МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО–УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО–ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения решению задач на построение в курсе планиметрии в условии реализации ФГОС ООО

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
60% авторского текста
Работа рекомендована к защите
«27» апреля 2022 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
________ Суховиенко Е. А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ–513/086–5–1
Кабинова Ирина Олеговна

Научный руководитель:
доцент кафедры МиМОМ
Мартынова Елена Владимировна

Челябинск
2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.. 2

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ».. 5

1.1 Схема решения задач на построения 5

1.2 Решение элементарных задач на построение... 9

1.3 Методы решения задач на построение.. 16

1.3.1 Метод геометрических мест точек 16

1.3.2 Метод геометрических преобразований.. 19

1.3.2.1 Метод параллельного переноса 19

1.3.2.2 Метод поворота 21

1.3.2.3 Метод осевой симметрии 23

1.3.2.4 Метод центральной симметрии 24

1.3.2.5 Метод гомотетии (подобия).. 26

1.3.2.6 Метод инверсии 28

1.3.3. Алгебраический метод при решении задач на построение 30

1.4 Методика преподавания конструктивной геометрии............................... 31

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА КУРСА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗДЕЛУ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ.. 36

2.1 Анализ УМК 36

2.2 Разработка факультатива.. 39

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 56

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 58

ВВЕДЕНИЕ

История геометрии непосредственно связана со становлением теории геометрических построений. Аксиомы, которые являются фундаментом геометрии, сформулированы Евклидом – одним из основных математиков Древней Греции – показывают ту или иную функцию геометрических построений в прогрессировании геометрии. В древние времена математики полагали истинно верными только те построения, которые выполняются циркулем и линейкой, не признавая других средств и методов для решения конструктивных задач. В соответствие с этими постулатами Евклида, линейка рассматривалась как безграничная и односторонняя, а циркулю давалась возможность чертить окружность любого радиуса. Геометрические построения играют значительную роль в математической подготовке учащихся. Задания на построение циркулем и линейкой и на сегодняшний день считаются весьма актуальными и интересными, и является классическим материалом для школьников в курсе геометрии. Немаловажно и то, что подобные задания тренируют исследовательские навыки для решения практических задач, дают представления о возможном самостоятельном исследовании, способствуют формированию у учащихся геометрического мышления и воображения.

Задачи на построение циркулем и линейкой чаще всего не могут быть решены формальным подходом т.к. являются новой ситуацией и требует применения пройденных ранее теорем, что позволяет применять проблемное повторение на уроках геометрии. Данные задачи так же дают возможность учащимся развивать пространственные, логические, чертежные навыки и способствуют развитию мышления. Задачи на построения используются на уроках, нацеленных на закрепление теоретических знаний по каждому разделу школьного курса геометрии.

Таким образом, целью данной работы является анализ наиболее часто используемых в школе учебно методических комплексов, а так же разработка программы факультативного курса по теме «Углубленное изучение задач конструктивной геометрии» для 9 класса.

Объект исследования – процесс обучения геометрии.

Предмет исследования – решение задач на построение.

Гипотеза исследования – применение разработанного факультатива «Углубленному изучение задач конструктивной геометрии» будет способствовать развитию логического мышления учащихся и более глубокому пониманию задач решаемых с помощью циркуля и линейки.

Задачи исследования:

– выявить понятия, которые лежат в основе геометрических задач на построение;

– проанализировать методы решения задач на построение;

– показать методику обучения решению задач на построение с помощью циркуля и линейки;

– разработать факультативный курс с учетом ФГОС ООО.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ»

1.1 Схема решения задач на построения

Задача на построение – это задача, где для создания геометрического образа используются определенные инструменты, позволяющие приблизить образ к определенным условиям, которые он должен удовлетворять.

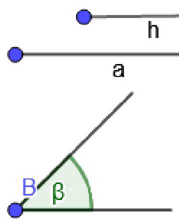
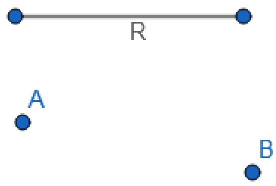
Необходимыми средствами при построении данных задач считают только циркуль и одностороннюю линейку. С помощью них можно построить следующие основные элементы плоскости: точка, прямая, окружность. Окружность и прямую будем называть основными геометрическими образами.

Циркуль – это инструмент, который позволяет построить окружность и дуги окружности, если построен их центр. С помощью линейки можно построить:

1) отрезок, соединяющий две построенные точки;
2) прямую, проходящую через две построенные точки;
3) луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

Задачи на построение выражаются геометрически с помощью чертежа-задания. Данный чертеж показывает данные элементы, и требования задачи представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Пример чертежа-задания

Задание	Чертеж-задание
1. Построить треугольник по основанию *a*, углу при основании ∠B = β и высоте проведенной к основанию треугольника *h*.	Дано:  Построить ΔABC
2. Построить окружность данного радиуса R, проходящую через две данные точки A и B.	Дано:  Построить окружность радиуса *R* проходящую через точки A и B.

Чертеж-задание показывает из элементов плоскости – данные элементы. Выделяется два случая:

1) данные элементы считаются уже построенными (Таблица 1, пример 2, точки A и B) тогда перемещение их по плоскости невозможно;

2) данные элементы только предстоит построить (Таблица 1, пример 1– отрезки *a* и *h,* ∠B. Пример 2 – отрезок R).

«Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки – значит свести ее к конечной совокупности следующих построений, которые называются элементарными.

1) построение прямой линии через две известные точки;

2) построение точки пересечения двух известных прямых (если эта точка существует);

3) построение окружности известного радиуса с центром в известной точке;

4) построение точек пересечения известной прямой и известной окружности (если такие точки существуют); частным случаем этого элементарного построения, является построение отрезка, равного данному;

5) построение точек пересечения двух известных окружностей (если такие точки существуют)» [27, с.33].

Элементарные построения – это графическое изображение основных геометрических построений на плоскости основных (для данных средств построения) образов и их инциденций.

Упрощение задачи до элементарных построений не рационально, поскольку это делает решение объемным. В общем случае, задачи сводят к основным построения циркулям и линейки, которые характеризуются чрез общие аксиомы конструктивной геометрии. Эти аксиомы не формулируются в курсе школьной геометрии, но они подразумеваются в процессе решения задачи на построение. Рассмотрим эти общие аксиомы циркуля и линейки в теории геометрии.

1. Аксиомы линейки:

– если построены различные точки A и B, то построен луч AB или BA;

– если построены различные точки AB, то построена вся прямая AB;

– если построены различные точки AB, то построен отрезок AB.

2. *Аксиома циркуля.* Если задана некоторая точка и некоторый отрезок, то может быть построена окружность с центром в точке O и радиусом AB.

Данные аксиомы называются системой аксиом построения с помощью циркуля и линейки. Эта система аксиом позволяет решить следующие элементарные задачи.

Элементарные задачи на построение циркулем и линейкой:

1) построение отрезка, равного данному;

2) построение угла, равного данному;

3) построение биссектрисы угла;

4) построение середины отрезка;

5) построение перпендикулярных прямых;

6) построение треугольника по двум сторонам и углу между ними;

7) построение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам;

8) построение треугольника по трем сторонам.

Таким образом, задачи на построение делятся на 2 вида:

1. «Задачи метрические, в которых требуется построить геометрический образ по данным элементам, имеющим определенные размеры, но не определенным по положению на плоскости. Следовательно, и требуемый в задаче геометрический образ может занимать произвольное положение на плоскости (пример 1).

2. Задачи положения, в которых построение требуемого геометрического образа выполняются на основе данных элементов, из которых отдельные определены по положению на плоскости. Следовательно, и требуемый геометрический образ должен занимать определенное (в какой-то мере) положение на плоскости (относительно данных элементов, пример 2)» [27, с.33].

Чертеж-задание разделяет все определяющие элементы на две категории: известные и неизвестные. Неизвестные определяющие элементы будем называть искомыми.

В результате, решение задачи на построение сводится к отысканию и построению искомых элементов требуемой фигуры. Решения задачи на построение проходит по определенной схеме.

Этапы решения задачи на построение.

1. *Анализ*. Цель – установить алгоритм решения, состоящий из основных или элементарных построений, приводящих к построению искомой фигуры. В анализе мы предполагаем, что задача уже решена. Это

предположение графически изображается соответствующей фигурой, которое называется чертежом-наброском.

2. *Построение*. Цель – выполнение требования задачи. При построении чертежа используются циркуль и линейка. Этот этап решения показывает на чертеже найденный алгоритм решения задачи.

3. *Доказательство*. Цель – проверить, отвечает ли полученная фигура требованиям задачи. Этот этап показывает на сколько правильными были рассуждения в анализе задачи.

4. *Исследование*. Цель – сделать решение полным и универсальным. Этот шаг необходим, чтобы выяснить, всегда ли у задачи есть решение. На этом этапе проверяют, всегда ли задача имеет решение, сколько их и при каких условиях она будет решена.

1.2 Решение элементарных задач на построение

Элементарная задача 1.

На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному [4, с.43].

Построение.

1. Строим АВ, луч а построен (рисунок 1).
2. Из точки С проведем окружность радиуса АВ.
3. Точку пересечения окружности и прямой обозначим D.
4. CD – искомый.

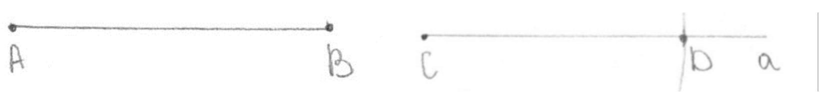


Рисунок 1 – Построение задачи

Доказательство: CD = AB как радиусы окружности.

Исследование: задача имеет единственное решение.

Элементарная задача 2.

Отложить от данного луча угол, равный данному [4, с.44].

Построение.

1. С помощью циркуля строим окружность произвольного радиуса с центром в точке B (рисунок 2).

2. Точки пересечения окружности со сторонами ∠B обозначаем A и C, соединяем их с помощью линейки.

3. На луче отметим точку O и строим окружность с центром в точке O и радиусом равным AB.

4. Точку пересечения окружности и прямой обозначим D.

5. Из точки D построим окружность радиусом AC.

6. Точку пересечения двух окружностей обозначим E.

7. С помощью линейки проведем луч OE.

8. $\angle$ DOE – искомый.

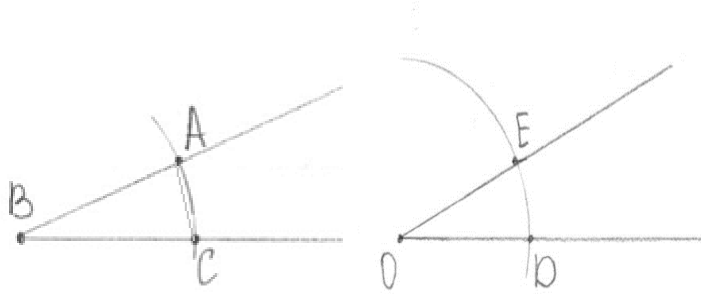


Рисунок 2 –Построение задачи

Доказательство: рассмотрим $\triangle$ ABC и $\triangle$ OPE: $AC = OE, AB = OD$, $BC = DE$ (как радиусы окружности). Следовательно, по третьему признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle OPE$. Таким образом, $\angle ABC = \angle EOD$.

Исследование: задача имеет два решения.

Элементарная задача 3.

Построить биссектрису данного угла [4, с.45].

Построение.

1. Из точки D строим окружность произвольного радиуса. Точки пересечения окружности и сторон угла обозначим F и E (рисунок 3).

2. Строим окружность радиуса DF с центром F. Строим окружность радиуса DF с центром E. Точку пересечения этих окружностей обозначим G.

3. Проведем луч DG.

4. DG – биссектриса угла $\angle$ EDF.

Доказательство: проведем прямые EG и FG. DE = DF, EG = GF (как радиусы окружности. DG – общая прямая, следовательно $\triangle\,\mathrm{GED} = \triangle\,\mathrm{GFD}$ (по третьему признаку равенства треугольников), откуда следует, что $\angle\,\mathrm{EDG} = \angle\,\mathrm{FDG}$ т.е. DG – биссектриса $\angle$ EDF.

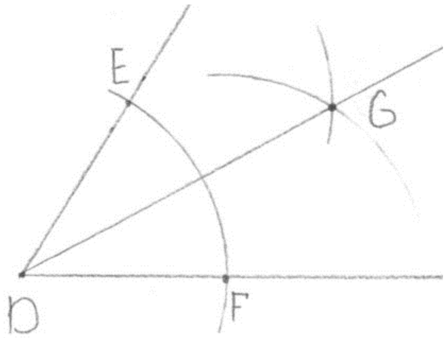


Рисунок 3 – Построение задачи

Доказательство: проведем прямые EG и FG. DE=DF, EG=GF (как радиусы окружности. DG – общая прямая, следовательно $\triangle\,\mathrm{GED} = \triangle\,\mathrm{GFD}$ (по третьему признаку равенства треугольников), откуда следует, что $\angle\mathrm{EDG} = \angle\mathrm{FDG}$ т.е. DG – биссектриса $\angle$EDF.

Исследование: задача имеет единственное решение. Примечание: с помощью циркуля и линейки нельзя разделить угол на три равных угла (задача о трисекции угла).

Элементарная задача 4.

Построить середину данного отрезка [4, с.46].

Построение.

1. Строим окружность с центром в точке A и радиусом AB (рисунок 4).

2. Строим окружность радиусом AB с центром B.

3. Точки пересечения окружностей обозначим C и D.

4. Строим прямую CD.
5. Точку пересечения прямых AB и CD является E.
6. Точка E – середина отрезка AB.

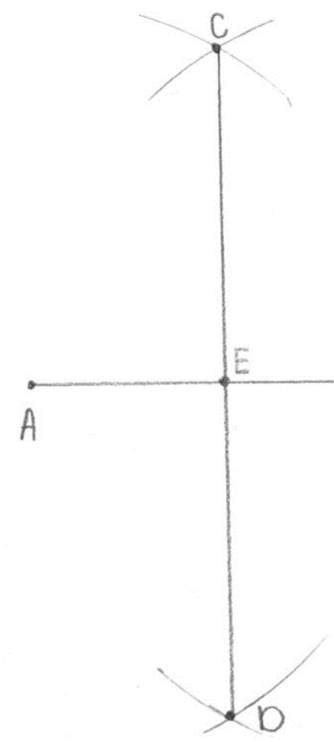


Рисунок 4 – Построение задачи

Доказательство: проведем прямые $\mathrm{AC}, \mathrm{CB}, \mathrm{AD}, \mathrm{BD}$.

$\mathrm{AC} = \mathrm{CB} = \mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{AB}$ (как радиусы равных окружностей) CD – общая прямая, следовательно $\Delta\, \mathrm{CAD} = \Delta\, \mathrm{CBD}$ по третьему признаку равенства треугольников. Тогда по свойству равных треугольников $\angle\, \mathrm{ACE} = \angle\, \mathrm{BCE}$, следовательно CE – биссектрисса $\Delta\, \mathrm{ACB}$. $\Delta\, \mathrm{ACB}$ – равносторонний так как, AC = CB = AB как радиусы равных окружностей. Следовательно CE – является не только, бисектрисса, но и медиана треугольника $\Delta\, \mathrm{ACB}$. Аналогично рассмотрим $\Delta\, \mathrm{ADB}$, $\angle\, \mathrm{ADE} = \angle\, \mathrm{BDE}$, следовательно ED – биссектрисса $\Delta\, \mathrm{ADB}$, так как AD = DB = AB как радиусы равных окружностей, следовательно CD – является не только высотой, но и медианой треугольника $\Delta\, \mathrm{ADB}$. Таким образом, $\mathrm{CE}, \mathrm{ED} \in \mathrm{CD}$ следовательно $\mathrm{AE} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$.

Исследование: задача имеет единственное решение.

Элементарная задача 5.

Даны прямая и точка на ней построить прямую, проходящуюю через данную точку и перпендиклярную к данной прямой [4, с.46].

Построение.

1. Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке C (рисунок 5).
2. Точки пересечения окружности и прямой обозначим A и B.
3. Построим окружности радиуса AB с ценрами в точках A и B.
4. Точку пересечения этих окружностей обозначим E и D.
5. Проведем прямую через точку C и одну из полученных точек E или D, например CD.
6. CD – искомая прямая.

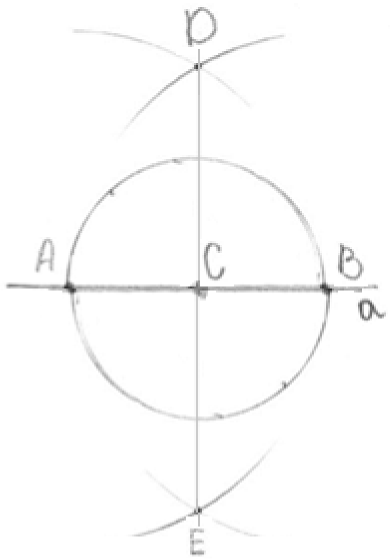


Рисунок 5 – Построение задачи

Доказательство: Проведем прямые $AE = EB = AD = BD$ (как радиусы одной окружности). CE – общая прямая, следовательно $\triangle DAE = \triangle DBE$ по третьему признаку равенства треугольников. Тогда по свойству равных треугольников $\angle ADC = \angle BDC$, следовательно DC – биссектрисса $\triangle ADB$. $\triangle ACB$ – равносторонний так как, AD = DB = AB как радиусы равных окружностей. Следовательно DC – является не только биссектриссой, но и высотой треугольника $\triangle ACB$. Аналогично рассмотрим $\triangle ABE$, $\angle AEC = \angle BEC$, следовательно CE – биссектрисса $\triangle AEB$, так как AE = EB = AB как радиусы равных окружностей, следовательно CE – является не только, биссектриссой, но и высотой треугольника $\triangle ABE$. Таким образом, CE, CD – перпендикуляры к точке C.

Исследование: задача имеет одно решение.

Элементарная задача 6.

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними [4, с.83].

Потроение.

1. Построим угол H, равный заданному углу (рисунок 6).
2. На сторонах угла H строим отрезок HL = b и HK = a.
3. Проведем прямую KL.
4. $\triangle$ HKL – искомый.

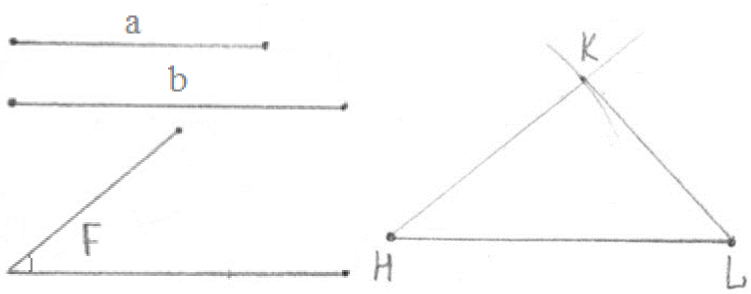


Рисунок 6 – Построение задачи

Доказательство: треугольники равны по первому признаку.

Исследование: Задача имеет единственное решение.

Элементарная задача 7.

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам [4, с.84].

Построение:

1. Откладываем отрезок FE = GH (рисунок 7).
2. Построим $\angle$ F равный заданному.
3. Построим $\angle$ E равный заданному.
4. Точка пересечения двух сторон углов $\angle$ F и $\angle$ E обозначим M.
5. $\triangle$MEF – искомый треугольник.

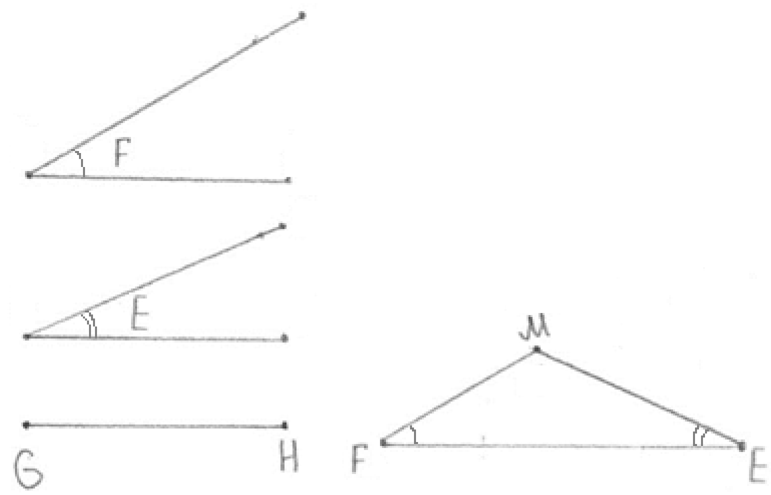


Рисунок 7 –Построение задачи

Доказательства: треугольники равны по второму признаку.

Исследование: задача имеет 2 решения, если сумма двух углов треугольника меньше 180°.

Элементарная задача 8.

Построить треугольник по трем его сторонам [4, с.84].

Построение.

1. Отложим отрезок GH = c (рисунок 8).
2. Построим окружность радиусом b и центром в точке G.
3. Построим окружность радиусом a и центром в точке H.
4. Точку пересечения двух окружностей обозначим I.
5. ∆ IGH – искомый.

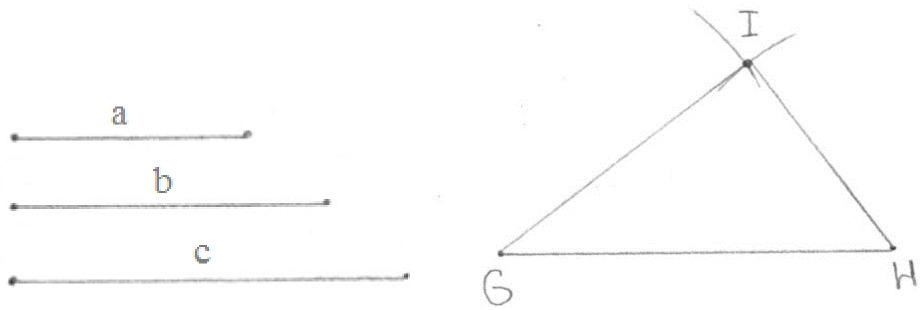


Рисунок 8 – Построение задачи

Доказательство: треугольники равны по третьему признаку.

Исследование: задача имеет 2 решения, если выполняется неравентсво треугольника. Иначе решений нет.

1.3 Методы решения задач на построение

Существует несколько основных методов решения задач на построение:

1. Метод геометрических мест (далее – ГМТ).

2. Метод геометрических преобразований:

– метод параллельного переноса;

– метод поворота;

– метод осевой симметрии;

– метод центральной симметрии;

– метод гомотетии;

– метод инверсии.

3. Алгебраический метод.

1.3.1 Метод геометрических мест точек

При решении задачи этим методом в анализе, отмечают к нахождению, какой точки сводится решение задачи, причем точка должна удовлетворять двум условиям:

1. ГМТ, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1.
2. ГМТ, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2.

Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т.е. является их точкой пересечения.

Некоторые ГМТ применяемые при решении задач:

ГМТ 1. Множество точек равноотстоящих от данной точки – окружность.

ГМТ 2. Множество точек равноотстоящих от двух данных точек – серединный перпендикуляр к данному отрезку.

ГМТ 3. Множество точек равноудаленных от трех равных точек – центр описанной окружности.

ГМТ 4. Множество точек равноудаленных от данной прямой – параллельные прямые.

ГМТ 5. Множество точек равноудаленных от двух параллельных прямых – средняя линия полосы.

ГМТ 6. Множество точек равноудаленных от двух пересекающихся прямых – биссектриса двух углов.

ГМТ 7. Множество точек равноудаленных от трех пересекающихся прямых – это четыре точки, одна из которых, есть центр вписанной и вневписанной окружности.

ГМТ 8. Множество точек из которых данный отрезок виден под прямым углом – окружность, построенная на данном отрезке, как на диаметре, без концов отрезка.

ГМТ 9. Множество точек из которых данный отрезок виден под данным углом – сегмент, вмещающий данный угол.

ГМТ 10. Множество точек, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек равно отношению двум неравным отрезков – окружность Аполлония.

ГМТ 11. Множество середин равных хорд данной окружности – окружность концентрическая данной.

ГМТ 12. Множество точек делящих данные хорды к данной окружности в данном отношении – окружность концентрическая данной;

ГМТ 13. Множество точек, из которых данная окружность видна под данным углом – концентрическая окружность.

ГМТ 14. Множество точек, касательные из которых к окружности равны данному отрезку – концентрическая окружность.

ГМТ 15. Множество точек, разности квадратов расстояний от которых две точки равны квадрату длины данного отрезка – перпендикулярная прямая.

ГМТ 16. Множество точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний равна квадрату длину данного отрезка – окружность с центром в середине данного отрезка.

ГМТ 17. Множество точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны между собой – радикальная ось данных окружностей.

Пример:

Построить ΔABC по a, h_a и $b^2 - c^2 = p^2$,где p – данный отрезок (рисунок 9).

Анализ.

Предположим, что задача решена, $b^2 - c^2 = p^2$ =>$A \in$ ГМТ 15, $ha \perp a$ => $A \in$ ГМТ 4. Задача сводится к построению A = ГМТ 15∩ГМТ 4.

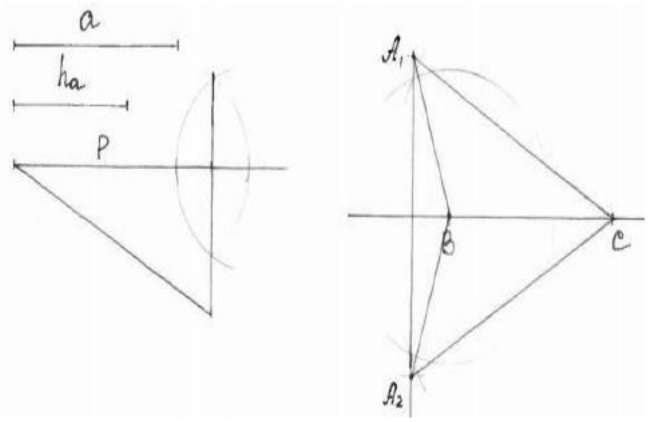


Рисунок 9 – Построение задачи

Построение.

1. a, ha, p.
2. ГМТ 15.
3. ГМТ 4.
4. ГМТ 15∩ГМТ 4 = A_1A_2.
5. $\Delta A_1BC, \Delta A_2BC$ – искомые.

Доказательство.

1. $A \in$ ГМТ 15 ($b^2 - c^2 = p^2$) – по построению;
2. $A \in$ ГМТ 4 (AH= ha) – по построению;
3. BC = a – по построению.

Исследование: задача имеет два равных решения.

1.3.2 Метод геометрических преобразований

Смысл методологии геометрических преобразований состоит в следующем: решение задачи должно иметь такое преобразование, с помощью которого можно найти решению данной задачи. Метод геометрических преобразований делится на следующие методы: метод параллельного переноса, метод поворота, метод осевой симметрии, метод центральной симметрии, метод гомотетии, метод инверсии. Данные геометрические преобразования будем обозначать следующим образом: $T_{\vec{a}}$ – параллельный перенос на вектор $\vec{a}$, R_o^a – поворот на угол α, с вокруг точки O, S_l – осевая симметрия относительно прямой l, Z_o – центральная симметрия относительно точки O, H_o^k – гомотетия с центром в точке O и коэффициентом подобия k, P – подобие, I_o^r – инверсия с центром в точке O и радиусом r.

1.3.2.1 Метод параллельного переноса

Сущность этого метода состоит в том, что применяя преобразование параллельного переноса $T_{\vec{a}}$, приводятся данные и искомые фигуры в удобное для построения положение. Таким образом, задача сводится к более простой задаче.

Параллельный перенос плоскости на некоторый вектор $\vec{a}$, назовем отображение плоскости на себя, при котором выполняется следующие равенство: X→X`, $\overrightarrow{xx`} = \vec{a}$, $T_{\vec{a}}(x) = x` \mid \overrightarrow{xx`} = \vec{a}$.

Пример.

«Основание двух равнобедренных треугольников находятся на одной прямой, а сами они лежат по одну сторону от этой прямой. Существует ли прямая, которая пересекает их по равным хордам?» [6, 51с.].

Дано: прямая s, $\triangle$ ABC, $\triangle$ PQR, A, C, P, $\in$ s; B, Q принадлежат одной полуплоскости (рисунок 10).

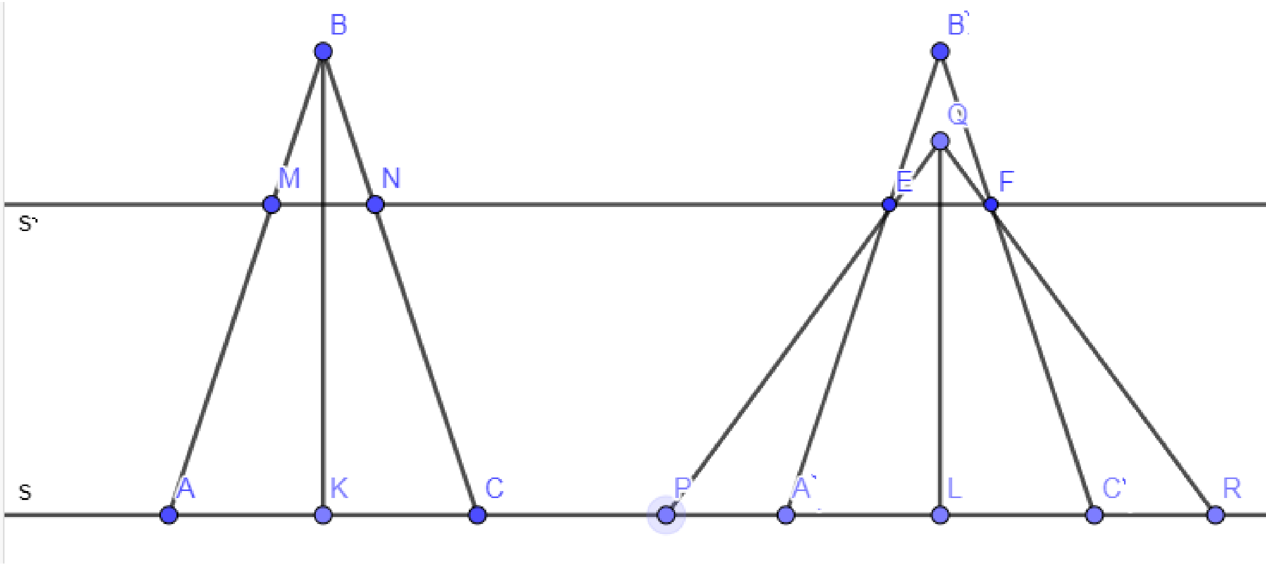


Рисунок 10 – Построение задачи

Анализ.

Пусть s` искомая прямая, пересекающая треугольник по равным хордам MN = EF. Проведем высоты треугольников: BK – высота $\triangle$ ABC, QL – высота $\triangle$ PQR. Рассмотрим параллельный перенос $T_{\overrightarrow{KL}}$. Таким образом, A $\to$ A`, $B \to B$`, $C \to C$`, то есть при параллельном переносе $\triangle$ ABC$\to$ $\triangle$ A`B`C`, тогда и M $\to$ E`, N $\to$ F, E = A`B` $\cap$ PQ, F = B`C` $\cap$ QR. Прямую s` = EF можно построить.

Построение.

1. BK $\perp$ AC, QL $\perp$ PR;
2. $T_{\overrightarrow{KL}}$: $\triangle$ ABC $\to$ $\triangle$ A`B`C`;
3. E = A`B` $\cap$ PQ, F = B`C` $\cap$ QR;
4. EF = s` – искомая прямая.

Доказательство.

Доказательство вытекает из анализа и построения.

Исследование.

1. Если $A`B` \cap PQ = \{E\}$ и $B`C` \cap QR = \{F\}$, то задача имеет одно решение.

2. Если $A`B` \cap PQ = \emptyset$ и $B`C` \cap QR = \emptyset$, то задача не имеет решений.

1.3.2.2 Метод поворота

Сущность этого метода такова: поворот фигуры около изначально выбранного рациональным способом центра или оси на какой-либо угол, необходимо совершить так, чтобы превратить проведение анализа в более легкую форму или даже непосредственно решить её.

Поворотом плоскости вокруг точки O, назовем движение которое некоторой точки A ставит в соответствие точку A`, так чтобы выполнялись следующие условия:

1. $|OA| = |OA`|$;

2. $\angle AOA` = \alpha$.

Таким образом, выполняется равенство $R_o^a(A) = A`$.

Пример.

«Постройте равносторонний треугольник с вершинами на трех данных параллельных прямых» [6, 65с.].

Дано: прямые a, b, c; $a \parallel b$, $b \parallel c$, $a \parallel c$ (рисунок 11).

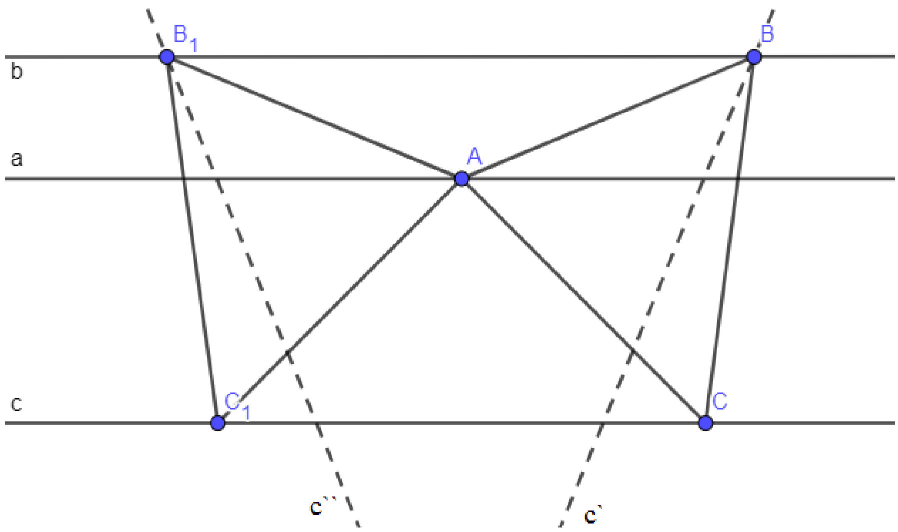


Рисунок 11 – Построение задачи

Анализ.

Предположим, что задача решена, тогда $\triangle ABC$ – искомый, тогда $AB = BC = AC, A \in a, B \in b, C \in c$. Так как $AB = AC$, $\angle CAB = 60°$, то $R_A^{+60°}$: $C \rightarrow B$. Но $C \in c$, следовательно, $B \in c`$, где $c` = R_A^{+60°}(c)$. В то же время $B \in c$, поэтому $B = b` \in c$, значит точку B можно построить.

Построение.

1. На прямой a, возьмем точку A;
2. $c` = R_A^{+60°}(c)$;
3. $B = b \cap c`$;
4. $C = R_A^{-60°}(B)$;
5. $\triangle ABC$ — искомый.

Доказательство.

1. $AB = AC$, $\angle CAB = 60°$ – по построению, поэтому $\triangle ABC$ – равносторонний;
2. $B \in b$ – по построению;
3. $B \in c`$, $R_A^{-60°}$: $B \rightarrow C$, $c` \rightarrow c$, поэтому $C \in c$;

Исследование.

Задача имеет два решения при выбранной точке A, прямую c можно повернуть вокруг точки A на угол (+60°) и (–60°).

1.3.2.3 Метод осевой симметрии

Сущность этого метода состоит в том, что проведя анализ задачи, замечаю, что вместо искомой фигуры можно построить фигуру симметричную ей относительно некоторой прямой, а затем от нее построить нужную фигуру, используя повторную симметрию.

Осевой симметрией относительно прямой l назовем такое преобразование плоскости, которое данной точки М ставит в соответствие М` такую что выполняются два условия:

1. $MM` \perp l$.
2. $MM_0 = M_0M`$.

Таким образом, выполняется равенство $S_l(M) = M`$.

Пример.

«Два зеркала образуют угол. Из точки внутри угла надо направить луч так, чтобы отразившись от двух сторон угла, он вернулся в ту же точку. Как это сделать?» [6, с. 37].

Дано: угол α, образованный лучами a и c, точка М внутри этого угла (рисунок 12).

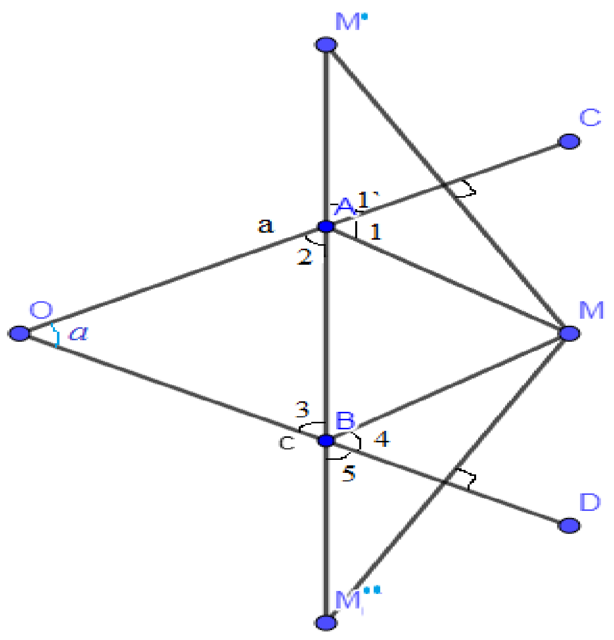


Рисунок 12 – Построение задачи

Анализ.

Пусть луч направлен из точки М так, что отразившись от двух зеркал в точках А и В, он опять прошел через М. Из курса физики известно, что угол падения равен углу отражения, то есть $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = = \angle 4$. Рассмотрим $M` = S_a(M),\ \ M`` = S_c(M)$, тогда получаем, что А, $B \in M`M``$ (действительно, $\angle 1 = \angle 1`,\ \ \angle 4 = \angle 5$ – по свойствам осевой симметрии; кроме того, $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4$ – по условию; поэтому $\angle 1 = = \angle 2,\ \angle 5 = \angle 3$, то есть $\angle 1$ и $\angle 2$ – вертикальные, $\angle 5$ и $\angle 3$ – вертикальные, отсюда А, В ∈ М`М``

Построение.

1. Строим точку $M` = S_a(M)$.
2. Строим точку $M`` = S_c(M)$.
3. Проводим М`М``.
4. $M`M`` \cap\ a = A,\ M`M`` \cap\ c = B$.
5. А и В – искомые точки, то есть МАВ – путь луча.

Доказательство.

Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$. Это верно, так как $\angle 1 = \angle 1`$ (данные углы полученны при осевой симметрии точки М с осью симметрии а). Но $\angle 1` = \angle 2$ как вертикальные углы получим, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажем равенство углов $\angle 3 = \angle 4$. Имеем, что $\angle 3 = \angle 5$ как вертикальные углы, а $\angle 5 = \angle 4$ как углы полученные при осевой симметрии точки М относительно прямой с. Итак $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4$. Поэтому МАВ – путь луча.

Исследование.

Задача имеет единственное решение, если угол α острый; если этот угол прямой, то луч света пройдет через точку М и через точку пересечения зеркал, то есть путь луча будет представлять собой отрезок; если угол тупой, то задача не имеет решения.

1.3.2.4 Метод центральной симметрии

Сущность этого метода состоит в том, что проведя анализ задачи, замечаю, что вместо искомой фигуры можно построить фигуру симметричную ей относительно некоторой точки, а затем от нее построить нужную фигуру, используя повторную симметрию.

Центральной симметрией относительно точки О, называется преобразование, которое точку О отображает на себя, а любую другую точку M отображает на такую точку M_1, что точка О является серединой отрезка M_1. Обозначается, как Z_o.

Пример.

«Построить треугольник по двум сторонам и медиане проведенной к третьей стороне» [6, с. 31].

Дано: a, b, m_c (рисунок 13).

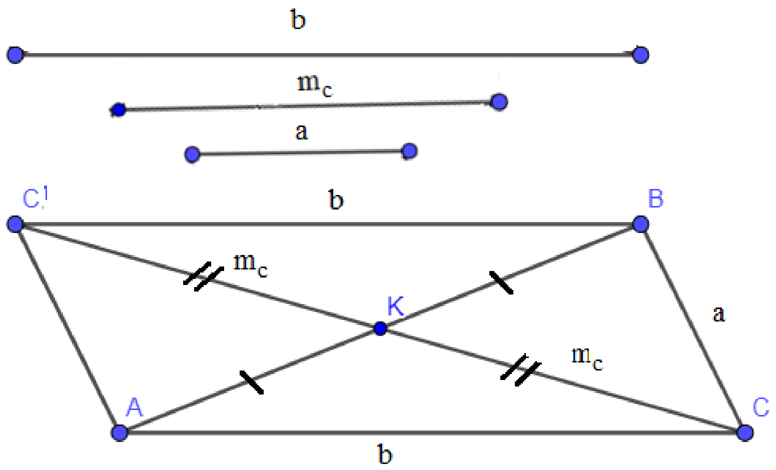


Рисунок 13 – Построение задачи

Анализ.

Пусть $\triangle ABC$ – искомый. Тогда $BC = a$, $AC = b$, $CK = m_c$, где K – середина AB (BK = AK). Примем K за центр симметрии, Z_K: $B \rightarrow A$, $C \rightarrow C`$, отсюда $C`A = CB = a$; $CC` = 2CK = 2m_c$. Очевидно, что $\triangle C`AC$ можно построить а значит можно построить и $\triangle ABC$.

Построение.

1. $\triangle C`AC$ ($CA = b, C`A = a, CC` = 2m_c$).
2. K – середина CC`.

3. $B = Z_K(A)$.

4. $\triangle ABC$ – искомый.

Доказательство.

$AC = b$ – по построению, $CK = \frac{1}{2}CC` = \frac{1}{2}2m_c = m_c$; $BK = AK$ – по построению, поэтому СК – медиана; $Z_K$: $A \to B$, $C` \to C$, следовательно $BC = AC` = a$.

Исследование.

При $|a - b| < 2m_c < a + b$ задача имеет одно решение.

1.3.2.5 Метод гомотетии (подобия)

Сущность метода состоит в том, что вначале строят фигуру, подобную искомой, так что бы она удовлетворяла всем условиям задачи кроме одного. Затем строят искомую фигуру, как фигуру подобную построенной и удовлетворяющую пропущенному требованию.

Гомотетия в центре точки О и коэффициентом k назовем преобразование плоскости на себя при котором выполняется следующие условие: A→A` $| k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA`}$. Обозначается как H_o^k – гомотетия с центром в точке О и коэффициентом подобия k.

Пример.

«Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла» [6, с. 37].

Дано: а, γ; высота h_b (рисунок 14).

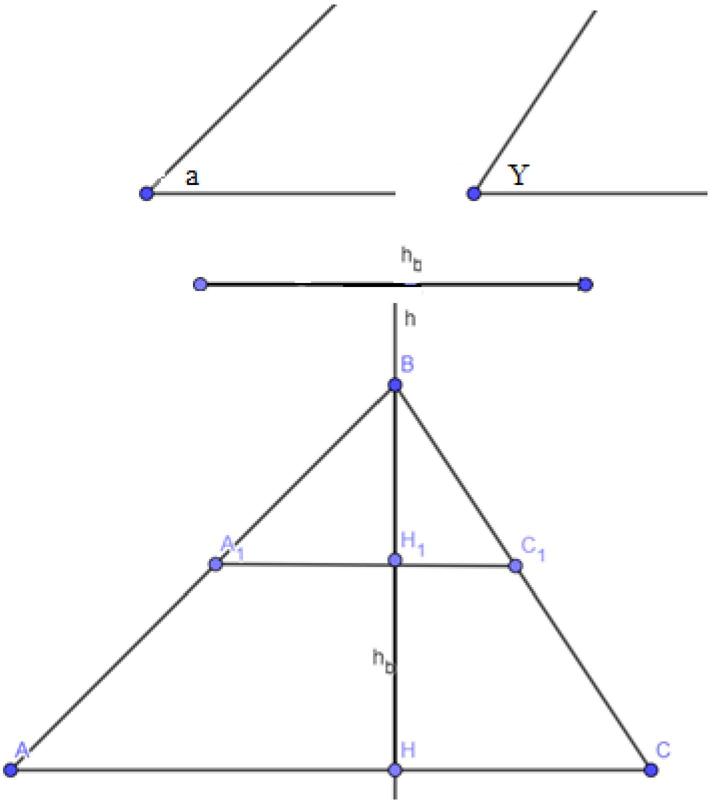


Рисунок 14 – Построение задачи

Анализ.

Пусть $\triangle ABC$ – искомый, тогда $\angle BAC = a, \angle BCA = \gamma, BH = h_b, BH \perp AC$.

Разобьем данное условие на два независимых:

1. $\angle BAC = a, \angle BCA = \gamma$.
2. $BH = h_b, BH \perp AC$.

Первое условие определяет форму, а второе условие – размеры искомого треугольника.

Сначала отбрасываем второе условие и строим по двум углам вспомогательный треугольник, подобный искомому. Затем используя второе условие, строим искомый $\triangle ABC$, подобный вспомогательному треугольнику, чтобы $BH = h_b, BH \perp AC$.

Построение.

1. $\triangle A_1BC_1$ ($\angle BA_1C_1 = a$, ($\angle BC_1A_1 = \gamma$, A_1C_1– любой отрезок);
2. Луч h: $B \in h$, $h \perp A_1C_1$;

3. $h \cap A_1C_1 = H_1$;

4. H: H $\in$ h, BH $\in h_b$;

5. Рассмотрим гомотетию H_B^k: $H_1 \to$H, заданную центром В и парой (H_1, H) соответственных точек. Тогда H_B^k: $A_1 \to$A, и $C_1 \to$C.

6. $\triangle$ ABC – искомый.

Доказательство.

Следует из анализа и построения.

Исследование.

Задача имеет единственное решение, если выполняется а $+ \gamma < 180°$.

1.3.2.6 Метод инверсии

Сущность метода инверсии заключается в том, что вместе с данными и искомыми фигурами рассматриваются фигуры инверсные им, т.е. данный метод позволяет заменять фигуры содержащие окружность более простыми фигурами.

Возьмем на плоскости некоторую точку О и некоторое $r > 0$. Преобразование плоскости, которое каждой точки А, отличной от О, ставит соответствие А` на луче ОА такую, что $|OA| \cdot |OA`| = r^2$, есть инверсия с центром в точке О и радиусом r. Обозначается I_o^r – инверсия с центром в точке О и радиусом r.

Пример.

Построить образ квадрата, вписанного в инверсную окружность.

Дано: ABCD – квадрат; A, B, C, D $\in$ ω (рисунок 15).

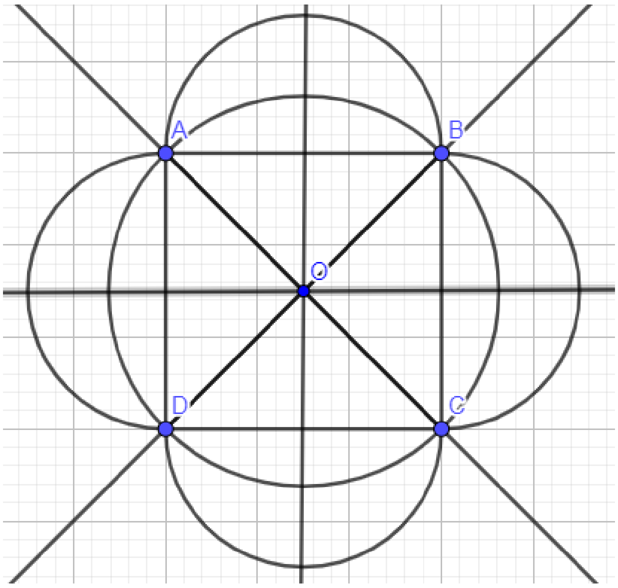


Рисунок 15 – Построение задачи

Анализ.

Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. $O \notin AB$ следовательно $\mathrm{I}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{r}}(\mathrm{AB}) = \omega_1$: O, A, B $\in \omega_1$. Так как AB − отрезок внутри инверсионной окружности, то он переходит в дугу окружности, проходящей через центр инверсии, лежащую вне инверсионной окружности с концами в точках A и B. Аналогично с остальными сторонами квадрата.

Задача сводится к построению дуги окружности, лежащей вне инверсионной окружности с концами в вершинах квадрата.

Построение.

1. ABCD – квадрат; A, B, C, D $\in \omega$.
2. $\mathrm{I}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{r}}(\mathrm{AB}) = \omega_1$.
3. $\mathrm{I}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{r}}(\mathrm{BC}) = \omega_2$.
4. $\mathrm{I}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{r}}(\mathrm{CD}) = \omega_3$.
5. $\mathrm{I}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{r}}(\mathrm{AD}) = \omega_4$.

Доказательство.

Дуга AB – образ стороны AB по построению.

Дуга AD – образ стороны AD по построению.

Дуга BC – образ стороны BC по построению.

Дуга CD – образ стороны CD по построению.

Исследование.

Задача имеет одно решение.

1.3.3. Алгебраический метод при решении задач на построение

При решении задачи данным методом необходимо построить некоторый отрезок (или несколько отрезков) используя известные геометрические соотношения между искомыми и данными фигурами, составляется уравнение, которое выражает формулой длину искомого отрезка через длины данных. Далее строится искомый отрезок (если это возможно) и с помощью найденного отрезка строится искомая фигура.

В курсе геометрии рассматривают построения циркулем и линейкой отрезков, заданным следующими некоторыми простейшими формулами:

ПП 1. $x = a + b;$

ПП 2. $x = a - b,\ a > b;$

ПП 3. $x = ma, m \in N;$

ПП 4. $x = \frac{a}{n}, n \in N;$

ПП 5. $x = \frac{ab}{c};$

ПП 6. $x = \sqrt{ab};$

ПП 7. $x = \sqrt{a^2 + b^2};$

ПП 8. $x = \sqrt{a^2 - b^2},\ a > b;$

ПП 9. $x = a \sin \alpha;$

ПП 10. $x = a \cos \alpha;$

ПП 11. $x = a\, arctg\, \alpha;$

ПП 12. $x = a\, arcctg\, \alpha;$

Пример 1.

Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику (рисунок 16).

Дано: $\triangle$ ABC.

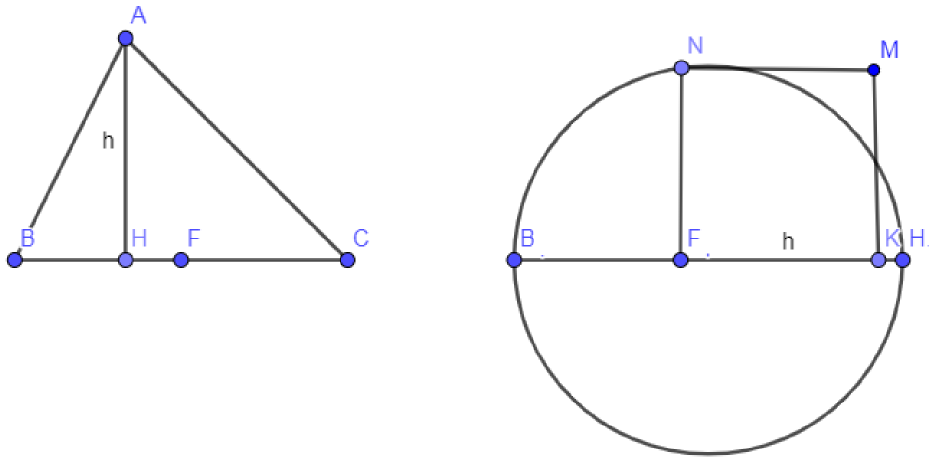


Рисунок 16 – Построение задачи

Анализ.

Чтобы построить квадрат необходимо узнать длину стороны. Пусть задача решена и построен квадрат FNMK, равновеликий данному треугольнику $\triangle$ ABC. Тогда $S_{\triangle ABC} = S_{FMNK} = \frac{1}{2}BCh = FN^2 \Rightarrow FN = \sqrt{\frac{1}{2}BCh}$.

Построение.

1. Построим высоту h треугольника $\triangle$ ABC.
2. F – середина BC.
3. Построим отрезок FN равный среднему геометрическому отрезков BF и h (ПП 6).
4. Построим искомый квадрат по стороне FN.

Доказательство.

Следует из анализа и построения.

Исследование.

Задача имеет единственное решение.

1.4 Методика преподавания конструктивной геометрии

Вопросами методики обучения решению задач на построения циркулем и линейкой посвящены работы многих известных ученыхметодистов, среди которых Д.И. Перепелкин, Ж. Адамар, С.И. Шохор-Троцкий, Н.А. Извольский, И.И. Александров и Г.П. Сенников. Геннадий Петрович Сенников опубликовал больше 50 работ, в том числе 4 монографии посвятив свой научный интерес методике преподавания геометрии. Он разработал наглядно-конструктивный метод обучения учащихся решению задач на построение. Суть которого изложена в монографиях «Наглядно-конструктивное изучение школьной планиметрии» и «Наглядно-конструктивное изучение школьной стереометрии» В этих работах говорится об организации обучения школьников на основе их практической деятельности. Ученики сами создают или выбирают из готовых моделей изучаемых объектов, изучают эти модели, выясняют содержание понятий, сами «открывают» теоремы и формулируют задачи. Таким образом, ученики самостоятельно «добывают» знания в творческом учении, а не получают их готовыми, задачей же педагога остается научить учеников эти знания добывать.

Геннадием Петровичем был разработан алгоритм, организовывающий учебно-практическую деятельность школьников и показывающий наглядно-конструктивный подход при изучении геометрии. Изучая новую тему, учитель стимулирует учащихся создать модель к уже изученному, нужному в данный момент материалу, а затем преобразовывает ее в модель на основе которой будет изучаться новое. Если новым материалом будет понятие, то после создания модели к нему вводится термин. Школьники так же учатся узнавать объект по термину и тем особенностям, которые выделили при изучении модели. Тем самым показывается содержание понятия. В случае аксиом ученики создают модель, истинность которую приходится принять. При изучении теорем сначала моделируется ее условие, следом выдвигается гипотеза, формулируется заключении и показывается модель теоремы. Следом составляется и записывается в символах обратное утверждение, проверяется его истинность с помощью построения графической модели к его условию. Решая задачи, учитель поступает аналогично как с теоремой. Отличие состоит только в том, что модель к условию задачи содержит данные, тогда требования можно записать в символах рядом. Иногда искомое можно пометить на чертеже, тогда чертеж будет представлять модель к задаче. При повторении уже изученного материала школьники сначала воспроизводят соответствующую модель, а только затем ее формулировку.

Изучение геометрических построений учащиеся занимаются по мере ознакомления с соответствующими геометрическими образами. Сначала осваиваются элементарные построения. На основе этих построений учащиеся учатся решать элементарные задачи.

Рекомендуется вводить основные построения как можно раньше. Построение угла рваного данному предлагается изучить после темы признаков равенства треугольников, но без подробного анализа этого построения.

Построение перпендикуляра проходящего через данную точку к данной прямой, можно начинать изучать после темы: «сравнительная длина перпендикуляра и наклонных». Ученикам предлагается выполнить данное построение с помощью циркуля и линейки. Часто у учеников возникают трудности с поставленной задачей, не смотря на то, что представления о соответствующих геометрических образах у них есть. Учитель, сделав чертеж-задание на доске, спрашивает у класса, какие элементы из задачи даны и что требуется доказать.

Ученики на данном этапе еще не знают способа построения и чтобы его найти необходимо, представить, что задача уже решена и искомый перпендикуляр построен. Это изображается на доске на отдельном чертеже (рисунок 17, под пунктом а). Далее учитель задает вопрос классу: через сколько известных нам точек проходит искомый перпендикуляр? Возможно ли построить эту прямую, если известна одна точка с этой прямой?

Поступим аналогично, представим себе, что точка D уже найдена. На чертеже-наброске отмечает эту точку D. Если найти эту точку D, то искомый перпендикуляр CD будет построен. Возникает вопрос, как найти точку D?

Так как опыта у учащихся еще нет в решении подобных задач, то учитель проводит рассуждения таким образом, что ученики пробуют изобразить отрезок AD, соединяющую произвольную точку A прямой MN – с точкой D (рисунок 17, чертеж набросок дополняется до пункта б).

Теперь AD – наклонная, построенная к MN через точку D. Можно ли изобразить равную ей наклонную по другую сторону перпендикуляра? Как это можно сделать?

Изобразим DB, так что AC = CB (рисунок 17, чертёж под пунктом в). Точки A и B построить не сложно, но как найти точку D? Заметим, что точка D равноудалена от точек A и B. Теперь точку D можно построить с помощью циркуля. Следом ученики формулируют план построения, после этого на чертеже-заданий выполняются построения, причем еще раз повторяются основные элементы анализа.

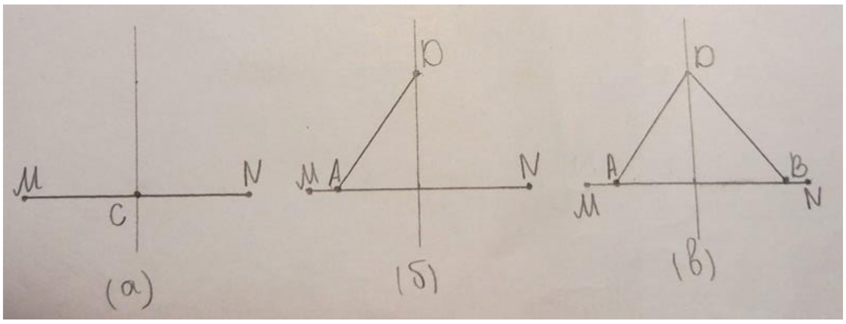


Рисунок 17 – Построение на доске

После построение ученики проводят доказательство и отвечают на вопросы: всегда ли задача имеет решение? Сколько решений имеет задача и почему?

Рассмотрения второго случая построения перпендикуляра к прямой проходящую через данную точку и не принадлежащего данной прямой рассматривается аналогично.

Построение перпендикуляра к отрезку через его середину рассматривается в двух случаях:

1. Известна середина отрезка. Этот вариант ученики рассматривают самостоятельно по аналогии с предыдущем построением;

2. Середина отрезка не известна. Построение проводится в классе.

Построение отрезка равного данному учащиеся выполняют самостоятельно, так как оно совпадает с предыдущем построением.

Следующие построение, которое изучают учащееся – это деление данного угла пополам. Данное построение рекомендуется рассмотреть как следствие задачи об отыскании геометрических мест точек, равноудаленных от двух лучей, исходящих из одной точки.

Построение прямой проходящей через данную точку и параллельную данной прямой, выполняется на основе равенства накрест лежащих углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей.

Основные построения должны быть усвоены учениками, при этом требовать запоминания анализа и доказательства не следует. В дальнейшем план построения пишется только в том случае, если ученик затрудняется в построение уже изученного построения.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА КУРСА ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗДЕЛУ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1 Анализ УМК

Проведя анализ трёх различных учебно-методических комплексов (УМК), была составлена Таблица 2, наглядно показывающая преимущества и недостатки каждого из них.

Таблица 2 – Сравнение УМК

Темы разобранные в УМК	Типовые задания	УМК Атанасяна Л.С.	УМК Погорелова А.В	УМК Александрова А.Д.
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Элементарные задачи на построение.	1. Построение отрезка равного данному.	148,149, 150	–	–
	2. Построение угла равного данному.	151,152, 155,315	–	7.15
	3. Построение биссектрисы угла.	185	27	7.19, 7.20, 8.2
	4. Построение перпендикулярных прямых.	153	33	7.24, 7.25
	5. Построение середины отрезка.	–	29	11.3
	6. Построение прямой параллельной данной.	222, 284	–	14.1, 14.2, 14.4
	7. Построение серединного перпендикуляра.	–	–	11.9, 11.10
Построение треугольника по трем элементам.	1. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.	288, 289, 290, 291	23, 24, 25, 35	10.12, 10.13

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
	2. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.	–	–	–
	3. Построение треугольника по трем сторонам.	292	19, 20	5.7
	4. Построение треугольника по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне.	293	–	–
	5. Построение треугольника по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.	294	37, 38	–
	6. Построение треугольника по двум сторонам и медиане.	–	30, 32	–
	6. Построение треугольника по стороне, высоте и медиане.	316, 320	39	–
	7. Построение треугольника по углу, высоте и биссектрисе.	319	–	–
Решение задач методом ГМТ.	ГМТ.	284–295	41,42, 43, 44, 45	21.4, 21.7, 21.8
Построение правильных многоугольников.	1. Построение правильного шестиугольника, сторона которого равна данному отрезку.	1144	30	33.5
	2. Построить правильный 2n-угольник.	+	31	+

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*
Виды движений.	1. Задания на параллельный перенос.	1162, 1163, 1164, 1165	27	40.2, 40.3, 40.4
	2. Задания на осевую симметрию.	1158, 1159	13, 15	40.9, 40.10, 40.11, 40.16
	3. Задания на поворот фигуры.	1166, 1167, 1169, 1170, 1171	25, 26	40.17, 40.18, 40.19
	4. Задания на симметрию относительно точки.	1149, 1160, 1161	4, 6	40.15,
	5. Задание на подобие (гомотетию).	588, 589	–	42.2 , 42.3, 42.5, 42.7, 42.8, 42.9, 42.10, 42.29

По данной таблице мы видим, что УМК по геометрии Л.С. Атанасяна. 7-9 классы. Авторы: Л.С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. является наиболее широко освещающим тему конструктивной геометрии, по сравнению с другими рассматриваемыми УМК, учебник. В нем наиболее полно представлены задания для отработки практических навыков построение задач с использованием циркуля и линейки. В данном учебнике отсутствуют задачи на отработку построения серединного перпендикуляра и построение середины отрезка.

УМК по геометрия. Погорелова А.В. 7-9 класс, не рассматривает задач, на отработку навыка построение отрезка равного данного и построения угла равного данному. В данном учебнике отсутствуют элементарные построения параллельных прямых и серединного перпендикуляра. При изучении темы движения, в УМК гомотетия не рассматривается.

В УМК по геометрии: А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика включает в себя большое количество практических заданий на отработку навыка элементарных построений, но имеет недостаточный запас заданий для учащихся на построение треугольника по трем элементам. В тоже время в данном учебнике тема «Движение» имеет хорошо подобранную систему задач, включающая в себя типовые задачи к каждому параграфу.

Таким образом, проведя подробный анализ УМК, можно заметить, что все они показывают базовые задачи на построение, при этом совсем не затрагивая сложные упражнения. На основании этой таблицы возникла необходимость в разработке углубленного факультативного курса для учеников 9 класса.

2.2 Разработка факультатива

Курс геометрии в школе имеет меньшее количество часов по сравнению с курсом алгебры. А на задачи конструктивной геометрии отведено совсем немного времени, которого не достаточно для глубокого понимания задач решаемых с помощью циркуля и линейки. В курсе планиметрии учащиеся знакомятся с элементарными задачами при этом, не затрагивая более сложные нестандартные задачи, из-за нехватки времени. Поэтому появилась необходимость создать факультативный курс, на котором школьники научатся не только строить задачи циркулем и линейкой, но и изучат новые методы решения задач, разовьют логическое мышление, научаться анализировать задачи и строить логические цепочки.

Представленная рабочая программа факультативного курса составлена на основе Федерального образовательного стандарта по геометрии и реализует основные его идеи.

Методической особенностью данного курса является то, что задания для каждого урока предлагаются ученику, обуславливая характер его учебных действий. Задания факультативного курса выстраиваются таким образом, что сначала предлагается подготовительное задание, цель которого – подготовить ученика к той деятельности, которую он будет выполнять в основных заданиях. Программа факультативного курса на 17 учебных часов. Тематическое планирование представлено в Таблице 3.

Таблица 3 – Учебное планирование

№ п/п	Тема	Количество часов
1	Метод вспомогательного треугольника	3
2	Решение задач метод геометрических мест	2
3	Решение задач методом движения	3
4	Алгебраический метод решения задач	2
5	Знаменитые задачи древности	3
6	Задачи, решаемые одним циркулем	2
7	Задачи, решаемые одной линейкой	2

Цель курса: Углубленное изучение решения задач конструктивной геометрии.

Задачи:

1. Повторить изученный материал.
2. Активизировать познавательную деятельность школьников.
3. Рассмотреть различные виды нестандартных задач на построение.
4. Расширить у обучающихся знания об истории конструктивной геометрии.

Виды деятельности на занятиях: лекция учителя, беседа, практикум, консультация.

Методы:

1. Словесный.
2. Частично поисковый.
3. Исследовательский.
4. Наглядно-демонстрационный.
5. Проблемный.

*Урок 1. Метод вспомогательного треугольника***.**

На первом уроке факультативного курса школьники узнают новый для себя метод при решение задач на построение с помощью вспомогательного треугольника.

«К вспомогательным элементам треугольника чаще всего относятся: медианы, высоты, биссектрисы, периметр, радиусы описанной и вписанной окружностей. Иногда рассматривают также сумму (разность) двух сторон или двух углов. В большинстве случаев такие задачи решаются методом вспомогательного треугольника. Суть данного метода – свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решённой задаче на построение треугольника» [5, с.7].

Пример 1.

«Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведенной к ней высоте» [5, с.7].

Решение: пусть искомый треугольник построен (рисунок18).

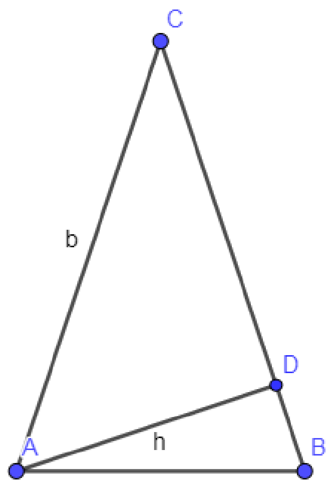


Рисунок 18 – Построение задачи

Изучив чертеж, построения задачи, заметим появившийся прямоугольный $\triangle$ ACD, в котором нам известны катет и гипотенуза. Таким образом, построив вспомогательный прямоугольный $\triangle$ ACD можно решить данную задачу. Для того чтобы получить искомый $\triangle$ ACB необходимо продолжить катет CD так, чтобы длина отрезка BC была равна b. Задача решена.

Рассмотрим следующую задачу.

Пример 2.

«Постройте треугольник по двум его углам и периметру» [5, с.8].

Решение: пусть $\triangle$ BEC с заданным периметром и углами построен.

Тогда, на прямой BC отложим отрезок CD, равный EE, и отрезок AB равный BE, то есть «повернем» наш искомый $\triangle$ BEC. Соединим с точкой E, полученные точки A и D (рисунок 19).

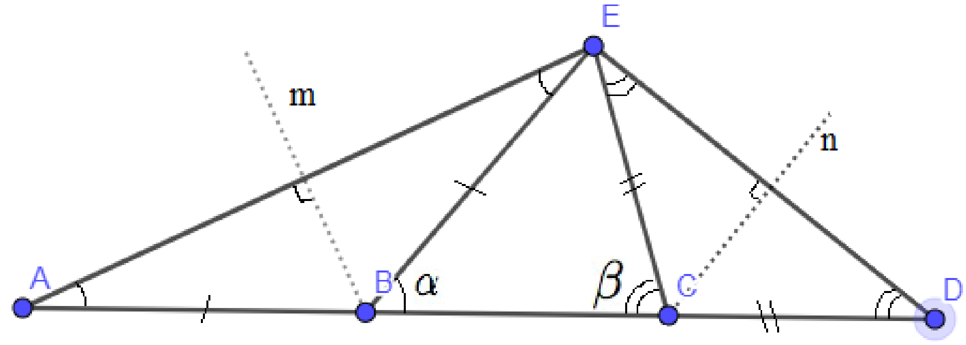


Рисунок 19 – Построение задачи

Треугольник $\triangle$ BEA – равнобедренный т.к. $EB = BA$ по построению. $\angle EBC$– внешний угол для треугольника $\triangle$ BEA, следовательно $\angle EAB =$
$= \angle AEB = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\angle EDA = \angle DEC = \frac{\beta}{2}$. Таким образом, задача свелась к построению вспомогательного треугольника $\triangle$ AED по стороне AD=P и двум прилежащим к ней углам $\angle EAD = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle EDA = \frac{\beta}{2}$. Далее проведем серединные перпендикуляры m и n к отрезкам AE и ED и получим вершины A и B.

Специфика данной задачи состоит в том, что изначально не был построен вспомогательный треугольник. Мы сами его создали при помощи специальных построений.

Задачи для самостоятельного решения:

1. «Объясните, как построить углы, имеющие величину: а) 45°; 6) 60°; в) 30°.

2. Объясните, как построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведённой к боковой стороне.

3. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:

а) стороне и проведённым к ней медиане и высоте;

б) двум углам и высоте (рассмотрите два случая);

в) двум сторонам и медиане (рассмотрите два случая);

г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон» [5, с.10].

Урок 2. Решение задач методом геометрических мест.

Занятие начинается с того, что учитель актуализирует знания у учащихся по данной теме. Спрашивает у школьников суть метода ГМТ, проговаривает основные ГМТ на плоскости.

Пример 1.

«Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проведенной к ней высоте» [5, с.15].

Решение: пусть искомый треугольник построен (рисунок – 20).

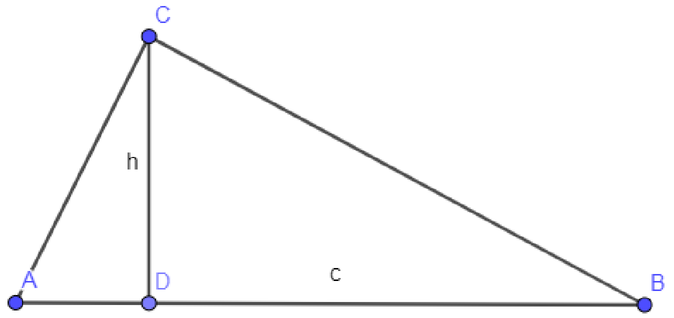


Рисунок 20 – Построение задачи

По условию задачи известно, что $\angle ACB = 90°$, а расстояние от точки C до прямой AB равно h. Мы можем свести задачу к построению отрезка AB длинной c, а затем, построив уже известные учащимся ГМТ 8 и ГМТ 4 найти их пересечение, чем будет являться вершина C. Таким образом, мы построили искомый треугольник $\triangle$ ABC.

Пример 2.

«Постройте окружность, касающийся данной прямой m и касающуюся данной окружности в данной точке А внешним образом» [5, с.16].

Решение: пусть окружность и ее центр С – построены. По условию задачи даны прямая, назовем ее m и окружность с центром обозначим как Е, на которой отмечена точка А. Таким образом, чтобы построить искомую окружность необходимо найти ее центр С. Точки Е, А, С принадлежат одной прямой, так как окружности будут касаться в одной точке А (рисунок 21).

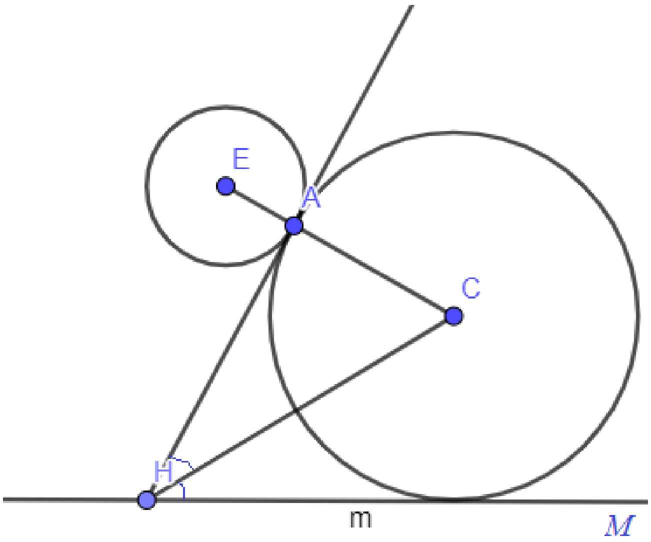


Рисунок 21 – Построение задачи

Если через точку А провести общую касательную АН к этим окружностям, то отрезок НС будет являться биссектрисой угла ∠ АНМ.

Таким образом, задачу можно свести к построению отрезка ЕА, касательной НА к данной окружности и биссектрисы НС ∠ АНМ. Точка пересечения луча ЕА и биссектрисы есть искомый центр окружности С.

Второй способ решения этой задачи учащимся предлагается решить самостоятельно.

Задачи для самостоятельного решения:

«1. Объясните, как построить следующие ГМТ:

а) удалённых от данной прямой на заданное расстояние;

б) из которых данный отрезок виден под заданным углом (рассмотрите три случая: заданный угол – прямой, острый и тупой).

2. Объясните, как построить касательную к окружности, проходящую через заданную точку (рассмотрите два случая).

3. Объясните, как построить треугольник по стороне, проведённой к ней медиане и радиусу описанной окружности» [5, с.17].

Урок 3. Решение задач методом движения.

Сегодня на занятии мы рассмотрим, как при помощи движения можно решать различные задачи на построение. Прежде чем приступить к задачам, необходимо вспомнить, что такое движение. Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между элементами, участвующих в рассматриваемом действии, в частности, между точками. Какие виды движения мы уже знаем?

1. Центральная симметрия.
2. Осевая симметрия.
3. Параллельный перенос.
4. Поворот.
5. Гомотетия.

Отметим так же, что композиция движений так же будет являться движением. В задачах связанных с «восстановлением» фигуры, при условии, что другие их точки принадлежат другим заданным фигурам, следует использовать – движение.

Основная трудность при решении задач методом движения состоит в том, что бы выбрать правильное движение. В случаях, когда необходимо решить задачу с помощью отрезка заданной длины, параллельного заданной прямой, то есть требуется построить вектор, то часто выручает параллельный перенос. Такие задачи появляются, при изучении параллелограмма или трапеции.

Если искомая фигура центрально–симметричная, то для решения такой задачи следует использовать метод центральной симметрии. Если у фигуры есть ось симметрии, то следует воспользоваться методом симметрии относительно прямой для ее построения. Это часто можно увидеть при построении окружности при заданном диаметре, угла при заданной биссектрисе, отрезке при заданном серединном перпендикуляре, равнобедренном треугольник, ромб и др.

Если условие задачи можно условно поделить на две части, одна из которых определяет форму фигуры с точностью до подобия, а другая – размеры фигуры, то такая задача может быть решена методом гомотетии (метод подобия).

Пример 1.

«Постройте квадрат, три вершины которого принадлежат трем заданным параллельным прямым» [5, с.47].

Решение: пусть a,b,c – параллельные прямые. Предположим, что искомый квадрат ABCD, с вершинами на параллельных прямых построен. Тогда при $R_C^{90°}$, образом точки D будет точка A. Следовательно точка A лежит на прямой a_1 – образе прямой a, при указанном повороте. Кроме этого, точка $A \in c$, следовательно, $c \cap a_1$ (рисунок 22).

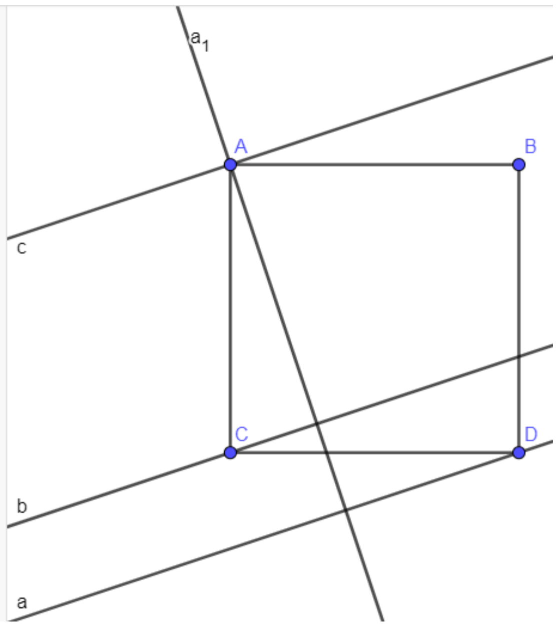


Рисунок 22 – Построение задачи

Задача сводится к выбору произвольной точки С на прямой b и построению прямой a_1, которая является образом прямой а при $R_C^{90°}$. Пересечения прямых с и a_1 будет точка С. Дальнейшее построение очевидно.

Пример 2. (Параллельный перенос).

Постройте отрезок заданной длины а, параллельной данной прямой с, концы которого лежат на данной прямой m и на данной окружности с центром О. Данные прямые m и окружность не пересекаются.

Пример 3. (Осевая симметрия)

Постройте треугольник по серединам двух его сторон и прямой содержащий биссектрису, проведенной к третьей стороне.

Пример 4. (Центральная симметрия)

Постройте отрезок с серединой в точке А и концами на двух заданных фигурах F_1 и F_2.

Пример 5. (Гомотетия)

Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе проведенной из вершины меньшего из данных углов.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Метод центральной симметрии. На стороне угла АОВ, вершина которого недоступна, дана точка М. Постройте отрезок, равный отрезку ОМ.

2. Метод параллельного переноса. Построить трапецию по ее сторонам.

3. Метод поворот. Постройте равносторонний треугольник с вершинами на сторонах данного равностороннего треугольника.

4. Метод гомотетии. Вписать в данный треугольник квадрат, чтобы его две вершины лежали на основании треугольника, а другие вершины – на боковых сторонах.

Урок 4. Алгебраический метод решения задач.

Существует ряд задач, в которых трудно найти решение. В тоже время, в таких задачах бывает несложно записать алгебраическое соотношение, выражающее неизвестные элементы предлагаемой конструкции через заданные. Научившись выражать алгебраические формулы в виде построений циркулем и линейкой, можно без проблем решить задачи такого типа.

Для объяснения данного метода необходимо обратится к теореме Фалеса, на базе которой будем делить заданные отрезки на n равных частей, где $n \in N$.

Пример 1.

Постройте прямоугольный треугольник, если даны проекции его катетов на гипотенузу.

Решение: пусть треугольник ΔECD – искомый, тогда EF – высота, опущенная на гипотенузу. $CF = a_c$, $FD = b_c$ – проекции катетов на гипотенузу. Решение задачи похоже на построение треугольника по гипотенузе и проведенной к ней высоте. Построим гипотенузу CD искомого ΔECD и точку F на ней, последовательно отложив на одном луче заданные отрезки.

Тогда вершина E будет являться пересечением перпендикуляра к отрезку CD в точке F. И окружности диаметра CD (рисунок 23).

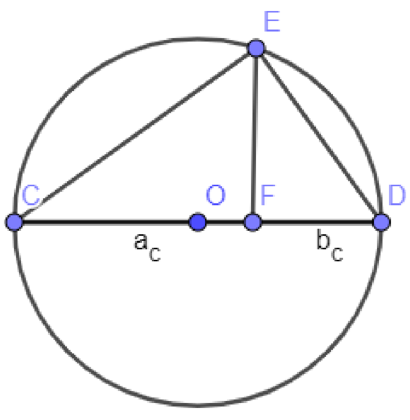


Рисунок 23 – Построение задачи

Обратим внимание на то, что высота CD является среднем геометрическим проекций катетов на гипотенузу, то есть $CD = \sqrt{a_c b_c}$ (это следует из рассмотрения тангенсов острых углов C и D в прямоугольном треугольнике $\triangle$ CEF и $\triangle$ DEF соответственно или из подобия этих же треугольников). Беря во внимание, что $a\sqrt{m} = \sqrt{a^2 m} = \sqrt{(ma)a},$ то можно свести к построению отрезка $a\sqrt{m}$ к построению высоты прямоугольного треугольника, у которого проекция катетов на гипотенузу равна ma и a!

Такое построение возможно не только для произвольного натурального числа m, но и для произвольного рационального числа.

На данном этапе можем построить острые углы, у которых любая тригонометрическая функция выражается числом вида $\frac{p\sqrt{m}}{q\sqrt{n}}$, где p, q, n, m – натуральные числа (с ограничением для синуса и косинуса $0 < \frac{p\sqrt{m}}{q\sqrt{n}} < 1$). Для этого нужно построить прямоугольный треугольник со сторонами $p\sqrt{m}$a и $q\sqrt{n}$a, где a – отрезок, имеющий любую фиксированную длину. Справедливо следующее утверждение, что если дан тангенс угла, то треугольник можно построить по катетам, а если задан синус или косинус угла, то он строится по гипотенузе и катету.

Таким образом, используя метрические соотношения можно решать задачи на построение некоторых углов, которые геометрическим методами решить довольно сложно.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Постройте угол величиной 36°.
2. Постройте правильный пятиугольник со стороной a.
3. Постройте угол синус, которого равен $\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt{6}}$.

Урок 5. Знаменитые задачи древности.

Сегодня на занятие мы познакомимся с тремя самыми известными, древними задачами на построение. Из истории геометрии известно, что в школе Платона при решении задач на построение разрешено было использовать только циркуль и линейку. Данное требование повлекло за собой появление «невозможных задач». Задач, которые нельзя решить, используя данные инструменты.

Эти задачи следующие:

1. Задача об удвоение куба.
2. Задача о трисекции угла.
3. Задача о квадратуре куба.

Происхождение первой задачи связано с желанием древних математиков обобщить решаемую задачу об удвоение квадрата, т.е. квадрата, в двое большего по площади, чем данный квадрат. Древние греки нашли решение этой проблемы. Для этого нужно использовать линейку и циркуль, чтобы построить квадратный корень из двух. Это можно сделать, если обозначить сторону квадрата за а, а сторона искомого квадрата х, то по условию задачи получим $x^2 = 2a^2$, откуда $x = a\sqrt{2}$. Для того чтобы построить $\sqrt{2}$, необходимо построить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами равными единице. Остается лишь увеличить отрезок $\sqrt{2}$ в a раз и получим сторону искомого квадрата. Подводя итог к задаче об удвоения квадрата, греки аналогично пытались решить задачу об удвоение куба. Похожим образом эту задачу можно свести к построению кубического корня из двух. Однако, появилась новая проблема, построить $\sqrt[3]{2}$ у них не получилось и лишь в половине 19 века ученые смогли доказать, что используя лишь циркуль и линейку данный отрезок построить нельзя.

Данную задачу решали при помощи вспомогательных средств такие математики как:

1. Гиппократ Хиосский с помощью «вставок»

2. Архит Тарентский с помощью пересечения нескольких поверхностей вращения

3. Платон, используя лемму о прямоугольной трапеции с перпендикулярными диагоналями, отрезки которых образуют геометрическую прогрессию.

4. Менехм при помощи канонических сечений.

5. Эратосфен при помощи сконструированного им прибора «мезолябия» и др.

Вторая знаменитая геометрическая задача о трисекции угла. Появилась она в древней Греции, из-за необходимости разделить круг на любое конечное число равных частей. Древнегреческие зодчие могли легко построить многоугольник с равными сторонами. Такие дуги можно было получить путем деления определенных центральных углов пополам несколько раз. Однако возникала необходимость получения этих самых дуг путем деления угла на три равные части и тогда возникла новая трудность перед геометрами, ставшая впоследствии одной из труднейших задач древности под названием «задача о трисекции угла»

Важно отметить, что древние греки смогли решить задачу о трисекции угла, но исключительно для отдельных частных случаев, так как поделить угол на три части с помощью циркуля и линейки до сих пор является невозможным.

Данную задачу решали при помощи вспомогательных средств такие математики как:

1. Гиппий при помощи открытой им квадратрисы;

2. Паппа Александрийский при помощи конхоиды Никомеда;

3. Решение Архимеда при помощи циркуля и линейки с двумя отметками и другие.

Следующая задача является самой старой и самой популярной из всех математических задач – это задача о квадратуре круга. Доказательство о неразрешимости данной задачи принадлежит немецкому математику Ф. Линдеману, который в 1882 году доказал, что данную задачу невозможно решить с помощью циркуля и линейки. Неразрешимость эта следует из трансцендентности числа π.

Данную задачу решали при помощи вспомогательных средств такие математики как:

1. Динострат при помощи квадратрисы.
2. Антифон при помощи квадрирования круга.
3. Архимед посвятил трактат «Измерение круга» и др.

Задание на дом: написать эссе об ученном, который нашел решение неразрешимой задачи при помощи вспомогательных средств.

Урок 6. Задачи, решаемые одним циркулем.

На данном уроке ученики знакомятся с итальянцем Лоренцо Маскерони, который доказал в своем стихотворном произведение «Геометрия циркуля», что любые построения, которые можно выполнить циркулем и линейкой, можно сделать только циркулем. Но следует отметить, что без линейки невозможно провести прямую линию, поэтому учащимся заранее сообщается, что прямая будет задана, если построены ее две точки.

Однако следует обсудить заранее с учащимися, что без линейки нельзя провести прямую через две точки, поэтому будем считать, что прямая задана, если заданы две ее точки.

Пример 1.

С помощью циркуля, поделите данный отрезок пополам, то есть постройте для данных точек А и В такую точку С, что точки А, В, С лежат на одной прямой и АС = ВС.

Решение: рассмотрим четырехугольник AMDN, в котором $AM = AN = AB,\ MD = DN = AD,\ AB = BD$. Данную задачу можно свести к построению ромба AMCN, где $AC = CB$ (рисунок 24).

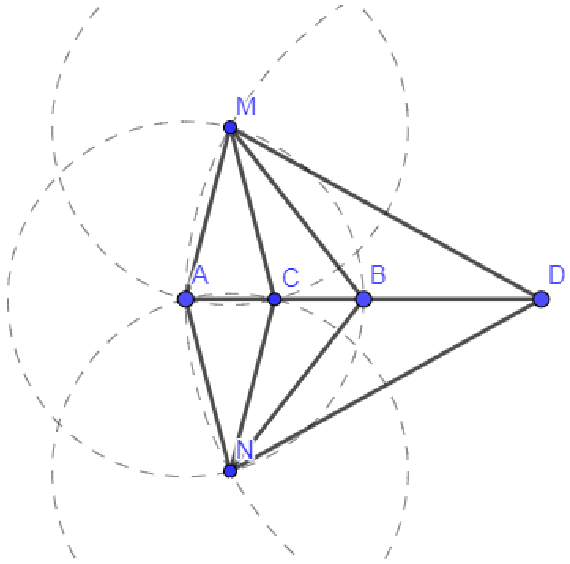


Рисунок 24 – Построение задачи

Построим отрезок AB и точку, D для которой выполняется равенство $AD = 2AB$, при этом точки A, B, D лежат на одной прямой. Затем строим две окружности с центром в точке A радиусом AB и центром в точке D радиуса DA. Точки пересечения окружностей обозначим как M и N. С центрами в точках M и N строим окружности радиуса MA и NA. Точка пересечения отличная от A, есть искомая точка C – середина данного отрезка.

Задачи для самостоятельного решения.

Решите задачи с использованием одного только циркуля.

1. Провести окружность, если заданы ее центр и радиус.
2. Найти точки пересечения двух окружностей.
3. Найти точку пересечения прямой и окружности.
4. Найти точку пересечения двух прямых.

Урок 7. Задачи, решаемые одной линейкой.

На рассматриваемом уроке учащиеся научатся, как используя одну линейку, можно применять полученные знания и умения для решения заданий, принадлежащих области геометрии, имеющей название «конструктивная». Необходимо непременно принять во внимание, что при работе над решением задачи, где требуется задействовать в качестве инструмента для реализации процесса лишь линейку, предоставляется возможность выполнять только проективно-инвариантные построения. В 1833 году немецкий математик Якоб Штейнер выдвинул доказательство этого утверждения, в котором доказал, что любую задачу, которую можно решить с помощью циркуля и линейки, можно решить при помощи одной только линейки, при условии, что на плоскости построена окружность и ее центр.

Пример 1.

Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. С помощью линейки разделите отрезок на две равные части.

Решение: пусть AB – отрезок, который необходимо поделить, применим замечательное свойство трапеции (рисунок 25).

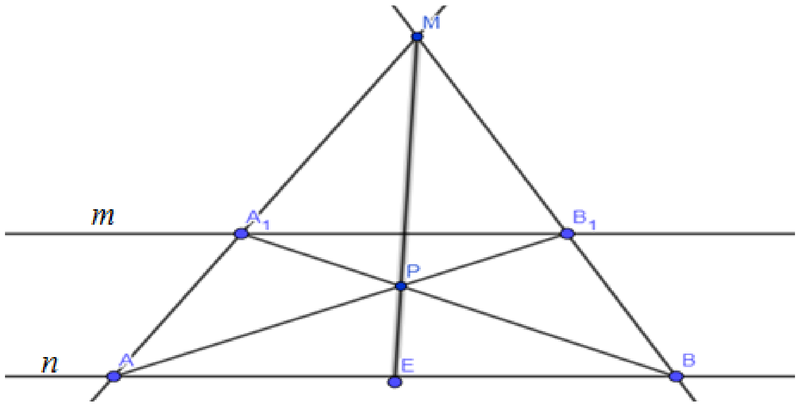


Рисунок 25 – Построение задачи

Пусть точка M и прямая n лежат по разные стороны от прямой m. Проведем отрезок AM и BM, точки пересечения отрезков с прямой обозначим A_1и B_1 соответственно. Точка P является точкой пересечения диагоналей в трапеции ABB_1A_1. Через точки P и M проведем отрезок до пересечения с прямой n. Точку пересечения обозначим E. Точка E – искомая.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. С помощью одной линейки разделите этот отрезок на три равные части.

2. Даны две различные параллельные прямые. Пользуясь одной линейкой, разделить данный угол пополам.

3. Даны окружность с центром O и ее хорда AB. Пользуясь одной линейкой, разделить отрезок AB пополам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построение с использованием циркуля и линейки является важным и в тоже время интересным разделом геометрии для учащихся. Геометрические построения играют важную роль в математической подготовке школьников, так как такой тип задач не допускает стандартного подхода. Важно так же отметить, что школьникам необходимо уделять больше времени изучая задачи на построение. При правильном использовании они будут являться хорошим средством развития логического и пространственного развития учащихся, что в свою очередь является основной целью математического образования в рамках ФГОС.

В тоже время задачи конструктивной геометрии необходимо рассматривать параллельно основному курсу изучению геометрии. Решение подобных задач неразрывно связаны с процессом обучения, поэтому регулярно решая задачи такого типа, учащиеся смогут лучше усвоить базовый курс геометрии. Таким образом, процесс передачи знаний, отрабатывания навыков по изученной теме, закрепление и использование их не только в урочной деятельности, но и в повседневной жизни позволят обучающимся развить необходимые в школьном планировании умения, что, в свою очередь, поспособствует становлению их, как личности. А выше указанные параллели, проведенные между разделами курса предмета «Геометрия», будут являться необходимым ключом к формированию не только предметных знаний, но и геометрических умений по выполнению поставленных задач как на самом предмете, так и в других областях.

В ходе данного исследования были проанализированы понятия, которые лежали в основе геометрических задач на построения, проанализированы основные методы решения таких задач, рассмотрена методика преподавания элементарных задач. Подобраны задачи на различные темы, рассмотрены разнообразные методы их решений и на основе этих знаний был разработан факультатив. Задачи исследования были выполнены, гипотеза получила свое подтверждение, цель работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Александров, А.Д**. Геометрия : учебное пособие для 9 классов с углубленным изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва : Просвещение, 2003. – 272 с.

2. **Алексеева, Е. Е.** Использование задач на построение для достижения результатов обучения геометрии, соответствующих ФГОС / Е. Е. Алексеева // Конференциум АСОУ : сборник научных трудов и материалов научно–практических конференций. – 2017. – № 1. – С. 1003–1015.

3. **Аргунов, Б. И**. Геометрические построения на плоскости : учебное пособие для студентов педагогических вузов / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – Москва : Учпедгиз, 1957. – 268 с.

4. **Атанасян, Л.С.** Геометрия. 7–9 классы : учебное для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. – Москва : Просвещение, 2014. – 383 с.

5. **Блинков, А. Д**. Геометрических задачи на построение / А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков. – Изд. 2–е, стереот. – Москва : МЦНМО, 2012. – 152

6. **Васильков, В. И**. Пособие по решению задач на построение из школьных учебников Александрова, Атанасяна и Погорелова методом геометрических преобразований / В.И. Васильков, А. В. Потапов. – Челябинск : ЧГПУ, 2007. – 105с.

7. **Винтиш, Т. Ю**. Геометрические построения на плоскости / Т. Ю. Винтиш, Г. И. Прокопенко. — Челябинск : ЧГПУ «Факел», 1996. – 52 с.

8. **Дурникина, Н. И**. Построения одной линейкой / Н. И. Дурникина, Р. С. Тренбач // Поиск (Волгоград). – 2018. – № 1(8). – С. 12–16

9. **Егорова, К.В**. Сравнительный анализ тем «геометрическое построение линейкой и циркулем» в различных школьных учебниках /

Егорова К.В., Казаров Б.А. // Актуальные проблемы экономики, социологии и права. – 2019. – № 4. – С. 30–33.

10. **Егупова, М.В**. Организация проектной деятельности по математике в школе: проблемы и трудности в работе учителя / М.В. Егупова // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. – 2016. –№ 1(17). – С. 226–235.

11. **Жафяров, А. Ж.** Движение и подобие плоскости: учебно–дидактический комплекс / А. Ж. Жафяров, А. В. Абрамов, А. В. Дмитриева, Л. В. Полюдова [и др.]. – Новосибирск : НГПУ. – 2001. – 257 с.

12. **Жижилкин, И.** Д. Инверсия / И. Д. Жижилкин. – Москва : МЦНМО , 2009. – 72 с.

13. **Изтурганова, Д. Б**. Методика изучения и решения задач на построение геометрических фигур / Д. Б. Изтурганова, Ж. Байшемиров // Kazakhstan Science Journal. – 2019. – Т. 2. – № 10(11). – С. 26–36.

14. **Исаева, М. А.** О некоторых аспектах решения задач на построение циркулем и линейкой / М. А. Исаева // Психолого–педагогический взгляд на профессионально–ориентированное образование : Сборник статей по итогам Международной научно–практической конференции: в 2 частях. – 2017. – С. 146–148.

15. **Канин, Е. С.** Задачи на построение ограниченным набором классических инструментов / Е. С. Канин // Математический вестник педвузов и университетов Волго–Вятского региона. – 2011. – № 13. – С. 338–343.

16. **Карпова, А. В.** Применение инверсии в задачах на построение одним циркулем / А. В. Карпова, Т. Н. Куренева, Т. С. Трошкина // Физико–математическое образование: школа-ВУЗ Материалы VI Региональной научно–практической конференции. – 2016. – С. 31–34.

17. **Малинина, И. С**. Нестандартные задачи на уроках геометрии и способы их решения / И. С. Малинина // Наука и школа. – 2013. – С. 108–110.

18. **Малых, А. Е.** Из истории конструктивной геометрии и её приложений / А. Е. Малых, Е. М. Маленьких // Математический вестник педвузов и университетов Волго–Вятского региона. – 2016. – № 18. – С. 38–43.

19. **Малых, А. Е**. Из истории линейки, циркуля и транспортира / Е. Малых, Е. В. Безенкова // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 1(36). – С. 47–54.

20. **Малых, А. Е**. Из истории формирования приближенных методов построения правильных многоугольников классическими средствами / А. Е Малых, М. И. Глухова // Современные тенденции физико–математического образования: школа-ВУЗ. – 2015. – С. 46–51.

21. **Мерзляк, А. Г**. Геометрия: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва : Вентана–Граф, 2015. – 192 с.

22. **Мерзляк, А. Г**. Геометрия: учебник для 8 класса общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Харьков : Гимназия, 2016. – 224 с.

23. **Мерзляк, А. Г**. Геометрия: учебник для 9 классов общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Харьков : Гимназия, 2017. – 240 с.

24. **Нестерова, Н. В**. Методика обучения решению задач методами геометрических преобразований плоскости / Н. В. Нестерова, Н. Н. Дербеденева // Теория и практика современной науки. – 2016. – № 8(14). – С. 412–416.

25. **Островская, А. А** Построения циркулем и линейкой / А. А. Островская, А. С. Цыкина, Р. В. Михайлов // Аллея науки. – 2020. – Т. 2. – № 1(40). – С. 55–62.

26. **Погорелов, А. В**. Геометрия: учебник для 7-11 классов. общеобразовательных учреждений / А. В. Погорелов. – 5–е изд. – Москва : Просвещение, 1995. – 383 с.

27. **Сенников, Г. П**. Методика обучения решению задач на построение в VI–VIII классах: автореферат диссертаций на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – Москва : Горький, 1953. – 306 с.

28. **Техтиеков, В. И**. Способы нахождения образов фигур при преобразовании плоскости гомотетии / В. И. Техтиеков, Р. Р. Назармухамедов // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2019. – № 11(19). – С. 230–233.

29. **Холявина, С. В.** Применение метода инверсии в геометрии циркуля / С. В. Холявина // Альманах современной науки и образования. – 2011. – № 3. – С. 92–95.

30. **Черепанов, К. П**. Исследование в задачах на построение циркулем и линейкой / К. П. Черепанов // Юный ученый. – 2020. – № 3 (33). – С. 46–51.

31. **Шевкин, А. В**. Вокруг задач Наполеона / А. Шевкин // Математика. Методический журнал для учителей математики. – 2017. – № 2(780). – С. 29–31.