МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения векторно-координатному методу в школьном курсе геометрии

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05
Педагогическое образование (два профиля подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Информатика»

Форма обучения очная (дневная)

Проверка на объем заимствований:
67 % авторского текста
Работа рекомендован к защите
рекомендована/не рекомендована
« 25 » мая 2020 г.

И. о. зав кафедрой ММОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/204-5-1
Гареева Алёна Марисовна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

С 2001 года и по настоящее время выпускными экзаменами из школы и вступительными экзаменами в вузы для выпускников являются итоговые контрольные испытания в форме Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ).

Ежегодно учащиеся сдают входящий в перечень основных предметов, обязательных для сдачи, экзамен по математике, многие выбирают профильный уровень.

Контрольно-измерительный материал (КИМ) по математике содержит 19 заданий, охватывающих различные области теоретической, практической и реальной математики. Среди них 4 задачи по геометрии: две по планиметрии и две по стереометрии (по одной задаче в первой и во второй частях) [20].

В стереометрии используется два основных метода решения задач. Первый метод основан на аксиомах, теоремах и свойствах фигур. Он требует логической последовательности практических рассуждений. Второй метод – это метод координат или векторно-координатный метод. Именно этот метод чаще всего применяется при решении задания №14 Единого Государственного экзамена по математике профильного уровня.

Придавая геометрическим исследованиям алгебраический характер, векторно-координатный метод переносит в геометрию наиболее важную особенность алгебры – единообразие способов решения задач и отсутствие необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций, это является главной ценностью данного метода [9].

Стереометрическая задача №14 является задачей повышенной сложности и может принести учащемуся хорошие баллы. Но, как показывает практика, данное задание вызывает у учащихся большие трудности. При сдаче экзамена обучающиеся чаще всего не приступают к выполнению этого задания, или допускают ошибки при нахождении того или иного геометрического элемента. Исходя из этого, можно сделать вывод, что решение стереометрических задач векторно-координатным методом представляет множество сложностей для учащихся.

Всем вышесказанным и определяется актуальность темы выпускной квалификационной работы.

В качестве объекта исследования выступает процесс обучения математике в старшей школе.

Предмет исследования: решение учащимися стереометрических задач, входящих в варианты ЕГЭ по математике.

Гипотеза: процесс изучения векторно-координатного метода будет более успешным, если уделить особое внимание изучению этой темы на элективных занятиях по математике.

Цель исследования: разработать и апробировать курс по выбору «Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ» как средство для изменения уровня выполнения стереометрических задач в ЕГЭ.

Задачи исследования:

1. Проанализировать литературу по теме исследования.
2. Выделить типы стереометрических задач, входящих в варианты ЕГЭ, которые можно решить векторно-координатным методом.
3. Разработать программу курса по выбору.
4. Разработать электронный образовательный ресурс, необходимый для реализации данных учебных занятий для учеников 11-х классов.
5. Провести апробацию в рамках внеурочных занятий.

Структура работы: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНОГО МЕТОДА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

1.1 Исторические сведения. Суть метода координат

История появления координат и системы координат начинается очень давно, первоначально идея метода координат появилась ещё в античном мире в связи с потребностями географии, астрономии, живописи. Считается, что первым составителем географической карты был древнегреческий ученый Александр Милетский, который дал очень четкое описание широты и долготы места, используя прямоугольные проекции.

Изучение кривых: параболы, гиперболы и эллипса так же было начато еще в далекие времена. Древний математик александрийской школы Аполлоний Пергский (живший в III-II вв. до н. э.) использовал прямоугольные координаты для определения и изучения этих кривых, которые были известны еще в то время.

Еще за 100 лет до н.э греческий ученый Гиппарх предложил разделить на карте земной шар на параллели и меридианы и ввести хорошо известные в наше время географические координаты: широту и долготу и отметить их числами.

Как уже говорили ранее, появление и развитие координат связано с изучением различных наук. В астрономии и географии необходимо было определять расположение определенных мест на поверхности Земли и звезд на небе. Тогда и появилась идея представления чисел в виде точек и присвоения точкам числовых обозначений. На стене одной из погребальных камер Древнего Египта были обнаружены следы применения идеи прямоугольных координат в виде квадратной сетки (палетки) [7].

Однако, основная заслуга в создании современного метода координат принадлежит французскому философу, математику и естествоиспытателю Рене Декарту (1595-1650) – чьим именем названы прямоугольные координаты. Приходя в театр, мало кто задумывается о происхождении простой вещи: нумерация кресел по рядам и местам. А ведь когда-то это было большой проблемой. До наших времен дошла история: Декарт, посещая парижские театры, всегда удивлялся, почему же происходит такая путаница и ругань при распределении зрителей в зале. Оказывается, ряды и места, попросту, не имели номеров. Тогда-то он и предложил ввести систему нумерации, в которой каждое место получало номер ряда и порядковый номер от края. Эта система используется и в наши дни.

Важное место в истории координат занимают работы Рене Декарта: «Рассуждение о методе» (1637 г.) и «Геометрия» (1637 г.). В первой работе Р. Декарт впервые научно описал прямоугольную систему координат. Именно поэтому прямоугольную систему координат часто называют декартовой системой координат. В «Геометрии» Декарт открыл и показал связь алгебры геометрии. Им впервые было введено понятия переменной величины и функции. Этот научный труд дал огромный толчок в развитии математики. В декартовой системе координат получили реальную интерпретацию отрицательные числа.

Развитие алгебры и геометрии в течение тысячелетий шло независимо друг от друга, между ними была очень слабая связь. В эпоху Декарта эти два направления уже достигли высокой степени развития, однако с появлением аналитической геометрии появилось новое направление в изучении, которое создало тесную связь между геометрией и алгеброй.

Любую точку пространства или плоскости можно определять с помощью чисел – ее координат. Это означает, что любую фигуру можно «зашифровать» с помощью чисел. Соотношения между координатами чаще всего определяет не одну точку, а некоторое множество (совокупность) точек. Например, если отметить все точки, у которых абсцисса равна ординате, т. е. точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $x=y$, то получится прямая линия – биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Иногда понятие «множество точек» заменяют на «геометрическое место точек». Например, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $x=y$ – это и есть биссектрисы первого и третьего координатного угла. Именно открытие связи между алгеброй и геометрией дало толчок для нового направления в развитии математики. Эти знания начали развивать математику как единую науку, в которой все ее части неотделимы друг от друга.

Нельзя не сказать о французском математике Пьере Ферма. В его работах сделан большой вклад в развитие координатного метода, они впервые были опубликованы уже после его смерти. Ферма и Декарт занимались изучением метода координат только на плоскости, а вот в трехмерном пространстве впервые применил этот метод Леонард Эйлер в 18 веке [7].

Координаты позволяют наглядно, используя график, показать зависимость одной величины от другой. В современном мире в различных областях данные знания широко используются. Именно поэтому большое количество специалистов разных направлений имеют представление о прямоугольных декартовых координатах на плоскости.

Суть метода координат

Векторно-координатный метод считается одним из универсальных методов. Если подобрать к нему правильный подход, то это позволит решить фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач [3].

Данный подход основан на использовании в геометрии методов алгебры, путем введения систем координат, что дает возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств [6].

Сущность координатного метода заключается во введении удобной для решения стереометрической задачи системы координат и, затем в вычислении искомых элементов через образующиеся векторы. В условии задачи указывается зависимость между данными и искомыми элементами заданной фигуры. Координатный метод позволяет эту зависимость перевести на алгебраический язык. Исследовав полученную аналитическую связь, разбирается геометрический образ. При решении той или иной математической либо физической задачи методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае. Существует множество систем координат: аффинная, полярная, биполярная, коническая, параболическая, проективная, сферическая, цилиндрическая и др. Наиболее используемая из них – прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат). Ею мы и будем пользоваться в рамках данного исследования.

Существует основной алгоритм решения задач методам координат, состоящий из четырех этапов:

1. Выбор системы координат.
2. Нахождение координат необходимых точек и векторов, или уравнения кривых и фигур.
3. Решение примера, используя ключевые задачи или формулы данного метода.
4. Переход от аналитических соотношений к метрическим.

Но этот алгоритм является общим, и для некоторых видов задач появляется необходимость выполнения дополнительных действий для их решения [1919].

Стоит отметить, что векторно-координатный метод, помимо ряда достоинств имеет 2 недостатка: его объемность вычислений, что требует достаточно больших временных затрат наличие иррациональных, нецелых промежуточных результатов. Исходя из опыта, можно отметить, что эти изъяны можно устранить путем корректирования в решении задачи. Так, к примеру, среди координат векторов имеются дроби или корни, то от них можно избавиться, вспомнив известное правило: при умножении вектора на число $a \neq 0$ угол между этим вектором и другим не меняется. Например, вектор $\overrightarrow{AB} = (0{,}2; 0{,}6; 3)$ можно заменить вектором $10 \cdot \overrightarrow{AB} = (2; 6; 30)$, сократив, таким образом, объём дальнейших вычислений. Также, чтобы избежать иррациональность в знаменателе можно умножить вектор на этот корень или на сопряженное выражение [18].

Также следует помнить, что метод координат не является основным методом. Шарыгин И.Ф. отметил о вреде данного метода. «Что касается слабых учеников, то «большей частью в этой группе находятся дети, которые плохо считают, с трудом понимают и запоминают формулы. Для этих детей геометрия могла бы стать предметом, за счет которого они могли бы компенсировать недостатки общематематического развития. А вместо этого она ложится на них дополнительным грузом… Координатный метод оставляет в стороне геометрическую суть изучаемой геометрической ситуации. Воспитывается исполнитель, решающий заданную конкретную задачу. Не меньше, но и не больше. Не развивается геометрическая, и даже математическая интуиция, столь необходимая математику-исследователю» [23].

1.2 Основные понятия

1.2.1 Координаты в пространстве

Метод координат – способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Числа (символы), определяющие положение точки (тела) на прямой, плоскости, в пространстве, на поверхности и так далее, называются её **координатами**. В зависимости от задач и типа исследования выбирают различные системы координат.

Система координат – это способ определения положения точек или тел с помощью чисел или других символов. Набор чисел или символов, который определяет местоположение определенной точки, называется координатами этой точки.

В математике координаты – совокупность чисел, сопоставленных точкам многообразия в некоторой карте определённого атласа.

В элементарной геометрии координаты – величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве. На плоскости положение точки в основном определяется расстояниями от координатных осей, которые пересекаются в начале координат под прямым углом, одна координата называется ординатой, а вторая – абсциссой. В пространстве, согласно системе Декарта, положение точки определяют расстояния от трех координатных плоскостей, пересекающихся под прямым углом друг к другу в одной и той же точке, или сферические координаты, в которых начало координат находится в центре сферы.

На практике наиболее часто используется прямоугольная система координат (также называемая декартовой системой координат) [8].

Прямоугольная система координат в пространстве определяется путем установки масштаба (отрезка для измерения длин) и трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке, пронумерованных в определенном порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, сами оси – координатными осями, первая из них – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат.

Обозначаются, соответственно, O – начало координат, $Ox,\ Oy,\ Oz$. Если M – произвольная точка пространства, то проведя три плоскости перпендикулярные координатным осям, получим точки пересечения с осями: M_x , M_y , M_z (рис. 1). Прямоугольными декартовыми координатами называются числа, определяемые формулой: $x = OM_x,\ y = OM_y,\ z = OM_z$ где $OM_x,\ OM_y,\ OM_z$ – величины направленных отрезков $OM_x,\ OM_y,\ OM_z$. Число x называется первой координатой, y – второй и z – третьей [8].

Расстояние между двумя точками в пространстве можно определить по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении. Даны две точки в пространстве $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки М, делящий отрезок M_1M_2 в отношении l:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \qquad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}, \qquad z = \frac{z_1 + lz_2}{1 + l}.$$

В частности, **координаты середины отрезка** определяется формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

В пространстве также можно использовать полярные, сферические и цилиндрические координаты.

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. Решая ту или иную математическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

1.2.2 Векторы в пространстве

Из курса планиметрии мы знаем, что **вектор** – направленный отрезок. Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Векторы, как и точки, в пространстве имеют свои координаты. Их несложно найти: если начало вектора находится в точке $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, конец – в точке $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет следующие координаты $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Модулем вектора называется его длина, он обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора – скалярная неотрицательная величина.

Длину вектора можно определить как расстояние между двумя точками в пространстве: началом и концом вектора. Тогда получаем формулу, выражающую длину вектора через его координаты:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нулевым вектором (нуль-вектором) называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нуль-вектор обозначается символом $\vec{0}$, его модуль равен нулю, а направление не определено. Отметим, что каждую точку пространства можно считать нулевым вектором.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными** ($\vec{a}||\vec{b}$), если они лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Если имеются два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. Тогда они будут называться **сонаправленными** ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) и **противоположно направленными** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$) соответственно. Принято считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.

Если два вектора сонаправлены и имеют одинаковые длины, то такие векторы называются **равными.**

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются **компланарными.**

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице [2].

Введем в рассмотрение единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей (их называют ортами) и векторы $\overrightarrow{OA} = X_i$, $\overrightarrow{OB} = Y_j$, $\overrightarrow{OC} = Z_k$, где A, B, C – вершины прямоугольного параллелепипеда, для которого OM является диагональю (рисунок 1). По определению суммы $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, поэтому $r = X_i + Y_j + Z_k$.

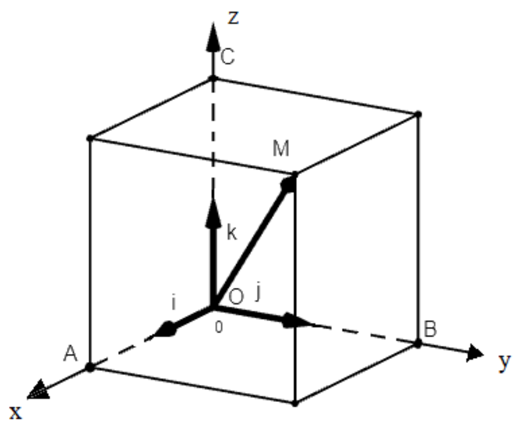

Рисунок 1

Эти формулы выражают разложение вектора $\vec{r}$ по базисным векторам. Векторы стоящие в правой части формулы называются составляющими или компонентами вектора $\vec{r}$.

Если точка приложения вектора совпадает с началом координат, то его называют радиус-вектором, для которого координатами в этой системе будет проекция на координатные оси.

Можно сказать, что координаты радиус-вектора данной точки M совпадает с координатами точки M. Таким образом, координаты точки M можно определять с помощью радиус-вектора. Радиус-вектором точки M называется вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M. Декартовыми прямоугольными координатами X, Y, Z вектора $\vec{r}$ называется его проекция на координатные оси $X = \text{пр}_x\vec{r}$, $Y = \text{пр}_y\vec{r}$, $Z = \text{пр}_z\vec{r}$. Если x, y, z – декартовые прямоугольные координаты точки M, то $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, т.е. координаты радиус вектора $\overrightarrow{OM}$ равны координатам точки M.

Координатами любого вектора называют его проекции на координатные оси.

1.2.3 Операции над векторами.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют третий вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен от конца вектора $\vec{a}$. Такое построение суммы называется правилом треугольника. Аналогичным образом определяется сумма трех и более векторов.

Каждую координату суммы двух или более векторов можно получить, сложив одноименные координаты этих векторов. Пусть даны два вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, Zz_2)$, тогда x, y, z – координаты вектора суммы

$$\vec{a} + \vec{b} = (\, x, y, z),$$

где

$$x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2, \qquad z = z_1 + z_2.$$

Чтобы получить **разность** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, необходимо отложить их от одной точки и соединить конец второго вектора с концом первого.

Каждая координата разности двух векторов равна разности одноименных координат этих векторов: $\vec{a} - \vec{b} = (\, x', y', z')$, где

$$x' = x_1 - x_2, \qquad y' = y_1 - y_2, \qquad z' = z_1 - z_2$$

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $\overline{|\vec{b}|} = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

2) если $\alpha \geq 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

3) если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Каждую координату произведения вектора на число можно получить путем умножения соответствующей координаты вектора на это число. Пусть дан вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и число $\alpha \neq 0$. Координаты x_2, y_2, z_2 вектора $\vec{b} = \alpha\vec{a}$:

$$x_2 = \alpha \cdot x_1, \quad y_2 = \alpha \cdot y_1, \quad z_2 = \alpha \cdot z_1.$$

Данные равенства выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторы коллинеарные тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Есть обозначить скалярное произведение через $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$.

Скалярное произведение обладает свойствами:

1. Переместительности (коммутативности): $\vec{a}\,\overline{\vec{b}} = \vec{b}\,\vec{a}$.
2. Сочетательности (ассоциативности) относительно числового элемента: $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$.
3. Распределительности (дистрибутивности) относительно суммы векторов: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}\,) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
4. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|cos0 = |\vec{a}|^2$, т.е. скалярный квадрат его длины равен квадрату его длины.
5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} =$

(x_2, y_2, z_2)выражается формулой: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, т.е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных квадратов [15].

Косинус угла между векторами определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством: $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$, она следует из выше указанных формул [6].

1.2.4 Поверхности и линии в пространстве

Уравнение поверхности и уравнение линии пространстве

Уравнение поверхности в фиксированной системе координат задается уравнением с тремя неизвестными, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной поверхности.

Из этого определения следует способ решения следующей простой задачи: узнать, лежит ли данная точка на поверхности, определенной данным уравнением. Чтобы решить эту задачу необходимо подставить координаты точки в заданное уравнение, если результатом является числовое равенство, то точка лежит на поверхности, в другом случае точка поверхности не принадлежит.

Всякое уравнение с тремя переменными x, y, z можно записать так:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – функция переменных x, y, z.

Из определения прямоугольного декартовых систем координат точки в пространстве следует, что координатные плоскости Oxy, Oxz, Oxy – определяются соответственно уравнениями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей, поэтому она определяется двумя линиями. И координаты любой точки линии одновременно будет удовлетворять обоим уравнения.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется поверхностью n-го порядка. Например, сфера – поверхность второго порядка, так как ее уравнение является уравнением второй степени.

Различные виды уравнения плоскости

Плоскость в пространстве можно задать различными способами в зависимости этого рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору. Ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ плоскости, то ее уравнение имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0,) + C(z - z_0) = 0$.

Равенство выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$.

Общее уравнение плоскости. Уравнение первой степени относительно декартовых координат $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D одновременно в нуль не обращается, определяет плоскость в пространстве (рисунок 2).

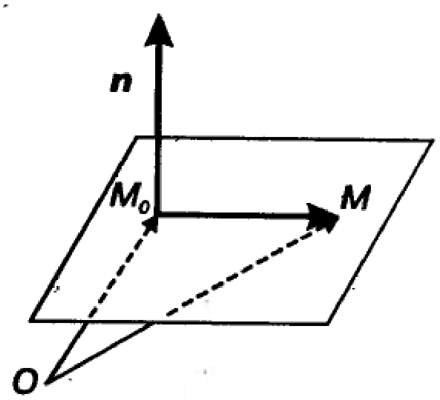

Рисунок 2

Отметим частные случаи. Если $D = 0$, то уравнение имеет вид $Ax + By + Cz = 0$ и определяет плоскость, проходящую через начало координат.

Если $C = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + By + D = 0$ и определяет плоскость, параллельную оси Oz, ибо $\mathrm{C} = 0$.

Если $\mathrm{C} = 0$ и $D = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + By = 0$, и определяет плоскость, проходящую через ось Oz.

Если $C = 0$, $B = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + D = 0$ или $x = a$ и определяет плоскость параллельную оси Oyz.

Если $C = 0$, $B = 0$, $D = 0$, то уравнение принимает вид $Ax = 0$ или $x = 0$ и определяет координатную плоскость Oyz.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Если заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, которые не лежат на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через данные точки, будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Это равенство выражает компланарность между тремя векторами, поэтому вместо трех точек мы можем использовать две точки и один вектор или два вектора и одну точку (рисунок 3).

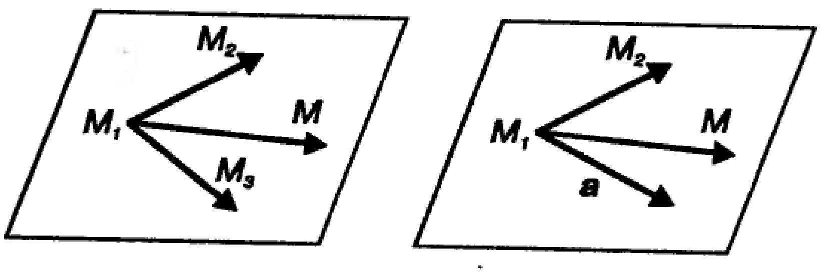

Рисунок 3

Различные виды уравнений прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать различными способами.

Векторно-параметрическое уравнение прямой. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Если даны точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ прямой, то

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{a}t,$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки $M\ (x, y, z)$, $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, t – переменная величина (параметр) (рисунок 4).

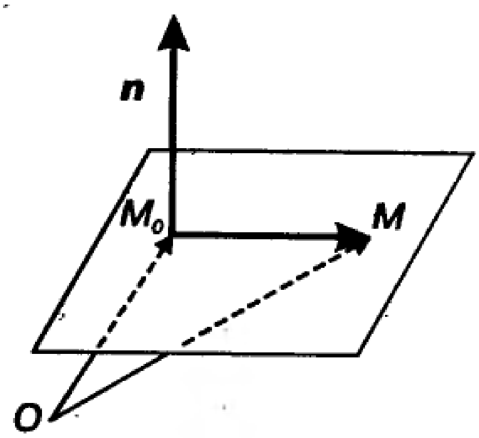

Рисунок 4

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$x = x_0 + a_1 t, y = y_0 + a_2 t, z = z_0 + a_3 t.$$

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},$$

где $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – данная точка и $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор.

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, поэтому уравнение примет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1} \quad [12].$$

1.3 Задачи, обучающие координатному методу

Можно выделить следующие цели изучения метода координат в школьном курсе геометрии:

1) предоставить обучающимся эффективный метод решения задач и доказательства ряда теорем;

2) продемонстрировать на основе этого метода тесную связь алгебры и геометрии;

3) способствовать развитию вычислительной и графической культуры обучающихся.

Чтобы разработать методологию формирования способности использовать метод координат, важно определить требования, которые логическая структура решения задач ставит перед мышлением учащегося. Координатный метод предполагает наличие у учащихся умений и навыков, позволяющих применять данный метод на практике. Проанализируем решение нескольких задач. В ходе этого анализа отметим умения, являющиеся элементами умения использовать координатный метод при решении задач. Знание элементов этого умения позволит осуществить его пошаговое формирование [13].

Приведем решение двух задач для выявления умений и навыков, необходимых для использования координатного метода.

Задача №1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение:

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0;0;0)$ (умение выбирать удобную нам систему координат) (рисунок 5).

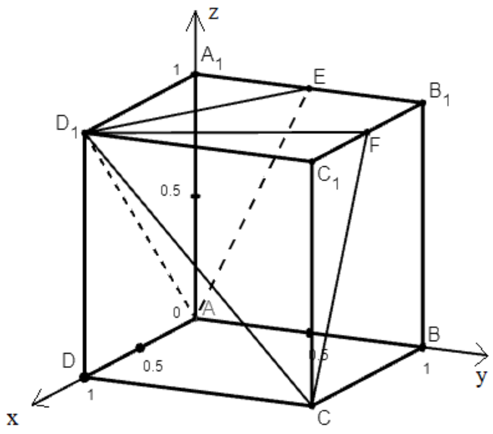

Рисунок 5

2. Находим координаты точек, которые необходимы для составления уравнения плоскостей: $D_1(1;0;1)$, $E(0;0{,}5;1)$, $C(1;1;0)$, $F(0{,}5;1;1)$ (умение находить координаты необходимых точек и строить их по заданным координатам).

3. Составим уравнение плоскости (AD_1E), используя уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (умение составлять уравнения плоскости, прямой, пространственных кривых и фигур). Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0, \\ A\cdot 0 + B\cdot 0{,}5 + C\cdot 1 + D = 0 \end{cases}$$

Получим, что $A = -C$, $B = -2C$, $D = 0$. Таким образом, уравнение имеет вид: $x + 2y - z = 0$, следовательно, $A_1 = 1, B_1 = 2$, $C_1 = -1$.

Составим уравнение плоскости (CFD_1), используя уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0$. Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot 1 + B\cdot 1 + C\cdot 0 + D = 0, \\ A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D = 0, \\ A\cdot 0{,}5 + B\cdot 1 + C\cdot 1 + D = 0 \end{cases}$$

Получим, что $B = C$, $A = 2C$, $D = -3C$. Таким образом, уравнение примет вид: $2x + y + z - 3 = 0$.

Значит, $A_2 = 2$, $B_2 = 1$, $C_2 = 1$.

4. По формуле (знания формул и умение их применять):

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

Задача №2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1 [20].

Решение:

1. Введем систему координат с началом координат $A(0,0,0)$ и единичными векторами $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ (рисунок 6). Следовательно, координаты точек $A_1(0,0,1), B(0,1,0), D(1,0,0)$ (умение оптимально выбирать систему координат).

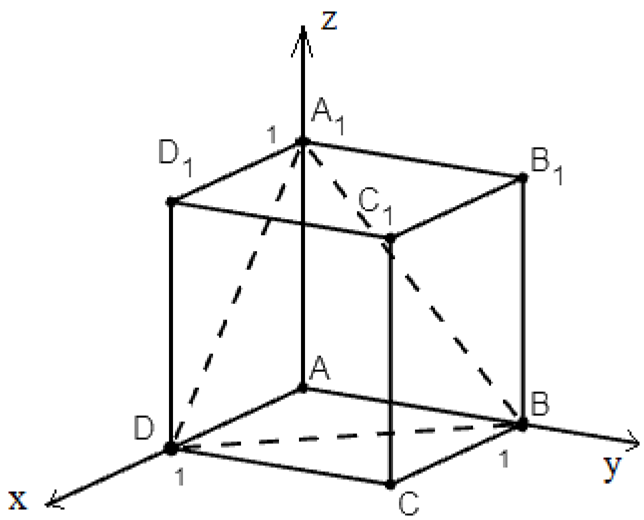

Рисунок 6

2. Составим уравнение плоскости A_1BD:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0-0 & 1-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости будет иметь вид $x + y + (z - 1) = 0$, , т.е. $x + y + z - 1 = 0$, и координаты вектора нормали будут $\vec{n}\{1,1,1\}$ (умение составлять уравнение пространственных фигур и находить координаты векторов).

3. Теперь найдем расстояние от точки A до нашей плоскости по формуле для нахождения расстояния от точки до плоскости (знание формул и умение их использовать):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Анализируя решение данных задач, можно определить какие умения нужны для того, чтобы научиться применять метод координат. Итак,

1) переводить геометрический язык на аналитический;
2) изображать точку по заданным координатам;
3) определять координаты данных точек;
4) вычислять расстояние между точками, если известны их координатами;
5) вычислять расстояния между прямой и плоскостью, между двумя прямыми, между плоскостями;
6) вычислять углы между прямой и плоскостью, между прямыми, между плоскостями;
7) выбирать систему координат, оптимальную для данной задачи;
8) составлять уравнения заданных фигур (плоскости и прямые) и считать определитель;
9) видеть за уравнением конкретный геометрический образ;
10) выполнять алгебраические преобразования.

Следовательно, все задачи, которые способствуют развитию вышеуказанных умений, являются задачами, обучающими координатному методу.

1.4 Этапы формирования векторно-координатного метода в курсе математики

Терембекова А.А. в своей статье [18] выделяет 4 этапа формирования векторного метода в процессе изучения математики:

Подготовительный этап, целью которого является овладения основными знаниями и умениями.

1. Мотивационный этап, целью которого является показ необходимости овладения этим методом и его востребованностью при решении таких задач, которые векторным методом решаются проще, чем любым другим, или которые вообще невозможно решить другим методом.
2. Ориентировочный этап, целью которого является разъяснение сути метода и выделение его основных компонентов на примере анализа решенной этим методом задачи.
3. Формирующий этап, целью которого является применение специально подобранных задач и формирование отдельных элементов метода.

Следует отметить, что такое разделение на этапы очень условно, так как каждый этап взаимозависим от предшествующих этапов.

На первоначальном этапе, в 5-6 классах, проходит подготовка к изучению данной темы в последствие (пропедевтика). Вводится основной понятийный аппарат, который хорошо отрабатывается, затем систематизируется в курсе геометрии.

Самые первые задачи, связанными с изучением метода координат являются: нахождение координат точек, определение показаний термометра, нахождение расстояния между объектами и задачи на движение. Далее появляются следующие задания – сравнить числа или буквенные выражения на координатном луче.

Дополнение координатного луча до координатной прямой происходит в 6 классе при изучении отрицательных чисел, которое происходит к концу первого полугодия. В качестве примера, аналогично программе 5 класса, приводится термометр. Позднее сложение и вычитание чисел будут показаны на координатной прямой. Позже, при дополнении изученных числовых множеств до множества рациональных чисел вводится понятие «координатная плоскость». Примерами координатной плоскости в учебниках являются поле для игры в морской бой и шахматная доска [5].

Второй этап изучения метода координат проходит в 7-8 классах.

Школьники изучают элементарные функции с помощью координатного метода, находят координаты точки и отмечают их на координатной плоскости.

Но на данном этапе данному методу уделяется мало внимания.

Третий этап изучения проходит в 9 классе. Вначале раскрываются основные этапы применения метода, после, при решении задач показывается непосредственное применение координатного метода.

Рассмотрим реализацию третьего этапа формирования векторного метода на примере самого распространенного учебно-методического комплекса (далее УМК) Л. С. Атанасяна.

На изучение темы «Метод координат» в УМК «Геометрия 7-9 класс» в данном пособии отводится 18 часов. Данной теме в учебнике посвящена отдельная глава.

Координатный метод изучается после изучения темы «Векторы», но до изучения скалярного произведения векторов.

В данной главе дается определение метода координат изучаются координаты вектора, уравнение прямой и окружности, решаются простейшие задачи в координатах (нахождение координат середины отрезка, длины вектора по его координатам, расстояния между точками). В этом учебнике метод координат дается как метод изучения геометрических фигур с помощью средств алгебры. Автор задается целью обучить учеников применять координатный метод не только к задачам на построение фигур по их уравнению, но и к задачам на доказательство, также для вывода геометрических формул.

Позже с помощью метода координат доказываются определения тригонометрических функций, основное тригонометрическое тождество, формулы приведения и теорема косинусов. На этом использование этого метода заканчивается в 9 классе заканчивается [1].

При изучении линий координатным методом появляются две задачи: по геометрическим свойствам данной линии найти ее уравнение и по заданному уравнению линии исследовать ее геометрические свойства.

Изучение метода координат в 11 классе можно отнести к 4 этапу. Главной сложностью для учащихся здесь является переход от двухмерного восприятия предмета к трехмерному. Изучение теоретических аспектов метода координат в пространстве начинается с введения основных понятий, таких как: вектор, равенство векторов, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, компланарные векторы и разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Далее рассматривается метод координат в пространстве. В учебнике Атанасяна он рассматривается как один из доминирующих методов при решении задач [2].

Если рассматривать задачи, приведенные в учебниках, то можно найти задачи на определение координат точек, разложение векторов по данным координатным векторам, определение координат векторов, нахождения скалярного произведения и угла между прямыми и плоскостями и т. д.

Однако во многих учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования, методу координат уделяется мало внимания. Так, например, в учебнике

Погорелова для 10-11 классов автором предложены решения методом координат только лишь простых задач, таких как нахождение расстояния между двумя точками, нахождение координат середины отрезка. Решение более сложных стереометрических задач, например, на нахождение угла между прямой и плоскостью, угла между плоскостями, предлагается решать классическим методом [15].

Исходя из всего вышесказанного, появляется необходимости создания методической разработки уроков для учащихся 11-х классов по исследуемой теме.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ УЧАЩИХСЯ

2.1 Виды задач итоговой аттестации, решаемых методом координат

В стереометрии используются два основных метода решения задач:

− первый – классический, требующий логической последовательности практических рассуждений, основан на геометрических фактах, аксиомах, теоремах;

− второй – векторно-координатный метод, основанный на аналитическом подходе к решению задач.

В вариантах ЕГЭ стереометрическая задача повышенной сложности затрагивает 8 тем по стереометрии, 5 из которых гораздо удобнее решать вторым методом (Таблица 1):

Таблица 1 – Темы стереометрической задачи

	Классический метод	Векторно-координатный метод
Расстояние между прямыми и плоскостями	+	+
Расстояние от точки до прямой и до плоскости	+	+
Угол между плоскостями	+	+
Угол между прямой и плоскостью	+	+
Угол между скрещивающимися прямыми	+	+
Объемы многогранников	+	-
Сечения круглых тел	+	-
Сечения многогранников	+	-

Стоит признать, что второй способ имеет большое преимущество. Он позволяет решать стереометрические задачи, не ссылаясь на множество теорем, вспомогательных построений, которые иногда бывают слишком громоздки и затруднительны.

Важной ценностью метода является экономия времени (в некоторых случаях). Метод координат позволяет для некоторых стереометрических задач найти более рациональное решение в сравнении с классическим [10].

Стереометрическая задача повышенной сложности за годы существования ЕГЭ не меняла заявленную тематику [20], но с 2015 года произошли существенные изменения в ее модели:

– задача стала содержать два пункта (а и б) с требованиями «доказать» и «найти»;

– каждый из пунктов независимо друг от друга стал оцениваться экспертами ЕГЭ одним баллом.

Благодаря разбиению задачи на две части, оцениваемых независимо друг от друга, учащимся стало легче получить как минимум 1 балл за задачу. Чаще всего трудности возникают с пунктом «доказать». Однако если принять его за данность, то пункт «найти» выполняется большим количеством учащихся.

Итак, стереометрические задачи, решаемые векторно-координатным методом, укладываются в следующую типологию:

1. Задачи на вычисление угла между:
   - скрещивающимися прямыми;
   - прямой и плоскостью;
   - плоскостями.
2. Задачи на вычисление расстояния:
   - от точки до плоскости;
   - от точки до прямой;
   - между скрещивающимися прямыми [10].

Рассмотрим каждый тип подробнее.

1. Нахождение угла между скрещивающимися прямыми

Углом между прямыми в пространстве называется угол между любыми параллельными им пересекающимися прямыми. И этот угол равен углу между направляющими векторами данных прямых (рисунок 7).

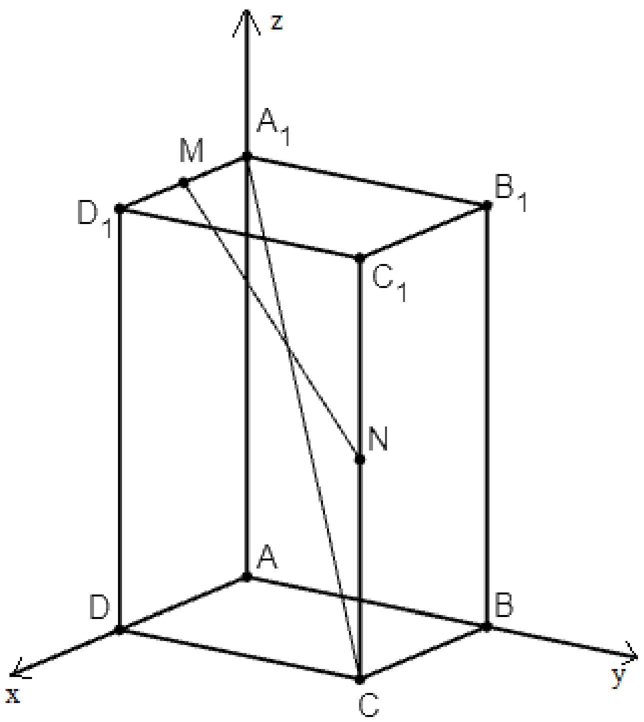

Рисунок 7

Алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми:

1. Выбираем любые вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, имеющие направления прямых а и b.

2. Определяем координаты этих векторов по соответствующим координатам их начал и концов.

3. Подставляем найденные координаты в формулу:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

4. Находим арккосинус числа, полученного в результате вычислений (если требуется в задаче).

Для вычисления угла между прямыми в многограннике придерживаемся того же принципа. И чаще всего выбирают параллельные прямые данным прямым.

Пример 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1, где D_1 и E_1 – соответственно середины ребер A_1C_1 и A_1B_1 [14].

Решение:

1. Поместим призму в систему координат, как показано на рисунке 8.

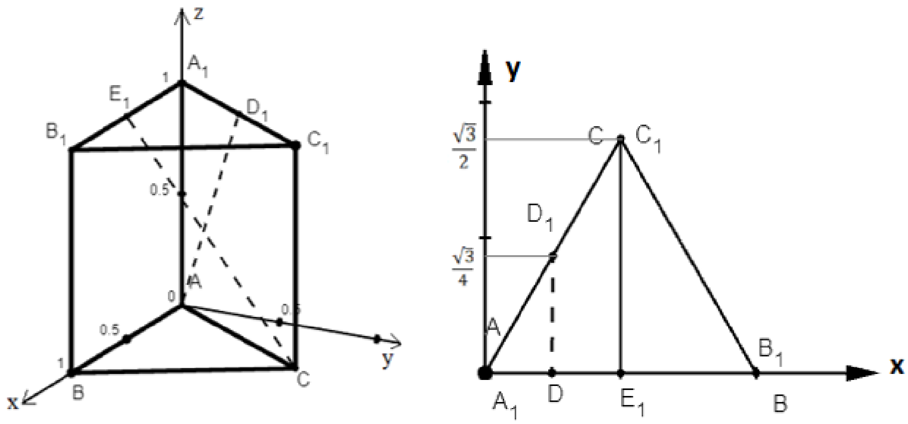

Рисунок 8

2. Координаты точек, задающих прямые, указанные в условии задачи

$$A(0{,}0{,}0),\ D_1\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right),\ C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\ E_1\left(\frac{1}{2},0,1\right).$$

3. Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AD_1}\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$ и $\overrightarrow{CE_1}\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

4. Найдем косинус угла между векторами:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot 1}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+1}\cdot\sqrt{0+\frac{3}{4}+1}}=\frac{\sqrt{35}}{14}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{14}$.

2. Угол между прямой и плоскостью

Уравнение плоскости в пространстве

Точки, удовлетворяющие равенству $Ax+By+Cz+D=0$ образуют плоскость α с нормалью $\vec{n}(A,B,C)$ (рисунок 9). Коэффициент D показывает величину отклонения (параллельного сдвига) между двумя плоскостями с одной и той же заданной нормалью $\vec{n}(A,B,C)$. Для того, чтобы написать уравнение плоскости можно использовать определитель третьего порядка.

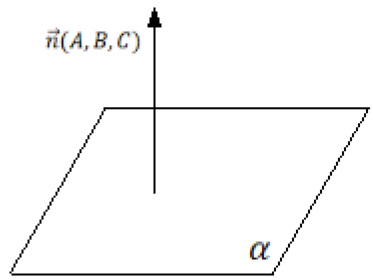

Рисунок 9

Если даны три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$

Определитель можно посчитать, например, по правилу Саррюса: для вычисления определителя третьего порядка допишем два первых столбца и перемножим диагональные элементы, взяв произведение со знаком «плюс», если диагональ является главной или параллельна ей и, взяв произведение со знаком «минус», если диагональ является побочной или параллельна ей.

Вектор нормали к плоскости, заданной уравнением $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}z+D=0$ будет иметь координаты $\vec{n}\{A,B,C\}$.

Пусть заданы прямая и плоскость координатами направляющего вектора $\overrightarrow{AB}(x_1,y_1,z_1)$ и нормали $\vec{n}(x_2,y_2,z_2)$ (рисунок 10). Угол ψ между прямой и плоскостью вычисляется по следующей формуле [16]:

$$\sin\psi = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{AB}) = \cos\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

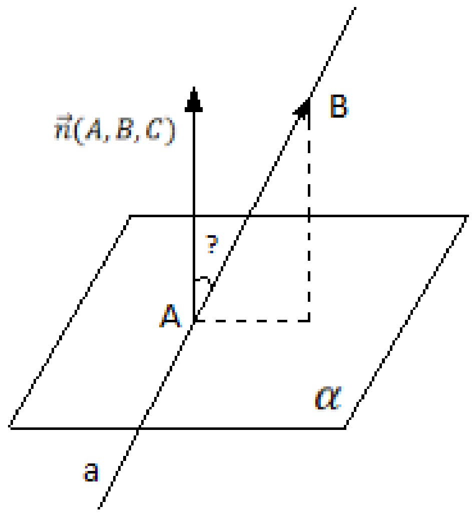

Рисунок 10

Итак, можно сформулировать алгоритм решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью:

1. Вписываем фигуру в систему координат, изображая указанные в задаче прямую и плоскость.
2. Находим координаты интересующих нас точек (концы направляющего вектора прямой и точки плоскости).
3. Находим координаты направляющего вектора прямой.
4. Составляем уравнение плоскости.
5. Находим координаты вектора нормали к плоскости.
6. Подставляем в формулу.
7. После чего (если требуется в задаче), зная синус, находим значение самого угла.

Пример 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и AA_1 равны 1, а ребро $AD = 2$. Точка E – середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой BE и плоскостью AB_1C.

Решение:

1. Впишем фигуру в систему координат (рисунок 11).

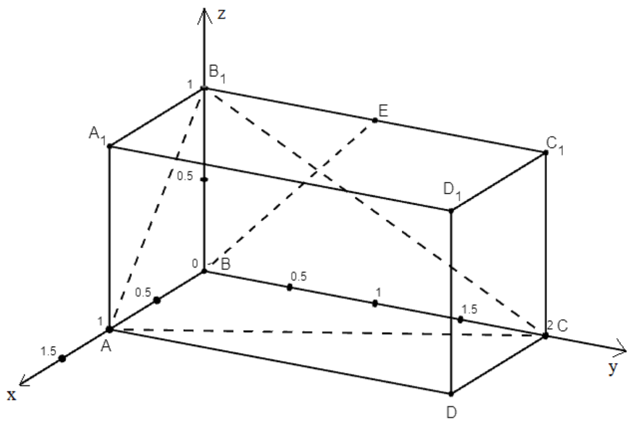

Рисунок 11

2. Координаты точек: $A(1;0;0)$, $B_1(0;0;1)$, $C(0;2;0)$, $B(0;0;0)$, $E(0;1;1)$.

3. Находим координаты направляющего вектора данной прямой: $\overrightarrow{BE}\{0;1;1\}$.

4. Для решения этой задачи необходимо составить уравнение плоскости, проходящей через точки A, B_1 и C. Уравнение искомой плоскости будет иметь вид: $2x + y + 2z - 2 = 0$.

5. Значит, нормаль $\vec{n}$ к этой плоскости имеет координаты $\vec{n}\{2,1,2\}$.

6. Найдем угол между вектором $\overrightarrow{BE}$ и нормалью к плоскости по формуле скалярного произведения векторов:

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} = \frac{|0\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

Ответ: 45°

3. Угол между плоскостями

Пусть $\overrightarrow{n_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(x_2, y_2, z_2)$ – две любые нормали к данным плоскостям (рисунок 12).

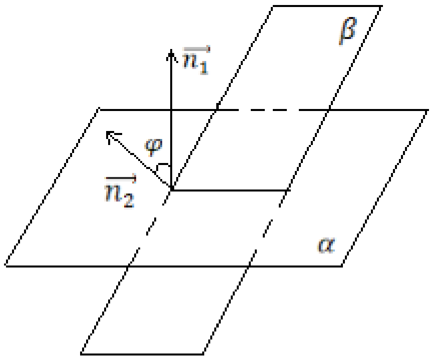

Рисунок 12

Если в задаче необходимо найти угол между плоскостями α и β, то координаты векторов нормали составляются по матрицам, в которых берутся координаты соответствующих точек. После того как составлены уравнения плоскостей, значение угла находится по формуле $cos\ \varphi$ [8].

Тогда косинус угла между плоскостями равен косинуса угла между нормалями:

$$cos\ \varphi = \cos\ \overrightarrow{(n_1}, \overrightarrow{n_2)} = \frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Алгоритм решения задач данного типа:

1. Вписываем фигуру в систему координат, изображая указанные в задаче плоскости.
2. Находим координаты интересующих нас точек.
3. Составляем уравнения плоскостей.
4. Определяем координаты векторов нормалей.
5. Подставляем в формулу «косинус угла между векторами».
6. После чего (если требуется в задаче), зная косинус, находим значение самого угла.

Пример 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1 [14].

Решение:

1. Поместим призму в систему координат, как показано на рисунке 13.

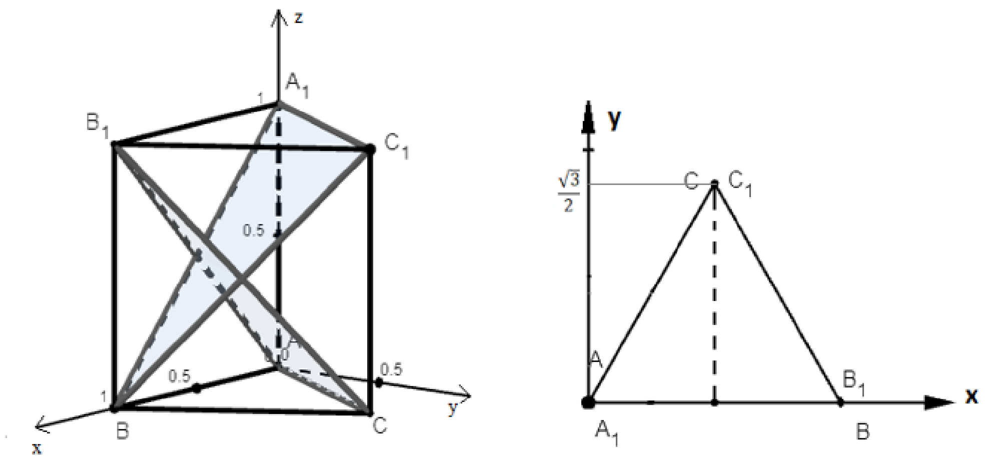

Рисунок 13

2. Координаты $A(0{,}0{,}0)$, $B_1(1{,}0{,}1)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, найдем уравнение плоскости (AB_1C):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 1 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости: $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$, т.е. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}z = 0$.

Координаты вектора нормали: $\vec{n}\{\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3}\}$

3. Координаты $A_1(0{,}0{,}1)$, $B(1{,}0{,}0)$, $C_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$. Найдем уравнение плоскости (A_1BC_1):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 0 - 1 \\ \frac{1}{2} - 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 & 1 - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости: $-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0$, т.е. $\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$.

Координаты вектора нормали: $\vec{m}\{\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$.

4. Найдем косинус угла между плоскостями (AB_1C) и (A_1BC_1):

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right|}{\sqrt{3 + 1 + 3} \cdot \sqrt{3 + 1 + 3}} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

4. Расстояние от точки до плоскости

Для вычисления расстояния $\rho(M, \alpha)$ от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ (рисунок 14) можно использовать следующую формулу:

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В знаменателе стоит длина нормали, а в числителе – значение выражения из левой части уравнения плоскости в точке M [8].

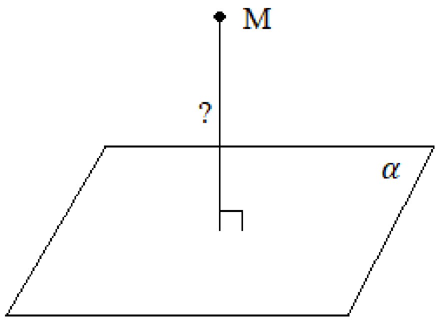

Рисунок 14

Алгоритм решения задач на нахождение расстояния от точки до плоскости:

1. Вписываем фигуру в систему координат, изображая указанные в задаче прямые (которым придаем направление, т.е. вектора).
2. Находим координаты точек (данной и трех точек плоскости).
3. Составляем уравнение плоскости.
4. Находим координаты вектора нормали плоскости.
5. Подставляем в формулу "расстояние от точки до плоскости".

Пример 4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BDA_1.

Решение:

1. Поместим куб в систему координат, как показано на рисунке 15.

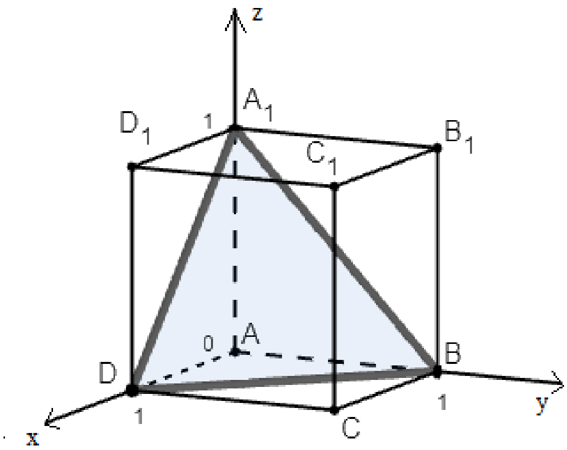

Рисунок 15

2. Определим координаты точек: $C_1(1{,}1{,}1)$, $A_1(0{,}0{,}1)$, $B(1{,}0{,}0)$, $D(0{,}1{,}0)$.

3. Составим уравнение плоскости (A_1BD):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \\ 0-0 & 1-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

4. Уравнение плоскости(A_1BD): $x+y+(z-1)=0$, т.е. $x+y+z-1=0$, значит, координаты вектора нормали $\vec{n}\{1{,}1{,}1\}$.

5. Найдем расстояние от точки C_1 до плоскости (A_1BD):

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. Расстояние от точки до прямой

Для вычисления расстояния от точки $K(x_1,y_1,z_1)$ до прямой a необходимо на ней найти координаты вектора $\vec{n}\{A,B,C\}$, которые составлены из координат двух точек прямой. Одна из этих точек, например $N(x_2,y_2,z_2)$, используется в формуле, по которой находится искомое расстояние:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ A & B \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ A & C \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ B & C \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Решить задачу такого типа можно также с использованием формулы нахождения координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

Рассмотрим это на примере.

Пример 5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G – середина ребра SC.

Решение:

1. Поместим пирамиду в систему координат, как показано на рисунке 16.

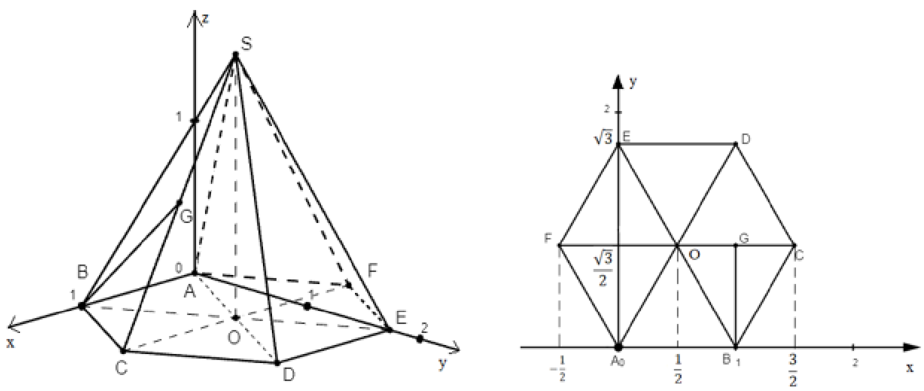

Рисунок 16

2. Координаты вершин: $B(1{,}0{,}0)$, $F(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $G(1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\overrightarrow{BG}\left\{0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3. Проведем FK перпендикулярно BG. Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ разделен точкой $K(x,y,z)$ в отношении λ, то координаты точки K определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda};$$

$x=\frac{1+\lambda}{1+\lambda}$; $y=\frac{0+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}$; $z=\frac{0+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}$, значит $K(\frac{1+\lambda}{1+\lambda};\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda};\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda})$

$$\overrightarrow{FK}\left\{\frac{1+\lambda}{1+\lambda}+\frac{1}{2};\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

4. $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{BG}=0$

$$\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda}+\frac{1}{2}\right)\cdot\ 0+\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

$$\lambda=1;$$

$$K\left(1;\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

5. $\overrightarrow{FK}\{\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\}$, значит $\left|\overrightarrow{FK}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{21}{8}}=\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Для вычисления расстояния между двумя прямыми a и b необходимо:

1. Поместить фигуру в прямоугольную систему координат, изображая данные прямые.
2. Найти координаты интересующих точек.
3. Найти координаты направляющих векторов прямых ($\vec{a}$ и $\vec{b}$).
4. Ввести вектор $\overrightarrow{m}$, у которого начало вектора на одной и конец на другой из скрещивающихся прямых.
5. Ввести общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым: $\vec{n}=x\cdot\vec{a}+\overrightarrow{m}+y\cdot\vec{b}$.
6. Вычислить x и y из системы:

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{a}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(x\cdot\vec{a}+\overrightarrow{m}+y\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0\\ \left(x\cdot\vec{a}+\overrightarrow{m}+y\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}+\overrightarrow{m}\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}=0\\ x\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{m}\cdot\vec{b}+y\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

7. Подставить найденные значения x и y в формулу общего перпендикуляра $\vec{n}=x\cdot\vec{a}+\overrightarrow{m}+y\cdot\vec{b}=\{x_n;y_n;z_n\}$.
8. Вычислить длину общего перпендикуляра: $d=\sqrt{x_n^2+y_n^2+z_n^2}$.

Пример 6. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BC_1 и AB_1 .

Решение:

1. Поместим куб в систему координат следующим образом (рисунок 17).

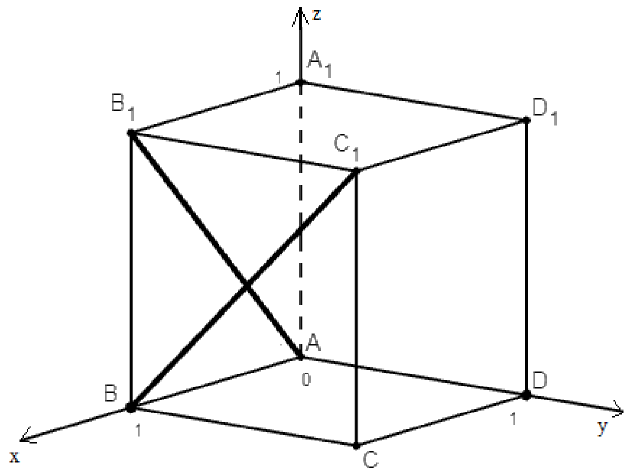

Рисунок 17

2. Координаты $A(0{,}0{,}0)$, $B_1(1{,}0{,}1)$, $B(1{,}0{,}0)$, $C_1(1{,}1{,}1)$.

3. Найдем координаты направляющих векторов данных прямых: $\overrightarrow{BC_1}\{0{,}1{,}1\}, \overrightarrow{AB_1}\{1; 0; 1\}$.

4. Введем вектор $\vec{m}$, у которого начало вектора на одной и конец на другой из скрещивающихся прямых. Например, возьмем точки M_1 и M_2 – средины отрезков BC_1 и AB_1 соответственно.

$$x_{M_1} = \frac{1+1}{2} = 1, y_{M_1} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, z_{M_1} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

$$x_{M_2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, y_{M_2} = \frac{0+0}{2} = 0, z_{M_2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_2(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$$

Тогда $\vec{m}\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\}$.

5. Введем общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым: $\vec{n} = x \cdot \overrightarrow{BC_1} + \vec{m} + y \cdot \overrightarrow{AB_1}$.

6. Вычислить x и y из системы:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x \cdot \overrightarrow{BC_1} + \vec{m} + y \cdot \overrightarrow{AB_1}\right) \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \left(x \cdot \overrightarrow{BC_1} + \vec{m} + y \cdot \overrightarrow{AB_1}\right) \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot \overrightarrow{BC_1}^2 + \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC_1} + y \cdot \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ x \cdot \overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} + \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB_1} + y \cdot \overrightarrow{AB_1}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot 2 + \frac{1}{2} + y = 0 \\ x + \frac{1}{2} + y \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

7. Подставить найденные значения x и y в формулу общего перпендикуляра $\vec{n} = -\frac{1}{6} \cdot \{0,1,1\} + \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right\} + (-\frac{1}{6}) \cdot \{1; 0; 1\} = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\}$.

8. Вычислить длину общего перпендикуляра:

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2 Программа курса по выбору для подготовки к ЕГЭ «Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ»

С момента внедрения Единого Государственного экзамена и по сегодняшний день в вариантах итоговой аттестации учащихся по математике традиционно встречается задача повышенной сложности по стереометрии.

Статистика результатов ЕГЭ прошлых лет, представленная в Таблице 2, показывает, что с 2016 по 2019 год процент выполнения данного задания не превышал 10,2% сдающих экзамен. Можно отметить следующие причины:

– плохо развитое пространственное мышление учащихся;
– несформированность умения у учащихся правильно выполнять соответствующее построение в пространстве;
– ошибки при выполнении проецирования на плоскость [20].

Таблица 2 – Статистика выполнения задания №14 на ЕГЭ по профильной математике

Первичный балл/год	2015	2016	2017	2018	2019
1 балл	22,3%	4,6%	8,5%	9,4%	5,6%
2 балл	7,1%	1,2%	1,7%		
Итого:	29,4%	5,8%	10,2%	9,4%	5,6%

Немаловажен тот факт, что учащиеся с повышенным уровнем подготовки, осмысленно приступающие к решению стереометрической задачи, испытывают существенный дефицит времени. Выработка стандартных приемов решения этого задания позволяет сократить время на его решение и сделать его одним из надежно решаемых.

Если у ученика 11 класса имеются серьезные проблемы с пониманием определений, с чтением или построением сложного стереометрического рисунка, если ему никак не удается подобрать необходимые дополнительные построения, то стоит заняться изучением векторного – координатного метода. Особенно это актуально в условиях экстренной подготовки, когда до ЕГЭ остается не так много времени.

Все вышесказанное подтверждает необходимость создания курса по выбору для подготовки учащихся к итоговой аттестации по теме «Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ»

Данная методическая разработка является своеобразным пособием при подготовке к ЕГЭ для выпускника, нацеленного на высокий балл при сдаче экзамена. Он является кратким, в нем рассмотрены лишь наиболее часто встречающиеся типы заданий, как в сборниках, так и в контрольно-измерительных материалах.

В курсе рассматриваются некоторые типы стереометрических задач в вариантах ЕГЭ и алгоритмы их решения векторно-координатным методом.

Класс: 11.

Тип курса по выбору: углубленный.

Количество часов: 16 (2 часа в неделю).

Образовательная область: математика.

Используемая литература: «Геометрия 10-11 класс» Атанасян Л.С., интернет-ресурсы.

Цель изучения курса – расширить знания учащихся в решении стереометрических задач методом координат, способствовать формированию высокого интереса к предмету, развитию логического мышления.

Основные задачи курса: закрепить знания, полученные в 10-11 классе; усвоить и отработать навык решения стереометрических задач векторно-координатным методом.

Основные организационные формы реализации предлагаемой программы – лекционные и практические занятия.

Формы обучения: фронтальная, групповая, индивидуальная.

Организация изучения курса. Целесообразно включать предлагаемый курс в учебный процесс после изучения темы «Метод координат в пространстве» в средней школе (при обучении по УМК Атанасяна Л.С.).

После завершения каждой темы проводится проверочная работа. По завершении курса проходит контрольная работа, для контроля усвоения полученных знаний и умений.

Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ

В Таблице 3 представлено тематическое планирование уроков по теме: «Решение заданий №13 ЕГЭ по математике векторно-координатным методом».

Таблица 3 – Тематическое планирование

№ п.п	Тема урока	Количество часов		
		теория	практика	всего
1	Повторение	1		1
2	Нахождение угла между скрещивающимися прямыми	1	1	2
3	Нахождение угла между прямой и плоскостью	1	1	2
4	Нахождение угла между плоскостями	1	1	2
5	Нахождение расстояния от точки до прямой	1	1	2
6	Нахождение расстояния от точки до плоскости	1	1	2
7	Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми	1	1	2
8	Решение задач		2	2
9	Контрольная работа		1	1
	Итого	7	9	

Всего: 16 часов

Урок №1. «Повторение» (1 час)

Тип урока: урок систематизации и обобщения материала.

Цели урока:

Знать

1) определение метода координат;

2) алгоритм решения задач методом координат;

3) что из себя представляет прямоугольная (декартова) система координат в пространстве;

4) понятие вектора и действия над векторами;

5) формулу нахождения расстояния между двумя точками, заданными своими координатами;

6) формулу нахождения координат середины отрезка;

7) формулу нахождения косинуса, а, следовательно, и самого угла, между двумя векторами, заданными своими координатами.

Уметь

1) находить координаты вершин основных многогранников при помещении их в прямоугольную систему координат;

2) находить координаты вектора по двум точкам;

3) находить расстояние между двумя точками, заданными своими координатами;

4) находить координаты середины отрезка;

5) находить координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении.

Основные понятия: метод координат, прямоугольная система координат в пространстве, вектор, длина вектора, координаты вектора, скалярное произведение векторов, координаты точки в пространстве.

Методические рекомендации:

На этом уроке необходимо ознакомить учащихся с планом, задачами и целями курса, а также с видами контроля. Затем продолжить занятие в форме лекции – повторение основных определений и формул, необходимых для решения задач векторно-координатным методом.

Задания:

1. Даны точки $A(3; -8; 5)$ и $B(7; -5; 2)$.

   a) найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$;

   b) найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

   c) найдите координаты точки С – середины отрезка AB.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которого равны единице (рисунок 18).

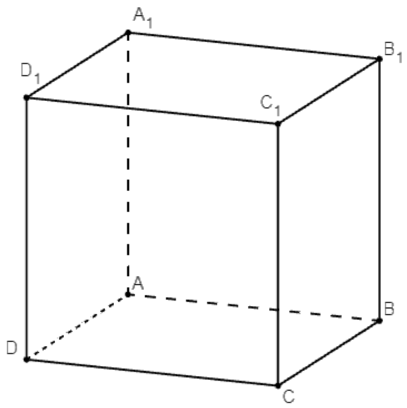

Рисунок 18

a) найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{AC_1}$;

b) найдите координаты точки M, делящей отрезок AD в отношении $\frac{1}{4}$.

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается суть метода координат?
2. Каков алгоритм решения геометрических задач методом координат?
3. Что из себя представляет прямоугольная (декартова) система координат в пространстве?
4. Как найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца?
5. Как найти расстояние между двумя точками, заданными своими координатами?
6. Как найти координаты середины отрезка?
7. Как найти координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении?

Урок №2. «Нахождение угла между скрещивающимися прямыми» (2 часа)

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений.

Цели урока:

Знать

1) что называют углом между скрещивающимися прямыми;

2) формулу нахождения косинуса угла между двумя векторами;

3) алгоритм решения задач данного типа.

Уметь

1) решать задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.

Основные понятия: угол между скрещивающимися прямыми, направляющий вектор, скалярное произведение, длина вектора.

Методические рекомендации:

Для более эффективного запоминания учащимися формулу, необходимо вспомнить скалярное произведение двух векторов, а затем выразить косинус угла.

Задания:

1. Точка E – середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD.

2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 6, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{1}{9}$. Точка M – середина ребра SC, точка N – середина ребра AC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

3. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведена высота DH. K – середина отрезка CH. Найдите угол между высотой тетраэдра DH и медианой BM боковой грани BCD.

Контрольные вопросы:

1. Что называют углом между скрещивающимися прямыми?

2. Как найти косинуса угла между двумя векторами?

3. Каков алгоритм решения задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми?

Урок №3. «Нахождение угла между прямой и плоскостью» (2 час)

Тип урока: комбинированный.

Цели урока:

Знать

1) что является углом между прямой и плоскостью;

2) алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью по формуле.

Уметь

1) решать задачи данного типа;

2) выводить формулу угла между прямой и плоскостью.

Основные понятия: уравнение плоскости, вектор нормали к плоскости, направляющий вектор прямой, дополнительный угол.

Методические рекомендации:

Данный теоретический материал является частью высшей алгебры. На занятиях рассматриваются основные формулы и решаются задания по нахождению определителей.

Задания:

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды равны $3\sqrt{3}$. Найдите синус угла между прямой SC и

плоскостью ASB.

3. В правильном тетраэдре $ABCD$ M – середина ребра AD. Найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

Контрольные вопросы:

1. Как составить уравнение плоскости по трем точкам, заданным своими координатами?
2. Как определить координаты вектора нормали по уравнению плоскости?
3. Как найти угол между прямой и плоскостью?

Урок №4. «Нахождение угла между плоскостями» (2 часа)

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений.

Цели урока:

Знать

1) определения угла между плоскостями;
2) понятие нормали;
3) уравнение плоскости по трем точкам (понятия: матрица, определитель);
4) формулу нахождения угла между плоскостями;
5) алгоритм решения задач данного типа.

Уметь

1) составлять уравнение плоскости по трем точкам, заданным своими координатами;
2) считать определитель третьего порядка;
3) определять координаты вектора нормали по уравнению плоскости;
4) находить угол между пересекающимися плоскостями, с помощью формулы.

Основные понятия: угол между плоскостями, нормаль, уравнение плоскости, матрица, определитель.

Методические рекомендации:

Рекомендуется достаточное количество времени уделить повторению сложного теоретического материала предыдущего занятия.

Задания:

1. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N – середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно. Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

Контрольные вопросы:

1. Как составить уравнение плоскости по трем точкам, заданным своими координатами?

2. Как определить координаты вектора нормали по уравнению плоскости?

3. Как найти угол между пересекающимися плоскостями?

Урок №5. «Нахождение расстояния от точки до прямой» (2 часа)

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений.

Цели урока:

Знать

1) что называют расстоянием от точки до прямой;

2) условие перпендикулярности двух векторов;

3) алгоритм нахождения расстояния от точки до прямой.

Уметь

1) находить координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении;

2) находить координаты середины отрезка;

3) находить расстояние от точки до прямой в пространстве.

Основные понятия: расстояние, длина вектора, скалярное произведение векторов.

Методические рекомендации:

Ввести понятие расстояния от точки до плоскости, рассмотреть алгоритм решения задач данного типа.

Задания:

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G – середина ребра SC.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N – середина ребра AC, точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

Контрольные вопросы:

1. Что называют расстоянием от точки до прямой?

2. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.

3. Как найти координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении?

4. Как найти координаты середины отрезка?

5. Как найти расстояние от точки до прямой в пространстве?

Урок №6. «Нахождение расстояния от точки до плоскости» (2 часа)

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений.

Цели урока:

Знать

1) что называется расстоянием от точки до плоскости;

2) формулу расстояния.

Уметь

1) решать задачи на нахождения расстояния от точки до плоскости.

Основные понятия: уравнение плоскости, координаты точки, расстояние.

Методические рекомендации:

Повторить алгоритм нахождения уравнения плоскости по трем точкам.

Задания:

1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

2. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки Р и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M. Найдите расстояние от точки С до плоскости APQ.

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB

отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M. Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.

Контрольные вопросы:

1. Что называют расстоянием от точки до плоскости?
2. Как найти расстояние от точки до плоскости в пространстве?

Урок №7. «Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми» (2 часа)

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений.

Цели урока:

Знать

1) какие прямые называются скрещивающимися;
2) признак скрещивающихся прямых;
3) алгоритм решения задач данного типа.

Уметь

1) решать задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Основные понятия: скрещивающиеся прямые, координаты точки, перпендикулярные вектора.

Методические рекомендации:

Повторить основные понятия.

Задания:

1. В кубе $ABCDA_1B_1\,C_1D_1$ все ребра равны 6. Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.
2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB

основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT – высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD. Найдите расстояние между NT и SC.

3. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4, BC = 7$.

Контрольные вопросы:

1. Какие прямые называются скрещивающимися?
2. Сформулируйте признак скрещивающихся прямых.
3. Каков алгоритм решения задач данного типа?

Урок №8. «Решение задач. Подготовка к итоговому тесту» (2 часа)

Тип урока: урок применения знаний, навыков и умений.

Цель урока: отработать навык решения задач всех рассмотренных типов.

Основные понятия: угол между скрещивающимися прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние между скрещивающимися прямыми, расстояние от точки до прямой, расстояние от точки до плоскости.

Методические рекомендации:

Рассмотреть задачи всех типов. Дать задания для самостоятельной подготовки к итоговому тесту.

Урок №9. «Контрольная работа» (1 час)

Тип урока: урок контроля знаний.

Цель урока: выявить уровень усвоения изученного в ходе курса материала.

Методические рекомендации: в каждом варианте представить по 6 заданий, в соответствии с разобранными типами задач (Таблица 4).

Таблица 4 – Контрольная работа

Вариант 1	Вариант 2
1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB и AA_1 равны 1, а ребро AD=2. Точка E – середина ребра B_1C_1. Найдите: а) угол между скрещивающимися прямыми BE и AD; б) синус угла между прямой BE и плоскостью AB_1C; в) угол между плоскостью AD_1C и плоскостью основания.	1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите: а) угол между скрещивающимися прямыми SB и CD; б) синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E – середина ребра SC; в) угол между плоскостью SBC и плоскостью основания.
2. В единичном кубе $A \dots D_1$ найдите: а) расстояние от точки A_1 до прямой BC_1; б) расстояние от точки C до плоскости BDD_1 ; в) расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1.	2. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите: а) расстояние от точки E до прямой BC; б) расстояние от точки A до плоскости BFE_1 ; в) расстояние между скрещивающимися прямыми CF_1 и EE_1.

2.3 Программно-методическая поддержка курса по выбору по теме «Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ»

В качестве программно-методической поддержки курса по выбору был разработан онлайн-курс «Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ». Данный сайт был создан на основе платформы WordPress и располагается по адресу: http://d95252dt.beget.tech/.

На рисунке 19 представлена главная страница сайта с вводной информацией и ссылкой на тематическое планирование.

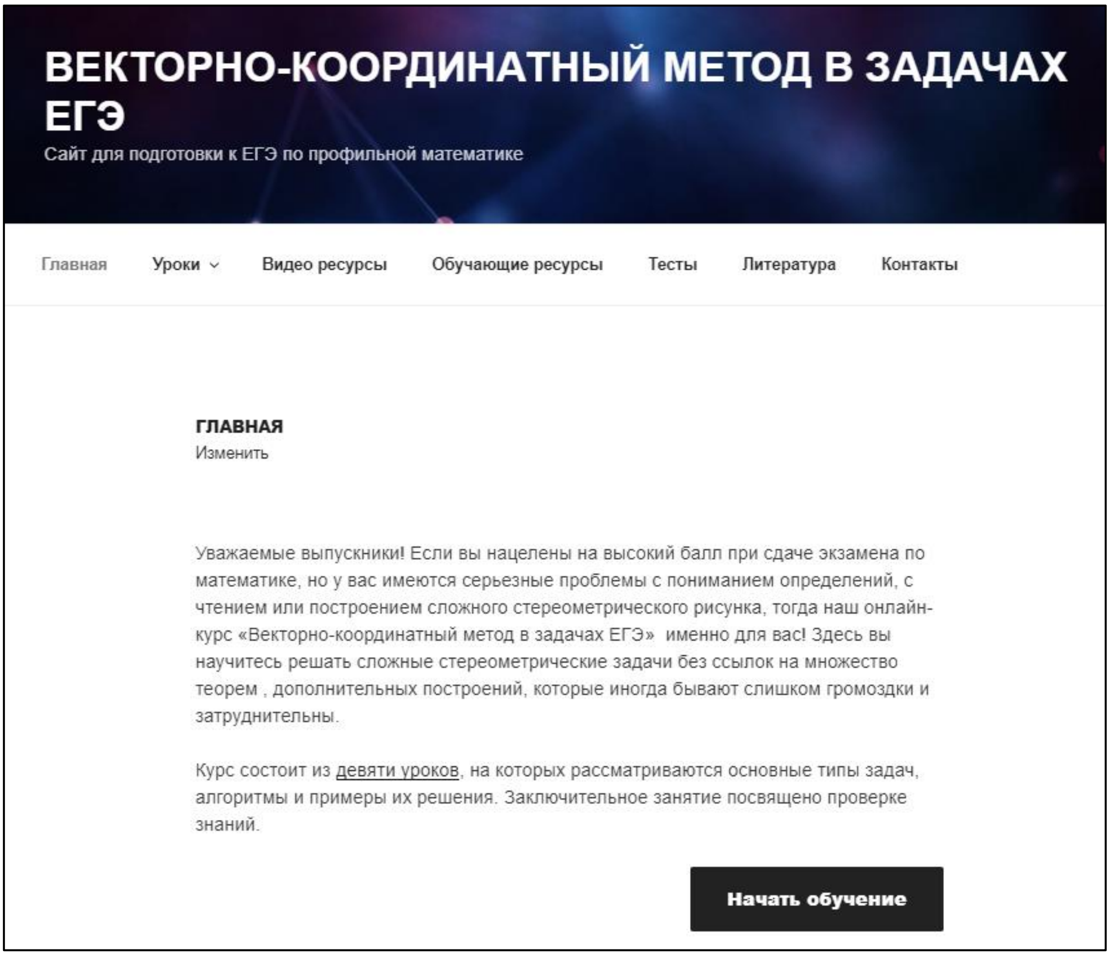

Рисунок 19

Блоки «Видео-ресурсы» и «Обучающие ресурсы» предназначены для хранения подборок различного контента, соответствующего тематике сайта. На вкладке «Литература» можно ознакомиться со списком дополнительных источников по теме, а также перейти по ссылке на сам источник. Основной контент находится в разделе «Уроки», в котором представлены материалы по темам занятий (рисунок 20).

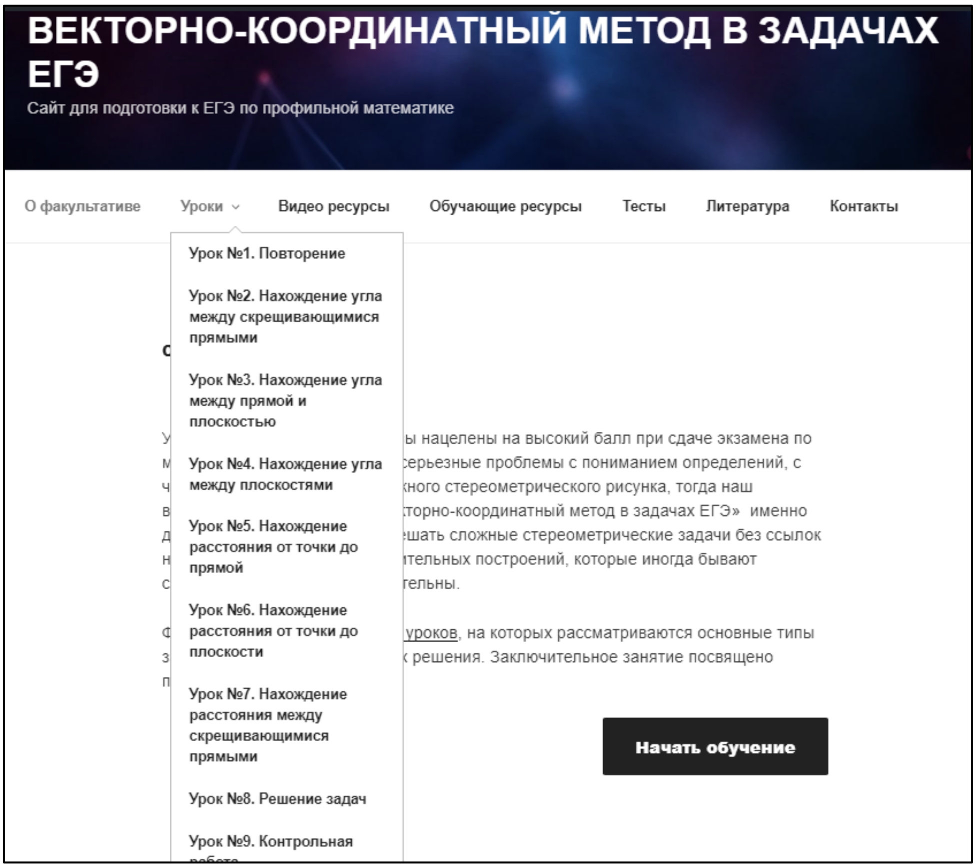

Рисунок 20

Каждый урок включает в себя не только текст и изображения, но и интерактивные чертежи, созданные в среде GeoGebra, которые можно изменять, перемещать и вращать. Это не только расширяет опыт работы учащихся с объемными фигурами, но и способствует развитию пространственного мышления школьников (рисунок 21). Все занятия завершаются ссылкой на проверочную работу, расположенную в разделе «Тесты».

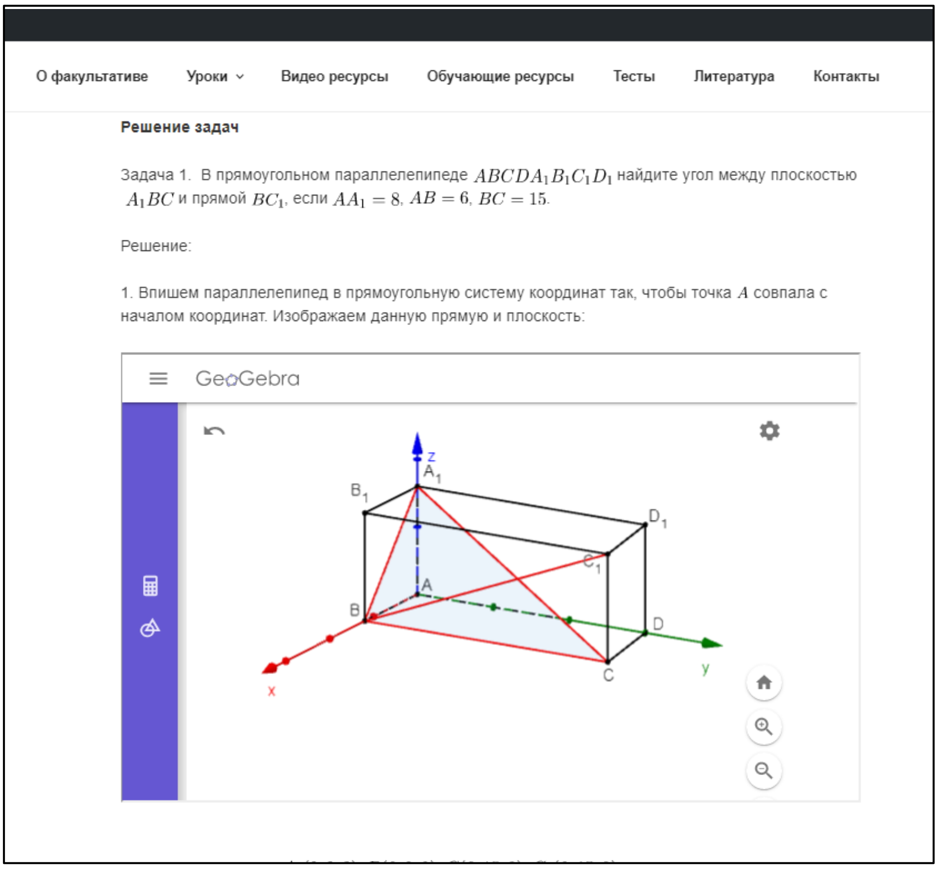

Рисунок 21

Данный ресурс может быть использован как учителем непосредственно на элективных занятиях, так и учащимся при самостоятельной подготовке к экзаменам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточно простой в использовании, метод координат является необходимой составляющей решения задач различного уровня. Применение данного метода позволяет обучающимся значительно упростить и сократить процесс решения задач, что помогает им в дальнейшем изучении школьного курса математики и в изучении математики в университетах.

В данной дипломной работе:

– изучен основной теоретический материал, который необходим для усвоения данного метода;

– рассмотрены векторно-координатный метод, виды и этапы решения задач данным методом;

– выделены основные умения, которые необходимы для овладения методом координат;

– разработан курс по выбору для обучения учащихся решению стереометрических задач ЕГЭ данным методом;

– разработана программно-методическая поддержка курса по выбору.

Педагогическая апробация курса по теме «Векторно-координатный метод в задачах ЕГЭ» проводилась во время педагогической практики в МОУ Худайбердинской СШ Аргаяшского муниципального района Челябинской области. Тема к разделу изучалась в общеобразовательном классе, программа которого сформирована в соответствии с требованиями ФГОС. Было проведено два урока из разработанного курса: по теме «Нахождение угла между прямой и плоскостью» (ПРИЛОЖЕНИЕ 1) и проверочная работа по этой теме (ПРИЛОЖЕНИЕ 2).

Тема, рассмотренная на занятии, оказалась для учащихся новой, нестандартной, показала новый подход к решению стереометрических задач.

Педагогический эксперимент показал, что разработанный курс по выбору, нацеленный на повышение качества решения стереометрических задач, входящих в варианты ЕГЭ по математике, оправдал ожидаемые от его реализации результаты. Исходя из этого, мы можем констатировать, что данный курс, может быть оценен как эффективный.

Можно сделать вывод, что цель работы достигнута – доказано, что векторно-координатный метод:

- является одним из ключевых методов при решении задач;
- имеет больше преимуществ, чем недостатков;
- дает учащимся эффективный способ решения задач:
- показывает взаимосвязь алгебры и геометрии;
- способствует развитию вычислительной и графической культуры учащихся.

Таким образом, были решены все поставленные в данном исследовании задачи. Была доказана оправданность цели исследования и доказана гипотеза исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Атанасян Л. С. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев и др. – 20-е изд. – Москва: Просвещение, 2010. – 384 с.
2. Атанасян Л. С. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев и др. – 18-е изд. – Москва: Просвещение, 2009. – 255 с.
3. Байгонакова Г. А. Теоретические основы решения стереометрических задач векторно-координатным методом / Г. А. Байгонакова // Информация и образование: границы коммуникаций INFO'19: сборник научных трудов № 11 (19); под ред. А. А. Темербековой, Г. А. Байгонаковой, А. Е. Осокина. − Горно-Алтайск: БИЦ ГАГУ, 2019. − С. 222-224.
4. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – Москва: Мнемозина, 2013. – 280 с.
5. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс: учеб. общеобразоват. учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – Москва: Мнемозина, 2013. – 288 с.
6. Гельфанд И. М. Метод координат [Текст] / И. М. Гельфанд. – Москва: Наука, 1973. – 87 с.
7. Глейзер Г. И. История математики в школе: IX – X кл. Пособие для учителей. / Г. И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.
8. Гусак А. А Справочник по высшей математике / А.А Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 9-е изд. – Минск: ТеатрСистема, 2009. – 640 с.
9. Конева Г.П. Использование метода координат в пространстве для решения заданий С-2 Единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс] / Конева Г.П., Опубликовано 12.01.2013

- 6:51 / https://nsportal.ru/shkola/geometriya/library/2013/01/12/ispolzovanie-metoda-koordinat-v-prostranstve-dlya-resheniya

10. Лускина М. Г. Факультативные занятия по математике в школе: Методические рекомендации [Текст] / М. Г. Лускина, В. И. Зубарева. – Киров: ВГГУ, 1995. – 38 с.

11. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов [Текст] / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко. – Москва: Просвещение, 1988. – 233 с.

12. Мельникова Н. Б. Геометрия: векторы и координаты в пространстве / Н. Б. Мельникова, В. Н. Литвиненко, Г. К. Безрукова. – Москва: Просвещение, 2007. – 120 с.

13. Мишин, В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. [Текст] / В. И. Мишин, А. Я. Блох, В. А. Гусев. – Москва: Просвещение, 1987. – 416 с.

14. Образовательный портал для подготовки к экзаменам / Математика профильного уровня / Каталог заданий [Электронный ресурс]. URL : https://ege.sdamgia.ru/

15. Погорелов, А. В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни [Текст] / А. В. Погорелов. – 13-е изд. – Москва: Просвещение, 2014. – 175 с.

16. Понтрягин, Л. С. Знакомство с высшей математикой. Метод координат [Текст] / Л. С. Портнягин – Москва: Наука, 1987. – 128 с.

17. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. [Электронный ресурс]. – http://www.lbz.ru/metodist/docs/pso16.pdf

18. Темербекова А. А. Методические особенности развития векторно-координатной линии в школе и в вузе / А. А. Темербекова. –

Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, 2014. – С. 328-331.

19. Темербекова А. А. Практические аспекты решения стереометрических задач с помощью векторно-координатного метода / А. А. Темербекова, Г. А. Байгонакова. – Горно-Алтайск: Горно-Алтайский государственный университет, 2018. – С. 190-194.

20. ФГБНУ "Федеральный институт педагогических измерений" [Электронный ресурс] /. – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: https://fipi.ru/, свободный.

21. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (ФГОС ООО). Режим доступа: http://www.ug.ru//new_standards/4

22. Шарыгин, И. Ф. Геометрия 10-11 кл.: Учеб. для общеоразоват. учеб. заведений [Текст] / И. Ф. Шарыгин. – Москва: Дрофа, 2000. – 368 с.

23. Шарыгин, И. Ф. Нужна ли школе XXI века геометрия? / И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 2004. – № 4. – С. 72-79.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Технологическая карта урока

I. Основные сведения

Тема урока: «Угол между прямой и плоскостью»

Класс: 11

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений

II. Результативно-целевая основа проектирования урока

Цель урока: научиться решать задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью векторно-координатным методом.

Планируемые предметные результаты освоения курса:

– владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений;

– находить скалярное произведение векторов;

– находить угол между векторами;

– применять для решения задач геометрические факты;

– решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам;

– делать (выносные) плоские чертежи из рисунков объемных фигур, в том числе рисовать вид сверху, сбоку;

– извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах;

– формулировать свойства и признаки фигур;

– применять теорему Пифагора при вычислении элементов стереометрических фигур;

– применять при решении задач векторно-координатный метод;

– владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач;

– задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат.

Планируемые личностные результаты освоения курса: формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе; формирование мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности; способность ставить цели и строить жизненные планы.

Планируемые метапредметные результаты освоения курса (регулятивные, познавательные, коммуникативные универсальные учебные действия (далее УУД))

Регулятивные УУД: понимать учебную задачу урока, осуществлять решение учебной задачи под руководством учителя, определять цель деятельности, контролировать свои действия в процессе его выполнения, обнаруживать и исправлять ошибки, отвечать на вопросы и оценивать свои достижения.

Познавательные УУД: умение работать с различными источниками информации, включая цифровые; осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме; самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.

Коммуникативные УУД: воспитывать уважение друг к другу, умение слушать, осуществлять контроль, коррекцию, оценку действий партнера, уметь убеждать.

III. Перечень средств ИКТ, используемых на уроке

Дидактические средства (учебник, рабочая тетрадь, дидактические материалы): Геометрия, 10-11: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2010

Средства информационно-коммуникационных технологий (технические, программные средства, электронные образовательные

ресурсы):

1) мультимедиа проектор и экран;

2) компьютер;

3) интерактивная презентация к уроку.

IV. Описание этапов и учебных ситуаций

Этапы урока

1. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности – 1 мин.

2. Актуализация знаний. Подведение к теме урока – 10 мин.

3. Изучение нового материала – 14 мин.

4. Закрепление изученного материала – 14 мин.

5. Итог урока. Рефлексия учебной деятельности – 1 мин.

Далее в Таблице 1.1 рассмотрено описание учебных ситуаций по этапам.

Таблица 1.1 – Описание учебных ситуаций по этапам

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Планируемые результаты
1	*2*	*3*	*4*
1. Орг. момент. Мотивация к учебной деятельности	Приветствует учащихся. Настраивает их на учебный процесс.	Приветствуют учителя.	**Личностные:** формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе. **Метапредметные** *Коммуникативные УУД:* воспитывать уважение друг к другу, умение слушать.
2. Актуализация знаний. Подведение к теме урока	Учитель предлагает учащимся вспомнить основные понятия темы. Проводит фронтальный опрос учащихся по слайдам презентации.	Отвечают на вопросы учителя, используя знания, полученные на уроках математики.	**Предметные:** владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений; находить скалярное произведение векторов; находить угол между векторами.

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*
			Метапредметные: *Регулятивные УУД:* понимать учебную задачу урока, осуществлять решение учебной задачи под руководством учителя. *Познавательные УУД:* умение работать с различными источниками информации, включая цифровые; осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме. *Коммуникативные УУД:* умение слушать.
3. Изучение нового материала	Учитель объявляет тему урока. Приступает к объяснению нового материала: предлагает на примере рассмотреть составление уравнения плоскости по трем точкам. Вызывает одного учащегося к доске. Обсуждает ход выполнения задания с классом. Далее учитель раздает листочки с различными этапами решения задачи и объясняет задание: расположить этапы в правильной последовательности.	Внимательно слушают учителя, делают записи в тетрадях, выполняют задания, сравнивая с записями на доске. Комментируют, задают вопросы. Далее учащиеся в парах выполняют задание, затем проверяют правильность, сравнивая с указанным ответом на слайде.	**Предметные:** применять для решения задач геометрические факты; извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о геометрических фигурах, представленную на чертежах; решать задачи на нахождение геометрических величин по образцам или алгоритмам; задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат; владеть геометрическими понятиями при решении задач и проведении математических рассуждений. **Личностные:** формирование мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности.

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*
			Метапредметные: *Регулятивные УУД:* определять цель деятельности; осуществлять решение учебной задачи под руководством учителя, контролировать свои действия в процессе его выполнения, обнаруживать и исправлять ошибки, отвечать на вопросы; оценивать свои достижения. *Познавательные УУД:* самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера. *Коммуникативные УУД:* умение слушать и вступать в диалог; воспитывать уважение друг к другу, умение осуществлять контроль, коррекцию, оценку действий партнера, уметь убеждать.
4. Закрепление изученного материала	Учитель вместе с учащимися приступает к разбору задач. Вызывает к доске, контролирует работу класса.	Учащиеся решают задачи, применяя изученный алгоритм.	**Предметные:** делать плоские чертежи из рисунков объемных фигур, рисовать вид сверху, сбоку; применять геометрические факты для решения задач; формулировать свойства и признаки фигур; применять теорему Пифагора; применять векторно-координатный метод; владеть понятием угол между прямой и плоскостью и уметь применять его при решении задач.

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	***4***
			Метапредметные: *Регулятивные УУД:* осуществлять решение учебной задачи под руководством учителя, контролировать свои действия в процессе его выполнения, обнаруживать и исправлять ошибки. *Коммуникативные УУД:* осуществлять контроль, коррекцию, оценку действий партнера.
5. Итог урока. Рефлексия учебной деятельности	Учитель задает вопросы о пройденной теме, подводит итоги урока. Интересуется о том, что нового узнали учащиеся на уроке, что запомнилось больше всего, какие трудности возникли. Далее учитель раздает листочки с домашним задание. Просит учащихся ознакомиться и, при необходимости, задать вопросы.	Учащиеся отвечают на вопросы учителя, высказывают свое мнение, задают вопросы по домашнему заданию.	**Личностные:** способность ставить цели и строить жизненные планы. **Метапредметные:** *Регулятивные УУД:* отвечать на вопросы и оценивать свои достижения. *Коммуникативные УУД:* умение слушать и вступать в диалог.

Конспект урока

Тема урока: «Угол между прямой и плоскостью»

Класс: 11

Тип урока: урок усвоения новых знаний и умений

Цель урока: научиться решать задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью векторно-координатным методом.

Оборудование: учебник «Геометрия 10-11 классы» Атанасян и др., презентация, доска, проектор, распечатанные листы с заданиями.

Ход урока:

I. Организационный момент. Мотивация к учебной деятельности – 1 мин.

– Здравствуйте, ребята! Проверьте свою готовность к уроку математики. Присаживайтесь!

II. Актуализация знаний. Подведение к теме урока – 10 мин.

– Давайте для начала вспомним основные понятия.

Фронтальный опрос:

1. Что такое вектор?
2. Как найти координаты вектора?

На доске заготовлены примеры:

Задание 1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) $A(-2;6;-2), B(3;-1;0)$ *(5;-7;2)*

б) $(3;-1;2), B(2;-1;4)$ *(-1;0;2)*

в) $\left(1;\frac{5}{6};\frac{1}{2}\right), B(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4})$ $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$

3. Как найти угол между векторами? Как посчитать скалярное произведение векторов? Как найти длину вектора?

Задание 2. Даны точки $A(1;3;0), B(2;3;-1)$ и $C(1;2;-1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

III. Изучение нового материала – 14 мин.

– Сегодня мы рассмотрим один из типов задач, представленных в вариантах ЕГЭ, которые удобно решать векторно-координатным методом. Тема занятия: «Нахождение угла между прямой и плоскостью».

– Перед тем, как рассматривать алгоритм решения данного типа заданий, повторим определение угла между прямой и плоскостью.

Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой

называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Рассмотрим рисунок 1.1:

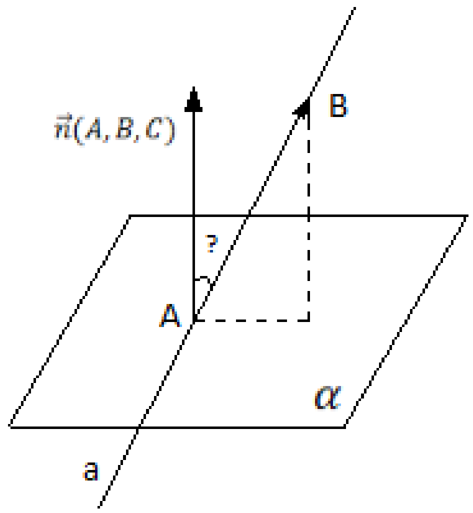

Рисунок 1.1

Имеется плоскость α и прямая a. Пусть $\overrightarrow{AB}\{x_1, y_1, z_1\}$ – направляющий вектор прямой a, $\vec{n}\{x_2, y_2, z_2\}$ – вектор, перпендикулярный к плоскости α (ненулевой). Из этого следует, что прямая на которой лежит вектор $\vec{n}$, перпендикулярна к плоскости α. Искомый угол между прямой a и плоскостью α обозначим буквой φ, тогда угол $\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{n}} = 90° - \varphi$, а как известно, $\sin\varphi = \cos(90° - \varphi)$.

Вывод: синус угла между прямой и плоскостью равен косинусу угла между направляющим вектором данной прямой и вектором нормали данной плоскости.

$$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{AB})\right| = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Вектор нормали к плоскости, заданной уравнением $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C}z + D = 0$ имеет координаты $\vec{n}\{A, B, C\}$

Теперь необходимо научиться выводить уравнение плоскости.

Мы будем находить уравнение плоскости по трем точкам, заданным своими координатами.

Если даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3),$ не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$

Данное уравнение записано в виде таблицы элементов, называемой матрицей – набором строк и столбцов, на пересечении которых располагаются её элементы.

Чтобы составить уравнение нам необходимо посчитать определитель третьего порядка. Проще говоря, требуется найти многочлен (который и будет задавать уравнение плоскости в привычном виде) от элементов квадратной матрицы с помощью специальных правил. Мы рассмотрим правило Саррюса: *для вычисления определителя третьего порядка продублируем следом за матрицей два первых столбца и перемножим элементы по диагонали, причем, если диагональ главная или параллельна ей, то произведение берем со знаком «плюс», если диагональ побочная или параллельна ей – со знаком «минус».*

Рассмотрим пример:

Даны три точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(\frac{1}{2};\ 3;\ 1)$ и $C(3;\ 0;\ 2)$. Запишите уравнение плоскости, составленное по этим точкам? Какие координаты будет иметь вектор нормали к этой плоскости?

Решение:

1. Составим определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 & 3 - 1 & 1 - 1 \\ 3 - 1 & 0 - 1 & 2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Вычислим определитель по правилу Сюрреса:

$$\left|\begin{matrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x - 1 & y - 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= (x-1)\cdot 2\cdot 1 + (y-1)\cdot 0\cdot 2 + (z-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) -$$

$$-(z-1)\cdot 2\cdot 2 - (x-1)\cdot 0\cdot(-1) - (y-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = 4x + y - 7z + 2.$$

Таким образом $4x + y - 7z + 2 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

3. Получим вектор нормали $\vec{n}\{4; 1, ; -7\}$.

– Сейчас вы получите листочки с различными этапами решения задач на нахождение угла между прямой и плоскостью, ваша задача – расположить их в правильной последовательности. Задание в парах. Время выполнения задания: 2 минуты.

– На экране указан верный алгоритм. Проверяем правильность выполнения самостоятельно. (Слайд 2).

1. Вписываем фигуру в систему координат, отмечая дынные в задаче прямую и плоскость
2. Находим координаты интересующих нас точек (концы направляющего вектора прямой и точки плоскости)
3. Находим координаты направляющего вектора прямой
4. Составляем уравнение плоскости
5. Находим координаты вектора нормали к плоскости
6. Подставляем в формулу «синус угла между прямой и плоскостью»
7. Находим значение самого угла, если этого требуется в задаче.

IV. Закрепление изученного материала – 14 мин.

– Итак, приступим к решению задач.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Решение:

1. Впишем параллелепипед в прямоугольную систему координат так, чтобы точка A совпала с началом координат. Изображаем данную

прямую и плоскость (рисунок 1.2):

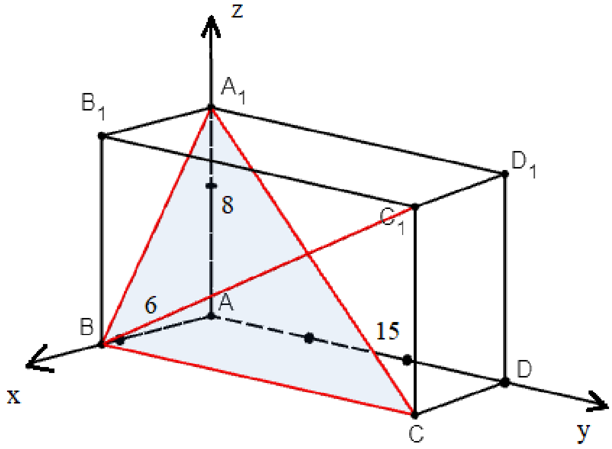

Рисунок 1.2

2. Координаты точек: $A_1(0,0,8)$, $B(6,0,0)$, $C(6,15,0)$, $C_1(6,15,8)$.

3. Координаты вектора $BC_1\{0; 15; 8\}$.

4. Плоскость (A_1BC):

$$\left|\begin{matrix} x & y & z-8 \\ 6 & 0 & -8 \\ 6 & 15 & -8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x & y \\ 6 & 0 \\ 6 & 15 \end{matrix} = x \cdot 0 \cdot (-8) + y \cdot (-8) \cdot 6 + (z-8) \cdot 6 \cdot 15 -$$

$$-(z-8) \cdot 0 \cdot 6 - x \cdot (-8) \cdot 15 - y \cdot 6 \cdot (-8) = 120x + 90z - 720.$$

5. Вектор нормали: $\vec{n}\{120; 0; 90\}$.

6. Найдем синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin(\widehat{(A_1BC), BC_1}) = \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{BC_1})\right| = \frac{|120 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 90 \cdot 8|}{\sqrt{120^2+0^2+90^2}\sqrt{0^2+15^2+8^2}} = \frac{24}{85}.$$

7. $\widehat{(A_1BC), BC_1} = \arcsin\left(\frac{24}{85}\right)$.

Ответ: $\arcsin\left(\frac{24}{85}\right)$.

– Решим еще одну задачу:

2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды равны $3\sqrt{3}$. Найдите синус угла между прямой SC и плоскостью ASB.

Решение:

1. Впишем пирамиду в прямоугольную систему координат так, чтобы точка A совпала с началом координат. Изображаем данную прямую и плоскость (рисунок 1.3)

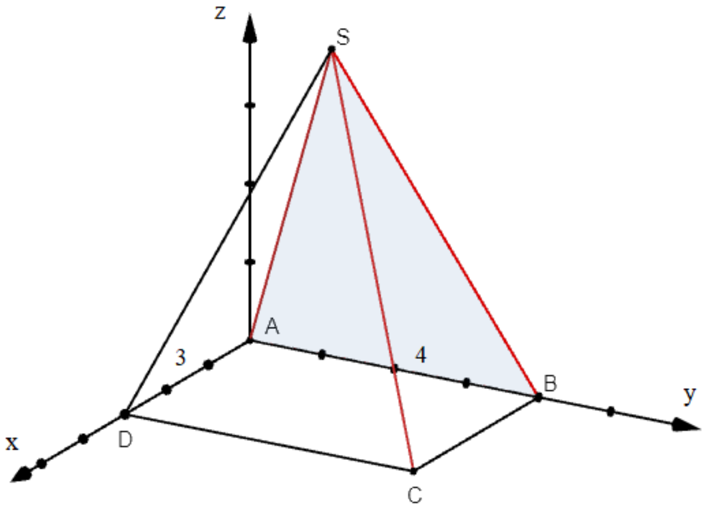

Рисунок 1.3

2. Координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(3,4,0)$

Для нахождения координат точки S рассмотрим плоскость Oxy (рисунок 1.4):

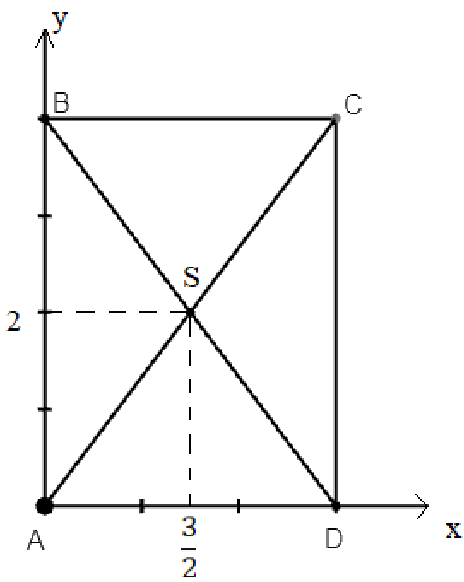

Рисунок 1.4

Как известно из курса геометрии, если в пирамиде все боковые ребра равны, то ее вершина проецируется в центр описанной около основания окружности. В нашем примере – это точка пересечения диагоналей прямоугольника. Из рисунка видно, что $S_x = \frac{3}{2}$, $S_y = 2$.

Для нахождения третьей координаты рассмотрим треугольник SOB: SO – высота пирамиды $\Longrightarrow \angle SOB = 90°$, значит $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 2{,}5^2} = \frac{\sqrt{83}}{2}$. Таким образом $S_z = \frac{\sqrt{83}}{2}$.

Получили $S(\frac{3}{2}; 2; \frac{\sqrt{83}}{2})$

3. Координаты вектора $SC\{\frac{3}{2}; 2; -\frac{\sqrt{83}}{2}\}$

4. Плоскость (ASB):

$$\left|\begin{matrix} x & y & z \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{\sqrt{83}}{2} \\ 0 & 4 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x & y \\ \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 4 \end{matrix} = x \cdot 2 \cdot 0 + y \cdot \frac{\sqrt{83}}{2} \cdot 0 + z \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 - z \cdot 2 \cdot 0 -$$

$$-x \cdot \frac{\sqrt{83}}{2} \cdot 4 - y \cdot \frac{3}{2} \cdot 0 = -2\sqrt{83}x + 8z.$$

5. Вектор нормали: $\vec{n}\{-2\sqrt{83}; 0; 8\}$

6. Найдем синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin((A_1\widehat{BC}), BC_1) = \left|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{BC_1})\right| = \frac{\left|\{-2\sqrt{83}\cdot\frac{3}{2} + 0\cdot 2 + 8\cdot(-\frac{\sqrt{83}}{2})\right|}{\sqrt{(-2\sqrt{83})^2 + 0^2 + 8^2}\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 2^2 + (-\frac{\sqrt{83}}{2})^2}} = \frac{1}{18} \cdot \sqrt{\frac{83}{33}}.$$

Ответ: $\frac{1}{18} \cdot \sqrt{\frac{83}{33}}$

V. Итог урока, рефлексия – 1 мин.

– Сегодня мы изучили решение задач на нахождение угла между прямой и плоскостью методом координат. Повторим алгоритм решения данных задач.

– Домашнее задание:

В правильном тетраэдре $ABCD$ M – середина ребра AD. Найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Проверочная работа

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если AA_1 = 8, AB = 6, BC = 15.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $SC = 25$. M – середина ребра SA. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MN.

3. В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90°$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. Вычислите синус угла между прямой, проходящей через середины ребер AD и BC, и плоскостью грани DBC.

4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани $ABCD$ пересекаются в точке $N,$ а точка M лежит на ребре A_1D_1, причем $A_1M: MD_1 = 1: 4$. Вычислите синус угла между прямой MN и плоскостью грани DD_1CC_1.