экзамену по определённому предмету выделяется по одному дню. *ЕГЭ* сдают школьники и студенты для дальнейшего поступления в высшие учебные заведения.

Единый государственный экзамен должен не только определить уровень подготовки выпускников школ, но и задать направление развития школьной математики на ближайшие несколько лет.

Назначение системы единого государственного экзамен – введение открытой, объективной и независимой процедуры оценивания учебных достижений учащихся.

Основная задача обучения математике в школе заключается в обеспечении овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Каждый ученик в процессе обучения должен иметь возможность получить реальную подготовку к выпускным экзаменам, располагать тем объемом знаний и умений, которые необходимы для дальнейшего обучения. Поэтому в процессе преподавания необходимо делать особые акценты на те разделы, которые представлены в тестах ЕГЭ.

В соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской Федерации ЕГЭ по математике в 2014-215учебном году был разделен на два уровня: базовый и профильный. Выпускники могли выбрать либо оба уровня одновременно, либо только один из уровней. Для получения аттестата о среднем общем образовании, а также для поступления в образовательную организацию высшего образования, где в перечне вступительных испытаний отсутствует учебный предмет «Математика», выпускнику достаточно сдать экзамен по математике на базовом уровне. Для поступления в образовательную организацию высшего образования, в которой математика включена в перечень вступительных испытаний, необходимо сдать экзамен по учебному предмету «Математика» на профильном уровне [17].

Анализ материалов ЕГЭ за период с 2011 по 2016 годы показал, что задания на тему «Иррациональные уравнения и неравенства» встречаются в части В и С, а именно это задания:

- В 2011 год: В3, С5;
- В 2012 год: В5, С3;
- В 2013 год: В5, В7, С3, С5;
- В 2014 год: В5, В7, С3, ;
- В 2015 год:
  - часть 1: 6;
  - часть2: 17, 20;
- В 2016 год:
  - базовый уровень: 2,7;
  - профильный уровень: 5, 15 ,18.
- В 2017 год:
  - базовый уровень: 2,7;
  - профильный уровень: 5, 15 ,18.

Задания части В составлены на основе курсов математики 5 – 6 классов, алгебры и геометрии 7 – 11 классов. Эти задания обеспечивают достаточную полноту проверки овладения материалом указанных курсов на базовом уровне сложности.

Задания части С составлены на основе курсов алгебры и начал анализа 7–11 классов и геометрии 7–11 классов. Эти задания обеспечивают достаточную полноту проверки овладения материалом указанных курсов, как на повышенном, так и на высоком уровне сложности. От учащихся требуется применить свои знания, либо в измененной, либо в новой для них ситуации. При этом они должны проанализировать ситуацию, самостоятельно «сконструировать» математическую модель и способ решения, используя знания из различных разделов школьного курса математики, обосновать и математически грамотно записать полученное решение.

Приведем примеры заданий из материалов ЕГЭ за 2011-2016 гг.

Задание 2011 года:

B3 Найдите корень уравнения $3^{x-2} = 27$.

C5 найти все значения a при каждом, из которых система имеет $\begin{cases} 2^{|x|+3} + 7|x| + 1 = 8y + 7x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ единственное решение

Задание 2012 года:

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{72 + x} = 9$

C3 Решить систему неравенств $\begin{cases} 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \le 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \le 1. \end{cases}$

Задание 2013 года:

B5Найдите корень уравнения $\sqrt{15 - 2x} = 3$

B7 найти значения выражения $\sqrt{65^3 - 56^3}$

C3 решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3^x - 9}{10 \cdot 3^{x+1} - 3^4 - 3^{2x}} < 0 \\ \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2x} + 5 + 2\sqrt{6} \le \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^x \left(\sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^3} + \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

C5 Найти все значения a, при каждом из которых множество точек (x; y), удовлетворяющих условию $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ y = -\sqrt{3}|x| + 2\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$

будут иметь три общие точки с кривой, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - a^2 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{3}y - 1\right)$$

Задание 2014 года:

B5 Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \frac{1}{125}$

B7 Найти значения выражения $\frac{(2\sqrt{3})^2}{10}$

C3 Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x + \dfrac{4x^2+5x}{x^2-x-6} \leq \dfrac{9}{5x-15} + \dfrac{5x+1}{5x+10} \\ 5^{x-1} + 5 \cdot (0{,}2)^{x-2} \leq 26 \end{cases}$$

<u>Задание 2015 года:</u>

Часть 1

6. Найдите корень уравнения $8^{1-3x}=64^x$

Часть 2

17. Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} > 2$$

20. Найти все значения a, при которых система

$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|} \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$ имеет ровно 4 различных решения

<u>Задание 2016 года:</u>

Базовый уровень:

2.Найти произведение чисел $3 \cdot 10^{-5}$ и $2{,}5 \cdot 10^{2}$

7. Найти корень уравнения $3^{2x-14} = \frac{1}{9}$

Профильный уровень:

5. Найти корень уравнения $\sqrt{50-2x} = 8$

15.Решите неравенство $4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8 \leq 0$

18. Найти все значения *a*, при каждом из которых система

$\begin{cases} 2^{|x|+2} + 3|x| + 5 = 4y + 3x^2 + 2a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение

Задание 2017 года:

Базовый уровень:

2.Найти значение выражения $\frac{2^6 \cdot 3^8}{6^5}$

7. Найти корень уравнения $3^{x-3} = 81$

Профильный уровень:

5. Найти корень уравнения $3^{x-5} = 81$

15.Решите неравенство $\frac{9^x - 2\cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2\cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5$

18. Найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$ имеет единственное решение

Структура и содержание экзамена в последние годы остаются практически без изменений, а информационная база постоянно наращивается. Кроме того, учителя приобретают опыт подготовки, а ученики заранее начинают готовиться к ЕГЭ еще со средней школы – всё это позволяет прогнозировать ежегодное улучшение результатов.

Определяющим фактором успешной сдачи ЕГЭ, как и любого серьезного экзамена по математике, является целостное и качественное прохождение курса математики. Итоговое повторение и завершающий этап подготовки к экзамену способствуют выявлению и ликвидации проблемных зон в знаниях учащихся, закреплению имеющихся умений и навыков в решении задач, снижению вероятности ошибок. Для успешной сдачи ЕГЭ необходимо систематически изучать математику, развивать мышление, отрабатывать навыки решения задач различного уровня.

§ 2. Факультативный курс по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» для подготовки к ЕГЭ.

Факультативные занятия – это форма организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний обучающихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями, а также на активизацию познавательной деятельности.

Назначение факультатива состоит в развитии способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой по избранному предмету.

Целями организации факультативных занятий по математике является углубление математических знаний, умений и навыков, усвоенных учениками на уроках, формированию познавательной деятельности, а также выявлению учащихся с повышенными математическими способностями.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Основная задача обучения математике в школе – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Наряду с решением основной задачи изучения математики программа факультатива предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к сдаче ЕГЭ.

Структура экзаменационной работы требует от учащихся не только знаний на базовом уровне, но и умений выполнять задания повышенной и высокой сложности. В рамках урока не всегда возможно рассмотреть подобные задания, поэтому программа факультатива позволяет решить эту задачу. Кроме того, для качественной подготовки обучающихся к будущей итоговой аттестации необходимо обобщать и систематизировать знания обучающихся по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» по курсу алгебры 7 – 11 класс.

Особая установка факультатива – целенаправленная подготовка ребят к новой форме аттестации - ЕГЭ. Поэтому преподавание факультатива обеспечивает систематизацию знаний и усовершенствование умений учащихся на уровне, требуемом при проведении такого экзамена.

Проведение факультативных занятий предусматривает более глубокое ознакомление с темой «Иррациональные уравнения и неравенства», изучаемой в курсе математики. Программа факультатива включает решение упражнений, составляющих задания экзамена ЕГЭ на базовом уровне. Поэтому преподавание факультатива обеспечивает систематизацию знаний и усовершенствование умений учащихся на уровне, требуемом при проведении такого мониторинга.

Цель курса: развитие математического мышления, формирование активного познавательного интереса к предмету, систематизация, расширение и углубление знаний учащихся об иррациональных уравнениях и неравенствах.

Задачи курса:

1. Систематизировать, расширить и углубить знаний по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»;
2. Познакомить учащихся с некоторыми методами решения иррациональных уравнений и неравенств;

3. Формировать умение видеть рациональный метод для решения конкретных видов уравнений и неравенств;
4. Развивать творческое, логическое мышления, также интеллектуальные способности учащихся при решении сложных задач;
5. Развивать познавательный интерес к математике;

Знания и умения, которыми должны владеть учащиеся перед изучением факультативного курса по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»:

1. Знать основные понятия и свойства уравнений и неравенств: корень уравнения, ОДЗ,
2. Знать основные понятия и свойства арифметического квадратного корня и арифметического корня n-ой степени;
3. Уметь решать простейшие иррациональные уравнения и неравенства.

В ходе обучения значительное место отводится практическим и самостоятельным работам учащихся.

Текущий контроль осуществляется в разных формах: устная, письменная, фронтальная

Итоговый контроль – контрольная работа.

В результате изучения факультативного курса учащийся должен:

- Знать основные понятия по теме: «Иррациональные уравнения и неравенства»;
- Осознано и довольно свободно применять полученные знания при решении задач;
- Умение выбрать соответствующий метод при решении иррациональных уравнений и неравенств;
- Умение решать более сложные задачи, по типу приближенных к заданиям ЕГЭ.

Таблица 2

Тематический план программы факультативного курса

№ п/п	Наименование темы занятия	Форма проведения занятия	Количество часов
1	Арифметический квадратный корень и его свойства	Лекция. Практикум.	1
2	Арифметический корень n-ой степени и его свойства	Лекция. Практикум.	1
3	Решение простейших иррациональных уравнений	Лекция. Практикум.	1
4	Решение более сложных иррациональных уравнений	Лекция. Практикум.	2
5	Основные свойства и решения иррациональных неравенств	Лекция. Практикум.	2
6	Решение более сложных иррациональных неравенств.	Лекция. Практикум.	2
7	Контрольная работа		1
Всего:			10

Содержание программы факультативного курса

1. Арифметический квадратный корень и его свойства (1 часа)
   Понятие корня и основные свойства
   Практическая работа.
2. Арифметический корень n-ой степени и его свойства (1 часа)
   Понятие корня n-ой степени и основные свойства
   Практическая работа.
3. Решение простейших иррациональных уравнений (1 часа)

Определение иррационального уравнения. Свойства, на котором основано решение иррациональных уравнений. Область определения иррационального уравнения. Методы решения иррациональных уравнений (возведение в степень, замена переменных).

Практическая работа.

4. Решение более сложных иррациональных уравнений (2 часа)

   Введение подстановки других переменных. Возведение обеих частей уравнения в третью степень. Графическое решение уравнения.

5. Основные свойства и решения иррациональных неравенств (2 часа)

   Понятие иррационального неравенства. Методы решения иррациональных неравенств (возведение в степень, замена переменных). Область определения неравенства. Основные свойства иррациональных неравенств.

   Практическая работа.

6. Решение более сложных иррациональных неравенств. (2 часа)

   Решение неравенства с помощью графика. Применение логического анализа в решении. Применение подстановки.

   Практическая работа.

7. Контрольная работа (1 час)

В данном пункте рассмотрим примеры конспектов двух занятий на тему: «Иррациональные уравнения и неравенства», каждый из которых рассчитан на 1 час. А также будет предложена контрольная работа, которая поможет определить усвоение учащимися данной темы.

Нами был разработан тест по теме «Иррациональные уравнения и неравенства», а так же представлено полное решение (см. Приложение 2).

В тесте задания разбиты на три части по уровню сложности. Это позволяет обнаружить имеющиеся пробелы в знаниях у учащихся по данной теме, ликвидировать эти пробелы, а также помогает подготовиться к сдаче ЕГЭ, рассматривая различные задания. Данные тесты можно использовать на уроках или факультативах, как в обычных классах, так и в классах с углубленным изучением математики.

Первая часть (часть А) содержит пятнадцать заданий базового уровня сложности. К каждому заданию даны пять вариантов ответов, из которых только один является верным.

Вторая часть (часть В) включает пять более сложных заданий по данной теме. К заданиям варианты ответов не приводятся, требуется записать краткий ответ.

В третьей части (части С) всего два задания, но отличаются они уровнем повышенной сложности. Для ответа требуется записать полное решение.

§ 3. Апробация результатов исследования.

Апробация результатов исследования проводилась в период педагогической практики в 10 классе МАОУ СОШ №153 г. Челябинска. Было разработано и проведено два занятия (2 час) на тему: «Решение сложных иррациональных уравнений. Решение сложных иррациональных неравенств» (см. Приложение 1).

После объяснения материала, была проведена самостоятельная работа.

Результаты самостоятельной работы:

Количество учащихся в классе: 25.

Количество присутствующих на занятии: 20.

Самостоятельную работу написали на:

- «отлично» – 5 человека.
- «хорошо» – 7человек.
- «удовлетворительно» – 8 человек.
- «неудовлетворительно» – 0 человек.

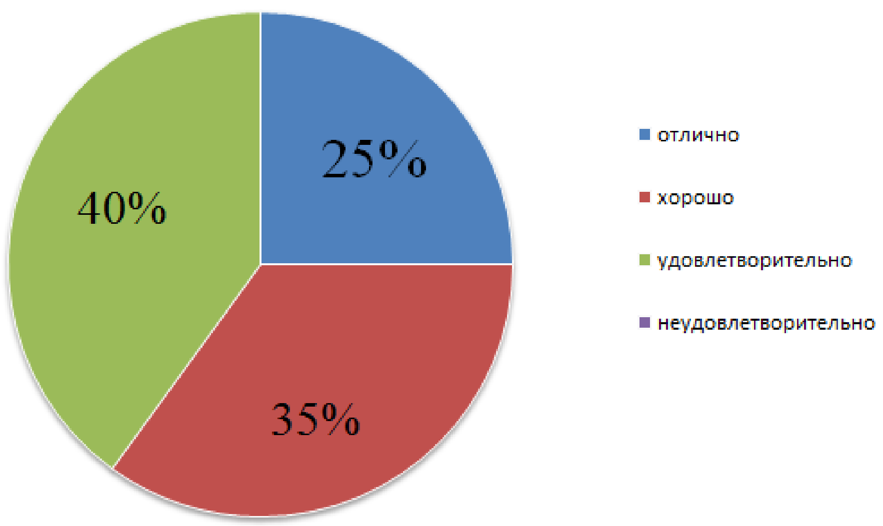


Рис 1. Результат выполнения самостоятельной работы

Таким образом, можно сделать вывод об успеваемости учащихся на данном занятии:

Абсолютная успеваемость: 100%.

Качественная успеваемость: 60 %.

Типичные ошибки при выполнении самостоятельной работы:

1) Неправильное нахождение ОДЗ (6 человек).
2) Неверное определение типа иррациональных уравнений и неравенств (5 человек).
3) Вычислительные ошибки (5 человека).
4) Сложность в написании ответа (4 человека).

Вывод:

Во время проведения факультативного занятия было выявлено, что учащиеся плохо усвоили тему урока и не помнили большинство методов решения иррациональных уравнений и неравенств. Это осложнило работу, которая заключалась в систематизации и обобщении методов решения иррациональных уравнений и неравенств.

Самостоятельная работа показала, что занятие прошло эффективно: все учащиеся решили хотя бы одно уравнение из трех, т.е. не было неудовлетворительных оценок. Учащиенся лучше стали владеть различными методами решения иррациональных уравнений и неравенств. Таким образом, цели достигнуты и поставленные задачи решены.

Выводы по главе 2.

Вторая глава посвящена анализу контрольно-измерительных материалов ЕГЭ и факультативному курсу по теме: «Иррациональные уравнения и неравенства». Проведение факультатива способствовало развитию математического мышления, формированию активного познавательного интереса к предмету, умения самостоятельно применять найденные способы решения в практической деятельности.

Таким образом, факультатив решает следующие задачи:

- Систематизирует, расширяет и углубляет знания по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»;
- Знакомит учащихся с некоторыми методами решения иррациональных уравнений и неравенств;
- Формирует умение видеть рациональный метод для решения конкретных видов уравнений и неравенств;
- Развивает творческое, логическое мышления, также интеллектуальные способности учащихся при решении сложных задач; а также познавательный интерес к математике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было рассмотрено изложение темы «Методические особенности решения иррациональных уравнений и неравенств». Иррациональные уравнения и неравенства – одна из сложнейших тем математики, и многие учащиеся затрудняются или вообще не умею решать данные задания.

При выполнении квалификационной работы был осуществлен анализ школьных учебников по изучению темы: «Иррациональные уравнения и неравенства», мы пришли к выводу, что существует множество способов и методов решения иррациональных уравнений и неравенств, но не во всех учебниках достаточное количество заданий для закрепления изученной темы. В связи с этим учащиеся 10-11 классов не имеют прочных умений и навыков решать задачи по этой теме.

Также был проведен анализ ЕГЭ, который показал, что иррациональные уравнения и неравенства встречаются в заданиях уже не первый год. Поэтому решение иррациональных уравнений и неравенств в школьном курсе математики играет важную роль.

В связи с этим нами был разработан факультативный курс по теме «Иррациональные уравнения и неравенства» для 10-11 классов. Разработка и проведение факультатива показали, что знания, умения и навыки решения иррациональный уравнений и неравенств у школьников может систематизировать, расширить и углубить знания по данной теме.

Апробация факультатива показала, что факультативный курс способствует боле глубокому усвоению темы «Иррациональные уравнения и неравенства», вследствие чего, приведет к успешной сдаче единого государственного экзамена.

Таким образом, задачи исследовательской работы решены, цель – достигнута.

Данная работа может быть использована не только при подготовке учащихся к единому государственному экзамену, но ив качестве дополнительных задач на уроках при изучении данной темы. И может корректироваться в соответствии с изменениями содержания заданий на иррациональные уравнения и неравенства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – М. : Просвещение, 2015. – 384 с.
2. Байдак, В.А. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: монография/ В. А. Байдак. — 3-е изд,, стереотип. — М. : ФЛИНТА, 2016. – 264 с.

3. Галицкий, М. Л. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики [Текст]/ М. Л. Галицкий – М.: Просвещение, 2011. – 271с.
4. Мерзляк, А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов [Текст]/ Под ред. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. – М.: Илекса, 2007, – 320 с.
5. Мордкович, А.Г. Алгебра. 7 класс: В двух частях. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст]/ А. Г. Мордкович – 10-е изд., М.: Мнемозина, 2010. –160 с.
6. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс: В двух частях. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст]/ А. Г. Мордкович – 9-е изд., М.: Мнемозина, 2010. –160 с.
7. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс: В двух частях. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст] / А. Г. Мордкович – 10-е изд., М.: Мнемозина, 2010. –160 с.
8. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс: В двух частях. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст] / А. Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2004. – 315 с.
9. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс : В двух частях. Ч.2: задачник для общеобразовательных учреждений [Текст] / А. Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2004. – 315 с.
10. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 7 класс: учеб. для общеобразовате. учреждений: базовый и профил. Уровни [Текст] / С.М Никольский . - 9-е изд. – М.: просвещение, 2010. – 430с.
11. Никольский, С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразовате. учреждений: базовый и профил.

уровни [Текст] / С.М. Никольский - 9-е изд. – М.: просвещение, 2010. – 430с.

12. Черкасов, О. Ю. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. Курс подготовки к ГИА, ЕГЭ [Текст] / О. Ю. Черкасов – М.: АСТ-ПРЕСС, 2014. – 464 с.
13. Чулков, П.В. материалы курса «Уравнения и неравенства в школьном курсе математики» : [Текст] лекции 1 – 4. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006. – 88 с.
14. Шахмейстер, А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. [Текст] – 4-е издание – СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс»: М.: Издательство МЦНМО 2011. – 2016с.
15. Материалы ЕГЭ [Электронный ресурс] / Математика. Репетитор. Ларин А.А. – Режим доступа: http://alexlarin.net/
16. Реализация Федерального закона «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]– Режим доступа:http://273-фз.рф/akty_minobrnauki_rossii/pismo-rosobrnadzora-ot-16092014-no-02-624
17. Харламов, И. Ф. Педагогика: Учебник/ И. Ф. Харламов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

План-конспект занятия факультативного курса на тему «Решение более сложных иррациональных уравнений»

Цель урока: Обобщить и систематизировать знания учащихся по данной теме.

Задачи урока:

Образовательные:

- Повторить определение иррациональные уравнения;

- Систематизировать способы решения иррациональных уравнений;
- Способствовать формированию умения выбирать наиболее рациональные способы решения иррациональных уравнений
- Совершенствовать вычислительные навыки;

Развивающие:

- развить умение анализировать, выделять главное, обобщать;
- развить навыки самопроверки, самоконтроля, логическое мышление;
- стремление к самоконтролю процесса и результата учебной математической деятельности;

Воспитательные:

- воспитывать познавательный интерес к предмету и формировать положительную мотивацию;
- развить навыки культуры речи: умение вести диалог, грамотно говорить, аргументировать свою точку зрения;
- развивать мышление, инициативу, находчивость, понимать смысл поставленной задачи.

Продолжительность: 45 минут

Структура факультативного занятия:

1. Организационный момент (1 минута);
2. Постановка цели урока (1 минута);
3. Актуализация знаний (15 минут);
4. Закрепление изученного материала (20 минут);
5. Подведение итогов урока (5 минута).
6. Рефлексия (3 минуты)

Ход урока.

Организационный момент. Урок начинается с взаимного приветствия учителя и учащихся, проверки подготовленности учащихся к уроку.

Постановка цели урока. Сегодня на уроке мы повторим определение иррационального уравнения и вспомним основные методы решения.

Актуализация знаний.

Дайте определение иррационального уравнения.

Иррациональными уравнениями называю уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Таковы, например уравнения:

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+8} = 6$,

$\sqrt{x+3} = 2x - 7$ и т.д.

Назовите основные методы решения иррациональных уравнений

Рассмотрим два методы решения иррациональных уравнений:

- метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень,
- метод введения новых переменных.

<u>Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень состоит в следующем:</u>

1) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду:

$$\sqrt[n]{A(x)} = \sqrt[n]{B(x)}$$

2) возводят обе части уравнения в n-ю степень:

$$(\sqrt[n]{A(x)})^n = (\sqrt[n]{B(x)})^n$$

3) учитывая, что$(\sqrt[n]{a})^n$=a, получают уравнение

A(x)=B(x)

4) решают уравнение и делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней. Эта проверка чаще всего осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение.

5) записать ответ.

Метод введения новых переменных лучше использовать для иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней, или одинаковые многочлены под знаком корня и за знаком корня, или взаимообратные выражения под знаком корня.

Закрепление изученного материала.

1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$.

D (y): x$\geq 2 \Leftrightarrow$ D (y): [2,∞).

Возведем обе части уравнения в квадрат:

x−2+2$\sqrt{x^2-3x+2}+x-1=3x-5$;

2$\sqrt{x^2-3x+2}$= x−2,

4(x^2-3x+2)= x^2-4x+4; $3x^2-8x+4=0$.

Напомним, что для квадратного уравнения n$x^2+2kx+m=0$ (с четным коэффициентом при x) корни определяются по формуле:

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

В нашем случае

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm2}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x=2\ \epsilon\text{D (y)} \\ x=\frac{2}{3}\ \notin\ \text{D (y)} \end{array}\right.$

Проверка.

$x=2$: $\sqrt{2-2}+\sqrt{2-1}=\sqrt{6-5}$ $\Leftrightarrow$ 1=1. . Это верное числовое равенство, значит, число 2 является корнем данного уравнения.

Ответ: x=2.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-3}=\sqrt{1-2\mathrm{x}}$

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, переходим к уравнению-следствию: $x^2+x-3=1-2x$, решая его находим корни $x_1=1$, $x_2=-4$. Понятно, что найденные значения переменной должны быть подвергнуты проверке. Проверка подстановкой показывает, что $x_1=-4$ – корень уравнения, $x_2=1$ посторонний корень.

Проверка.

$x=-4$: $\sqrt{(-4)^2+(-4)-3}=\sqrt{1-2\cdot(-4)} \Leftrightarrow \sqrt{9}=\sqrt{9}$. Это верное числовое равенство, значит, число -4 является корнем данного уравнения.

$x=1$: $\sqrt{1+1-3}=\sqrt{1-2\cdot 1} \Leftrightarrow \sqrt{-1}=-1$ Это неверное числовое равенство, значит, число 1 не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=-4$.

Пример 3. Решить уравнение $1+\sqrt{5x+1}=x$

Решение.

Найдем ОДЗ.

$5x+1\geq 0$, $x\geq\frac{1}{5}$, $x\in\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$

Уединим радикал, получаем $\sqrt{5x+1}=x-1$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5x+1=(x-1)^2\\ x-1\geq 0\end{cases} \begin{cases}5x+1=x^2-2x+1\\ x-1\geq 0\end{cases} \begin{cases}x^2-7x=0\\ x\leq 1\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\ x=7\\ x\leq 1\end{cases}$$

Проверка.

$x=7$: $1+\sqrt{5\cdot 7+1}=7 \Leftrightarrow 1+\sqrt{36}=7$. Это верное числовое равенство, значит, число 7 является корнем данного уравнения.

Ответ: 7

2. Метод введения новых переменных.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$

Решение.

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x-7=0.$

Положим $\sqrt{x^2-3x+5}$ = t, t≥ 0.

Тогда $x^2-3x+5= t^2,\ \ x^2-3x-7=t^2-12.$

Исходное уравнение примет вид $t^2+t-12=0.$

Из двух его решений лишь одно попадает в область задания t (t$\geq$ 0):

$$\left[\begin{array}{c} t=3 \\ t=-4 \ \notin [0,\infty) \end{array}\right.$$

Зная, чему равно t, решаем уравнение относительно x:

$$\sqrt{x^2-3x+5}=3;\ \ x^2-3x+5=9;\ \ x^2-3x-4=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: -1, 4

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{(2-\mathrm{x})^2}+\sqrt[3]{(7+\mathrm{x})^2}-\sqrt[3]{(7+\mathrm{x})(2-\mathrm{x})}=$ 3

Решение. Пусть $\sqrt[3]{2-\mathrm{x}}=\mathrm{a}$, $\sqrt[3]{7+\mathrm{x}}=\mathrm{b}$. Тогда

$$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ a^3+b^3=9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)^2-3ab=3, \\ a+b=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab=2, \\ a+b=3; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь можно записать $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1, \\ \sqrt[3]{7+x}=2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=2, \\ \sqrt[3]{7+x}=1. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Ответ: x= 1 или x= $-$ 6

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3-\sqrt{x-2}}=1.$

Решение.

Введем подстановку: $\sqrt{x-2}=t, t\geq 0$, тогда х−2=t^2;

х=t^2+2, х-3=t^2-1.

Уравнение примет вид

$\sqrt{t^2-2+t}-\sqrt{t^2-1-t}=1,\ \sqrt{t^2-2+t}=1+\sqrt{t^2-1-t}.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$t^2-2+t=1+2\sqrt{t^2-1-t}+t^2-1-t,$ t−1= $\sqrt{t^2-1-t}.$

Возведя обе части уравнения в квадрат еще раз, получим

$t^2-2t+1=t^2-t-1,\ t=2.$

Возвращаясь к переменной х, получаем $\sqrt{x-2}=2$, то есть х=6.

Проверка показывает, что х=6 является корнем исходного уравнения.

Ответ: х=6.

Подведение итогов урока.

Итак, наше занятие подходит к завершению. Давайте вспомним, какие методы решения иррациональных уравнений мы сегодня рассмотрели?

На следующем занятий рассмотрим более сложные примеры и продолжим решать, используя эти методы.

Рефлексия.

Что нового и интересного мы с вами узнали на уроке?

Какие этапы урока вам понравились?

На каком из них испытывали трудности?

План-конспект занятия факультативного курса на тему «Решение сложных иррациональных неравенств»

Цель урока: Обобщить и систематизировать знания учащихся по данной теме.

Задачи урока:

Образовательные:

– Повторить определение иррациональные неравенства;

- Систематизировать способы решения иррациональных неравенств;
- Способствовать формированию умения выбирать наиболее рациональные способы решения иррациональных неравенств
- Совершенствовать вычислительные навыки;

Развивающие:

- развить умение анализировать, выделять главное, обобщать;
- развить навыки самопроверки, самоконтроля, логическое мышление;
- стремление к самоконтролю процесса и результата учебной математической деятельности;

Воспитательные:

- воспитывать познавательный интерес к предмету и формировать положительную мотивацию;
- развить навыки культуры речи: умение вести диалог, грамотно говорить, аргументировать свою точку зрения;
- развивать мышление, инициативу, находчивость, понимать смысл поставленной задачи.

Продолжительность: 45 минут

Структура факультативного занятия:

1.Организационный момент (1 минута);

2.Постановка цели урока (1 минута);

3.Закрепление изученного материала (20 минут);

4. Самостоятельная работа обучающего характера.

5. Подведение итогов урока (5 минута).

6. Рефлексия (3 минуты)

Ход урока.

Организационный момент. Урок начинается с взаимного приветствия учителя и учащихся, проверки подготовленности учащихся к уроку.

Постановка цели урока. Сегодня на уроке мы повторим определение иррационального неравенства и вспомним основные методы решения.

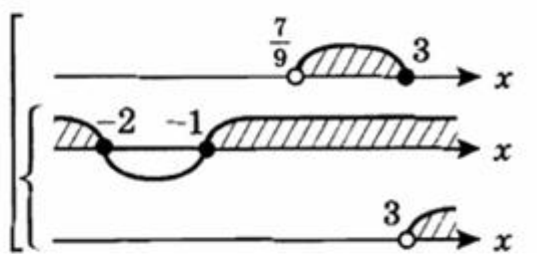
Закрепление изученного материала.

Пример 1. Укажите промежуток $\sqrt{x^2+3x+2} > 3 - x$, которому принадлежит корень неравенства

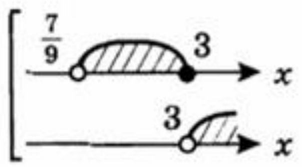
Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2+3x+2 > (3-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x < 0 \\ x^2+3x+2 \geq 0 \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leq 3 \\ x > \frac{7}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ (x+1)(x+2) \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$



или



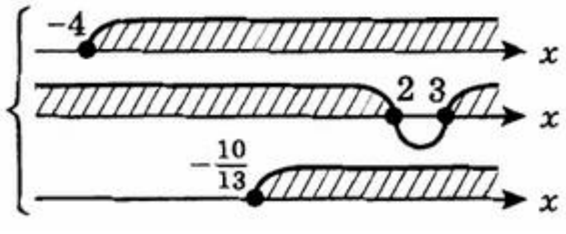
Ответ: $(\frac{7}{9}; \infty)$

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} \leq x + 4$

Решение.

Данное неравенство равносильно систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq x^2 + 8x + 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -4 \\ (x-2)(x-3) \geq 0 \\ x \geq -\frac{10}{13} \end{cases}$$



Ответ: $[-\frac{10}{13}; 2] \cup [3; \infty]$

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} < 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

Решение.

Возведем обе части неравенства в третью степень:

$$1+\sqrt{x} < 8 - 3\cdot 4\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + 3\cdot 2\sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2} - 1 + \sqrt{x}$$

Перенесем $1+\sqrt{x}$ в правую часть и поделим выражение почленно на 6:

$$0<1-2\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{x})^2} \Leftrightarrow (1-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

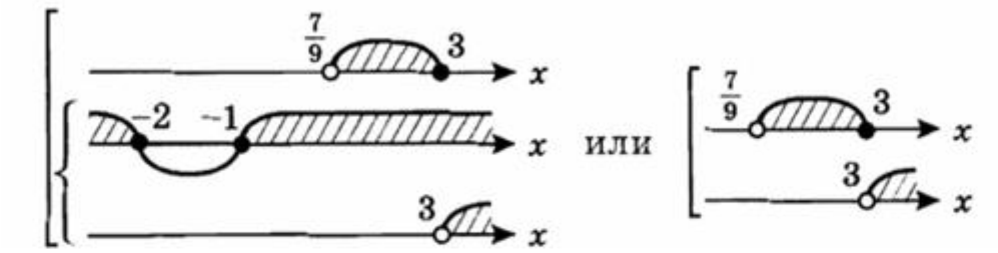
Ответ: $(0;\infty)$

Пример 4. Укажите промежуток $\sqrt{x^2+3x+2} > 3 - x$, которому принадлежит корень неравенства

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2+3x+2 > (3-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3-x < 0 \\ x^2+3x+2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 3 \\ x > \frac{7}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ (x+1)(x+2) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(\frac{7}{9};\infty)$

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} \leq 1$

Решение.

Введем подстановку: $\sqrt{x+1} = t \geq 0$

Тогда $x+1=t^2$; $x+2 = t^2+1$; $x+5 = t^2+4$

Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+1-2t} \leq 1$$

Выделим полный квадрат:

$$\sqrt{(\mathrm{t}+1)^2}+\sqrt{(\mathrm{t}-1)^2} \le 1 \Leftrightarrow |\mathrm{t}-2|+|\mathrm{t}-1| \le 1$$

Найдем решение:

1) если$\begin{cases} \mathrm{t} \le 1 \\ 2-\mathrm{t}+1-\mathrm{t} \le 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} \mathrm{t} \le 1 \\ \mathrm{t} \ge 1 \end{cases}$ или t=1

2) если $\begin{cases} 1 < \mathrm{t} \le 2 \\ 2-\mathrm{t}+\mathrm{t}-1 \le 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} 1 < \mathrm{t} \le 2 \\ \mathrm{t} = 1 \end{cases}$ или $1 < \mathrm{t} \le 2$

3)если$\begin{cases} \mathrm{t} > 2 \\ \mathrm{t}-2+\mathrm{t}-1 \le 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} \mathrm{t} > 2 \\ \mathrm{t} \le 2 \end{cases}$ решений нет

Возвращаясь к переменной x, получаем:

1) если $\sqrt{\mathrm{x}+1} = 1,$то $\mathrm{x} = 0$

2) если1<$\sqrt{\mathrm{x}+1} \le 2,$то $0 < \mathrm{x} \le 3$

Ответ:[0;3]

Самостоятельная работа обучающего характера.

Учащимся предлагается самостоятельно выполнить следующие задания:

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-5x+6} \le x+4$
2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{x-3}{2}}+\sqrt{2x} = \sqrt{x+3}$, укажите корень уравнения.
3. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^3+4x^3+3x-3} = x+1$, укажите корень уравнения

На работу дается 10 минут. После чего решение выводится на слайд и устно объясняется учителем. Т. о., каждый учащийся видит свои ошибки и метод решения каждого уравнения.

Подведение итогов урока.

Итак, наше занятие подходит к завершению. Давайте вспомним, какие методы решения иррациональных неравенств мы сегодня рассмотрели?

Рефлексия.

Что нового и интересного мы с вами узнали на уроке?

Какие этапы урока вам понравились?

На каком из них испытывали трудности?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Тест на тему: «Действия со степенями и» и его решения.

Часть А

А1. Упростите выражение $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-3}}$

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{3}{2}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{9}{4}$ 5. $\frac{16}{81}$

Решение:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{81}{16}\right)^{3}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$$

Ответ: 4

А2. Упростите выражение $\sqrt[48]{(7-5\sqrt{2})^{48}}$ - $\sqrt[49]{(5\sqrt{2}-9)^{49}}$

1. $10\sqrt{2}$ 2. 16 3. $10\sqrt{2}-16$ 4. 1 5. $10\sqrt{2}+16$

Решение:

$\sqrt[48]{(7-5\sqrt{2})^{48}}$ - $\sqrt[49]{(5\sqrt{2}-9)^{49}}$ =7 - $5\sqrt{2}$ $-5\sqrt{2}+9 = -10\sqrt{2}16$ =$10\sqrt{2}-$ 16

Ответ: 3

А3. Упростите выражение $\frac{3^{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[5]{81}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}$

1. $3^{\frac{19}{30}}$ 2. $3^{\frac{1}{3}}$ 3. $3^{\frac{5}{30}}$ 4. $3^{\frac{31}{30}}$ 5. $3^{\frac{1}{30}}$

Решение:

$$\frac{3^{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[5]{81}\cdot 3^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}}{3^{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{13}{12}}}{3^{\frac{21}{20}}} = 3^{\frac{260-252}{240}} = 3^{\frac{1}{30}}$$

Ответ: 5

А4. Упростите выражение $\sqrt[3]{\frac{19}{16}+\sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^{-4}}}$

1. $\frac{5}{4}$ 2. $\frac{4}{5}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. 4 5. 3

Решение:

$$\sqrt[3]{\frac{19}{16}+\sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^{-4}}}=\sqrt[3]{\frac{19}{16}+\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^{4}}}=\sqrt[3]{\frac{19}{16}+\frac{49}{64}}=\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\frac{5}{\sqrt[3]{64}}=\frac{5}{\sqrt[3]{2^6}}=\frac{5}{4}$$

Ответ: 1

А5. Упростите выражение $\sqrt{\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2-12}+\sqrt{x}$ для 0<x<3

1. $\frac{3}{2}$ 2. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ 3. $\frac{1}{3\sqrt{x}}$ 4. 2 5. $3\sqrt{x}$

Решение:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2-12}+\sqrt{x}=\sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}}\right)^2-12}+\sqrt{x}=\sqrt{\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}}\right)^2-12}+\sqrt{x}=$$
$$\sqrt{\frac{x^2+6x+9-12x}{x}}+\sqrt{x}=\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{x}}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{(3-x)^2}+\sqrt{x}=\frac{3-x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}=$$
$$\frac{3}{\sqrt{x}}$$

Ответ: 2

А6. Вычислите $\sqrt{7-\sqrt{48}}$ - $\sqrt{3}$

1. 2 2. $2-\sqrt{3}$ 3. $2-2\sqrt{3}$ 4. 3 5. -2

Решение:

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}-\sqrt{3}=\sqrt{7-\sqrt{16\cdot 3}}-\sqrt{3}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{4-4\sqrt{3}}=2-2\sqrt{3}$$

Ответ: 3

А7. Укажите упрощенный вид выражения $\frac{2-\frac{2}{\sqrt{a}}}{1-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}}}\right)^{-2}$

1. 2 2. $2\sqrt{a}$ 3. $2+2\sqrt{3}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{a}}$ 5. $\frac{2}{\sqrt{a}+1}$

Решение:

$$\frac{2-\frac{2}{\sqrt{a}}}{1-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}}}\right)^{-2} = \frac{\frac{2\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}}}{\frac{a-1}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}\right) = \frac{(2\sqrt{a}-2)a}{\sqrt{a}(a-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2a\sqrt{a}-2a}{2\sqrt{a}-\sqrt{a}}\cdot$$

$$\left(\frac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}}\right)= \frac{(2a\sqrt{a}-2a)(a+\sqrt{a})}{(a\sqrt{a}-\sqrt{a})a\sqrt{a}} = \frac{2a^2\sqrt{a}+2a^2-2a^2-2a\sqrt{a}}{a^3-a^2} = \frac{2a^2\sqrt{a}-2a\sqrt{a}}{a^3-a^2} =$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{a} = \frac{2\sqrt{a}\ \sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

Ответ: 4

А8. Вычислите $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^6} + \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^9}$

1. $10\sqrt{2}$ 2. 14 3. 0 4. $10\sqrt{2}-14$ 5. $7\sqrt{2}$

Решение:

$$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^6} + \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^9} = \left(1-\sqrt{2}\right)^3 + \left(\sqrt{2}+1\right)^3 = 1^3 - 3\sqrt{2} + 6 -$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2+3\sqrt{2+6+1}} = 14$$

Ответ: 2

А9. Чему равна сумма корней уравнения 4^{x+1} -9· 2^x +2=0

1. -2 2. -1 3. 0 4.1 5.2

Решение:

4^{x+1} -9· 2^x +2=0

2^x=t

$4t^2$-9t+2=0

Д=81-32=49

$t_1 = \frac{9+7}{8} = 2$

$t_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$

$2^x = 2$ $\qquad\qquad$ $2^x = \frac{1}{4}$

x=1 $\qquad\qquad$ x = -2

1-2 = -1

Ответ: -1

A10. Упростите $\frac{8}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1} - \sqrt[3]{9}$

1. $2\sqrt[3]{9}$ $\qquad$ 2. $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{9}$ $\qquad$ 3. -1 $\qquad$ 4. 1 $\qquad$ 5. $\sqrt[3]{81}$

Решение:

$$\frac{8}{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1} - \sqrt[3]{9} = \frac{2^3}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}+1} - \sqrt[3]{3^2} = \frac{2^3 - \sqrt[2]{3^2\left(3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}+1\right)}}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}+1}$$

$$= \frac{2^3 - 3\cdot 3 - 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+1} = \frac{-\sqrt[3]{3^2} - 3\sqrt[3]{3} - 1}{\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+1} = -1$$

Ответ: 3

A11. Упростите $\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

1. -1 $\qquad$ 2. $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$ $\qquad$ 3. $1+\sqrt{2}$ $\qquad$ 4. $1-\sqrt{2}$ $\qquad$ 5. $\sqrt{2}-1$

Решение:

$\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4-3} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{4-3} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-1-\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-1-\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}-1-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}-1-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1$

Ответ: 5

A12. Вычислите $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}$, при x∈ (-2,1)

1. 7 2. $2x+1$ 3. $2x-1$ 4. 1 5. 2x+7

Решение:

$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+4)^2}$ = 3-x+x+4 = 7

Ответ: 1

A13. Который из нижеперечисленных интервалов содержит корень уравнения $\frac{5^{9x+1}.9^{4x+1}}{15^{3x+3}}=25^{x+2}\cdot 3^{x+5}$

1. $(1;3)$ 2. $(2;4)$ 3. $(-1;1)$ 4. $(-2;0)$ 5. $(4;6)$

Решение:

$$\frac{5^{9x+1}\cdot 9^{4x+1}}{15^{3x+3}}=25^{x+2}\cdot 3^{x+5}$$

$$5^{9x+1}\cdot 9^{4x+1}=5^{2x+4}=5^{2x+4}\cdot 3^{x+5}\cdot 5^{3x+3}\cdot 3^{3x+3}$$

$$5^{9x+1}\cdot 9^{4x+1}=5^{5x+7}\cdot 3^{4x+8}/:5^{9x+1}$$

$$3^{8x+2}=\frac{5^{5x+7}\cdot 3^{4x+8}}{5^{9x+1}}$$

$$3^{8x+2}=5^{-4x+6}\cdot 3^{4x+8}/:3^{8x+2}$$

$$1=5^{-4x+6}\cdot 3^{-4x+6}$$

$$(5\cdot 3)^0=(5\cdot 3)^{-4x+6}$$

-4x=-6

X=$\frac{6}{4}$≈1,5

Ответ:1

A14. Упростите $\frac{x-y\sqrt{x}}{x-y^2}$ - $\frac{\sqrt{x}y^2-xy-y^3}{x\sqrt{x}+y^3}$

1. $\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y}$ 2. $\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{x}+y}$ 4. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+y}$ 5. 1

Решение:

$$\frac{X-Y\sqrt{x}}{X-Y^2}-\frac{\sqrt{x}Y^2-XY-Y^3}{X\sqrt{x}+Y^3}$$

$$\frac{(X-Y\sqrt{x})(X\sqrt{x}+Y^3)-(\sqrt{x}Y^2-XY-Y^3)(X-Y^3)}{(X-Y^2)(X\sqrt{x}+Y^3)}=$$

$$\frac{X^{2}\sqrt{x}+XY^3-X^2Y-Y^{4}\sqrt{x}(XY^{2}\sqrt{x}-Y^{4}\sqrt{x}-X^2Y+XY^3-XY^3+Y^5)}{(X-Y^2)(X\sqrt{x}+Y^3)}=$$

$$\frac{X^{2}\sqrt{x}+XY^3-X^2Y-Y^{4}\sqrt{x}-XY^{2}\sqrt{x}+Y^{4}\sqrt{x}+X^2Y-XY^3+XY^3-Y^5}{(X-Y^2)(X\sqrt{x}+Y^3)}=$$

$$\frac{X^{2}\sqrt{x}-XY^{2}\sqrt{x}+XY^3-Y^5}{(X-Y^2)(X\sqrt{x}+Y^3)}=\frac{X\sqrt{x}(X-Y^2)+Y^3(X-Y^2)}{(X-Y^2)(X\sqrt{x}+Y^3)}=\frac{(X-Y^2)(X\sqrt{y}+Y^3)}{(X-Y^2)(X\sqrt{x}+Y^3)}=1$$

Ответ:5

A15. Чему равна сумма целых решений неравенства $\left(\sqrt{3^{x+5}}\right)^{x+1}\le 9^{x+2}$

1. -6 2. -5 3. 0 4. 3 5. 7

Решение:

$$\left(\sqrt{3^{x+5}}\right)^{x+1}\le 9^{x+2}$$

$3^{x^2+6x+5} \leq 3^{2x+4}$

$x^2 + 6x + 5 \leq 2x + 4$

$x^2+4x+1\leq 0$

$x^2+4x+1=0$

Д=16-4=12

$x=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}$ $\qquad x_1=-2+\sqrt{3}$

$\qquad\qquad x_2=-2-\sqrt{3}$

Ответ: 1

Часть В

В1. Укажите количество корней уравнения

$(49^{|x|} -8\cdot 7^{|x|} +7)(5^x-x-4)=0$

Решение:

$49^{|x|} -8\cdot 7^{|x|} +7=0$

$7^{|x|} = t$

$t^2-8t+7=0$

$t_1=\frac{8+6}{2} = 7$

$t_2=\frac{8-6}{2} = 1$

$7^{|x|} = 7 \quad |x| = 1 \qquad x_1 = 1$

$\qquad\qquad x_2 = -1$

$7^{|x|} = 1 \qquad\qquad x_3 = 0$

$$5^x - x - 4 = 0$$

x=1

Ответ: 4

B2. Чему равно количество целых значений параметра а, при которых уравнение

Решение:

$49^{x} + 3a \cdot 7^{x} + 2a^{2} - a - 1 = 0$ имеет один корень?

Решение: $49^{x} + 3a \cdot 7^{x} + 2a^{2} - a - 1 = 0$

$$7^{2x} + 3a7^{x} + 2a^{2} - a - 1 = 0$$

$D = (3a)^{2} - 4(2a^{2} - a - 1) = 0$

$9a^{2} - 8a^{2} + 4a + 4 = 0$

$a^{2} + 4a + 4 = 0$

$(a+2)^{2} = 0$

$a = 2$

Ответ: 2

B3. Чему равна сумма решений системы

$$\begin{cases} 3^{2x+1} - 28 \cdot 3^{x} + 9 = 0 \\ 4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 < 0 \end{cases}$$

Решение:

1) $3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^{x} + 9 = 0$

$3^{x} = t$

$3t^{2} - 28t + 9 = 0$

$t_{1.2} = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 108}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6}$

$t_{1} = 9$ $\qquad$ $t_{2} = \frac{1}{3}$

$3^{x} = 9$, $x_{1} = 2$

$3^{x} = \frac{1}{3}$, $x_{2} = -1$

2) $2^{2x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 < 0$

$z^{2} - 9 \cdot z^{x} + 8 < 0$

$z_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2}$

$z_1=8$ $z_2=1$

$1 < 2^x < 8$

$2^0 < 2^x < 2^3$

Ответ: 2

В4. Чему равна сумма наименьшего положительного и наибольшего отрицательного целых решений неравенства $3^{x+2}-9-\frac{64 \cdot 3^x}{3^x-1} > 0$?

Решение:

$$3^x \cdot 9 - 9 - \frac{64 \cdot 3^x}{3^x - 1} > 0$$

$$\frac{9 \cdot (3^x - 1) \cdot (3^x - 1) - 64 \cdot 3^x}{3^x - 1} > 0$$

$$\frac{9 \cdot 3^x - 18 \cdot 3^x + 9 - 64 \cdot 3^x}{3^x - 1} > 0$$

$$\frac{9 \cdot 3^x - 82 \cdot 3^x + 9}{3^x - 1} > 0$$

$$9 \cdot z^2 - 82 \cdot z + 9 = 0$$

$$z_1 = \frac{82 + \sqrt{6724 - 324}}{18} = 9$$

$$z_2 = \frac{82 - \sqrt{6724 - 324}}{18} = \frac{1}{9}$$

$3^x = \frac{1}{9}$ $x_1=-2$

$3^x=9$ $x_2=2$

Часть С

C1. Решите неравенство $\sqrt{x}^{\sqrt{1-x}} > \sqrt{x}^{\sqrt{2x-1}}$

Решение:

$\lg\sqrt{x}^{\sqrt{1-x}} > lg\sqrt{x}^{\sqrt{2x-1}}$

$$\sqrt{1-x} \cdot lg\sqrt{x} - lg\sqrt{x} \cdot \sqrt{2x-1} > 0$$

$\lg\sqrt{x} \neq 0$

$\lg\sqrt{x}\left(\sqrt{1-x} - \sqrt{2x-1}\right) > 0$

1) $\begin{cases} \lg\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{2x-1} > 0 \end{cases}$

$\sqrt{x} > 1$ ОДЗ: 1-x>0 $2x - 1 \geq 0$

$\begin{cases} x > 1 \\ x < 1 \\ 2x \geq 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg\sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{2x-1} < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ \text{ОДЗ: } 1 - x > 0 \qquad x < 1 \\ 2x - 1 \gg 0 \qquad 2x \geq 1 \qquad x \gg \frac{1}{2} \end{cases}$

1-x<2x-1

2<3x

x>$\frac{2}{3}$

Ответ: ($\frac{2}{3}$;1)

C2. При каких значениях параметра а уравнение

$$9^{\sqrt{x-1}} + a \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9 = 0 \text{ не имеет решений?}$$

Решение:

Д<0

$3^{2\sqrt{x-1}} + a \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9 = 0$

$t^2+at+9=0$

Д= $a^2-36<0$

$(a-6)(a+6)<0$

$-6<a<6$

Ответ: $a>-6$