МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Технологический подход к обучению старшеклассников теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.04.01 Педагогическое образование

Направленность программы магистратуры
«Физико-математическое образование»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
79,89 % авторского текста
Работа рекомендована к защите

«13» мая 2021 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-213-152-2-1
Серюкова Анастасия Сергеевна

Научный руководитель:
доктор пед. наук, профессор
Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск

2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ 10

1.1 Анализ состояния проблемы обучения старшеклассников вопросам перпендикулярности прямых и плоскостей в научной литературе и практике обучения в школе 10

1.2 Особенности технологического подхода в процессе обучения стереометрии 18

1.3 Теоретические основы технологий развивающего и проблемного обучения, технологии эффективных уроков А.А.Окунева 26

2 ОБУЧЕНИЕ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА 37

2.1 Выявление и конкретизация целей обучения перпендикулярности в пространстве в соответствии с ФГОС СОО 37

2.2 Реализация обучения старшеклассников перпендикулярности в пространстве на основе технологий проблемного и развивающего обучения и технологии эффективных уроков А.А.Окунева 47

2.3 Организация и анализ результатов педагогического эксперимента 97

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 106

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 109

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач современного образования является формирование всесторонне развитой и творчески мыслящей личности, способной к непрерывному самообучению и саморазвитию. В связи с этим основными тенденциями развития современной системы образования является её гуманитаризация и направленность на развитие обучаемого. Этому в лучшей степени может способствовать правильная организация математической подготовки обучаемых, поскольку математические знания и умения универсальны в плане изучения всего нового и прогрессивного во всех областях знания [24].

Понятие перпендикулярности в пространстве имеет общекультурное, мировоззренческое значение. Оно знакомит учащихся с основными идеями анализа взаимного расположения пространственных фигур, с процессом доказательства стереометрических утверждений в задачах на рассмотрение перпендикулярности пространственных фигур, с различными связями двумерных и трехмерных геометрических объектов, с их описаниями и изображениями.

Изучение перпендикулярности в пространстве способствует развитию логического мышления, алгоритмической культуры, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики.

Использование свойств планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними лежит в основе метода решения геометрических задач. Особенно всё это актуально при решении геометрических задач на вычисление объемов и площадей поверхностей трехмерных фигур, которые относятся к разряду наиболее сложных в вариантах заданий ЕГЭ.

Наиболее полное изучение перпендикулярности в пространстве учащиеся могут осуществлять после изучения такого раздела школьного курса математики, как «Параллельность прямых и плоскостей» в старших классах. При этом сложность полного усвоения данной темы на этом этапе обучения заключается в том, что к этому времени учащиеся должны хорошо владеть такими темами школьного курса математики, как «Параллельность прямых, прямой и плоскости», «Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми», «Параллельность плоскостей», «Тетраэдр», «Параллелепипед» и т. д [4].

Необходимо учесть, что разнообразные способы и методы решаемых геометрических задач по указанным темам не должны быть разрозненными, с целью получения полного и правильного представления о пространственной фигуре, наглядным подтверждением которому будет являться её чертеж. Причём именно построение чертежа при решении геометрической задачи тяжелее всего дается школьникам.

В целях проверки сформированности у учащихся умений решать стереометрические задачи проводился констатирующий эксперимент. Из представленных учащимися решений было видно, что они затрудняются провести содержательный анализ задачи. 54% учеников не знают теорему о трех перпендикулярах, 81% не умеют определять двугранный угол, и ни один ученик не смог применить признак перпендикулярности прямой и плоскости и признак перпендикулярности двух плоскостей. Анализ результатов контрольной работы позволил сделать вывод о необходимости проведения специального целенаправленного обучения.

Актуальность вопросов обучения учащихся перпендикулярности в пространстве обусловлена ещё и тем, что в процессе этого обучения учащиеся соприкасаются с элементами исследовательской деятельности, позволяющей формировать и развивать у них такие универсальные исследовательские умения, как:

– формулирование гипотезы,

– абстрагирование, сравнение, сопоставление, обобщение,

– составление умозаключений и аргументация на основе анализа, синтеза, индукции, дедукции.

Данные умения помогут будущим выпускникам школ самостоятельно ставить и решать возникающие перед ними в дальнейшем профессионально-творческие задачи.

Таким образом, вопросы обучения старшеклассников перпендикулярности в пространстве и построения соответствующих чертежей очень важны и актуальны, как минимум, для успешной сдачи школьниками ЕГЭ, а как максимум, для формирования и развития личности будущего выпускника школы, готового творчески подходить к решению возникающих проблем.

С другой стороны, эти вопросы недостаточно глубоко проработаны в методическом плане. Многие школьные учебники и учебно-методические пособия по математике недостаточно мотивируют изучение этой темы, дают поверхностное представление о перпендикулярности плоскостей в пространстве, иллюстрируя его конкретными частными примерами.

Множество авторов предлагали различные способы решения проблемы обучения школьников перпендикулярности в пространстве. Одним из способов является технологический подход. Его использование повышает результативность обучения учащихся различных профилей применению различных методов решения стереометрических задач. Очень важно применить понятие «технология» к процессу обучения. Именно элементы технологий направлены на формирование и развитие творческих способностей учащихся, познавательной активности, креативности, умения работать с информацией, повышению самооценки, а главное, повышается динамика качества обучения. Особенность федеральных государственных образовательных стандартов общего образования – их деятельностный характер, который ставит главной задачей развитие личности ученика [14].

Большое количество авторов предлагают применять в процессе обучения именно технологии развивающего и проблемного обучения и технологию эффективных уроков А.А.Окунева, так как они учитывают как возрастные и индивидуальные особенности учащихся, так и особенности изучаемой темы.

Технология развивающего обучения поможет развивать такие процедуры, как логическое мышление, память, познавательный интерес, поможет расширить представления учащихся об окружающем мире, поспособствует поддержанию интереса к изучаемому предмету, сможет посодействовать развитию вычислительных навыков и навыка самостоятельной работы учащихся посредством вовлечения их в исследовательскую деятельность в процессе решения стереометрических задач [12].

Технология проблемного обучения постоянно ставит обучаемого в ситуацию задачи, решение которой непременно требует работы мышления. С ее помощью в процессе обучения данной темы учащихся можно подвести к противоречию с уже известным фактом и предложить им самим найти способ разрешения. Возможно использование задач с заведомо допущенными ошибками. В процессе решения стереометрических задач учащиеся отыскивают различные способы решения одной и той же задачи. Технология проблемного обучения побуждает делать сравнения, обобщения, выводы. Она может создавать ситуации включения, используя задания, связанные с жизненным опытом учащихся [5].

Технология эффективных уроков А.А.Окунева преследует такие цели и задачи, как создание и поддержание высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной умственной активности учащихся, повышение их успеваемости и обеспечение успеха в обучении на основе выработки у них навыков самообразования с учётом экономного и целесообразного расходования времени урока.

Технология эффективных уроков А.А.Окунева решает задачи создания и поддержки высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной умственной активности обучающихся, экономного и рационального расходования времени урока, использования разнообразных методов и средств обучения, поддержки высокого положительного уровня межличностных отношений преподавателя и учащегося. В процессе таких уроков учащиеся самостоятельно осуществляют решение разнообразных упражнений, в которых они воспроизводят выполнение арифметических действий, сравнивают друг с другом разнообразные объекты, а также очень много решают и считают устно. Применение технологии А.А.Окунева на уроке стереометрии помогает помещать учеников в режим поиска, вызывает в них интерес и большую заинтересованность в решении появившейся проблемы, а значит, ученики стараются с максимальной скоростью и точностью выполнять все задания. Благодаря этому все ученики следят за уроком, получают новые знания по теме перпендикулярности прямых и плоскостей, при этом сами того не замечая. Используется занимательный материал для активизации мышления учащихся в разных направлениях: по отработке какого-то конкретного навыка или умения, т.е. на уроках закрепления или обобщения или же на разных этапах урока [15].

Итак, опираясь на вышесказанное, можно утверждать, что выбранная нами тема исследования «Технологический подход к обучению старшеклассников перпендикулярности в пространстве» очень актуальна. Предлагаемая тема позволяет выдвинуть следующую цель исследования: изучить возможность применения к теме «Перпендикулярность в пространстве» технологического подхода и разработать технологию обучения старшеклассников теме «Перпендикулярность в пространстве».

Объект исследования: применение технологического подхода в процессе обучения старшеклассников теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей».

Предмет исследования: процесс обучения учащихся старшей школы теме «Перпендикулярность в пространстве» на основе технологического подхода.

Гипотеза исследования: обучение старшеклассников вопросам темы «Перпендикулярность в пространстве» будет эффективным, если разработать содержательное наполнение технологий развивающего и проблемного обучения и технологии эффективных уроков А.А.Окунева в применении к теме перпендикулярности в пространстве и реализовать его в процессе обучения школьников.

Исходя из цели и гипотезы исследования, были поставлены следующие *задачи*:

1. Изучить состояние проблемы обучения старшеклассников перпендикулярности в пространстве в научной и учебно-методической литературе по данной теме.
2. Рассмотреть особенности технологического подхода в процессе обучения стереометрии.
3. Выделить теоретические основы технологий развивающего и проблемного обучения, технологии эффективных уроков Окунева;
4. Разработать технологические цепочки для обучения старшеклассников перпендикулярности прямых и плоскостей.
5. Провести педагогический эксперимент, проанализировать и оценить его эффективность.

Для достижения цели и выполнения поставленных задач были применены следующие *методы исследования*: анализ психологопедагогической, математической и учебно-методической литературы, наблюдение, моделирование.

Новизна исследования заключается в разработке технологических цепочек обучения старшеклассников вопросам темы.

Практическая значимость исследования состоит в разработке технологии обучения старшеклассников вопросам данной темы на основе эффективного сочетания технологий проблемного, развивающего обучения и эффективных уроков.

Диссертация «Технологический подход к обучению старшеклассников теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1.1 Анализ состояния проблемы обучения старшеклассников вопросам перпендикулярности прямых и плоскостей в научной литературе и практике обучения в школе

Перпендикулярность прямых и плоскостей считается одним из главных разделов в стереометрии, которая считается максимально сложной для изучения частью геометрии. К ней присоединяются не только теоретические основы (на них основана планиметрия), но и большой блок пространственных отношений между телами в трехмерной системе координат.

Достаточно полное и развернутое освоение стереометрии обучающимися совершается в 10-11 классах. Старшеклассники повторяют известные им ранее понятия и сталкиваются с большим количеством новых: параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, пространственная система координат, векторы в пространстве, проходят трехмерные тела (многогранники, сферы, призмы, пирамиды) и изучают нахождение площади их поверхности и построения сечения плоскостью. Ранее из данного материала, который относится к стереометрии, школьники встречались только с прямоугольными параллелепипедами в основной школе. На данный момент во многих школах нет предмета «Черчение», на котором у учеников был шанс обрести максимально полное представление об объемных телах и научиться изображать их н листе. В связи с возникшим разрывом в освоении стереометрии как целого только у достаточно сильных обучающихся не появляются проблемы в процессе работы с объемными телами.

Огромный вклад в ослабление школьного курса стереометрии, как и геометрии в целом, добавило ЕГЭ. После его внедрения стереометрические задачи стали правильно решаться малым количеством старшеклассников. Раздел стереометрии занимает небольшую часть заданий ЕГЭ, в связи с этим в процессе подготовки старшеклассников педагоги уделяют больше всего внимания алгебре, так как этого обычно хватает для получения приемлемого результата.

При изучении учебной и научной литературы и различных источников интернета мы выяснили, что проблемы обучения старшеклассников перпендикулярности прямых и плоскостей всегда были и до сих пор есть. Данная тема недостаточно глубоко проработана в методическом плане. Большая часть школьных учебников и учебно-методических пособий по математике никак не мотивируют изучение данной темы, дают поверхностное представление о перпендикулярности прямых и плоскостей, демонстрируют только частные примеры.

В.Г. Бевз [11] отмечал очень низкий уровень геометрических знаний и умений, которые показывают старшеклассники в планиметрии, и особенно в стереометрии. Именно поэтому считается актуальной методическая проблема обеспечения несомненного приобретения всеми учениками владения разнообразными методами и приемами решения стереометрических задач, а также создания условий для получения максимально высоких результатов каждым желающим учеником. Решению данной проблемы в пределах изучения раздела стереометрии в средней школе поспособствует предопределенная модернизация методических основ конструирования системы стереометрических упражнений в школьном учебнике.

Определенные аспекты использования упражнений при изучении стереометрии проанализированы в диссертационных исследованиях по методике обучения математики С.В. Петрова, Л.М. Лоповка, А. Халикова, в учебных пособиях Д.С.Атанасяна, К.С. Барыбина, З.Д. Скопеца, А.Д. Александрова, Г.Н. Яковлева, А.В. Погорелова и др.

Но существующие системы упражнений практически не рассчитаны на организацию эффективного обучения, в них мало предусмотрены упражнения, которые определяют обязательный уровень усвоения стереометрии.

Таким образом, не ставится цель обучения учеников сознательной деятельности при изучении перпендикулярности прямых и плоскостей, построению их чертежей. Это связанно с тем, что учебники практически не содержат заданий, которые обеспечивают формирование данного вида деятельности и приёмов ее усвоения.

Проведя анализ научной литературы, мы выяснили, что проблеме подбора стереометрических задач и обучения их решению посвящены работы таких экспертов в области методики обучения математике, как Я.Е. Гольдберг, А.К. Артемов, А. Халиков, А.Б. Василевский, Н.Н. Пономарева, В.Г. Бевз, В.И. Рыжик, Г.Л. Глейзер, В.А. Далингер, Г.Д. Зайцева, С.Г. Корнфельд, В.В. Орлов, Л.В. Рыжкова, А.И. Фетисов.

Я.Е. Гольдберг писал: «Значение чертежа при изучении геометрии очень велико, в частности при решении задач с взаимосвязанными между собой элементами фигуры, в том числе с дополнительными построениями» [11].

Решение любой стереометрической задачи начинается с создания верного чертежа, так как без него практически невозможно изучить условие задачи, сделать ее анализ и в дальнейшем решить.

Стереометрические задачи обладают своими характеристическими особенностями, обуславливающие большое количество трудностей при их решении.

В процессе решения стереометрической задачи, ученики обычно используют не пространственную модель, а плоское изображение фигуры (в параллельной проекции). В связи с этим А.Е. Гольдберг выделяет две возникающие трудности:

1. Необходимо обладать навыком правильного изображения фигуры (учитывая свойства данной фигуры и параллельной проекции).

2. Необходимо обладать навыком правильного представления пространственной модели фигуры по ее условному изображению.

А.Е. Гольдберг считает, что лучше всего начать относиться к чертежу критически. В процессе изображения фигуры в стереометрии, большая часть учеников допускают множество условностей. Из-за этого чертеж практически всегда имеет неполное соответствие условию задачи. В связи с этим нужно обращать внимание учеников на немаловажное указание академика А.В. Погорелова: «При доказательстве теорем разрешается пользоваться чертежом как геометрической записью того, что мы выражаем словами. Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и теоремы, доказанные ранее» [20].

В процессе преподавания изображение геометрической фигуры считается ключевым, но вовсе не главным, а только дополнительным этапом решения задачи. Именно поэтому необходимо предоставлять данному этапу как можно меньше времени, но при этом, не навредив правильности и наглядности изображения фигуры. Прийти к этому возможно, сформировав у учеников точные навыки построения чертежа от руки, без инструментов, предназначенных для черчения (кроме шаблона эллипса и циркуля в процессе изображения тел вращения).

Но, кроме плохо развитых пространственных представлений учеников, есть еще одна проблема в процессе изучения стереометрии – это то, что нет ни одного алгоритма, так как большая часть стереометрических задач и даже теорем должна решаться или доказываться как абсолютно новая. Самая распространенная ошибка учеников – желание выучить, не нарисовав, не вообразив того, о чем идет речь. У них отсутствует желание вникнуть в то, как наглядное представление конкретно выражается при формулировании определения, теоремы или задачи [25]. Изучение абсолютно любого объекта начинается с его определения. Но это происходит не всегда так. Процесс изучения правильной пирамиды обычно начинают с её разглядывания, описания. После этого определяются ее свойства – из её наглядного образа. Большая часть ее свойств являются характерными (характеристическими) для данной пирамиды. Одно из них берется за основу и составляется модель её определения. Такой подход необходим для того, чтобы показать ученикам «Как формируется система математических знаний?».

Опыт обучения в старшей школе и мнение самих учащихся показывают, что для привлечения их к активной учебной деятельности, в том числе к самостоятельному освоению материала, учащимся недостает приемов решения задач, основанных на малом, но содержательном и доступном понятийном аппарате, применение которого позволит обучающимся самостоятельно включиться в изучение предмета и приобрести готовность к самостоятельному поиску решений этих задач иными приемами, требующими развитых пространственных представлений и применения теорем планиметрии.

Исходя из вышесказанного, можно выделить противоречие между существующей потребностью вовлечения школьников в самостоятельную познавательную деятельность при обучении математике, с одной стороны, и, с другой стороны, отсутствием в методике преподавания стереометрии приемов решения задач, формирующих готовность большей части учащихся универсального профиля к изучению стереометрического материала более сложного содержания, базирующегося на пространственных представлениях и планиметрических фактах.

К сожалению, изучение опыта работы школ говорит о том, что многие учащиеся, имея формальные знания по геометрии, испытывают значительные затруднения при решении геометрических задач. Они в подавляющем большинстве не владеют методами, приемами исследования геометрического чертежа, не умеют анализировать условие данной задачи и соотносить с чертежом, не способны сформулировать гипотезу решения, затрудняются в выборе эффективного способа решения задачи, не делают выводов по решению, хотя психофизиологические особенности их возраста свидетельствуют об их способности к осуществлению всех мыслительных операций, актуализируемых в процессе исследования и преобразования задачного чертежа [21].

В целях проверки сформированности у учащихся умений решать стереометрические задачи проводился констатирующий эксперимент. Он проводился в течение 2020 года в дистанционном формате среди учеников 10 класса МОУ СОШ № 2 города Верхнеуральска. Класс был один и состоял из 8 учеников. Эксперимент проводился в виде контрольной работы, которая состояла из трех заданий по теме перпендикулярности в пространстве. Полученные на данном этапе результаты позволили сделать вывод о низком уровне сформированности умений решать стереометрические задачи учащихся. Процесс проведения контрольной работы показал, что задачи привели учащихся в растерянность, а подсказки учителя не были восприняты ими.

По данным работы были найдены проценты выполнения умственных операций. В таблице указаны только те операции, которые относятся к перпендикулярности в пространстве (таблица 1).

Рассмотрим действия, которыми необходимо владеть, чтобы решить данные задачи. Цифрами обозначены номера операций, указанные в таблице, за которые отвечают данные действия.

1 задача. Применение теоремы о трех перпендикулярах (3 и 4).

2 Задача. Применение теоремы о трех перпендикулярах (1) и определения линейного угла двугранного угла (3).

3 Задача. Применение признака параллельности прямой и плоскости (2), свойства параллельных прямой и плоскости (3), определения линейного угла двугранного угла (4), свойства параллельных прямых (5), признака перпендикулярности прямой и плоскости (4).

Таблица 1 – Количество выполненных операций

	Ученик	Количество выполненных операций		
		Задача 1 № операции\ выполнение	Задача 2 № операции\ выполнение	Задача 3 № операции\ выполнение
	Ученик 1	3. Не выполнено 4. Не выполнено	1. Выполнено 3. Ошибка	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 2	3. Ошибка 4. Ошибка	1. Выполнено 3. Выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 3	3. Выполнено 4. Выполнено	1. Не выполнено 3. Не выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 4	3. Ошибка 4. Ошибка	1. Не выполнено 3. Не выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 5	3. Выполнено 4. Выполнено	1. Выполнено 3. Выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 6	3. Выполнено 4. Выполнено	1. Не выполнено 3. Не выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 7	3. Ошибка 4. Ошибка	1. Выполнено 3. Не выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 8	3. Не выполнено 4. Не выполнено	1. Выполнено 3. Выполнено	2. Не выполнено 3. Не выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено

Процент учеников, не знающих:

1. Теорему о трех перпендикулярах: 5 учеников из 8 (62,5%) не справились в задаче № 1. И 3 ученика не справились в задаче № 2. По количеству операций процент выполнения 11/24= 46%.
2. Способа определения двугранного угла: 5 учеников из 8 (62,5%) не справились в задаче № 2. И никто не справился в 3 задаче. По количеству операций процент выполнения 3/16= 19%.
3. Признак параллельности прямой и плоскости. Ни один ученик не справился.
4. Свойство параллельности прямой и плоскости. Ни один ученик не справился.
5. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Ни один ученик не справился.
6. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Ни один ученик не справился.

Из представленных решений видно, что учащиеся затрудняются провести содержательный анализ задачи, не видят перспективы использования рационального метода. Третья задача вызвала больше всего затруднений. Ни один ученик не смог предоставить ее подробное решение..

Срез дал нам понять, что не все умения полностью сформированы на данном этапе у школьников.

В момент наблюдения за обучением старшеклассников курсу стереометрии мы поняли, что большая часть учащихся в процессе решения сложнейших стереометрических задач остаются не заинтересованными. Учеников практически не учат использовать полученные знания в процессе решения стереометрических задач, производить анализ результатов своей работы, искать более рациональный способ решения, самостоятельно обдумывать и выделять возникающие проблемы в различных ситуациях.

В связи с этим нам необходимо такое обучение по данной теме, которое будет направлено на решение большого количества разнообразных стереометрических задач. Именно решение задач играет огромную роль при изучении математики. И не только потому, что необходимо выработать умение применять полученные знания на практике (а ведь это одна из основных целей изучения математики в школе). Без решения задач нельзя овладеть и теорией. Именно в процессе решения задач математические понятия, аксиомы и теоремы, формулы и правила, геометрические фигуры предстают перед нами в самых разнообразных ракурсах, не в застывшем виде, а в движении, в различных связях и взаимозависимостях, которые отображают диалектику самой деятельности [3].

Проведенный анализ обосновывает актуальность нашей темы исследования. Проблемы, возникающие у старшеклассников, в процессе решения стереометрических задач всегда были и есть до сих пор. Именно поэтому необходимо разработать такую технологию обучения, которая будет направлена на решение большого количества разнообразных стереометрических задач, и которая в дальнейшем поможет сократить самые распространенные ошибки, допускаемые учащимися в процессе их решения.

1.2 Особенности технологического подхода в процессе обучения стереометрии

Психолого-педагогические аспекты изучения абсолютно любой темы предполагает собой учет возможных трудностей, которые могут возникнуть в процессе изучения данной темы, и учет возрастных особенностей учащихся.

Индивидуальная форма усвоения материала и традиционная коллективная форма обучения особенно сильно вступают в разногласия именно в процессе обучения стереометрии. Для большей части учеников это обусловлено сложностью усвоения стереометрического материала. Индивидуализация обучения заключена в целенаправленном формировании, выявлении и развитии ожидаемых индивидуальных особенностей обучающегося в процессе обучения стереометрии. Успешное развитие данных направлений индивидуализации возможно только при использовании в обучении различных методов решения стереометрических задач в контексте технологического подхода.

Количество обучающихся, способных правильно воспринимать и обрабатывать учебную информацию, очень мало не только в обычном классе, но и в профильном математическом. В связи с этим в классе любого профиля процесс обучения стереометрии должен разрабатываться и реализовываться с учетом стиля познавательной деятельности каждого ученика и разнообразия стилевых проявлений старшеклассников. В целях повышения результативности обучения применению различных методов учащихся различных профилей нам представляется продуктивным использование технологического подхода, применение понятия «технология» к сфере образования, к педагогическим процессам [26]. Технология имеет следующие характеристики:

1. Гарантия итогового результата обучения (ее степень, которая зависит от соблюдения всех обязательных условий);
2. Диагностирование описания целей обучения;
3. Довольно полная алгоритмизированная последовательность учебных действий;
4. Воспроизводимость образовательного процесса и его результатов;
5. Определенность операций конструирования и организации любой формы обучения.

Главным аспектом технологии служит неделимость педагогической деятельности, подразумевающая определенное структурное обоснование. В структуру технологии входят три компонента:

1. Концептуальный — это основа педагогической технологии, ее изначальные установки, положения и методологическая база.

2. Содержательный — это содержание учебного материала и способы его изложения.

3. Процессуальный — это все методы и приемы образовательного процесса, определяемые учителем, исходя из требований конкретной стадии обучения [22].

Основной частью структуры служит концептуальный аспект, после освоения которого каждый педагог может внедрять педагогические технологии в процесс обучения, приспосабливая их к актуальным требованиям педагогической деятельности.

В настоящее время представлено множество классификаций образовательных технологий, которые отвечают различным условиям систематизации (рисунок 1.1):

Рисунок 1.1 – Систематизация технологий

Максимально общее, метапредметное толкование данного понятия заключается в том, что технология выражает научно или/и практически аргументированную систему деятельности, которую педагог применяет для изменения окружающих условий, разработки духовных или материальных ценностей.

Педагогическая (образовательная) технология — это система деятельности каждого элемента педагогического процесса, которая построена на научной основе. Она приводит к назначенным результатам, запрограммирована в пространстве и времени.

Достаточно полный обзор определений понятия "технологический подход" у различных авторов приведен ниже. Но в современной педагогике имеются некоторые разногласия в отношении этого понятия.

По мнению Т. Сакамото технологический подход – это «внедрение в педагогику системного способа мышления». А В.П. Беспалько предполагает, что технологический подход – это систематичное и последовательное воплощение на практике заранее спроектированного учебно-воспитательного процесса. В.М. Монахов считает, что технологический подход – «это продуманная во всех деталях модель совместной педагогической деятельности по проектированию, организации и проведению учебного процесса с безусловным обеспечением комфортных условий для учащихся и учителя». Б.Т. Лихачев утверждает, что технологический подход – «совокупность психолого-педагогических установок, определяющих специальный набор и компоновку форм, методов, способов, приёмов обучения, воспитательных средств; это есть организационно-методический инструментарий педагогического процесса». М.В. Кларин утверждал, что технологический подход – это «конструирование учебного процесса, отправляясь от заданных исходных установок (социальный заказ, образовательные ориентиры, цели и содержание обучения)».

Т.М. Ермоленко был уверен, что технологический подход – это «перевод педагогического замысла в технологическую цепочку педагогических действий, выстраиваемых строго в соответствии с целевыми установками, переводимыми в форму конкретного результата». Г.К. Селевко так же считал, что технологический подход – «точное инструментальное управление учебным процессом и достаточно гарантированное достижение поставленных учебных целей». По мнению В.В. Юдина «технологический подход – это взгляд на педагогический процесс через «призму» технологии и использование их для решения педагогических задач. А.И. Уман утверждает, что технологический подход – это изучение дидактических категорий в их взаимосвязи и взаимодействии, что создает условия для эффективного овладения учителем умениями конструирующего плана.

В связи с этим, образовательная (педагогическая) технология является содержательным обобщением, которое вбирает в себя смысл каждого выше перечисленного определения разных авторов.

Определение Т.Е. Ермоленко было взято нами за основное, так как он рассматривает технологический подход как «перевод педагогического замысла в технологическую цепочку педагогических действий, выстраиваемых строго в соответствии с целевыми установками, переводимыми в форму конкретного результата», что является наиболее подходящим для темы перпендикулярности в пространстве. Обучение старшеклассников решению различных стереометрических задач реализовывается как пошаговая инструкция, подводя разработку намеченной деятельности к точно описанным определенным действиям. Технология обучения перпендикулярности в пространстве может быть разработана с помощью выделения и систематизации последовательных шагов в процессе обучения.

Проектирование педагогических систем, процессов или ситуаций – трудная многоэтапная деятельность. Различают три этапа (ступени) проектирования:

1) моделирование,
2) проектирование,
3) конструирование.

Педагогическое моделирование (создание модели) – это создание целей (идеи), педагогических систем, процессов или ситуаций и различных способов успешного их достижения. Целью считают идею, суждение или утверждение, в соотношении с которыми после этого создаются педагогические системы, ситуации или процессы. Далее преподаватель в мыслях строит свой целевой идеал, а именно образец своей деятельности с обучающимися. Педагогическое моделирование дает возможность предугадать педагогический процесс.

Педагогическое проектирование (создание проекта) – последующее создание разработанной модели и доработка ее до уровня практического применения. На данной ступени происходит работа с разработанной моделью, которая дорабатывается до уровня применения для преобразования педагогической реальности. В основном всегда в педагогике модель составляется мысленно и исполняет функцию установки, так как проект превращается в механизм изменения учебно-воспитательного процесса.

Педагогическое конструирование (создание конструкта) - это последующая детализация сделанного проекта, подводящая его для применения в определенных условиях конкретными участниками воспитательных отношений. Конструирование максимально конкретизирует проект, детализирует его и подводит к реальным условиям деятельности [19].

Технологический подход к обучению предполагает несомненное инструментальное координирование процесса обучения и довольно гарантированное достижение установленных учебных целей. Данный подход предоставляет совершенно новые возможности для проектировочного и концептуального изучения разнообразных направлений и аспектов педагогической, образовательной, социальной действительности. Технологический подход позволяет:

1) с максимальной точностью предугадывать результаты и руководить педагогическими процессами;

2) исследовать и классифицировать на научной основе существующий практический опыт и его применение;

3) в комплексе принимать решение социально-воспитательных и образовательных проблем;

4) гарантировать для развития личности благоприятные условия;

5) сокращать эффект воздействия на ученика неблагоприятных условий;

6) оптимальное пользование находящихся в распоряжении ресурсов;

7) подбирать максимально результативные и создавать новые технологии и модели для искоренения появляющихся в процессе обучения социально-педагогических проблем.

Но технологический подход к образовательным и педагогическим процессам невозможно считать универсальным. Данный подход только восполняет научные подходы педагогики, социологии, психологии, политологии и других направлений науки и практики.

В процессе взаимодействия педагога и ученика осуществляется практически каждая технология. Педагог при помощи технических средств реализует в процессе обучения организующую, содержательную, регулирующую и контролирующую функции. Но большая часть сторонников данного подхода предполагают, что в представленной модели не важен высокий уровень квалификации педагога. Но, мы считаем, что это зависит не только от установленных дидактических целей, но и от целей, которые были установлены в процессе создания технологии.

В процессе разработки разнообразных технологических образовательных моделей всегда необходимо придерживаться следующих целей:

1) увеличение эффективности обучения;

2) послабление работы педагога, шанс понижения его квалификации, избавление его для творческой деятельности;

3) масштабное достижение некоторых, в назначенной степени гарантированных результатов;

4) предоставление воспроизводимости образовательных воздействий;

5) обеспечение и осуществление широких возможностей технических средств (компьютерных) в образовательном процессе;

6) дистанционное обучение (без педагога);

7) увеличение управляемости, адаптивности обучения.

В итоге проведенное нами исследование помогло нам сделать вывод о том, что стандартные технологические модели считаются репродуктивными. В них происходит редукция педагогических целей в процессе обучения, исключаются поисковые, креативные элементы обучения. Помимо этого, эти модели имеют определенное количество положительных свойств. К ним относятся гарантированность результативности, эффективности процесса обучения, воспроизводимость его результатов. Из этого вытекает следующий вопрос: возможно ли соединить данные преимущества с обширными возможностями исследовательской, поисковой модели обучения и как это можно реализовать? Что следует сделать для объединения этих моделей и возможно ли в целом такое объединение?

1.3 Теоретические основы технологий развивающего и проблемного обучения, технологии эффективных уроков А.А.Окунева

Технологический подход, то есть педагогические технологии гарантируют достижения обучающимися планируемых результатов обучения, а в дальнейшем гарантируют успешное обучение в школе.

В настоящее время актуально внедрение в работу инновационных технологий. Поэтому основная задача педагогов школьного учреждения – выбрать методы и формы организации работы с учащимися, инновационные педагогические технологии, которые оптимально соответствуют поставленной цели развития личности.

Современные педагогические технологии в школьном образовании направлены на реализацию государственных стандартов школьного образования.

Принципиально важной стороной в педагогической технологии является позиция учащегося в воспитательно-образовательном процессе, отношение к учащемуся со стороны взрослых.

Технология – это совокупность приемов, применяемых в каком-либо деле, мастерстве, искусстве (толковый словарь).

«Педагогическая технология – это совокупность психолого-педагогических установок, определяющих специальный набор и компоновку форм, методов, способов, приёмов обучения, воспитательных средств; она есть организационно-методический инструментарий педагогического процесса (Б.Т. Лихачёв)».

Основная цель технологии – это создание технологической цепочки, способствующей гармоничному развитию и саморазвитию детей с последующим ее формированием в соответствии требованиям ФГОС СОО.

Каждая образовательная технология имеет свои конкретно установленные задачи, которые «вытекают» из поставленной перед технологией цели.

К примеру, технология проблемного обучения подразумевает под собой следующие задачи:

– развитие мыслительных способностей;

– формирование умения и навыков самостоятельной деятельности;

– овладение творческими навыками [5].

Технология развивающего обучения имеет следующие задачи:

– формирование приёмов умственных действий (анализ, синтез, сравнение, обобщение, классификация, аналогия);

– формирование общеучебных умений и навыков (умения обдумывать и планировать свои действия, осуществлять решение в соответствии с заданными правилами, проверять результат своих действий и т.д.);

– развитие речи, умения аргументировать свои высказывания, строить простейшие умозаключения;

– развитие умений элементарного самоконтроля и саморегуляции своих действий, взаимоотношения с окружающими [7].

Технология на основе системы эффективных уроков (А. Окунев) решает задачи:

– создание и поддержание высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной умственной активности учащихся;

– экономное и целесообразное расходование времени урока; разнообразие методов и средств обучения;

– формирование и тренинг способов умственной деятельности учащихся;

– формирование и развитие самоуправляющих механизмов личности, способствующих обучению;

– высокий положительный уровень межличностных отношений учителя и учащихся;

– объем и прочность полученных знаний, умений и навыков [16].

Элементы каждой технологии направлены на формирование и развитие творческих способностей учащихся. В их основе лежит идея «деятельностного подхода», заключающаяся в том, что новые знания не даются в готовом виде. Учащиеся «открывают» их сами в процессе самостоятельной исследовательской деятельности. Задача учителя при объяснении нового материала заключается не в том, чтобы все наглядно и доступно объяснить, а в организации исследовательской работы учащихся, в ходе которой они смогли бы сами прийти к решению возникшей проблемы и объяснить, как надо действовать.

Чтобы создать свою технологию обучения, способствующую наилучшему усвоению перпендикулярности в пространстве, необходимо взять за основу несколько технологий и разработать их содержательное наполнение. Рассмотрим более подробно технологии проблемного и развивающего обучения и технологию А.А.Окунева.

Суть технологии проблемного обучения заключается в создании проблемной ситуации, которая является первым этапом мышления и источником самостоятельной поисковой деятельности. В тот момент, когда учащиеся не могут решить возникшую во время урока проблему с помощью известных им способов действия и знаний, у них возникает своего рода познавательная потребность, а следом и мотивация к изучению предмета (изучению нового). Потребность в новых знаниях появляется во время столкновения с какой-либо трудностью или невозможностью решить предложенное задание с использованием имеющихся знаний. Именно данная потребность является основным условием возникновения проблемной ситуации, а также движущей силой в процессе обучения.

Проблемное обучение способствует достижению очень важных целей:

- развитию творческого мышления учащихся;
- развитию способностей учащихся к самообучению;
- формированию и развитию навыков самостоятельной работы и исследовательской активности [10].

Другой подходящей технологией является технология развивающего обучения, которая представляет собой постоянное взаимодействие учителя и учащихся, основанное на коллективно-распределительной деятельности, а так же на поиске разных методов решения учебных задач с помощью организации учебного диалога в процессе поисково-исследовательской деятельности учащихся. Данная технология опирается на идеи развивающего обучения отечественных ученых Л.В. Занкова, В.В. Давыдова, Д.Б. Эльконина, З.И. Калмыкова, Е.Н. Кабановой, Г.А. Цукерман, И.С. Якиманской, Г.К. Селевко и других, предусматривающих разные аспекты развития учащихся и определённые мотивационные компоненты. Воздействие данной технологии пробуждает интерес, направляет и ускоряет развитие личности в процессе обучения. Обучение же в свою очередь должно быть организовано так, чтобы в его процессе за короткий срок достигались максимальные результаты [7].

Согласно технологии развивающего обучения учащийся является субъектом учебно-познавательной деятельности, достигающим в процессе обучения максимальных результатов.

Рассмотрим технологию, которая по нашему мнению, в большей степени способствует наилучшему усвоению перпендикулярности в пространстве, при этом содержит элементы двух уже описанных технологий, это – технология эффективных уроков, разработанная А.А. Окуневым [17]. Благодаря данной технологии старшеклассники учатся самостоятельно искать пути решения проблем, возникающих в процессе обучения перпендикулярности в пространстве, учатся находить творческие, может быть, даже неординарные решения тех или иных возникающих противоречий. На уроках геометрии с применением технологии эффективных уроков развивается устная речь, активизируется мыслительная деятельность, прививается заинтересованность к предмету.

Наилучшим образом такой симбиоз указанных выше технологий и подхода реализован в технологии эффективных уроков.

Данная технология преследует такие цели и задачи, как создание и поддержание высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной умственной активности учащихся, повышение их успеваемости и обеспечение успеха в обучении на основе выработки у них навыков самообразования с учётом экономного и целесообразного расходования времени урока.

Технологию А.А. Окунева можно применять на уроках любого типа, вне зависимости от предмета и возраста учащихся. Она помогает заинтересовать учащихся и вызвать у них желание изучать предмет, в том числе, за счёт расширения их кругозора, развития их любознательности, пытливости, природных способностей, импровизации учителя, которая делает каждый урок неповторимым и ярким.

Характерными чертами данной технологии, по мнению В.Е. Пыркова, являются:

– создание и поддержание высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной умственной активности учеников;

– высокий положительный уровень межличностных отношений учителя и учащихся;

– применение разнообразного арсенала методов и средств обучения;

– объем и прочность полученных учениками на уроке знаний, умений и навыков.

При этом задачами учителя, который успешно реализует эту технологию, являются:

– воспитать веру ученика в свои силы, научить его радоваться общению с педагогом, товарищами;

– чутко откликаться на мысли ученика;

– делать урок эмоционально ярким;

– создавать психологический комфорт для класса.

Главной характеристикой данной технологии являются организация эффективной работы педагога, нацеленной на усвоение учащимися стандартных знаний, умений и навыков и максимальное развитие способностей учащихся. Ее концептуальными положениями являются два постулата:

1. Движущей силой учебного процесса является противоречие между поставленными учителем перед учащимися задачами и имеющимися у них знаниями и умениями.

2. Принцип интереса, который предполагает наличие новизны, содержащейся в новом учебном материале, которая играет роль внешнего раздражителя, стимулируя действия учащихся по быстрой ориентировке и включению в познавательную деятельность [18].

Принцип интереса нацелен на проведение урока, вызывающего у учащихся какие-либо сомнения, озарения и интерес к новым открытиям. Его условиями являются:

– высокий уровень подачи теоретического материала при организации контроля и проверка его усвоения с учетом способностей учащихся;

– неразрывная взаимосвязь теории и практики посредством применения знаний в нестандартных ситуациях;

– применение принципа доступности: каждый учащийся в процессе обучения должен действовать в пределах собственных возможностей;

– применение принципа сознательности: любой учащийся в процессе обучения должен понимать и осознавать всю важность получения новых знаний;

– акцент и упор на понимание сути получаемых знаний, а не на запоминание нового материала;

– основой обучения является развитие мышления, преобладающего над памятью.

Создание вышеперечисленных условий – основная задача педагога, работающего по технологии А. А. Окунева.

Чтобы достичь во время урока максимального уровня развития познавательного интереса и умственной активности каждого учащегося, необходимо использовать различные методы и приемы. Такие методы, к примеру, как словесный, можно применять на всех этапах урока. Для большей эффективности, к словесному методу можно добавить метод проблемного изложения и метод наглядности.

В момент проведения урока у каждого учащегося должна быть возможность не только получать новые знания, но и расширять личный кругозор, тренировать свою память. Все это происходит за счет выполнения учащимися разнообразных видов самостоятельной работы, с компонентами взаимоконтроля между учащимися и с постепенным переходом к самоконтролю. Нельзя забывать, что при проведении урока учитель должен целенаправленно и экономно использовать время урока, продумывая заранее дозировку времени на проведение отдельных этапов урока.

Как уже отмечалось, урок должен строиться на высоком уровне межличностных отношений между учащимися и педагогом, которые возможны при соблюдении некоторых правил:

– учитель должен отмечать в учащихся положительные стороны;

– поддерживать учащихся в случае неудачи, помогать избегать ошибки.

Согласно А.А. Окуневу, одной из форм проведения занятий по изучению нового материала является «мастерская». Как считает В. Е. Пырков, мастерская состоит из ряда заданий, которые направляют работу учащихся в нужное русло, но внутри каждого задания учащиеся свободны. Главным признаком «мастерской» считается необходимость самостоятельного выбора учащимися пути их дальнейшего исследования по теме, каких-либо средств, способствующих достижению поставленных целей, нужной скорости работы и т.д. Для начала работы предлагается разделить учащихся на группы по четыре человека в каждой. К примеру, если урок связан с изучением прямоугольного параллелепипеда, то вначале учащимся можно предложить по чертежу данной фигуры назвать возможные варианты его определения. Затем учащиеся перечисляют условия его определения и обосновывают их, а именно как по ним можно отличить параллелепипед от других фигур. Педагог в свою очередь фиксирует все перечисленные условия на доске, а следом предлагает взять какие-либо из перечисленных условий и составить свое определение параллелепипеда. Сформулированные знания пополняются и неоднократно подправляются в процессе коллективного обсуждения группой учащихся.

Возможен и другой вариант урока, к примеру, при изучении двугранного угла в начале занятия можно попросить группы учащихся написать план изучения темы и перечислить все, что они хотели бы узнать об этом объекте. Затем педагог выслушивает все четверки учащихся и пишет общий план на доске, корректируя в ходе обсуждения последовательность изучения вопросов, после чего учащимся дается полная свобода в изучении темы. Учащиеся, работая в четверках, могут исследовать любые вопросы по данной теме на отдельном листе, пользуясь учебником. Затем каждой четверке дается отдельная часть доски, на которой они производят защиту результатов своих исследований.

Далее обычно следует урок решения задач. А. А. Окунев предлагает в качестве одной из организационных форм подобных уроков использовать урок-«бенефис». Суть его заключается в том, что педагог должен предложить двум ученикам (одному среднему и другому немного сильнее) одну и ту же задачу для самостоятельного решения, которую они решают дома и на следующий день перед уроком-«бенефисом» показывают свои решения педагогу. В центре внимания данного урока должен стоять более тихий учащийся, так как у таких учащихся хорошо развито чувство ответственности, у них есть большое желание оправдать надежды педагога, что в свою очередь хорошо помогает реализовать ему все свои мысли и идеи. Учащийся знает, что он должен показать всем интересное и правильное решение, которого можно добиться лишь после долгой тщательной исследовательской работы над решением данной задачи. Классу тоже формулируются условия данной задачи. Учащийся рассказывает свое решение, следом высказывается второй учащийся, который посильнее. После этого все остальные учащиеся по очереди предлагают свои решения, задают вопросы тихому учащемуся, комментируют или дополняют его решение, высказывают либо свое согласие с его решением, либо полностью его опровергают. В ходе урока идет бурное обсуждение возможного решения данной задачи. Данная форма занятия формирует у учащихся ответственность, обязывает их тщательно прорабатывать материал, позволяет высказаться каждому, помогает правильно формулировать свои мысли, что лучше всего способствует подготовке к предстоящей контрольной работе по данной теме.

Следует отметить, что каждый педагог должен осуществлять контроль объема и прочности знаний, получаемых учащимися во время обучения стандартным знаниям, умениям, навыкам, метапредметным и личностным результатам. Контроль знаний необходим учителю для понимания эффективности реализуемого им педагогического процесса. Он реализуется при помощи проведения разнообразных письменных и устных работ: контрольные, самостоятельные, итоговые проверки и т.д. Этот контроль необходим также и учащимся, для понимания достигнутых ими результатов. В данной технологии для контроля знаний после изучения новой темы предлагается провести заключительное занятие в виде зачета. А. А. Окунев считает, что данное занятие лучше всего проводить на сдвоенном уроке. Суть этого занятия заключается в том, что в начале урока перед зачетом учитель дает список вопросов по пройденной теме, по которому учащиеся опрашивают друг друга. Учащиеся должны не просто отвечать на вопросы, но аргументировать свои ответы. Затем после обсуждения вопросов педагог раздает каждому учащемуся билет с вопросами по данной теме, на который каждый ученик отвечает устно. Данная форма урока не только позволяет высказываться каждому учащемуся, но и помогает им правильно формулировать свои мысли. Затем пишется контрольная работа.

Рассмотрев технологию эффективных уроков, мы пришли к выводу, что она реализует выше перечисленные цели и задачи педагогической технологии. Она способствует формированию и развитию личностных качеств и способностей школьника в процессе обучения перпендикулярности в пространстве, и в первую очередь, самоуправляющих механизмов личности, готовя её к самообучению, обеспечивая высокую производительность и результативность обучения. Поэтому мы считаем целесообразным применить данную технологию в своей работе на уроках геометрии в старших классах.

2 ОБУЧЕНИЕ СТАРШЕКЛАССНИКОВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА

2.1 Выявление и конкретизация целей обучения перпендикулярности в пространстве в соответствии с ФГОС СОО

В настоящее время российские школы переходят на новый образовательный стандарт федерального государства. В чем разница между обучением по федеральному государственному образовательному стандарту ОО и стандартным обучением?

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования содержит требования, которые описывают:

1. Результаты освоения основной образовательной программы.
2. Структуру основной учебной программы, включая требования к соотношению частей основной учебной программы и их объема, а также взаимосвязь между обязательной частью основной учебной программы и частью, сформированной участниками процесса учебной программы.
3. Условия реализации основной образовательной программы, включая личные, финансовые, материально-технические и другие условия.

Федеральный государственный общеобразовательный стандарт общего образования предоставляет только общие рамки для решения проблем обучения учащихся, но четко определяет требования к результатам программы: личные, метапредметные и предметные.

Рассмотрим целевые задачи технологии А.А.Окунева и технологий развивающего и проблемного обучения и проверим их соответствие с ФГОС СОО (таблица 2).

Таблица 2 – Требования к результатам программы

Предметные	Метапредметные	Личностные
группировать навыки, приобретенные учениками	включать междисциплинарные	включать подготовку и способность учеников к

Продолжение таблицы 2

1	2	3
в процессе изучения предмета, специфичного для данного предмета, деятельности по получению новых знаний в рамках предмета	концепции и универсальные образовательные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные), которыми овладевают ученики, умение использовать их в учебной, познавательной и социальной практике	развитию и самоопределению, формирование их мотивации к обучению и целевую познавательную деятельность, систему важных социальных и межличностных отношений, смысловые установки ценностей

Целевая направленность технологии проблемного обучения:

1) приобретение знаний, навыков и умений;

2) овладеть приемами самостоятельной деятельности;

3) развитие познавательных и творческих способностей.

Целевая направленность технологии развивающего обучения в теории учебной деятельности:

1) обучить каждого ученика предмету, предмету своей жизни, т.е. человеку, готовому сделать осознанный выбор в жизни и ответственному за свой выбор;

2) обучить каждого учащегося, изучающего предмет, уметь самостоятельно определять задачи и находить оптимальные средства и способы их решения. Развивающее образование призвано создать условия для становления ребенка как субъекта учебной деятельности, для превращения школьника в человека, заинтересованного в самоизменении и способного.

Основные цели образовательной технологии А.А. Окунева:

1. Осуществление эффективной воспитательной работы, направленной на приобретение студентами стандартных знаний, навыков и компетенций.

2. Развитие навыков и умений учеников.

В соответствии с требованиями технологического подхода реализованы целевые ориентации темы перпендикулярности прямых и плоскостей с учетом требований ФГОС СОО и особенностей развивающих технологий обучения и проблемных и эффективных технологических уроков А.А. Окунева. Рассмотрим ожидаемые результаты исследования перпендикулярности прямых и плоскостей (таблица 3) [13]:

Таблица 3 – Планируемые результаты

Тема урока	Основные элементы содержания	Планируемые результаты
Перпендикулярность прямой и плоскости	Перпендикулярные прямые в пространстве. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости. Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости	***Предметные результаты:*** – развитие логического и критического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту; владение основными методами познания окружающего мира (наблюдение, сравнение, анализ, синтез, обобщение, моделирование); – понимание и принятие учебной задачи, поиск и нахождение способов ее решения; – проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса. ***Личностные результаты:*** – умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; – критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; – представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации. ***Метапредметные результаты:*** – формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности; – понимание и принятие учебной задачи, поиск и нахождение способов ее решения; – планирование, контроль и оценка учебных действий; определение наиболее эффективного способа достижения результата.

Продолжение таблицы 3

1	2	3
Перпендикуляр и наклонные	Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Теорема о трех перпендикулярах	***Предметные результаты:*** – соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур; – изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи; – исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур; – вычисления длин, площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства; – знать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности. ***Личностные результаты:*** – умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры; – критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта; – представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах ее развития, о ее значимости для развития цивилизации. ***Метапредметные результаты:*** – понимание и принятие учебной задачи, поиск и нахождение способов ее решения; – планирование, контроль и оценка учебных действий; определение наиболее эффективного способа достижения результата; – выполнение учебных действий в разных формах (практические работы, работа с моделями); – создание моделей изучаемых объектов с использованием знаково-символических средств; – понимание причины неуспешной учебной деятельности и способность конструктивно действовать в условиях неуспеха; – адекватное оценивание результатов своей деятельности; – активное использование математической речи для решения разнообразных коммуникативных задач; – готовность слушать собеседника, вести диалог.

Продолжение таблицы 3

1	2	3
Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	Двугранный угол	***Предметные результаты:*** – объяснять, что такое двугранный угол, линейный угол двугранного угла; – уметь находить линию пересечения плоскостей; – выполнять построение линейного угла; – уметь вычислять его величину. ***Метапредметные результаты:*** – Познавательные: умеют ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи; воспринимают устную речь, проводят информационно-смысловой анализ текста, ориентируются на разнообразие способов решения задач, осмысливают ошибки и устраняют их. – Регулятивные: понимают смысл поставленной задачи, различают способ и результат действия, оценивают свою деятельность и деятельность одноклассников. – Коммуникативные: выстраивают аргументацию, участвуют в диалоге, стремятся к координации различных позиций в сотрудничестве, работают в команде, приводят примеры. ***Личностные результаты:*** – выражают интерес к изучению предметного курса, проявляют готовность и способность к саморазвитию, имеют мотивацию к обучению и познанию.
	Признак перпендикулярности двух плоскостей	***Предметные результаты:*** – формирование умений использовать теоретический материал по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости» при решении задач; – сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире перпендикулярность прямых и плоскостей; – применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием. ***Метапредметные результаты:*** – Регулятивные: умение определять понятия, строить умозаключения и делать выводы. – Коммуникативные: развитие монологической и диалогической речи, участие в коллективном обсуждении проблем, умение интегрироваться в группу сверстников и умение строить с ними продуктивное взаимодействие.

Продолжение таблицы 3

1	2	3
		– Познавательные: умение распознавать перпендикулярность плоскостей из других видов взаимного расположения плоскостей, научиться использовать признак при решении задач. ***Личностные результаты***: – самопознание; – формирование целостного мировоззрения; креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач.
	Прямоугольный параллелепипед	***Предметные результаты:*** – усвоение систематических знаний о параллелепипеде, его составных частях и формуле площади поверхности; – умение применять систематические знания для решения геометрических и практических задач на вычисление площади поверхности прямоугольного параллелепипеда в стандартных и нестандартных ситуациях (открытый параллелепипед, недостающие данные); – умения использовать формулы для нахождения площадей геометрических фигур. ***Метапредметные результаты:*** – Регулятивные: умение планировать пути решения поставленной задачи (о площади поверхности прямоугольного параллелепипеда), определять эффективные способы решения; умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, планировать и осуществлять корректировку своих действий. – Коммуникативные: умения оформлять свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других; уметь работать в парах. – Познавательные: умение преобразовывать информацию от одного вида к другому (словесную в знаковую); умение определять понятия, строить логические рассуждения, делать выводы. ***Личностные результаты:*** – развитие любознательности и формирования интереса к изучению геометрических фигур; – развитие интеллектуальных способностей учащихся; – умение ясно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи; – инициатива, находчивость, активность при решении математических задач; – умение контролировать процесс и результат учебной деятельности.

Для достижения ожидаемого результата, требуемого федеральными образовательными стандартами, современный педагог должен учитывать ряд условий, чтобы организовать эффективное учебное пространство урока:

– постановка целей;
– мотивация;
– практическое значение знаний и методов действия;
– интеграция знаний, разработка универсальных образовательных метаобъектов (далее только УУД);
– подведение итогов каждого урока ученика, наличие обратной связи на каждом этапе урока;
– наличие блоков автономного получения знаний учениками в процессе учебной деятельности с различными источниками информации;
– использовать систему самоконтроля и взаимного контроля как средство рефлексии;
– рефлексия как самосознание в процессе деятельности;
– минимизация и вариативность домашних заданий;
– организация условий психического комфорта и охраны здоровья на занятиях.

С учетом всего этого можно составить примерную логическую схему учебного занятия в соответствии с ФГОС СОО.

Мотивационный этап: формирование потребности (интереса) учащихся к усвоению учебного материала. Показать важность материала для дальнейшего изучения этого и других учебных предметов.

Ориентационный этап: формулировка цели урока, разработка плана достижения цели; Этап реализации: реализация плана действий, разработанного на предыдущем этапе.

Контрольный этап: проверить правильность решения поставленной учебной задачи, оценить степень достижения поставленных целей.

Этап рефлексии: проанализировать способы решения учебной задачи, оценить их оптимальность [19].

Например, учителя МОУ СОШ №2 Верхнеуральского муниципального района предлагают следующую структуру уроков введения нового знания в рамках ФГОС СОО:

1. Мотивирование к учебной деятельности.

Эта фаза учебного процесса предполагает сознательное вхождение учащегося в пространство учебной деятельности. Для этого на данном этапе организована его мотивация к учебной деятельности, а именно:

– обновлены требования к образовательной деятельности («необходимо»);

– создаются условия для возникновения внутренней потребности включения в образовательную деятельность («хочу»);

– созданы тематические рамки («они могут»). В разработанном варианте – процессы адекватного самоопределения в учебной деятельности и самоопределения в ней, в том числе сопоставляющее свое настоящее «Я» ученика с образом «Я идеальный ученик».

2. Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии.

На этом этапе организуется подготовка и мотивация обучающихся к хорошей самостоятельной реализации экспериментального образовательного мероприятия, его реализации и решению индивидуальных трудностей.

Таким образом, этот шаг включает в себя:

– актуализация изученных приемов действий, достаточная для построения новых знаний, их обобщения и фиксации оценок;

– обновление мыслительных операций и соответствующих когнитивных процессов;

– мотивация пробного образовательного мероприятия («Я должен» - «Могу» - «Я хочу») и его автономная реализация;

– определение индивидуальных трудностей при выполнении экспериментального учебного действия или его обоснование.

3. Выявление места и причины затруднения.

На этом этапе учитель организует учащихся, чтобы определить местонахождение и причину проблемы. Для этого ученики должны:

– восстановить выполненные операции и исправить (словесно и символически) локальную фазу, операцию, на которой возникла проблема;

– сравните свои действия с используемым методом действия (алгоритм, концепция и т. д.).

4. Построение проекта выхода из затруднения (цель и тема, способ, план, средство).

На этом этапе учащиеся коммуникативно думают о проекте будущих образовательных мероприятий: ставят цель (цель – всегда устранить трудность), согласовывают тему урока, выбирают метод, строят план для достижения цели. Цель: определить ресурсы, алгоритмы, модели и т.д. Учитель руководит процессом: сначала через диалог, затем через методы исследования.

5. Реализация построенного проекта.

На этом этапе реализуется завершенный проект: обсуждаются различные варианты, которые предлагают учащиеся, и выбирается оптимальный вариант, который устно и символически фиксируется в языке. Созданный метод действия используется для решения исходной проблемы, вызвавшей проблему. Наконец, выясняется общий характер новых знаний и решается преодоление ранее выявленных трудностей.

6. Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.

На этом этапе учащиеся решают в форме общения (фронтальной, групповой, парной) типовые задачи на новый способ действий с произношением алгоритма решения вслух.

7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

На этом этапе используется форма индивидуальной работы: учащиеся самостоятельно выполняют задания нового типа и проводят пошаговое самообследование по сравнению со стандартным. В завершение происходит эффективное размышление о реализации созданного проекта образовательных мероприятий и контрольных процедур. Эмоциональная направленность стажировки заключается в организации, по возможности, успешной ситуации для каждого ученика и его мотивации для включения в последующую познавательную деятельность.

8. Включение в систему знаний и повторение.

На этом этапе определяются пределы применимости новых знаний и выполняются задачи, в которых в качестве промежуточного шага предоставляется новый способ действия. Организуя этот шаг, учитель выбирает задания, в которых он тренируется, используя ранее изученный материал, имеющий методологическое значение для внедрения новых методов действий в будущем. Таким образом, с одной стороны, происходит автоматизация мыслительных действий по изученным стандартам, а с другой - подготовка к внедрению новых стандартов в будущем.

9. Рефлексия учебной деятельности на уроке (итог).

На этом этапе фиксируется новое содержание, изучаемое на уроке, и организуются размышления и самооценка собственной учебной деятельности учащихся. В итоге его цель и результаты соотносятся, определяется степень их соответствия и определяются другие цели деятельности.

Уроки с использованием данных технологий соответствуют ФГОС СОО, потому что целевые ориентиры технологий совпадают с требованиями ФГОС СОО.

Таким образом, особенностями разработанной технологии обучения по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» в соответствии с ФГОС СОО являются следующие положения:

1. При изучении новых материалов используются следующие методические приемы: устная работа; индивидуальная, групповая и парная работа; формулировка учебного задания урока самими учащимися, определения и примеры предложений, знаков.

2. При тестировании и закреплении уроков используются следующие методические приемы: вводная работа над рисунком, моделью («работа с кубом»), работа с текстом задачи (анализ, поиск решений, решения, анализ результатов); показать примеры решения проблем.

3. На уроках используются следующие средства контроля: учебное пособие, учебные пособия, интерактивные доски, специальные задания.

2.2 Реализация обучения старшеклассников перпендикулярности в пространстве на основе технологий проблемного и развивающего обучения и технологии эффективных уроков А.А.Окунева

Создание технологической цепочки по данной теме необходимо для формирования у учащихся мотивации к обучению, саморазвитию, целенаправленной познавательной деятельности, а также умений самостоятельно применять полученные знания как в учебно-познавательном процессе, так в и реальной действительности, что, в свою очередь, будет способствовать достижению высоких результатов сдачи ЕГЭ.

Поэтому задачами данного параграфа являются:

1. Описание технологической цепочки процесса обучения учащихся данной теме на основе технологии эффективных уроков А.А. Окунева с элементами технологий развивающего и проблемного обучения.

2. Разработка технологических цепочек по обучению старшеклассников теме «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей» в условиях развивающей образовательной среды.

В соответствии с указанной выше структурой урока введения нового знания в рамках ФГОС СОО урок должен состоять из следующих этапов:

1. Мотивирование к учебной деятельности.
2. Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии.
3. Выявление места и причины затруднения.
4. Построение проекта выхода из затруднения (цель и тема, способ, план, средство).
5. Реализация построенного проекта.
6. Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.
7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.
8. Включение в систему знаний и повторение.

Рассмотрим подробно на примере данной темы каждый этап.

Исходя из анализа школьных учебников по геометрии 10 класса, мы пришли к выводу о том, что для проведения занятий по данной теме за основу лучше взять учебник Л.С. Атанасяна, который успешно можно дополнить заданиями из учебника А.Д. Александрова [1, 4].

В первом учебнике изучение темы начинается с введения понятия двугранного угла.

Технологическая цепочка изучения вопроса «Двугранный угол»

Методы обучения: Проблемно-поисковый.

Цель урока: изучить понятие двугранного угла, способ нахождения двугранного угла и научиться применять его при решении различных задач; умение обобщать, поскольку мы используем данные технологии, должна формироваться способность учащихся к самостоятельной деятельности.

Задачи урока и планируемые результаты (таблица 4):

Таблица 4 – Задачи и планируемые результаты

Задачи	Планируемые результаты
1. создать условия для формирования наглядного представления о двугранном угле; 2. познакомить с понятием линейного угла двугранного угла; 3. развивать навыки построения перпендикуляра к прямой в плоскости; 4. формировать конструктивный навык нахождения угла между плоскостями; 5. воспитывать умение самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать свою деятельность.	***Предметные результаты:*** – объяснять, что такое двугранный угол, линейный угол двугранного угла; – уметь находить линию пересечения плоскостей; – выполнять построение линейного угла; – уметь вычислять его величину. ***Метапредметные результаты:*** – Познавательные: умеют ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи; воспринимают устную речь, проводят информационно-смысловой анализ текста, ориентируются на разнообразие способов решения задач, осмысливают ошибки и устраняют их. – Регулятивные: понимают смысл поставленной задачи, различают способ и результат действия, оценивают свою деятельность и деятельность одноклассников. – Коммуникативные: выстраивают аргументацию, участвуют в диалоге, стремятся к координации различных позиций в сотрудничестве, работают в команде, приводят примеры. ***Личностные результаты:*** – выражают интерес к изучению предметного курса, проявляют готовность и способность к саморазвитию, имеют мотивацию к обучению и познанию.

1этап. Мотивирование к учебной деятельности.

Для постановки учебной задачи в данной теме необходимо создать проблемную ситуацию. С этой целью сначала учащимся были предложены несколько геометрических рисунков с изображением углов между разными объектами, и они должны назвать виды изображённых углов, их определения, связь между приведёнными видами углов (рисунок 2.1−2.3).

С помощью проектора на экране появились данные рисунки (без названий):

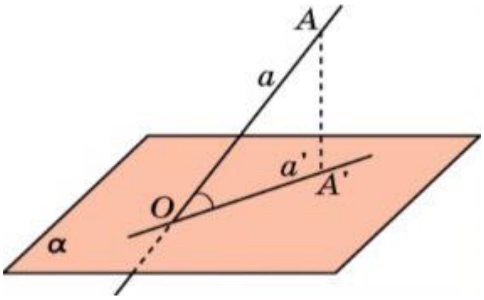

Рисунок 2.1 – Угол между прямой и плоскостью

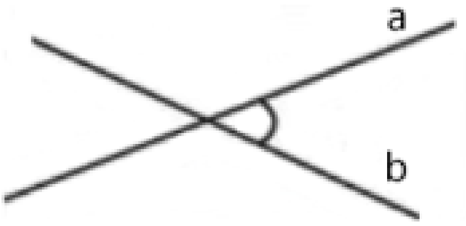

Рисунок 2.2 – Угол между пересекающимися прямыми

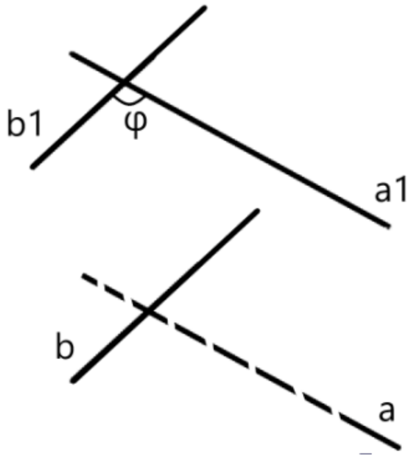

Рисунок 2.3 – Угол между скрещивающимися прямыми

Учащиеся справились с данным заданием легко.

2 этап. После этого им предлагался рисунок 2.4 (отдельно):

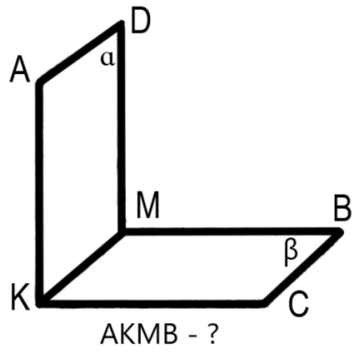

Рисунок 2.4 – Двугранный угол

И тут у них возникла проблема, какой объект на рисунке соответствует названию $AKMB$. На данном этапе происходили актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии.

3 этап. Были высказаны предположения, что это угол между плоскостями. После этого задавались наводящие вопросы:

1. Сколько углов образуется при пересечении двух плоскостей? Как они соотносятся между собой?
2. Почему показан один из углов между плоскостями?
3. Как такой угол называется? Как такой угол измеряется?

На данном этапе происходило выявление места и причины затруднения.

4 этап. Указанные вопросы вызвали затруднения у учащихся. После этого учащимся было сказано, что $AKMB$ – двугранный угол и задан вопрос: «Какова будет тема урока и цели урока?».

Тема урока: «Двугранный угол».

Цель: изучить понятие двугранного угла, способ нахождения двугранного угла и научиться применять его при решении различных задач.

После этого учащиеся начали анализировать рисунок 2.4, обсуждать между собой возможные варианты определения двугранного угла и предлагать различные варианты этого определения. Все предлагаемые формулировки были выслушаны. На данном этапе происходило построение проекта выхода из затруднения (цель и тема, способ, план, средство).

5 этап. Возникла проблема с правильной формулировкой определения данного угла. Тогда задавались наводящие вопросы: «Является ли данная фигура плоской? Как образована данная фигура?». В ходе обсуждения мы попросили учащихся составить модель предполагаемого определения. Учащиеся предлагали свои модели определения двугранного угла, из них выявлялась наиболее удачная. На данном этапе происходила реализация построенного проекта.

Например,

Двугранный угол ↔ фигура с двумя различными полуплоскостями и общей для них прямой

Учащиеся изображали двугранный угол и модель в тетради. Затем мы попросили нескольких учащихся на основе этой модели сформулировать определение двугранного угла. В итоге учащиеся легко по модели его сформулировали. Например:

«Двугранный угол – это фигура, образованная двумя полуплоскостями, (не принадлежащими одной плоскости), и прямой, являющейся границей двух данных плоскостей».

6 этап. После этого учащимся было предложено решить задачи на отыскание двугранных углов в геометрических фигурах по готовым чертежам, а также задачи на поиск двугранного угла в предметах повседневной жизни. На данном этапе происходило первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.

Решение таких задач способствует активизации мыслительной деятельности учащихся, развивает речь и логику рассуждений, учит делать правильное выводы, дает возможность закрепить понятие двугранного угла, затратив при этом минимум времени. Также данные задачи научат видеть двугранные углы в повседневной жизни. С помощью проектора были предложены задачи:

Задача №1. Дан тетраэдр $MABC$. Назовите двугранный угол между полуплоскостями MAB и ABC (рисунок 2.5).

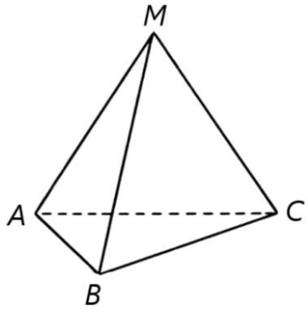

Рисунок 2.5 – Тетраэдр $MABC$ к задаче №1

Задача №2. Сколько двугранных углов имеет спичечный коробок (рисунок 2.6)?

Рисунок 2.6 – Спичечный коробок к задаче №2

Задача №3. Назовите двугранный угол между полуплоскостями AA_1B_1 и ACD (рисунок 2.7).

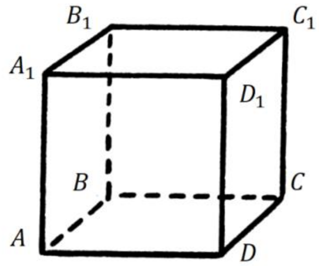

Рисунок 2.7 – Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к задаче №3

Задача №4. Дан тетраэдр $MABC$. Назовите двугранный угол между полуплоскостями MDE и ABC (рисунок 2.8).

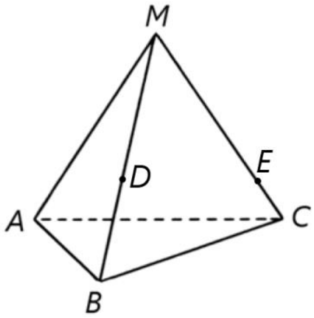

Рисунок – 2.8 Тетраэдр $MABC$ к задаче №4

Задача №5. Сколько двугранных углов имеет данный Кубик Рубика (рисунок 2.9)?

Рисунок 2.9 – Кубик Рубика к задаче №5

Задача №6. Назовите двугранный угол между полуплоскостями PB_1C_1 и ABC. Точка P принадлежит грани BCC_1B_1 (рисунок 2.10).

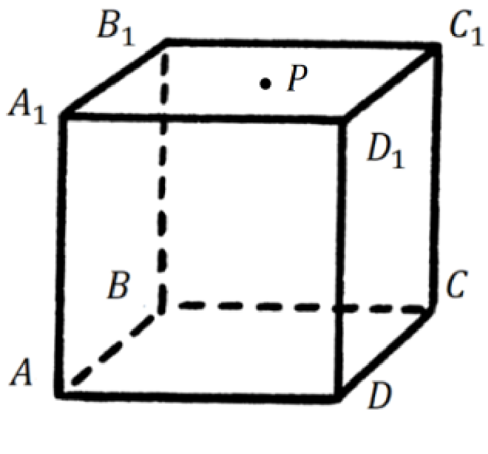

Рисунок 2.10 – Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к задаче №6

Задания предлагались устно, работал весь класс.

После работы с задачами следовал вопрос: «Какие основные теоремы или соотношения, позволяющие находить различные углы, вы знаете?»

Полученные ответы: теорема синусов, теорема косинусов, теорема о вписанном в окружность угле, свойство центрального угла.

7 этап. После работы с задачами был задан вопрос: «Можно ли данные теоремы, соотношения использовать для нахождения двугранного угла?»

Проблемная ситуация: Каким образом можно измерить двугранный угол? В ходе беседы класс пришел к выводу, что требуется ввести понятие так называемого линейного угла данного двугранного угла.

Далее учащиеся были разделены на четверки для самостоятельного поиска ответа на вопрос, касающегося измерения двугранного угла. Для этого учащиеся самостоятельно работали с учебником [4, с. 47-49]. Им были даны задания.

Задание 1*:* Составить письменные ответы на вопросы: «Какие новые ключевые понятия вы встретили при работе с учебником? Записать их определения. Сколько линейных углов можно построить для данного двугранного угла? Зависит ли размер линейного угла от выбранной точки на ребре двугранного угла? Что является градусной мерой двугранного угла?».

Задание 2*:* Составить алгоритм построения линейного угла произвольного двугранного угла. Проиллюстрировать его на чертеже.

После выполнения задания к доске приглашались представители каждой группы, которые по очереди отвечали на вопросы заданий. На данном этапе происходила самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

Остальные учащиеся с места поправляли и дополняли их ответы. Все неразрешимые затруднения в процессе выступления были скорректированы. В ходе дискуссии выявился оптимальный алгоритм построения линейного угла (рисунок 2.11). Он записывался всеми в тетрадь:

– Выделить ребро двугранного угла и поставить на нём произвольную точку O.

– В гранях угла провести через точку O прямые, перпендикулярные ребру.

– Угол с вершиной в точке O, между построенными прямыми – искомый.

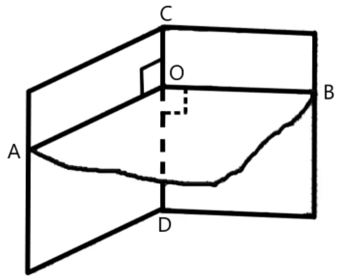

Рисунок 2.11 – Линейный угол двугранного угла

8 этап. Далее работа с учащимися была организована следующим образом:

– поделить учащихся на пять групп;

– раздать каждой группе по одной заготовленной геометрической фигуре. (Заготовленный материал из картона: треугольник (2 шт.), прямоугольник(1 шт.), параллелограмм(1 шт.), трапеция(1шт.));

– показать задания с помощью проектора на экране:

Постройте линейные углы требуемых двугранных углов. Для этого постройте их макет при помощи линейки, карандаша и картонной фигуры. В качестве плоскости α используйте лист бумаги.

Задание 1 группы: Треугольник $ABC, AC = BC$, $AB \subset \alpha$, К $\in \alpha$, $CK \perp \alpha$. Постройте линейный угол двугранного угла $CABK$.

Задание 2 группы: Треугольник ABC, $< C = 90°$, $AC \subset \alpha, BK \perp \alpha,$ К $\in \alpha$. Постройте линейный угол двугранного угла $BACK$.

Задание 3 группы: Прямоугольник $ABCD, AB \subset \alpha$, К $\in \alpha, CK \perp \alpha$; $C, D \notin \alpha$. Постройте линейный угол двугранного угла $CABK$.

Задание 4 группы: Параллелограмм $ABCD, AB \subset \alpha$, К $\in \alpha, CK \perp \alpha; C, D \notin \alpha$. Постройте линейный угол двугранного угла $CABK$.

Задание 5 группы: Трапеция $ABCD, AD$ и BC основания, $AD \subset \alpha$, К $\in \alpha, BK \perp \alpha; B, C \notin \alpha$. Построить линейный угол двугранного угла $BADK$ [8].

Работая в группах, учащиеся выстраивали макет углов на столе с помощью геометрических фигур раздаточного материала, строили с учётом алгоритма линейный угол сконструированного двугранного угла, опираясь на известные ранее факты теории (теорему о трёх перпендикулярах). Затем выполняли построение в тетрадях. Велся периодический контроль выполнения задания, при необходимости вносились коррективы в работу учащихся. На данном этапе происходило включение в систему знаний и повторение.

Представители групп защищали свою задачу возле доски, объясняли построение при данных условиях задачи, делали акцент на взаимосвязи расположения различных геометрических фигур и плоскости. При этом остальные учащиеся выполняли построения в тетради, анализировали и оценивали работу групп.

Процесс защиты помог нам в ходе их выступления не только мгновенно обнаружить и устранить какие–либо неточности, но и узнать: насколько хорошо учащиеся осмыслили содержание новых понятий, поняли принципы и алгоритм работы с ними.

Теперь, когда учащиеся знали алгоритм построения линейного угла двугранного угла, необходимо было отработать поиск его градусной меры.

На следующем занятии учащимся была предложена небольшая самостоятельная работа по вариантам на поиск градусной меры линейного угла по готовым чертежам с последующей самопроверкой. Им предлагались следующие задачи по вариантам:

1 Вариант

Задание 1. В данном кубе найдите угол между полуплоскостями ABC и CDD_1 (рисунок 2.12).

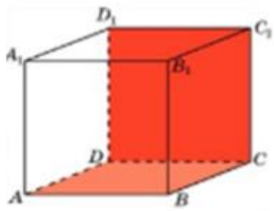

Рис 2.12 – Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к заданию 1 первого варианта

Задание 2. Дана пирамида $SABC$. Найти величину двугранного угла с ребром AC, если прямая SB перпендикулярна плоскости ABC, $AB = BC = 10$ см, $SB = AC = 12$ см (рисунок 2.13).

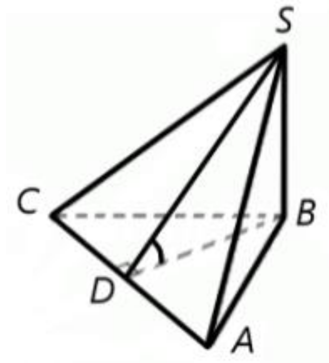

Рис 2.13 – пирамида $SABC$ к заданию 2 первого варианта

2 вариант

Задание 1. В данном кубе найдите угол между полуплоскостями ABC и CDA_1 (рисунок 2.14).

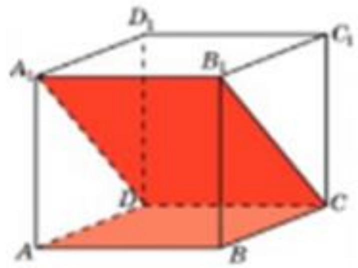

Рис 2.14 – Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к заданию 1 второго варианта

Задание 2. Дана пирамида $SABC$. Найти величину двугранного угла с ребром AC, если прямая BS перпендикулярна плоскости ABC, $< \text{C} = 90°$, $BC = BS = 6$ см (рисунок 2.15)

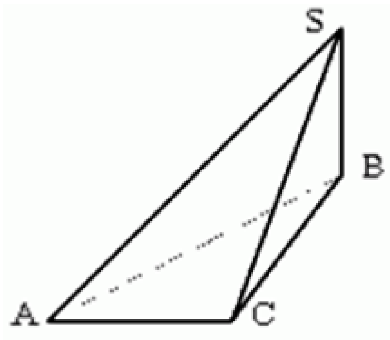

Рис 2.15 – Пирамида $SABC$ к заданию 2 второго варианта

После решения учащиеся обменивались тетрадями с соседом по парте и оценивали друг друга. Решение данных задач помогает отработать учащимся построение линейного угла, поиск его градусной меры, закрепить знания и умения.

Далее учащимся предлагались следующие задания на закрепление, взятые из задачника [9].

Задача 1: Треугольник ABC прямоугольный, $< C = 90°$, $< A = 30°$, $AC = a$, DC перпендикулярна к плоскости ABC, $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Чему равен угол между плоскостью ADB и плоскостью ACB (рисунок 2.16)?

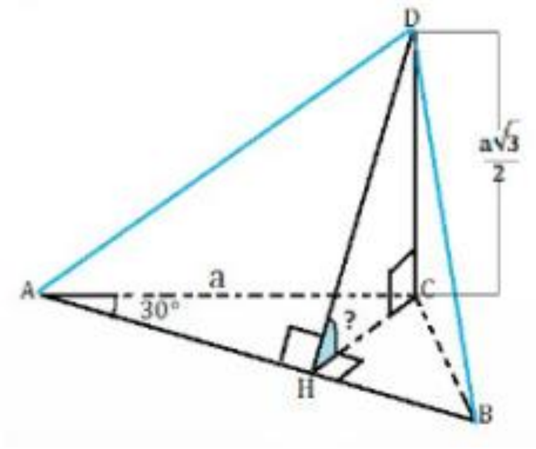

Рисунок 2.16 – Двугранный угол к задаче 1

Решение: Величина угла между плоскостями ADB и ACB – это линейный угол двугранного угла между полуплоскостями ADB и ACB, которые изображены на рисунке 2.16.

Искомый угол – это угол DHC, образованный отрезками CH и DH (рисунок 2.16).

CH – высота $\Delta\, ABC$, $DC \perp\ ABC$ (по условию), $DH \perp\ AB$ (по теореме о трёх перпендикулярах), плоскость DHC перпендикулярна AB.

CH как катет $\Delta\, AHC$, противолежащий углу в $30°$, равен половине гипотенузы AC (формула 1).

$$CH = \frac{a}{2},\ \ tg < DHC = \frac{DC}{HC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3} \qquad (1).$$

Это тангенс угла, равного $60°$.

Угол между плоскостью ADB и плоскостью ACB равен $60°$.

Задача 2: Равнобедренные треугольники ABC и ADC образуют острый двугранный угол (рисунок 2.17). Прямая m, которая перпендикулярна к ребру угла AC, пересекает одну из граней в точке X. Постройте точку пересечения этой прямой с другой гранью.

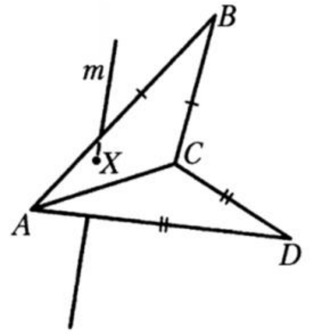

Рисунок 2.17 – Двугранный угол к задаче 2

Данная задача носит исследовательский характер и имеет не единственное решение.

На дом была предложена задача 3: В плоскостях α и β расположены равнобедренные трапеции (рисунок 2.18). Прямая a перпендикулярна ребру острого двугранного угла, образованного этими плоскостями. Прямая a пересекает плоскость β в точке X. Постройте точку ее пересечения с плоскостью α.

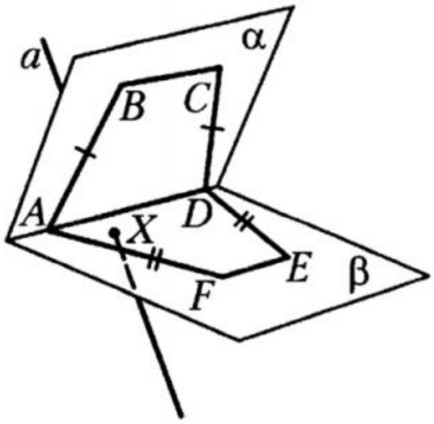

Рисунок 2.18 – Двугранный угол к задаче 3

Оставшуюся часть урока проводилась как урок –«бенефис». На предыдущем уроке изучения двугранного угла в качестве «бенефисной» задачи была задана на дом двум учащимся (одному среднему, а другому посильнее) для самостоятельного решения задача 169 из учебника [4]: «Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180°». Выступление начинал учащийся, который послабее. (Так как данная задача по большей части на исследование и доказательство, то ее можно использовать как задачу, дополняющую теорию.)

Оба учащихся должны были начертить на доске рисунок данной задачи, подробно объясняя каждый шаг. Примерный алгоритм построения:

– начертить две непараллельные плоскости, имеющие общую прямую;
– взять произвольную точку на общей прямой (точка F на рисунке 2.19);
– провести из нее перпендикуляры во всех трех гранях к ребру MN.

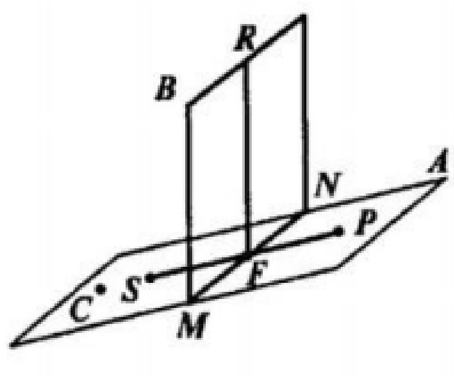

Рисунок 2.19 – Рисунок к задаче 169

Примерное доказательство: Так как два перпендикуляра лежат в одной плоскости и выходят из одной точки, то все их точки лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой MN (рисунок 2.19). Углы SFR и PFR – смежные. Так как сумма смежных углов равна $180°$, то сумма углов SFR и PFR равна $180°$. Данные углы являются линейными углами двугранных углов SFR и PFR соответственно. Отсюда следует, что сумма двух двугранных углов, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости, равна $180°$.

Также к этой задаче мы возвращались в момент введения понятия угла между плоскостями. Можно сделать урок возвращения к ранее изученному материалу, рассмотрев данную задачу под новым углом зрения (изначально начертить две пересекающиеся плоскости).

На уроке контроля знаний можно предложить учащимся самостоятельную работу в виде теста по двум вариантам. Составить его можно из выборочных заданий тестов П.И. Алтынова по теме «Двугранные и линейные углы. Многогранный угол».

В качестве контроля знаний проводилась самостоятельная работа на поиск линейного угла двугранного угла, которая подготавливает к ЕГЭ [24, 27].

Задание 1. $ABCD$ – ромб, $BD = 8$см, прямая SC перпендикулярна плоскости ABC, $SC = 16$ см, двугранный угол с ребром BD равен $45°$. Найти площадь ромба (рисунок 2.20).

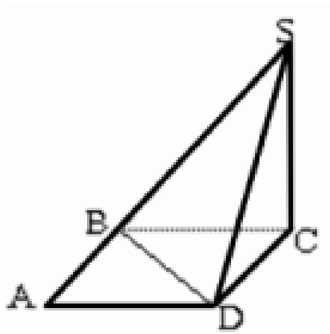

Рисунок 2.20 – Ромб $ABCD$ к заданию 1

Задание 2. $ABCD$ – прямоугольник, его площадь 48 см^2, $DC = 4$ см, прямая OS перпендикулярна плоскости ABC, $OS = 6$ см. Найти величину двугранного угла с ребром DC (рисунок 2.21).

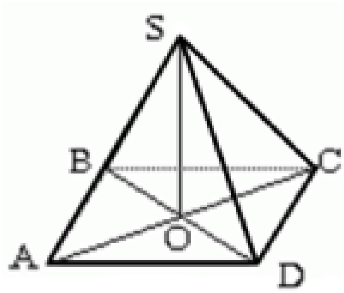

Рисунок 2.21 – Прямоугольник $ABCD$ к заданию 2

Задание 3. Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного $120°$. Отрезки AC и BD проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Найдите отрезок CD, если $AB = AC = BD = a$ (рисунок 2.22).

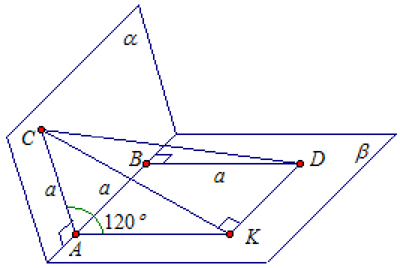

Рисунок 2.22 – Двугранный угол к заданию 3

Задание 4. В тетраэдре $ABCD$, ребра которого равны 1, найдите угол между двугранный угол с ребром ВС (рисунок 2.23).

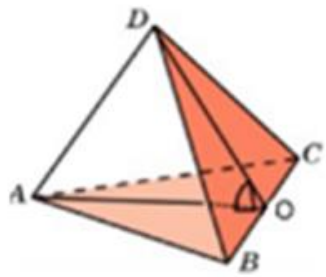

Рис 2.23 – Тетраэдр $DABC$ к заданию 4

На следующем уроке проводилась работа над ошибками, в которой выполнялось математически грамотное оформление последней задачи в соответствии с критериями проверки заданий с развернутым ответом ЕГЭ по математике.

Решение данных задач на уроке позволяет эффективно подготовить школьников к решению задач: №8 из первой части ЕГЭ по математике; № 14 из второй части ЕГЭ по математике профильного уровня [23].

Далее в учебнике Л.С. Атанасяна идет изучение темы «Признак перпендикулярности плоскостей». С учетом всего выше сказанного, рассмотрим теперь технологическую цепочку изучения данной темы, ее закрепления и контроля знаний.

Выбранная нами тема «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей» в учебнике Л.С. Атанасяна состоит из пяти теоретических вопросов: «Двугранный угол», «Признак перпендикулярности плоскостей», «Прямоугольный параллелепипед», «Трехгранный угол» и «Многогранный угол». Последние два вопроса в данном учебнике выделены как темы для дополнительного изучения, не являющиеся обязательными на базовом уровне [4]. Выше мы разработали технологическую цепочку для изучения вопроса «Двугранный угол», основанную на технологии эффективных уроков А.А. Окунева, в сочетании с технологиями развивающего и проблемного обучения [6]. Теперь рассмотрим с позиций данных технологий некоторые приёмы работы, которые лучше всего подходят для изучения темы «Признак перпендикулярности плоскостей», ее закрепления и контроля знаний.

Технологическая цепочка изучения вопроса «Признак перпендикулярности плоскостей»

Цель урока: изучить признак перпендикулярности плоскостей и использовать его при решении задач стереометрии. Задачи урока и планируемые результаты (таблица 5):

Таблица 5 – Задачи и планируемые результаты

Задачи	Планируемые результаты
1. Повторить основные понятия темы «Двугранный угол. Измерение двугранного угла» 2. Изучить признак перпендикулярности плоскостей	***Предметные результаты:*** – формирование умений использовать теоретический материал по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости» при решении задач; – сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире перпендикулярность прямых и плоскостей; – применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием. ***Метапредметные результаты:*** – Регулятивные: умение определять понятия, строить

Продолжение таблицы 5

1	2
	умозаключения и делать выводы. – Коммуникативные: развитие монологической и диалогической речи, участие в коллективном обсуждении проблем, умение интегрироваться в группу сверстников и умение строить с ними продуктивное взаимодействие. – Познавательные: умение распознавать перпендикулярность плоскостей из других видов взаимного расположения плоскостей, научиться использовать признак при решении задач. ***Личностные результаты***: – самопознание; – формирование целостного мировоззрения; креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач.

1 этап. Мотивация к учебной деятельности. Учащимся предлагались следующие задачи на готовых чертежах (рисунки 2.24 – 2.26, названия рисунков не показывались учащимся).

1. Назовите, что изображено на каждом рисунке?
2. Укажите, что объединяет первые два рисунка?

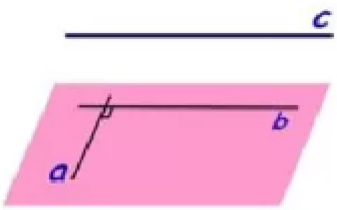

Рисунок 2. 24 – Перпендикулярность пересекающихся прямых a и b (скрещивающихся a и c)

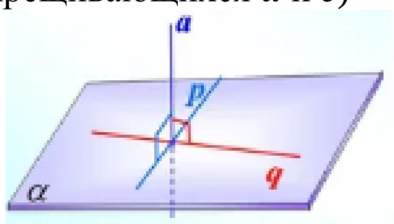

Рисунок 2.25 – Перпендикулярность прямой и плоскости

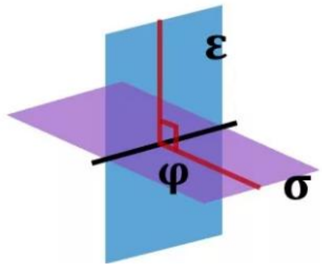

Рисунок 2.26 – Перпендикулярность плоскостей

2 этап. Учащиеся поясняли, что на первых двух рисунках наглядно показаны признаки перпендикулярности соответственно скрещивающихся прямых и прямой и плоскости (учащиеся формулировали эти признаки). Затруднения вызывал последний рисунок, так как с ним учащиеся столкнулись впервые. На данном этапе происходила актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии.

3 этап. Учащиеся начинали анализировать (рисунок 2.26), обсуждать между собой возможные варианты: было представлено определение перпендикулярных плоскостей или их признак. Возникла проблема. На данном этапе происходило выявление места и причины затруднения.

4 этап.

Тема: Перпендикулярность плоскостей

Цель: Ввести понятие перпендикулярных плоскостей.

Мы попросили учащихся отыскать в окружающей действительности, имеющие перпендикулярные поверхности (фрагменты плоскостей), выявить, что у них общего. Выяснилось, двугранные углы, образованные этими объектами, прямые. На данном этапе происходило построение проекта выхода из затруднения (цель и тема, способ, план, средство).

5 этап. Составлялась модель определения перпендикулярных плоскостей. Пример:

Перпендикулярные плоскости ↔ две пересекающиеся плоскости (четыре прямых двугранных угла)

Далее был задан вопрос: «Достаточно ли в определении сказать, что если один из двугранных углов между плоскостями прямой, то плоскости перпендикулярны?» Учащиеся легко догадались, что – да, вспомнив бенефисную задачу при изучении двугранных углов.

Учащимся были заданы наводящие вопросы: «Если плоскости не перпендикулярны, то какие двугранные углы они образуют? Как Вы думаете, что принято понимать под углом между произвольными плоскостями?»

Учащиеся затруднялись ответить, тогда приводился пример – аналогия с пересекающимися прямыми. Учащимся было предложено сформулировать определение угла между плоскостями, указать диапазон, в котором измеряется этот угол.

После этого выяснилось определение перпендикулярных плоскостей: «Перпендикулярные плоскости – это две пересекающиеся плоскости, угол между которыми равен 90°».

Признак перпендикулярности плоскостей был введен через признак перпендикулярности прямой и плоскости, с использованием примера из жизни.

Вопросы для учащихся: «Какое практическое значение имеет вопрос перпендикулярности прямой и плоскости при установке, к примеру, мачт на корабле или колонн зданий? Обязательно ли проверять при этом перпендикулярность мачты к каждой прямой плоскости корабля? Сколько прямых плоскости корабля достаточно для проверки? Почему?» (ответ учащихся: на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости достаточно взять две прямые для проверки: «Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости»). На данном этапе происходила реализация построенного проекта.

6 этап. Далее к доске был вызван более подготовленный учащийся, решать следующую задачу из пункта 17 учебника [4]. Остальные решали задачу в тетрадях.

Задача: «Докажите, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой».

Выступающий учащийся решал данную задачу вслух, объясняя каждый свой шаг. Помимо доказательства он также начертил соответствующий рисунок. Велся постоянный контроль за правильностью решения, при необходимости привлекались другие учащиеся, если нужно было внести коррективы. Все остальные учащиеся решали задачу на местах, при желании высказывались.

Решение: Обозначим данную прямую буквой a, а произвольную точку пространства – буквой M. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a.

Проведем через прямую a две плоскости α и β так, чтобы $M \in \alpha$. В плоскости α через точку M проведем прямую p, перпендикулярную к прямой a, а в плоскости β через точку пересечения прямых p и a проведем прямую q, перпендикулярную к прямой a (рисунок 2.27).

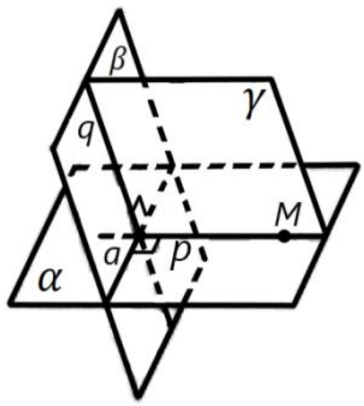

Рисунок 2.27 – Чертеж к задаче из пункта 17

Рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. Плоскость γ является искомой, так как прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым p и q этой плоскости.

Далее учащимся был задан вопрос: «Как построенная плоскость будет располагаться по отношению к плоскости, проходящей через данную прямую a и взятую точку пространства?» Учащиеся легко сообразили на основе определения перпендикулярных плоскостей, что – перпендикулярно.

В результате обсуждения мы попросили сформулировать признак перпендикулярности двух плоскостей. Модель признака записывалась на доске, по ней несколько учащихся со слабой подготовкой формулировали признак (формула 2):

$$a \subset \alpha, a \perp \beta \longrightarrow \alpha \perp \beta \qquad (2)$$

На данном этапе происходило первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.

7 этап. Далее мы поделили учащихся на четверки для групповой работы с целью поиска доказательства признака. Учащиеся начали обсуждать между собой данный вопрос, предлагать возможные варианты, самостоятельно составлять примерное доказательство. Были выслушаны представители каждой четверки, защищающие свои доказательства, возле доски. При необходимости учащиеся – слушатели корректировали выступающих у доски, когда возникал спор, мы направляли его в продуктивное русло. Каждый представитель не только подробно рассказывал доказательство, но и предоставлял наиболее грамотный рисунок (рисунок 2.28):

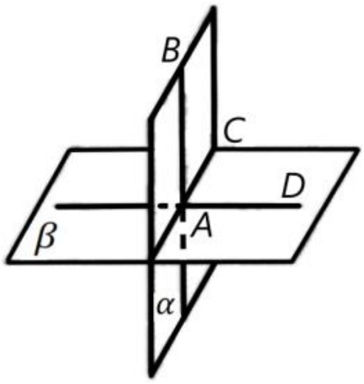

Рисунок 2.28 – Чертеж к задаче на доказательство признака

На данном этапе происходила самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

8 этап. Далее был предложена система заданий для отработки признака перпендикулярности плоскостей [9]:

Задача 1: В прямоугольнике $ABCD\ AB = 3$; $AD = 4$. Этот прямоугольник перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D (рисунок 2.29).

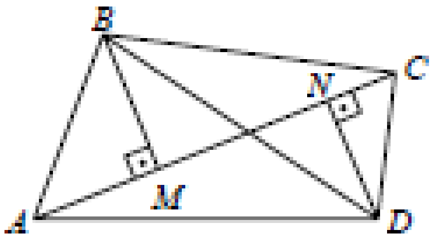

Рисунок 2.29 – Перегнутый прямоугольник

Решение:

$$BM \perp AC, DN \perp AC.$$

Применим формулу 3 для нахождения расстояния между вершинами:

$$BD^2 = BM^2 + MN^2 + ND^2, \quad (3)$$

$$BM = ND = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{12}{5},$$

$$MC = \sqrt{BC^2 - BM^2} = \sqrt{16 - \frac{144}{25}} = \sqrt{16\left(1 - \frac{9}{25}\right)} = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5},$$

$$NC = \sqrt{CD^2 - ND^2} = \sqrt{9 - \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{225-144}{25}} = \frac{9}{5},$$

$$MN = MC - NC = \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = \frac{7}{5},$$

$$BD^2 = \frac{144}{25} + \frac{49}{25} + \frac{144}{25} = \frac{337}{25}, BD = \frac{\sqrt{337}}{25}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{337}}{25}$.

Задача 2: Катет и гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника лежат в разных гранях прямого двугранного угла. Вершина прямого угла треугольника удалена от ребра на расстоянии, равное 2 см, а вершина острого угла – расстояние, равное $\sqrt{15}$ см. Найдите площадь треугольника (рисунок 2.30).

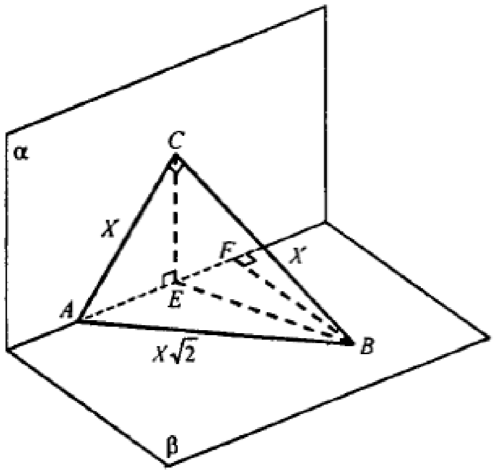

Рисунок 2.30 – Катет и гипотенуза треугольника

Решение: Пусть $AC = CB = x \Rightarrow AB = x\sqrt{2}$,

$$AE = BE\,\sqrt{x^2 - 4} \text{ и } EF = \sqrt{EB^2 - BF^2} = \sqrt{x^2 - 4 - 15} = \sqrt{x^2 - 19},$$

$$AF = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 19} \Rightarrow \text{из } \triangle ABF, \Rightarrow$$

$$2x^2 = x^2 - 4 + x^2 - 19 + 2\sqrt{(x^2-4)(x^2-19)} + 15, \Rightarrow$$

$$x^4 - 23x^2 + 60 = 0,$$

$$x^2 \neq 3,$$

$$AE = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow S = 10.$$

Ответ: 10 см^2.

На данном этапе происходило включение в систему знаний и повторение.

В качестве одного из уроков закрепления изученного материала был проведен урок-«бенефис».

На предыдущем уроке в качестве «бенефисной» задачи была предложена задача 58 из учебника Погорелова: «Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости» [20]. Данная задача в учебнике Л.С. Атанасяна сформулирована в виде следствия без доказательства [4].

Первым выступал учащийся, который «слабее», а «сильный» в свою очередь слушал его выступление и при желании дополнял. После этого шло выступление «сильного» учащегося. Весь класс во время выступления записывал решение данной задачи в тетрадях, задавал вопросы выступающим, обсуждал решение между собой. Выступающие же помечают коррективы или дополнения в своих решениях. Учитель при необходимости также вносит коррективы в решение.

В начале, выступающие предоставили чертёж. Примерный алгоритм построения чертежа:

1. Начертить две перпендикулярные плоскости α и β;
2. Обозначить прямую c, по которой они пересекаются;
3. В плоскости α начертить прямую a, перпендикулярную прямой c (рисунок 2.31).

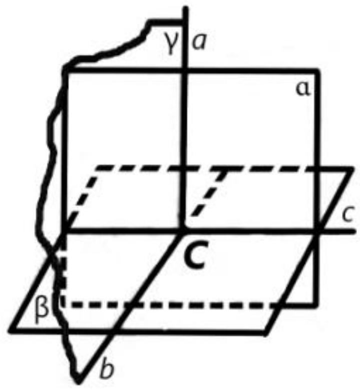

Рис 2.31 – Перпендикулярность двух плоскостей

Работая у доски, они должны были не только начертить требуемую фигуру, но и объяснить на чем они основывались в ходе построения. Работа с чертежами наилучшим образом способствует развитию абстрактного мышления, воображения и представления.

Примерное доказательство: необходимо взять точку пересечения прямых a и c и провести через нее в плоскости β прямую b перпендикулярно c; обозначить плоскость γ, образованную прямыми a и b; выяснить перпендикулярность плоскости γ прямой c; так как $\alpha \perp \beta$ (по условию), то $a \perp b$ и $a \perp c$; значит, $a \perp \beta$.

Существенной особенностью геометрического доказательства в значительной степени, определяющей его необходимость, является то, что при помощи доказательства усваиваются общие свойства пространственных фигур и объектов.

После «бенефисной» учащиеся были разделены на четверки. Мы раздали каждой по одной задаче для самостоятельного решения. Далее представители четверок по одному выступали возле доски с решением данной им задачи. В момент выступления весь класс записывал решения других четверок в свои тетради, при желании задавали вопросы. Задачи для четверок [6]:

Задача 1. Докажите, что плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

Дано: α и β пересекаются по линии AB. Плоскость γ перпендикулярна AB (на рисунке 2.32 плоскость γ не показана).

Доказать: $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$ (рисунок 2.32).

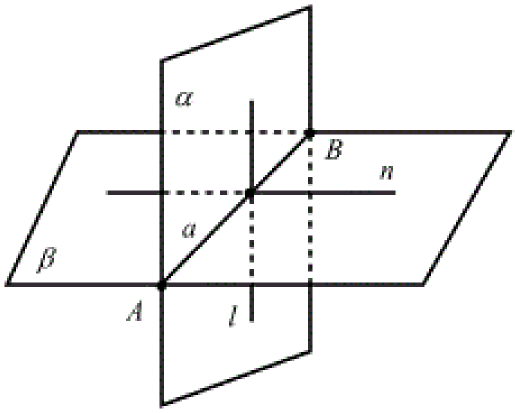

Рисунок 2.32 – Две перпендикулярные плоскости

Доказательство: Пусть γ пересечет плоскость α по линии l, а плоскость β по прямой n.

$\gamma \perp AB$, то $AB \perp l$, так как $l \subset \gamma$.

$\gamma \perp AB$, то $AB \perp n$, так как $n \subset \gamma$.

Вывод: $\left.\begin{matrix} AB \perp \gamma \\ AB \subset \alpha \end{matrix}\right\} \gamma \perp \alpha$ (признак перпендикулярности двух плоскостей).

Вывод: $\left.\begin{matrix} AB \perp \gamma \\ AB \subset \beta \end{matrix}\right\} \gamma \perp \beta$ (признак перпендикулярности двух плоскостей).

Что и требовалось доказать.

Задача 2: Два равных квадрата $ABCD$ и $CEFK$ расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что их стороны CD и CE лежат на линии пересечения этих плоскостей по разным сторонам от общей вершины C. Найдите угол между прямыми DB и EK (рисунок 2.23).

Дано: $\alpha \perp \beta$, $ABCD$ лежит в α, $CEFK$лежит в β, $ABCD = CEFK$.

Найти: $< (BD, EK)$

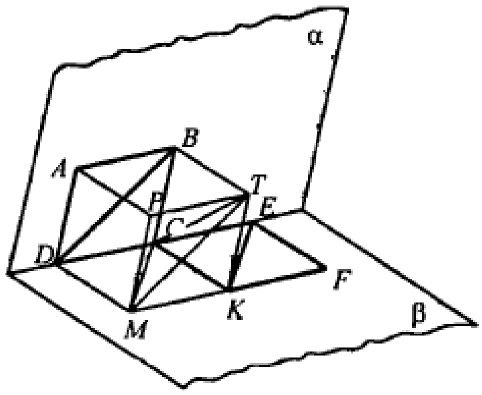

Рисунок 2.33 – Равные квадраты в 2–х перпендикулярных плоскостях

Решение: построим квадрат $DCKM$ как показано на рисунке 2.33. $CM \mid\mid EK$. Построим куб на квадрате $DCKM$. $MT \mid\mid DB$.

$\triangle MTC$ – равносторонний $\Rightarrow < CMT = 60°$.

Так как $CM \mid\mid EK$ и $MT \mid\mid DB$, то $< (BD, EK) = < (MT, CM) = 60°$.

Ответ: 60°.

Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$; $AC = 5$. $\angle BAC = 60°$. Этот параллелограмм перегнут по диагонали AC так, что образовался прямой двугранный угол. Найдите расстояние между вершинами B и D (рисунок 2.34).

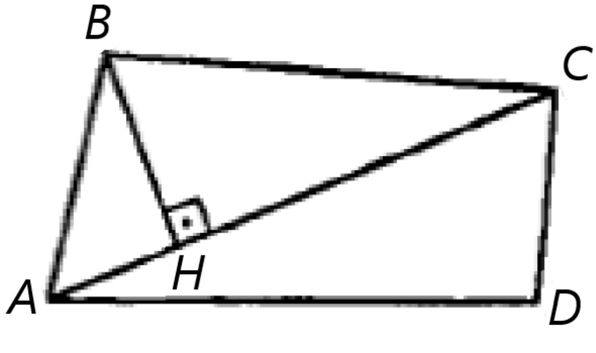

Рисунок 2.34 – Перегнутый по диагонали параллелограмм

Решение:

Сгибаем вдоль AC так, чтобы $ABC \perp ACD$ (рисунок 2.34).

$BH \perp AC \Rightarrow AH = AB\cos BAC = 2 \Rightarrow HC = 3 \Rightarrow$ по теореме косинусов (формула 4), так как $\angle ACD = \angle BAC$ получим:

$$HD = \sqrt{HC^2 + CD^2 - 2 \cdot HC \cdot CD\cos ACD}. \qquad (4)$$

Из этого следует: $HD = \sqrt{9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}$,

$BH = AB\sin BAC = 2\sqrt{3} \Rightarrow BD = \sqrt{12 + 13} = 5$. Ответ: 5.

Задача 4. Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. В плоскости β из точки A проведен перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведен перпендикуляр AC к плоскости α. Докажите, что $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $AMNC$ (рисунок 2.35).

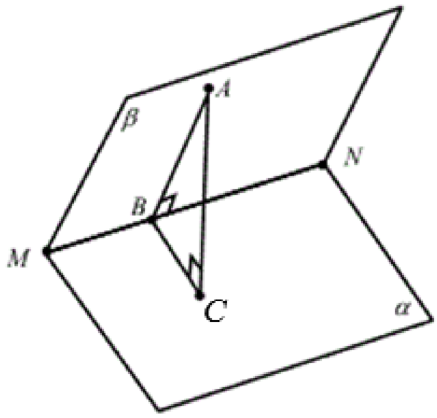

Рисунок 2.35 – Две неперпендикулярные плоскости

Решение: Проведем отрезок BC.

$\left.\begin{matrix} AC \perp \alpha, AB - \text{наклонная} \\ AB \perp MN, MN \subset \alpha \end{matrix}\right\}$ – по теореме, обратной к теореме о трех перпендикулярах, $BC \perp MN$.

$\left.\begin{matrix} B \in MN \\ AB \perp MN \\ BC \perp MN \end{matrix}\right\} \rightarrow \angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $AMNC$.

Заключительным при изучении каждой темы является зачетное занятие, которое А.А. Окунев советует проводить на сдвоенном уроке. Зачётный урок состоял из следующих этапов: самостоятельный опрос учащимися друг друга по изученным вопросам, устные ответы каждого по билетам, контрольная работа. Перед зачетной заранее был подготовлен список вопросов по пройденной теме, по которому учащиеся будут опрашивать друг друга. Для данного списка были объединены вопросы после параграфов, рассмотренных нами, школьных учебников А.В. Погорелова и А.Д. Александрова [1, 20]. В данный перечень вопросов были включены еще вопросы из предыдущей темы про двугранный угол:

1. Что такое двугранный угол?
2. Какие составляющие двугранного угла вы знаете?
3. Как вычисляют величину двугранного угла?
4. Как вычислить угол между плоскостями?
5. Какие плоскости называются взаимно перпендикулярными?
6. Какой признак перпендикулярности плоскостей вы знаете?
7. Какое следствие из данного признака вы знаете?
8. Докажите признак перпендикулярности плоскостей.

Для билетов выборочно были использованы вопросы ко всей главе из учебника Л.С. Атанасяна [4], а также тесты по теме «Перпендикулярность в пространстве» П.И. Алтынова [2]. Примеры (таблица 6):

Таблица 6 – Билеты для устного ответа

Билет 1	Билет 2
1. Сформулируйте определение перпендикулярных плоскостей. 2. Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна к третьей плоскости, быть: а) параллельными плоскостями; б) перпендикулярными плоскостями? Почему? 3. В треугольнике AKC $AK \perp CK$; точка M не принадлежит плоскости AKC и $MK \perp CK$. Какие высказывания верны? 1) $AK \perp (CKM)$; 2) $CK \perp (AKM)$; 3) $AK \perp MK$; 4) $CK \perp AM$. а) 1; б) 1; 3; в) 2; 4; г) 4.	1. Сформулируйте определение двугранного угла. 2. Можно ли через точку пространства провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны? Почему? 3. В треугольнике MKC $CM \perp KM$, точка E не принадлежит плоскости треугольника MKC и $EM \perp MK$. Какие высказывания верны? 1) $EM \perp (MKC)$; 2) $KM \perp (MEC)$; 3) $KM \perp CE$; 4) $EM \perp CK$. а) 1; 4; б) 2; 3; в) 3; г) 1.

Ответы на список вопросов и билеты не заняли много времени. Поэтому сразу же после билетов шла контрольная работа [2, 9].

Вариант 1

Задание 1. $\triangle MKN$ равносторонний со стороной, равной 18 см. Точка C удалена от вершин треугольника MKN на 12 см. Найдите расстояние от точки C до плоскости MKN.

Задание 2. $ABCD$ – квадрат. Точка M удалена от сторон квадрата на $3\sqrt{2}$ см. Найдите периметр квадрата, если точка M удалена от плоскости ABC на $\sqrt{2}$ см.

Задание 3. Плоскости прямоугольных треугольников ABC и ABK перпендикулярны. $AB = 8$ см, $AK = 10$ см, $< ABK =< ABC = 90°$, $< BAC = 45°$. Вычислите расстояние между точками K и C.

Задание 4. Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Точка A принадлежит плоскости α. Отрезок AA_1 – перпендикуляр к плоскости β, точка B принадлежит плоскости β и BB_1, перпендикуляр к плоскости α. Найдите AB, если $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 12$ см, $A_1B_1 = 4\sqrt{2}$ см.

Задание 5. Треугольник AMB и прямоугольник $ABCD$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Докажите, что $< MAD$ – прямой.

Задание 6. Два правильных треугольника ABC и DBC расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и ABC.

Вариант 2

Задание 1. $\triangle ACD$ – равносторонний. Точка S удалена от вершин треугольника ACD на 6 см, а от плоскости треугольника ACD на 3 см. Найдите сторону треугольника ACD.

Задание 2. $ABCD$ – квадрат с периметром, равным $16\sqrt{3}$ см. Точка E удалена от всех сторон квадрата на 4 см. Найдите расстояние точки E от плоскости ABC.

Задание 3. Плоскости равностороннего $\triangle ABC$ и прямоугольного равнобедренного $\triangle ADC$ перпендикулярны. $AB = a$, $< ADC = 90°$. Вычислите расстояние между вершинами Bи D данных треугольников.

Задание 4. Плоскость α перпендикулярна к плоскости β. Точка C принадлежит плоскости α. Отрезок CC_1 – перпендикуляр к плоскости β, точка D принадлежит плоскости β и DD_1 – перпендикуляр к плоскости α. Найдите длину отрезка C_1D_1, который принадлежит линии пересечения плоскостей α и β, если $CC_1 = 8$ см, $DD_1 = 12$ см, $CD = 15$ см.

Задание 5. Прямоугольник $ABCD$ и параллелограмм $BEMC$ расположены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Докажите, что $< MCD$ – прямой.

Задание 6. Сторона правильного треугольника ABC равна 4. Треугольник DBC – равнобедренный ($DB = DC$). Их плоскости взаимно перпендикулярны. Плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол 60°. Найдите площадь треугольника DBC.

На следующем уроке мы провели анализ проверки контрольных работ и зачёта в целом.

Заметим, что вопросы теории и практики, связанные с перпендикулярностью плоскостей, очень важны для решения стереометрической задачи №14 из второй части ЕГЭ профильного уровня. В данных задачах признак перпендикулярности плоскостей имеет широкое применение в процессе доказательств требуемых утверждений, поэтому успешность усвоения данных вопросов темы учащимися весьма значима.

Далее в учебнике Л.С. Атанасяна идет изучение прямоугольного параллелепипеда. Также в данной теме вводится понятия куба. В заданиях № 14 имеется большое количество задач, в которых дан куб или прямоугольный параллелепипед, и требуется доказать какое-либо утверждение или найти угол между плоскостями [24]. В связи с этим особенности изучения прямоугольного параллелепипеда достаточно актуальны.

Технологическая цепочка изучения вопроса «Прямоугольный параллелепипед»

Цели урока: ввести понятие прямоугольного параллелепипеда, рассмотреть свойства прямоугольного параллелепипеда, показать их применение при решении задач; воспитывать аккуратность в построении пространственных фигур, умение работать в группе, помогать товарищу, воспитывать коммуникативные умения и навыки, адекватную самооценку.

Методы: частично-поисковый.

Задачи урока и планируемые результаты (таблица 7):

Таблица 7 – задачи и планируемые результаты

Задачи	Планируемые результаты
1. обучающие: сформировать понятия параллелепипеда и его элементов, сформировать умение изображать параллелепипед и его элементы на плоскости, рассмотреть свойства граней и диагоналей параллелепипеда; 2. развивающие: сформировать умения сравнивать, классифицировать, проводить анализ, выделять свойства в изучаемом объекте; 3. воспитательные: воспитывать	***Предметные результаты:*** – усвоение систематических знаний о параллелепипеде, его составных частях и формуле площади поверхности; – умение применять систематические знания для решения геометрических и практических задач на вычисление площади поверхности прямоугольного параллелепипеда в стандартных и нестандартных ситуациях (открытый параллелепипед, недостающие данные); – умения использовать формулы для нахождения площадей геометрических фигур. ***Метапредметные результаты:*** – Регулятивные: умение планировать пути решения поставленной задачи (о площади поверхности прямоугольного параллелепипеда), определять эффективные способы решения; умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, планировать и осуществлять корректировку

Продолжение таблицы 7

1	2
наблюдательность, любознательность, трудолюбие.	своих действий. – Коммуникативные: умения оформлять свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других; уметь работать в парах. – Познавательные: умение преобразовывать информацию от одного вида к другому (словесную в знаковую); умение определять понятия, строить логические рассуждения, делать выводы. ***Личностные результаты:*** – развитие любознательности и формирования интереса к изучению геометрических фигур; – развитие интеллектуальных способностей учащихся; – умение ясно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи; – инициатива, находчивость, активность при решении математических задач; умение контролировать процесс и результат учебной деятельности.

1 этап. Мотивация к учебной деятельности.

В начале урока учащимся был предложен рисунок параллелепипеда, так как с данным понятием они уже знакомы. Учащимся был задан вопрос: «Давайте рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, которые расположены в параллельных плоскостях так, что соединенные между собой отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны другу». Появляется рисунок (рисунок 2.36):

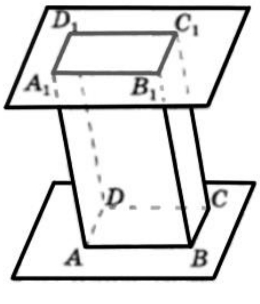

Рисунок 2. 36 – Наклонный параллелепипед

Учитель: «Кто помнит, как называется данная фигура?». После ответа на вопрос попросить учащихся сформулировать определение параллелепипеда, перечислить все его составляющие, назвать два основных его свойства, а также попросить назвать все двугранные углы данной фигуры. Акцентировать внимание на том, что данный параллелепипед является наклонным и состоит из шести параллелограммов.

С помощью проектора предлагалось рассмотреть рисунок прямоугольного параллелепипеда, название которого учащиеся еще не знали (рисунок 2.37):

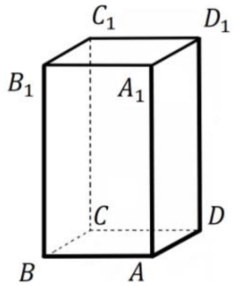

Рисунок 2.37 – Прямоугольный параллелепипед

2 этап. Учитель: «Является ли данная фигура параллелепипедом? Почему?». Попросить учащихся сопоставить рисунок 2.37 с рисунком 2.36, а именно назвать все сходства и различия.

Вопрос учителя после обсуждения: «А как можно назвать параллелепипед на рисунке 2.37? Какова градусная мера всех двугранных углов? Какими свойствами он обладает?». Учащиеся начинали анализировать рисунок 2.37. С ответами на данные вопросы возникла проблема. На данном этапе происходили актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии.

3 этап. После обсуждения мы сказали, что на рисунке 2.37 изображен прямоугольный параллелепипед.

Далее мы попросили сформулировать определение прямоугольного параллелепипеда. Возникли проблемы с правильной формулировкой определения прямоугольного параллелепипеда. На данном этапе происходило выявление места и причины затруднения.

4 этап. Далее мы попросили учащихся сформулировать тему и цель урока.

Тема урока: «Прямоугольный параллелепипед».

Цель: ввести понятие прямоугольного параллелепипеда; выяснить – какими свойствами обладает прямоугольный параллелепипед; рассмотреть задачи на применение прямоугольного параллелепипеда.

На данном этапе происходило построение проекта выхода из затруднения (цель и тема, способ, план, средство).

5 этап. Было обращено внимание учащихся на рисунке 2.37: «Назовите все двугранные углы на рисунке 2.37, укажите их особенности. Попробуйте составить схему предполагаемого определения». В ходе обсуждения была выявлена лучшая модель определения (при необходимости мы вносили коррективы и в итоге лучший вариант был записан на доске). Пример:

Прямоугольный параллелепипед ↔ параллелепипед

$$\to \begin{cases} \text{Основаниями являются прямоугольники} \\ \text{Боковые ребра перпендикулярны основаниям} \end{cases}.$$

Учащиеся записывают модель в тетради.

Учитель: «На основе данной модели попробуйте сформулировать определение прямоугольного параллелепипеда». По модели они легко его сформулировали: «Параллелепипед прямоугольный, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники». Учащиеся записывали определение прямоугольного параллелепипеда в тетради. На данном этапе происходила реализация построенного проекта.

Также на данном уроке было введено понятие куба. После того, как учащиеся записали в свои тетради определение прямоугольного параллелепипеда, далее им был предложен рисунок куба (рисунок 2.38):

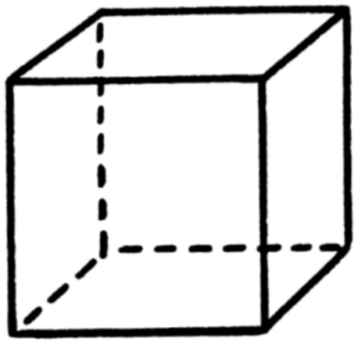

Рисунок 2.38 – Куб

Вопросы учителя: «А является ли данная фигура прямоугольным параллелепипедом? Почему? Чем отличается рисунок 2.38 от рисунка 2.37? Как называется данный параллелепипед (скорей всего учащиеся узнают на рисунке куб, но если нет, то учитель может сказать название)? Составьте схему предполагаемого определения».

Пример схемы: $$\text{Куб} \rightarrow \begin{cases} \text{Основаниями являются квадраты} \\ \text{Боковыми гранями являются квадраты} \\ \text{Все двугранные углы прямые} \end{cases}$$

(Было предложено самостоятельно сформулировать определение куба по данной схеме). Были выслушаны все предлагаемые варианты. Лучший вариант определения записывался на доске. Пример: «Куб – это прямоугольный параллелепипед, у которого в три измерения равны».

Далее необходимо было изучить свойства прямоугольного параллелепипеда.

6 этап. Учитель: «Посмотрите вокруг. Какие предметы вокруг вас имеют форму прямоугольного параллелепипеда? Сколько граней имеет прямоугольный параллелепипед? Какими фигурами являются его грани? Попробуйте сформулировать свойство параллелепипеда и запишите его в тетрадь.» (1 Свойство: В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники).

Учитель: «Сколько двугранных углов имеет ящик стола или комната? В чем их особенность? Попробуйте сформулировать второе свойство прямоугольного параллелепипеда и запишите его в тетрадь.» (2

Свойство: Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые). На данном этапе происходило первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.

7 этап. Для того чтобы ввести последнее самое основное свойство о трех измерениях прямоугольного параллелепипеда учащимся были предложены две геометрические задачи для самостоятельного решения, одну из которых решить им не составило труда, а с решением второй у них возникла проблема. Это необходимо для того, чтобы пробудить у учащихся интерес к изучению темы, так как подача знаний в готовом виде, а именно с готовыми способами и методами решения различных задач, никак не способствует усвоению и пониманию темы.

Так как учащиеся уже умели решать задачи, связанные с поиском какой-либо составляющей части параллелепипеда, то две задачи на вычисление были подобраны так, что на решение второй им не хватило имеющихся знаний о наклонном параллелепипеде.

В качестве «простой» задачи мы взяли задачу из темы параллелепипеда: задача 1: «Сумма ребер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}, \frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$» [4]. Вызвать к доске одного желающего (рисунок 2.39).

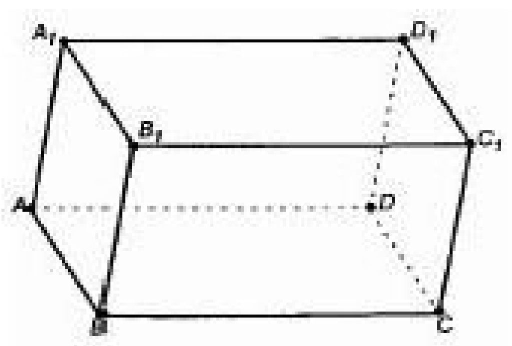

Рисунок 2.39 – Наклонный параллелепипед для «простой» задачи

Решение: Пусть $BB_1 = x$, тогда $BC = \frac{5}{6}x$, $AB = \frac{4}{5}BC = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}x\right) = \frac{2}{3}x$.

Из условия задачи: $4 \cdot AB + 4 \cdot BC + 4 \cdot BB_1 = 120$, или $AB + BC + BB_1 = 30$,

$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x + x = 30;$$

$$4x + 5x + 6x = 180,$$

$$15x = 180,$$

$$x = 12 \text{ см},$$

$$BB_1 = 12 \text{ см}; AB = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ см}; BC = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10 \text{ см}.$$

В качестве «проблемной» задачи мы взяли задачу из темы «Прямоугольный параллелепипед»:

Задача 2: «Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его три измерения равны: а)$1, 1, 2$; б) $8, 9, 12$; в) $\sqrt{39}, 7, 9$» (при этом попросить учащихся решить данную задачу без использования теоремы Пифагора) [4].

С решением второй задачи возникла проблема, которая связана с нехваткой знаний, а именно с незнанием основного свойства прямоугольного параллелепипеда. Возник вопрос: «Каким же еще свойством обладает прямоугольный параллелепипед?».

Учитель: «Вспомните свойство прямоугольника, которое связанно с двумя его измерениями (квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений). Сколько измерений имеет прямоугольный параллелепипед? Оказывается аналогичным свойством обладает прямоугольный параллелепипед. Попробуйте самостоятельно сформулировать данное свойство». Основное свойство прямоугольного параллелепипеда: «Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений». После этого проблем с решением второй задачи не возникло. Мы попросили учащихся решить вторую задачу заново. К доске был вызван один желающий (рисунок 2.40).

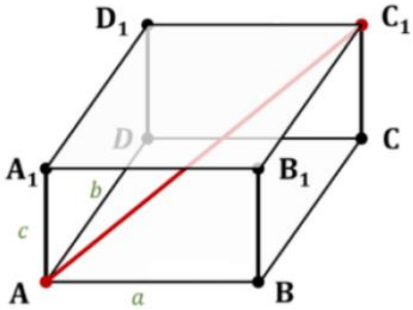

Рисунок 2.40 – Диагональ прямоугольного параллелепипеда

Решение второй задачи: Из теоремы прямоугольного параллелепипеда о трех его измерениях следует: $BD_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6},\ BD_1 = \sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2} = \sqrt{64 + 81 + 144} = \sqrt{289} = 17,$ $BD_1 = \sqrt{39 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{39 + 49 + 81} = \sqrt{169} = 13.$

На данном этапе происходила самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.

8 этап. Далее учащиеся были поделены на три группы. Каждую из них мы попросили самостоятельно без учебника доказать по одному свойству прямоугольного параллелепипеда.

Группа №1 доказывала первое свойство: «В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники».

Группа №2 доказывала второе свойство: «Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые».

Аналогично доказывается, что любые двугранные углы прямоугольного параллелепипеда прямые.

Группа №3 доказывала основное свойство прямоугольного параллелепипеда: «Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений».

Доказательство: Обратимся к рисунку 2.37, на котором изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем по формуле, что

$$AC_1{}^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1{}^2. \qquad (5)$$

Так как ребро CC_1 перпендикулярно к основанию $ABCD$, то угол ACC_1 прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем формулу 6:

$$AC_1{}^2 = AC^2 + CC_1{}^2. \quad (6)$$

Но AC – диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1{}^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1{}^2$.

После этого должен выступали представители каждой группы у доски, предоставляя чертеж, и объясняя каждый свой шаг. Во время выступления остальные учащиеся записывали доказательства других групп в тетради. На данном этапе происходило включение в систему знаний и повторение.

После изучения новой темы обычно идет урок ее закрепления и решения задач. В начале урока мы предложили учащимся небольшую самостоятельную работу по вариантам на закрепление данной темы (таблица 8)[8]:

Таблица 8 – Варианты для самостоятельной работы

Вариант 1 Задача 1.Три измерения прямоугольного параллелепипеда равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите: 1) диагональ; 2) сумму площадей всех его граней. Задача 2. Диагональ куба равна 6 см. Найдите косинус угла между диагональю и плоскостью одной из его граней.	Вариант 2 Задача 1. Основание прямоугольного параллелепипеда квадрат со стороной $1\frac{3}{5}$ м, а его высота равна $\frac{4}{5}$ м. Найдите: 1) диагональ; 2) сумму длин всех его рёбер. Задача 2. Три ребра параллелепипеда, имеющие общую вершину, равны 2 дм, 3 дм и 5 дм, а одна из его диагоналей равна 6 дм. Является ли этот параллелепипед прямоугольным?
Вариант 3 Задача 1. Три измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6 см, 10 см и 15 см. Найдите диагональ этого параллелепипеда. Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ – квадрат, $AD = 2$ м, $AC_1 = 2\sqrt{6}$ м. Найдите AA_1.	Вариант 4 Задача 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $BB_1 = 2$ м, $BA_1 = 5$ м, $AC_1 = \sqrt{38}$ м. Найдите AD. Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде основание – квадрат со стороной 8 дм, а высота равна 4 дм. Найдите диагональ.

На самостоятельную работу ушло не больше 15 минут. После решения учащимся было предложено обменяться тетрадями (1 вариант с 3 вариантом, 2 вариант с 4 вариантом) для самостоятельной проверки работ по пятибалльной шкале.

Далее учащимся было предложено решить самостоятельно две задачи. К доске вышли двое учеников (весь класс решал данные задачи в тетради). Задачи выводились на экран:

Задача 1: «Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины»; (№ 36 из пункта 46, [20].)

Задача 2: «В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $AB_1 = \sqrt{13}$, $AD_1 = 5$, $AC = 2\sqrt{5}$. Чему равна сумма всех ребер параллелепипеда?» (на закрепление понятия прямоугольного параллелепипеда).

Двое учащихся молча решали свои задачи, записывая решение на доске. Выступал первым тот, кто раньше справился, объяснив при том каждый свой шаг. Также каждый из них предоставил рисунок своей задачи, объяснив алгоритм построения (рисунок 2.41 и рисунок 2.42).

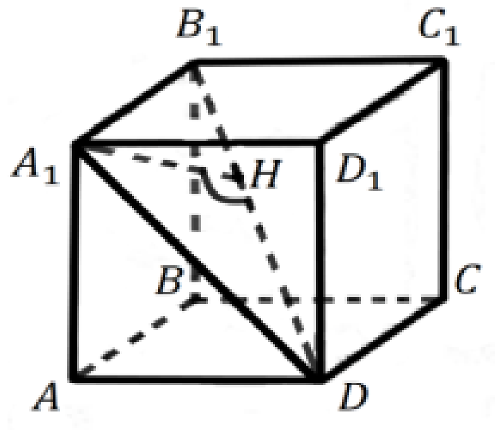

Рисунок 2.41 – Чертеж к задаче 1

Решение задачи 1: Имеем из треугольника AA_1D, что $A_1D = a\sqrt{2}$. Также имеем, что треугольник A_1B_1D – прямоугольный, $A_1B_1 = a$,

$A_1D = a\sqrt{2}$. Квадрат диагонали в прямоугольном параллелепипеде равен сумме квадратов трех его измерений, то есть по формуле 7

$$B_1D^2 = a^2 + a^2 + a^2, \tag{7}$$

так что $B_1D = a\sqrt{3}$.

Площадь треугольника A_1B_1D равна: $S = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot A_1D = \frac{1}{2}A_1H \cdot B_1D$, так что $A_1H = \frac{A_1B_1 \cdot A_1D}{B_1D} \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ответ: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

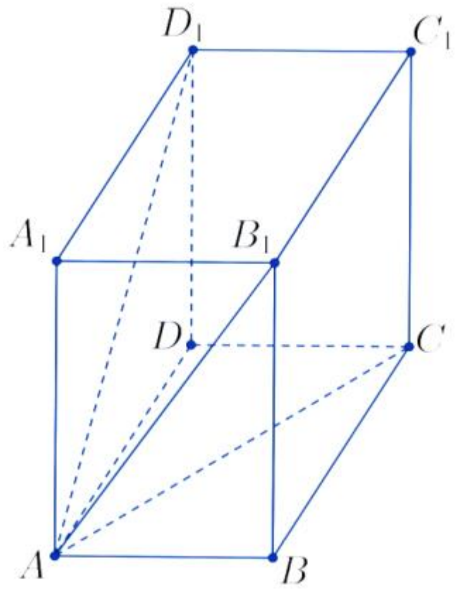

Рисунок 2.42 – Чертеж к задаче 2

Решение задачи 2: Заданные отрезки являются диагоналями соответствующих граней параллелепипеда. Значит, каждый отрезок можно выразить с помощью теоремы Пифагора соответствующего прямоугольного треугольника: ${AB_1}^2 = AB^2 + {AA_1}^2$, $AC^2 = AB^2 + AD^2$, ${AD_1}^2 = AD^2 + {AA_1}^2$.

Из этих уравнений можно найти неизвестные стороны параллелепипеда:

$AB^2 = \frac{{AB_1}^2 + AC^2 - {AD_1}^2}{2} = \frac{13+20-25}{2} = 4 \Rightarrow AB = 2$,

${AA_1}^2 = \frac{{AB_1}^2 + {AD_1}^2 - AC^2}{2} = \frac{13+25-20}{2} = 9 \Rightarrow AA_1 = 3$,

$AD^2 = \frac{AC^2 + {AD_1}^2 - {AB_1}^2}{2} = \frac{20+25-13}{2} = 16 \Rightarrow AD = 4$.

Найдены три различных ребра параллелепипеда. Всего в параллелепипеде 12 ребер – по 4 каждого вида. Тогда сумма всех ребер будет равна:

$$S = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 36.$$

Оставшуюся часть урока мы посвятили «бенефисной» задаче (на предыдущем занятии на дом была задана задача из профильного ЕГЭ по математике двум учащимся (одному среднему, а другому посильнее) для самостоятельного решения) [24].

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

1) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

2) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C (рисунок 2.43).

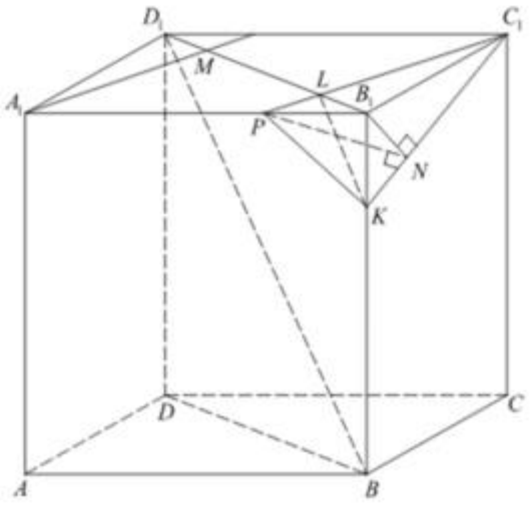

Рисунок 2.43 – Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Решение.

1) В плоскости BB_1D_1 через точку K проведем прямую параллельно BD_1. Пусть эта прямая пересекает диагональ B_1D_1 в точке L. В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую C_1L_1, пусть она пересекает сторону

A_1B_1 в точке P. Треугольник KPC_1 – сечение, проходящее через точки K и C_1 параллельно прямой BD_1. Действительно, прямая BD_1 параллельна плоскости сечения, так как параллельна лежащей в нем прямой KL.

В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ через точку A_1 проведем прямую параллельно C_1P. Пусть она пересекает D_1B_1 в точке M. По подобию треугольников имеем: $B_1L : B_1D_1 = B_1K : B_1B = 1 : 4$,

$$D_1M : D_1B_1 = 1 : 4.$$

Поэтому:

$$ML : LB_1 = 2 : 1.$$

Тогда:

$$A_1P : PB_1 = ML : LB_1 = 2 : 1.$$

Что и требовалось доказать.

2) Пусть теперь точка N – основание высоты B_1N прямоугольного треугольника KB_1C_1. B_1N – является проекцией наклонной PN на плоскость BB_1C_1C. Тогда угол PNB_1 – линейный угол искомого двугранного угла. Имеем:

$$PB_1 = \frac{1}{3}A_1B_1 = \frac{4}{3}, S_{B_1C_1K} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2,$$

$$C_1K = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, B_1N = \frac{2S}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}},$$

$$tgPNB_1 = \frac{PB_1}{B_1N} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Тем самым $\angle PNB_1 = arctg\ \frac{\sqrt{17}}{3}$. Ответ: 2) $arctg\ \frac{\sqrt{17}}{3}$.

Выступление начинал учащийся, который послабее. «Сильный» при желании дополнял его решение. После этого выступал «сильный» учащийся. Весь класс при этом записывал решение задачи в тетради, комментировал решения выступающих, задавал им вопросы. Так как задача из второй части ЕГЭ, то после «бенефиса» мы показали всему классу грамотное оформление решения.

Для контроля знаний проводилось зачетное занятие. В начале урока мы дали учащимся список вопросов по всем пройденным темам, по которому учащиеся опрашивали друг друга (его мы составили из контрольных вопросов, рассмотренных нами учебников Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова и А.Д. Александров) [1, 4, 20].

1. Сколько углов образуется при пересечении двух плоскостей? Как они соотносятся между собой?
2. Что такое двугранный угол? Как он измеряется?
3. Какие составляющие двугранного угла вы знаете?
4. Какие плоскости называются взаимно перпендикулярными?
5. Какой признак перпендикулярности плоскостей вы знаете?
6. Что такое прямоугольный параллелепипед?
7. Сколько двугранных углов он имеет?
8. Что такое куб?
9. Докажите, что у прямоугольного параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
10. Перечислите, какие вы знаете свойства: а) параллелепипеда? б) прямоугольного параллелепипеда?
11. Сформулируйте теорему о трех измерениях прямоугольного параллелепипеда.

После окончания взаимного опроса мы раздали учащимся билеты для устного ответа (для билетов выборочно были использованы контрольные вопросы к главе «Многогранники» из учебника А.В. Погорелова) [20]. Примеры билетов (таблица 9):

Таблица 9 – Билеты по теме «Прямоугольный параллелепипед»

Билет 1	Билет 2
– Сформулируйте определение двугранного угла. – Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его	– Как измеряется двугранный угол? – Докажите, что диагонали прямоугольного параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Продолжение таблицы 9

1	2
измерений. – Диагональ квадрата перпендикулярна к некоторой плоскости. Как расположена другая диагональ квадрата по отношению к этой плоскости?	Верно ли утверждение, что все прямые, перпендикулярные к данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости?

Сразу же после ответов на билеты шла письменная контрольная работа (данная работа была сделана по вариантам. Ее мы составили из пяти тестовых заданий и одной геометрической задачи на доказательство). В качестве тестовых заданий (без вариантов ответа) были взяты некоторые задания из тестов П.И. Алтынова по теме «Параллелепипед и призма», а в качестве геометрических задач были взяты некоторые задания из задачника Б.Г. Зива по теме «Перпендикулярные плоскости. Прямоугольный параллелепипед» [2, 9] (таблица 10):

Таблица 10 – Пример контрольной работы

1 вариант	2 вариант
Задание 1.Площадь диагонального сечения куба равна $8\sqrt{2}$ см^2. Найдите площадь поверхности куба. **Задание 2**. Длины диагоналей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, равны 5 см, $2\sqrt{13}$ см и $3\sqrt{5}$ см. Найдите диагональ параллелепипеда. **Задание 3.** Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $90°$. Точка A удалена от граней двугранного угла на 8 см и 6 см. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла. **Задание 4**. Площади двух диагональных сечений прямого параллелепипеда равны 48 см^2 и 30 см^2, а боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь основания параллелепипеда, если оно является ромбом. **Задание 5.** 1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки E, F и K, и докажите, что плоскости сечения и	**Задание 1**.Площадь поверхности куба равна $18\sqrt{2}$ см^2. Найдите площадь диагонального сечения этого куба. **Задание 2.** Длины диагоналей трех граней прямоугольного параллелепипеда, имеющие общую вершину, равны $2\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{17}$ см и 10 см. Найдите диагональ параллелепипеда. **Задание 3.** Двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β, равен $30°$. Точка M удалена от граней двугранного угла на $\sqrt{3}$ дм и на $\sqrt{1}$ дм. Найдите расстояние от точки M до ребра двугранного угла. **Задание 4**. Площади двух диагональных сечений прямого параллелепипеда равны 16 см^2 и 27 см^2. Основанием параллелепипеда является ромб, площадь которого равна 24 см^2. Найдите длину бокового ребра параллелепипеда. **Задание 5.** 1) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через AD и точку E и докажите, что плоскость сечения

Продолжение таблицы 10

1	2
основания взаимно перпендикулярны. 2) Найдите AD. **Задание 6.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ – квадрат, $AD = 2$; $AC_1 = 2\sqrt{6}$. 1) Найдите CC_1. 2) Докажите, что плоскости ACC_1 и BB_1D_1 взаимно перпендикулярны.	перпендикулярна плоскости боковой грани DD_1C_1C. 2) Найдите AA_1. **Задание 6.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковая грань DD_1C_1C – квадрат, $DC = 3$; $BD_1 = \sqrt{22}$. 1) Найдите BC. 2) Докажите, что плоскости BCD_1 и DC_1B_1 взаимно перпендикулярны.

На следующем уроке был проведен анализ работ, расставив акценты на теоретических обоснованиях решения задач, проведя необходимые доказательства.

В данных формах урока преобладают наглядный, развивающий, исследовательский и проблемный метод изучения материала, когда усвоение учебного материала зависит от применяемых в процессе обучения наглядных чертежей, рисунков, моделей (использование которых позволяет показать понятность и простоту применения того образа, который учащийся создал в процессе воображения, восприятия и мышления);

Разработанные нами технологические цепочки по изучению тем «Двугранный угол», «Перпендикулярность плоскостей» и «Прямоугольный параллелепипед» способствуют наилучшему их усвоению. Также данные вопросы будут актуальны на этапе подготовки старшеклассников к профильному экзамену по математике. Данные цепочки позволяют эффективно подготовить школьников к решению задач: №8 из первой части ЕГЭ по математике базового уровня; № 14 из второй части ЕГЭ по математике профильного уровня.

2.3 Организация и анализ результатов педагогического эксперимента

Опыт внедрения разработанных нами технологических цепочек и различных средств формирования умений решать стереометрические задачи на уроках геометрии показал их результативность по нескольким направлениям:

– поддержание интереса учащихся к изучаемому учебному материалу путем воздействия на их мотивационную сферу;

– реализация внутрипредметных и межпредметных связей.

К целям эксперимента мы отнесли:

– выявление уровня сформированности у учащихся 11-классов умений решать стереометрические задачи;

– разработка и апробирование технологических цепочек по усвоению новых знаний по данной теме, направленных на формирование у старшеклассников умений решать стереометрические задачи;

– подтверждение гипотезы о том, что применение в процессе обучения перпендикулярности в пространстве разработанного нами содержательного наполнения технологий развивающего и проблемного обучения и технологии эффективных уроков А.А. Окунева, а также реализация его в процессе обучения, будет способствовать развитию у школьников умений решать стереометрические задачи.

В целях проверки сформулированной в исследовании гипотезы и эффективности разработанной технологии формирования у учащихся умений решать стереометрические задачи проводился формирующий педагогический эксперимент. Цель формирующего эксперимента – проверить, смогли ли учащиеся восполнить все пробелы в знаниях, после проведенных уроков, по данной теме, а также научились ли они видеть перспективу решения задачи разными методами, проводить содержательный анализ задачи, выделять существенное, обосновывать свои действия и ход мыслей.

Полученные на нулевом срезе результаты позволили сделать вывод о низком уровне сформированности у учащихся умений решать стереометрические задачи, что объясняется отсутствием целенаправленной работы учителя по формированию и развитию этих умений.

Контрольный срез проводился в 2021 г. Его целью являлось подтверждение эффективности разработанной в диссертационном исследовании технологии формирования у учащихся умений решать стереометрические задачи в процессе обучения.

По результатам решения заданий контрольного среза можно было судить об уровнях сформированности умений работать с пространственными фигурами. Все задания объединяла общая цель – развить у учащихся умения решать стереометрические задачи при изучении стереометрии 10 класса.

Контрольный срез проходил на уроке в виде контрольной работы среди учащихся 10 класса по пройденным темам. Учащимся были предложены те же 3 задачи по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей», которые предлагались 11 классу в процессе констатирующего эксперимента.

Процесс проведения контрольной работы показал, что задачи привели учащихся в меньшую растерянность, чем в процессе проведения констатирующего эксперимента, а подсказки учителя практически не потребовались.

Задания среза представлены следующим образом.

Задача 1. Из точки M проведен перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что треугольники AMD и MCD прямоугольные.

Дано: $ABCD$ – прямоугольник. Отрезок MB перпендикулярен $ABCD$ (рисунок 2.44).

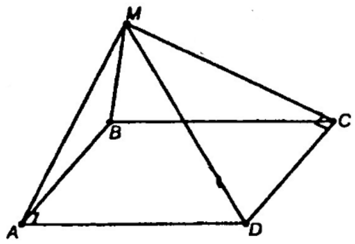

Рисунок 2.44 – рисунок к задаче 1

Доказать: Треугольники AMD и MCD – прямоугольные.

Доказательство:

1. По свойству прямоугольника угол $BAD = 90^\circ$ и угол $BCD = 90^\circ$.

2. MA – наклонная, AB – проекция, AD перпендикулярна AB, значит по теореме о трех перпендикулярах MA перпендикулярна AD, отсюда угол $MAD = 90^\circ$, треугольник MAD – прямоугольный.

3. MC – наклонная, BC – проекция, DC перпендикулярна BC, значит по теореме о трех перпендикулярах MC перпендикулярна CD, отсюда угол $MCD = 90^\circ$, треугольник MCD – прямоугольный.

Задача 2. Из вершины B треугольника ABC, сторона которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, угол $BAC = 150^\circ$ и двугранный угол $BACB_1 = 45^\circ$.

Дано: Точки A и C принадлежат плоскости α. $AB = 2$. Двугранный угол $BACB_1 = 45^\circ$, угол $BAC = 150^\circ$ (рисунок 2.45).

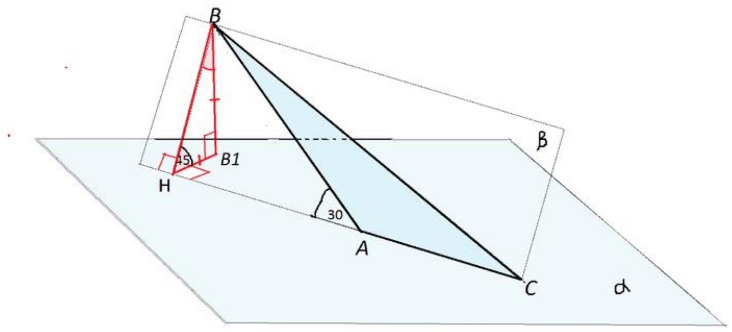

Рисунок 2.45 – Рисунок к задаче 2

Решение:

1. Необходимо продлить сторону AC треугольника ABC от вершины A. Также необходимо опустить перпендикуляр из точки B на плоскость α. Далее опускается из B перпендикуляр BH на AC. По теореме о трех перпендикулярах BH – наклонная, перпендикулярна AC, значит и проекция B_1H перпендикулярна AC.

2. Расстояние от точки до прямой измеряется длиной отрезка, проведенного из точки перпендикулярно этой прямой. Получается, что ВН это наше расстояние от B до AC. Так как, по условию задачи угол $BAC = 150°$, смежный ему угол $BAH = 30°$. Следовательно, $BH = AB \cdot \sin 30° = 1$ см.

3. Пусть треугольник ABC лежит в плоскости β. Данная плоскость пересекается с плоскостью α по прямой AC. Из этого следует, что величина двугранного угла $BACB_1$ равна величине его линейного угла BHB_1. Значит угол $BHB_1 = 45°$.

4. Опущенный на плоскость α перпендикуляр BB_1 – это расстояние от точки B до плоскости α. Также известно, что BB_1 – это катет прямоугольного равнобедренного треугольника, у которого углы при

основании равны 45°. Из этого следует, что $BB_1 = BH \cdot \sin 45° = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

Ответ: Расстояние от B до плоскости $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ см, до прямой $AC =$ 1 см.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 A_1B_1D перпендикулярны.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рисунок 2.46)

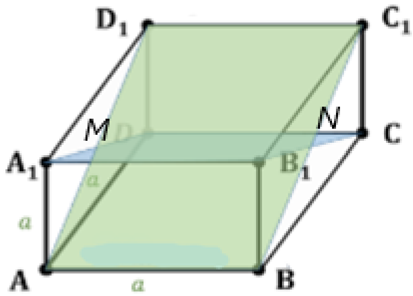

Рисунок 2.46 – Рисунок к задаче 3

Доказать: ABC_1 перпендикулярна $A_1B_1C_1$.

1. Рассмотрим BB_1C_1C по свойству куба это квадрат, диагонали которого перпендикулярны.

2. Прямая D_1C_1 параллельна A_1B_1 (стороны квадрата), значит, параллельна и плоскости A_1B_1C (признак параллельности прямой и плоскости).

3. Плоскость D_1C_1A проходит через прямую D_1C_1, параллельную плоскости A_1B_1C, и пересекает ее. Значит, линия пересечения плоскостей MN параллельна D_1C_1 по свойству параллельности прямой и плоскости: если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

4. Покажем, что угол C_1NC является линейным углом двугранного угла между плоскостями ABC_1 и $A_1B_1C_1$. Прямая D_1C_1

перпендикулярна прямым CC_1 и C_1B_1 (т.к. грани – квадраты), а значит плоскости BB_1C (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

5. Прямая MN параллельна D_1C_1, а значит тоже перпендикулярна плоскости BB_1C, а значит и прямым B_1C и BC_1 (свойство параллельных прямых). Из этого следует, что плоскость ABC_1 перпендикулярна плоскости A_1B_1D.

По данным работы были найдены проценты выполнения умственных операций. В таблице указаны только те операции, которые относятся к перпендикулярности в пространстве (таблица 11).

1 задача. Применение теоремы о трех перпендикулярах (3 и 4).

2 Задача. Применение теоремы о трех перпендикулярах (1) и определения линейного угла двугранного угла (3).

3 Задача. Применение признака параллельности прямой и плоскости (2), свойства параллельных прямых и плоскости (3), определения линейного угла двугранного угла (4), свойства параллельных прямых (5), признака перпендикулярности прямой и плоскости (4).

Таблица 11 – Количество выполненных операций

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Ученик</td><td colspan="3">Количество выполненных операций</td></tr>
<tr><td>Задача 1
№ операции\
выполнение</td><td>Задача 2
№ операции\
выполнение</td><td>Задача 3
№ операции\
выполнение</td></tr>
<tr><td></td><td>Ученик 1</td><td>3. Выполнено
4. Выполнено</td><td>1. Выполнено
3. Ошибка</td><td>2. Выполнено
3. Выполнено
4. Не выполнено
5. Не выполнено</td></tr>
<tr><td></td><td>Ученик 2</td><td>3. Выполнено
4. Ошибка</td><td>1. Выполнено
3. Выполнено</td><td>2. Выполнено
3. Не выполнено
4. Выполнено
5. Не выполнено</td></tr>
<tr><td></td><td>Ученик 3</td><td>3. Выполнено
4. Выполнено</td><td>1. Не выполнено
3. Не выполнено</td><td>2. Выполнено
3. Выполнено
4. Выполнено
5. Не выполнено</td></tr>
<tr><td></td><td>Ученик4</td><td>3. Выполнено
4. Ошибка</td><td>1. Не выполнено
3. Не выполнено</td><td>2. Не выполнено
3. Не выполнено
4. Не выполнено
5. Не выполнено</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 11

	Ученик 5	3. Выполнено 4. Выполнено	1. Выполнено 3. Выполнено	2. Выполнено 3. Выполнено 4. Не выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 6	3. Выполнено 4. Выполнено	1. Не выполнено 3. Не выполнено	2. Выполнено 3. Выполнено 4. Выполнено 5. Не выполнено
	Ученик 7	3. Ошибка 4. Ошибка	1. Выполнено 3. Выполнено	2. Выполнено 3. Выполнено 4. Выполнено 5. Выполнено
	Ученик 8	3. Выполнено 4. Выполнено	1. Выполнено 3. Выполнено	2. Выполнено 3. Выполнено 4. Выполнено 5. Выполнено

Процент учеников, не знающих:

1. Теорему о трех перпендикулярах: 3 учеников из 8 (37,5%) не справились в задаче № 1. И 3 учеников не справилось в задаче № 2. По количеству операций процент выполнения 17/24= 70,9%.

2. Умение оределять двугранный угол: 4 учеников из 8 (50%) не справились в задаче № 2. И 3 ученика не справилось в задаче № 3. По количеству операций процент выполнения 9/16= 56,25%.

3. Признак параллельности прямой и плоскости: 1 ученик из 8 не справился в задаче № 3. По количеству операций процент выполнения 7\8=87,5%.

4. Свойство параллельности прямой и плоскости: не справилось 2 ученика из 8 в задаче № 3. По количеству операций процент выполнения 6\8=75%.

5. Признак перпендикулярности прямой и плоскости: не справилось 3 ученика из 8 в задаче № 3. По количеству операций процент выполнения 5\8=62,5%.

6. Признак перпендикулярности двух плоскостей: не справилось 6 учеников из 8 в задаче № 3. По количеству операций процент выполнения 2\8=25%.

Из представленных решений видно, что учащиеся стали меньше затрудняться в проведении содержательного анализа задачи, стали лучше видеть перспективы использования рационального метода. Третья задача вызвала больше всего затруднений. Но некоторые ученики смогли предоставить ее подробное решение.

Анализ результатов контрольной работы позволил сделать вывод о том, что учащиеся восполнили большую часть пробелов в знаниях по данной теме, после проведения специального целенаправленного обучения. По сравнению с констатирующим срезом ошибок наблюдалось гораздо меньше.

Сравнительный анализ результатов нулевого и контрольного срезов представлен в таблице 12.

Таблица 12 – Сравнительный анализ умений

Умение	Этап эксперимента	% учеников, владеющих умением
Применять теорему о трех перпендикулярах	Нулевой срез	46
	Контрольный срез	70
Определять двугранный угол	Нулевой срез	19
	Контрольный срез	56
Применять признак параллельности прямой и плоскости	Нулевой срез	0
	Контрольный срез	87,5
Применять свойство параллельности прямой и плоскости	Нулевой срез	0
	Контрольный срез	75
Применять признак перпендикулярности прямой и плоскости	Нулевой срез	0
	Контрольный срез	62,5
Применять признак перпендикулярности двух плоскостей	Нулевой срез	0
	Контрольный срез	25

Таким образом, в 10 классе результаты улучшились, благодаря тому, что процесс обучения шел по разработанной технологии.

Назовем те умения, которые оказались сформированы лучше и хуже остальных (таблица 13):

Таблица 13 – Сформированные умения

Лучше всего сформированы	Хуже всего сформированы
– сопоставлять различные изображения образа геометрической конфигурации (оперировать различной наглядностью); – анализировать образ геометрической конфигурации; вычленять форму образа геометрического объекта; – конструировать образы новых геометрических конфигураций и воспроизводить их с помощью модели.	Самым сложным оказалось проводить работу по формированию умения синтезировать образ геометрической конфигурации; – умения определять взаимное расположение данного образа геометрического объекта относительно других образов; – умения определять взаимное расположение отдельных элементов образа геометрического объекта.

Причина того, что эти умения оказались сформированы хуже связана, прежде всего, с тем, что сами задания на эти умения достаточно сложны, а также сказывается недостаточный уровень сформированности у учащихся 10-х классов умений решать стереометрические задачи, которые необходимо целенаправленно развивать, подбирая соответствующие задания и упражнения, приучая школьников рассуждать самостоятельно.

Формирующий срез показал, что большая часть умений полностью сформировались на данном этапе у школьников.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что с помощью нашей технологии вышеперечисленные умения в большей степени сформированы. На основе проведенных срезов и анализа занятий была сделана количественная и качественная оценка результатов проведенного апробирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тема «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей» наиболее актуальна при решении геометрических задач, которые являются наиболее сложными заданиями в профильном ЕГЭ по математике. Помимо этого приобретенные знания и умения необходимы также в повседневной жизни. Но традиционное строгое научное изложение этой темы в учебниках и в методических пособиях приводит к потере интереса учащихся к ней. В связи с этим учащиеся плохо владеют понятиями темы при решении стереометрических задач: не могут распознать двугранный угол, доказать перпендикулярность двух плоскостей.

На начальном этапе исследования был проведен анализ состояния проблем, возникающих в процессе обучения данной теме в некоторых исследовательских работах и источниках интернета. На основании анализа был сделан вывод, что выпускники показывают весьма низкий уровень геометрических знаний и умений в планиметрии, и, особенно в стереометрии. При изображении фигуры, особенно в стереометрии, многие учащиеся допускают ряд условностей, в результате чего чертеж обычно не полностью соответствует условию задачи. В целях проверки сформированности у учащихся умений решать стереометрические задачи проводился констатирующий эксперимент. Анализ результатов контрольной работы позволил сделать вывод о необходимости проведения специального целенаправленного обучения. Проведенный анализ обосновывает актуальность нашей темы исследования. Проблемы, возникающие у старшеклассников, в процессе решения стереометрических задач всегда были и есть до сих пор. Именно поэтому необходимо разработать такую технологию обучения, которая будет направлена на решение большого количества разнообразных стереометрических задач, и которая в последствие поможет сократить самые распространенные ошибки, допускаемые учащимися в процессе их решения.

В связи с этим, далее были рассмотрены особенности технологического подхода в процессе обучения стереометрии. Рассмотрели характеристики технологии, ее структуру и виды. Было выявлено, что технологический подход к обучению предусматривает точное инструментальное управление учебным процессом и достаточно гарантированное достижение поставленных учебных целей. Необходимо создавать особые условия, нацеленные на наилучшее усвоение данной темы учащимися. Основным условием является положение о том, что эффективное обучение и развитие учащегося может происходить только в процессе целенаправленной учебной деятельности, а именно в момент перевода ученика из объекта в субъект деятельности на основе обучения его приёмам учебной деятельности. В целом проведенный нами анализ показывает: чтобы создать свою технологию обучения, способствующую наилучшему усвоению перпендикулярности в пространстве, необходимо взять за основу несколько технологий и разработать их содержательное наполнение. Нами были выбраны технологии развивающего и проблемного обучения и технология эффективных уроков А.А. Окунева.

Далее мы рассмотрели теоретические особенности взятых нами технологий, а именно цели и задачи каждой технологии, обосновали их выбор. Мы пришли к выводу о том, что в основе данных технологий лежит идея деятельностного подхода, заключающиеся в том, что новые знания не даются в готовом виде. После этого было выявлено, что наилучший симбиоз технологий развивающего и проблемного обучения и подхода реализован в технологии эффективных уроков А.А. Окунева. Данная технология была нами взята за основу.

Главной характеристикой данной технологии являются организация эффективной работы педагога, нацеленной на усвоение учащимися стандартных знаний, умений и навыков и максимальное развитие способностей учащихся.

Учитывая все выше сказанное, нами были разработаны технологические цепочки обучения старшеклассников теме «Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей» в контексте технологического подхода, которые могут быть полезны учителям математики при обучении учащихся этой теме.

В целях проверки сформулированной в исследовании гипотезы и эффективности разработанной технологии формирования у учащихся умений решать стереометрические задачи проводился педагогический эксперимент, в процессе которого мы пришли к выводу о том, что учащиеся стали меньше затрудняться в проведении содержательного анализа задачи, стали лучше видеть перспективы использования рационального метода решения.

Таким образом, все поставленные задачи исследования решены, и цель исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Александров, А.Д. Учебник по геометрии для 10–11 классов. Математика: Алгебра и начало математического анализа, геометрия для общеобразовательных учреждений [Текст]: базовый и углубленный уровни / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – Москва : Просвещение, 2014. – 257 с. – ISBN 978–5–09–028109–6

2 Алтынов, П.И. Геометрия. Тесты. 10–11 классы [Текст]: учебно–методическое пособие / П.И. Алтынов. – Москва: Дрофа, 2001. – 80 с. – ISBN 5–7107–4467–0

3 Амонашвили, Ш.А. Воспитательная и образовательная функция оценки учения школьников [Текст] / Ш.А. Амонашвили. – Москва: Педагогика, 1984. – 296 с.

4 Атанасян, Л.С. Учебник по геометрии для 10–11 классов общеобразовательных учреждений [Текст]: базовый и профильный уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.]; под научн. руков. А. Н. Тихонова. – Москва: Просвещение, 2021. – 257 с. – ISBN 978–5–09–046610–3

5 Баксанский, О.Е. Проблемное обучение: обоснование и реализация [Текст] / О.Е. Баксанский, М.В. Чистова // Наука и школа. – 2000. – №1. – С. 19–25.

6 Веселовский, С.Б. Дидактические материалы для 10 класса [Текст] / С.Б. Веселовский, В.Д. Рябчинская. – Москва: Просвещение, 2012. – 80 с. – ISBN 978–5–09–011223–9

7 Давыдов, В.В. Теория развивающего обучения [Текст] / В.В. Давыдов. – Москва: ИНТОР, 1996. – 544 с. – ISBN 5–89404–001–9

8 Ершова, А.П. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10–11 класса [Текст]: разноуровневые дидактические

материалы / А.П. Ершова, В.В. Голобородько. – Харьков: Гимназия, 2003. 176с. – ISBN 978–5–89237–308–1

9 Зив, Б.Г. Дидактические материалы. Задачи к урокам геометрии. 7–11 классы [Текст]: пособие для учителей, школьников и абитуриентов / Б.Г. Зив. – Санкт-Петербург: Петроглиф, 2016. – 608 с. – ISBN 978–5–09–042304–5

10 Идиатулин, В.С. Принцип проблемности в обучении [Текст] / В.С. Идиатулин // Школьные технологии. – 2010. – № 4. – С. 29–42

11 Каратаева, Н.Г. Аспекты поискового подхода при решении нестандартных задач в концепции проблемного обучения [Текст] / Н.Г. Каратаева // Научные проблемы гуманитарных исследований. – 2009. – № 12. – С. 58–67

12 Лебедева, В.П. Психодидактические аспекты развивающего образования [Текст] / В.П. Лебедева, В.А. Орлов, В.И. Панов // Педагогика. – 1996. – № 6. – С. 25–30. – ISBN 978–5–91180–152–6

13 Методические рекомендации к курсу геометрии 9–10 классов (по пробным учебникам Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Поздняка) [Текст] / под ред. Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова. – Москва: Просвещение, 2009. – 176 с. – ISBN 5–09–000611–3

14 Мудрик, А.В. Современный старшеклассник [Текст] / А.В. Мудрик // Хрестоматия по возрастной психологии. – Москва: ИПП, 1996. – 476 с. – ISBN 5–87977–017–6

15 Окунев, А.А. Как учить не уча, или 100 мастерских по математике, литературе и для начальной школы [Текст] / А.А. Окунев. – Санкт-Петербург: Питер, 1996. – 444 с. – ISBN 5–88782–080–2

16 Окунев, А.А. Мы не имеем права уставать [Текст] / А.А. Окунев // Народное образование. – 1988. – № 10. – С. 51–53

17 Окунев, А.А. Сменить акцент [Текст] / А.А. Окунев // Народное образование. – 1991. – №1. С. 3 – 5

18 Окунев, А.А Спасибо за урок, дети [Текст] / А.А. Окунев – Санкт-Петербург: Гранит, 2010. – 165 с. – ISBN 5–09–000830–2

19 Петерсон, Л.Г. Требование к составлению плана урока по дидактической системе деятельностного метода [Текст] / Л.Г. Петерсон, М.А. Кубышева, Т.Г. Кудряшова. – Москва: Бином, 2006. – 149 с. – ISBN 5–93549–023–4

20 Погорелов, А.В. Учебник по геометрии для 10–11 классов общеобразовательных учреждений [Текст]: базовый и профильный уровни / А.В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 2014. – 178 с. – ISBN 978–5–09–032026–9

21 Пугачев, А.С. Возрастные и индивидуальные особенности развития личности [Текст] / А.С. Пугачев // Молодой ученый. – 2013. – № 12. – С. 506–510. – ISSN 2072–0297

22 Пырков, В.Е. Авторские образовательные технологии в обучении геометрии [Текст]: учебно–методическое пособие для студентов педвузов и педколледжей мат. спец / В.Е. Пырков. – Ростов на/Д: ПИ ЮФУ, 2009. – 43 с.

23 Саакян, С.М. О проведении зачетов по геометрии в X–XI классах [Текст] / С.М. Саакян // Математика в школе. – 2012. – № 1. – С. 25–35. – ISBN 978–5–09–043092–0

24 Смирнов, В.А. Математика. Задача С2. Геометрия. Стереометрия. ЕГЭ–2011 [Текст] / В.А. Смирнов; под ред. А.Л. Семенова. – Москва: МЦНМО. 2011. – 64 с. – ISBN 978–5–94057–664–8

25 Соловьева, О.В. Закономерности развития познавательных способностей школьников: возрастная и педагогическая психология [Текст] / О.В. Соловьева // Вопросы психологии. – 2004. – № 3. – С. 22–35

26 Ясвин, В.А. Образовательная среда: от моделирования к проектированию [Текст] / В.А. Ясвин. – Москва: Смысл, 2001. – 365 с. – ISBN 5–89357–09–1

27 Ященко, И.В. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2. ЕГЭ 2015 [Текст] / И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров [и др.]. – Москва: Экзамен, 2016. – 215 с. – ISBN 978–5–377–11080–4