МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика организации обобщающего повторения по теме «Функции» в курсе математики основной школы

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика»

Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
60,38 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«6» июня 2022 г.
зав. кафедрой математики и МОМ
Елена Альбертовна Суховиенко

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-513/087-5-1
Ануфриева Ольга Маратовна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск

2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Одним из ведущих математических и общенаучных понятий является функция. Она сыграла важную роль в изучении реального мира.

Повторение имеет особо важное значение в обучении математике. Оно наиболее оптимальным образом включает в себя как изучение предметным знаниям, так и становление личности ученика в процессе математической деятельности. В тоже время повторение содействует не только предупреждению забывания учащимися опорного материала, но и улучшению знаний учеников в плане повышения уровня их полноты, обобщенности и системности, а также прочности, мобильности и действенности. В силу того, что учащиеся при повторении работают с уже изученным ими учебным материалом, то появляется возможность уделить больше внимания формированию познавательных умений.

Организация повторения в процессе изучения математике представляет собой очень сложную в методическом отношении проблему, предполагающую решение нескольких частных задач. Это и подбор учебного материала для повторения, и определение наиболее эффективных техник и форм организации занятий учащихся на уроках и дома, и выделение места для уроков повторения в структуре учебного процесса. В связи с этим решение этой проблемы был посвящен целый ряд исследований в области теории и методики обучения математике, а также психолого-педагогической науки. Причем она решалась в русле двух направлений.

Таким образом, работа пользуется актуальностью, так как математика требует повторения, чтобы лучше закрепить усваеваемые материалы.

Объект исследования: обучение математике в основной школе.

Предмет исследования: обобщающее повторение по теме функция.

Цель исследования: разработать комплект заданий для обощающего повторения по теме «Функция» и для подготовки к ОГЭ.

Задачи исследования:

– изучить понятие, цели и задачи повторения в школьном курсе математики;

– рассмотреть классификацию видов повторения и их признаки;

– изучить основы по теме «Функция» в школьной программе;

– изучить роль организации обобщающего повторения в школьной программе;

– провести анализ распределения учебного материала по теме «Функция» в школьном курсе алгебры на примере учебников двух авторов А. Г. Мерзляка и А. Г. Мордковича;

– разработать задания по подготовке к ОГЭ по теме «Функция».

Гипотеза: целенаправленная систематическая работа учителя математики по организации повторения по теме функция позволяет улучшить качество математической подготовки учащихся.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕКИЕ ОСНОВЫ ПОВТОРЕНИЯ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Понятие, функции и принципы организации повторения

Повторение – важная часть процесса обучения.

Идея функциональной зависимости восходит к древним временам. Ее содержание проявляется уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действия для чисел, в первых формулах определения площади и объема различных фигур.

В XVII веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт проложили путь к возникновению понятия функции. Ученые разработали единую букву математической символики, которую признали далее массово.

Ввели обозначение известных и неизвестных. Неизвестные обозначали последними буквами латинского алфавита x, y, z, т.д.; известные – начальными буквами этого же алфавита – a, b, c, ... и т.д. Благодаря этому стали записывать общие формулы.

Кроме того, у Декарта и Ферма имеют четкое представление переменной величины и прямоугольной системы координат в геометрических работах. В своей «Геометрии» в 1637 году Декарт дает определение функции. Он утверждает, что функция представляет собой изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы. Декарт систематически рассматривает только те кривые, которые могут быть точно представлены с помощью уравнений, причем в большой степени алгебраических. Таким образом, постепенно понятие функции стало отождествляться с понятием аналитического выражения – формулы.

В 1671 году Ньютон начал понимать под функцией переменную величину, которая изменяется стечением времени. В «Геометрии» Декарта и работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции имело по существу интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями [1].

Исторический анализ основных понятий математики (и в частности понятие функции) необходим учителю математики. Ведь в процессе обучения ребенок проходит те же основные этапы, что и все человечество в процессе формирования самой науки.

Наблюдая за прогрессом организации повторения в процессе преподавания математики в школе, а также за результатами методических исследований в специализированной области [4], можно выделить несколько свойств, характеризующих повторение:

1) основными целями повторения являются совершенствование знаний и развитие ученика;

2) результативность повторения зависит от того, в какой степени обучающийся включён при этом в активную мыслительную работу, требующую от него сравнений, аналогий, сопоставлений, размышления, обобщения и анализа;

3) совершенствование познаний обучающихся при повторении характеризуется развитием качеств знаний учащихся.

Во-первых, повторение способствует сохранению знаний обучающихся, их углублению и расширению.

Во-вторых, знания становятся более мобильными и эффективными.

В-третьих, знания обучающихся обобщаются и систематизируются, поскольку в процессе повторения необходимо выделить самое важное и существенное в материале, а так же зафиксировать связи нового с уже прошедшим. В то же время следует уделять особое внимание обобщенным знаниям, которые выполняют организационную и направляющую роль.

Проведем классификацию типов повторения. В ее основе мы рассмотрим деление по дидактической цели. Обобщение, систематизация и совершенствование знаний, сохранение, углубление и расширение знаний являются основными целями развития учащегося.

Это позволяет нам выделить три вида повторения:

а) способствующее сохранению знаний;

б) углубляющее-расширяющее;

в) обобщающе-систематизирующее [2].

Затем каждая из трех вышеперечисленных целей предполагает решение еще более индивидуальных задач. Например, сохранение уже усвоенного содержит в себе первичное усвоение воспринятого, предупреждение забывания усвоенных знаний, умений и навыков, восстановление забытого, а также подготовка учащихся к восприятию нового материала и к экзаменам. Расширение и углубление знаний содержит уточнение усвоенного и его усиление через рассмотрение различных практических приложений.

Исходя из этого, выделяем следующие типы повторения:

– подготовительное (повторяются опорные знания, обеспечивающие крепкое и сознательное усвоение нового материала, формируются структурные связи нового знания с прежде изученными, подготовка к экзаменам);

– первично-закрепляющее (обеспечивает прочное и сознательное усвоение содержания нового элемента знания);

– предупреждающее (формируются умение и навыки учащихся в практическом применении нового знания, устанавливаются связи нового знания с ранее усвоенными);

– корректирующее (выявляются и устраняются ошибки, допускаемые обучающимися в применении нового знания);

– углубляющее (усиливает прикладную направленность обучения и подготавливает обучающихся к последующему самообразованию);

– обобщающе-систематизирующее (обобщаются и систематизируются изученные обучающимися навыки) [2].

Опираясь на важные цели повторения можно выделить два блока его функций. Первый блок представляет собой функция, направленная на развитие личностных качеств обучающихся. Второй блок составляют функции, направленные на улучшение познаний учащихся. Так как, мы рассматриваем совершенствование знаний как процесс развития качеств знаний, то в состав указанного блока должны входить функции, содержанием которых является развитие определённых качеств.

За основу взяли классификацию качеств знаний учащихся, предложенную И. Я. Лернером [5]:

1. *Развивающая функция повторения*. Данная функция направлена на развитие мышления учащихся, на овладение ими эффективными приёмами умственной деятельности. Основная цель развивающей функции опеределяется общим математическим образованием, то есть формированием личности ученика средствами математики, которая характеризуется такими качествами, как гибкий ум, инициатива, самостоятельность, решительность, мужество.

Это значит, что направленность повторения на формирование у учащихся следующих умений:

а) использовать известные методы научного познания как методы изучения (наблюдение, абстрагирование и конкретизация, сравнение, опыт, анализ и синтез, обобщение и специализация);

б) выделять существенное;

в) классифицировать изучаемые объекты, систематизировать имеющиеся знания, устанавливать причинно-следственные и структурные связи между ними;

г) осуществлять выбор средств и методов для достижения поставленной цели, учитывая конкретные условия;

д) усматривать связь изучаемого материала с окружающей жизнью, с практической деятельностью людей, оценивать практическую значимость материала;

е) проявлять логическую грамотность и качества, присущие научному мышлению и т.д.

Принимая за исходный пункт процесс совершенствования знаний, который можно рассматривать как развитие качеств знаний, можно выделить среди всего многообразия функций повторения несколько основных, содержание которых определяется процессом формирования системы качеств знаний.

Качества знаний тесно связаны между собой. Одни из них обуславливают формирование других. Например, от уровня развития оперативности знаний зависит успешность формирования их гибкости. А такое качество как осознанность обуславливается развитием почти всех остальных качеств. В связи с этим и функции повторения взаимно обуславливают и взаимно проникают друг в друга. Содержание каждой функции определяется развитием не одного, а нескольких качеств знаний. Причем одни и те же качества знаний могут быть включены в содержание нескольких функций.

2. *Функция сохранения изученного материала*. Суть данной функции состоит в том, что в процессе повторения в памяти учащихся фиксируется система существенных знаний и способы их применения. Поддерживается постоянная готовность вывести необходимые знания, основываясь на других опорных знаниях, что является характерными чертами осознанности и прочности знаний. Данная функция обусловленна психологическими особенностями памяти человека. Полученные ранее знания со временем могут утрачиваться школьниками. Что недопустимо. Некоторые объекты изучения, призванные служить формированию категориального строя мышления (например, ключевые научные понятия, методы науки, операционные умения и т.д.) должны сохраняться в памяти в течение достаточно длительного времени. Именно это имеет особое значение в процессе изучения математики. Предметный материал в этом случае настолько связан друг с другом, что при даже маленьких пробелах в усвоении знаний невозможно сознательное восприятие нового материала. Поэтому функция направлена на решение задач, сначала предупреждения

забывания, а уже потом, в случае потери некоторых навыков, умений и знаний, восстановление в памяти учащихся этих знаний или совершенствования неполных, поверхностных и искаженных опорных навыков, умений и знаний.

3. *Функция расширения и углубления знаний*. Полное усваивание представления об основных понятиях предмета и есть суть данной функции. Ее содержание определяется формированием полноты и глубины знаний. Каждый объект действительности отражается в какой-либо совокупности знаний о нём. Чем больше такая совокупность, тем больше и лучше мы знаем данный объект или класс объектов. Таким образом, знания о том или ином объекте классифицируются их объёмом и количеством каких-либо единиц. Расширение знаний достигается не только сообщением информации. Так как знания нужно применять, в том числе и творчески, и поскольку творческое применение знаний, как и всякое другое, всегда строится на каком-то содержании, постольку в результате такого применения одних знаний ученик неизбежно приобретает новые знания. Вся суть творческого усвоения знаний состоит в том, что ранее усвоенные знания применяются в новых условиях и тем самым выясняются их новые связи, и в том, что результатом творчества являются новые знания о действительности или новые способы их получения.

В учебнике А. В. Погорелова это происходит явным образом, а в учебнике Л. С. Атанасяна не явно. После знания о нём постепенно расширяются и углубляются. Выражается это в увеличении числа используемых аксиом и теорем, в формировании у учащихся потребности доказывать всё новые факты, опираясь на известные аксиомы и доказанные теоремы. На заключительном этапе изучения геометрии, в частности планиметрии, учитель с учащимися рассматривает все понятия, положенные в основу и всю совокупность аксиом.

4. *Функция «наращивания» способов деятельности*. Суть данной функции – формирование оперативности и гибкости знаний. Оперативность есть число ситуаций, в которых ученик может очевидно применить то или иное знание, или число способов, которыми он может это сделать.

Выделяется два уровня применения знаний:

а) применение знаний по образцу, в знакомых ситуациях;

б) применение знаний в новых, незнакомых ситуациях, то есть творческое применение.

5. *Обобщающая функция повторения*. Данная функция выделяет главное и общее посредством сравнения, анализа и синтеза, абстрагирования и конкретизации изученного материала. Ее содержание – формирование обобщённости и конкретности знаний. Многие математические факты в школьном курсе математики являются результатом обобщения других понятий и теорем. Например, понятие движения является обобщением его частных видов, а конкретно, симметрии относительно точки и прямой, также поворота, параллельного переноса. Такая взаимосвязь понятий помогает перенести свойства одних понятий на другие, что облегчает усвоение и запоминание материала. При этом оперирование обобщениями без готовности показать, что за этими обобщениями скрывается в конкретной действительности, по большей части обесценивает обобщения. Всякое обобщение, производимое человеком, содержит в скрытом виде систему конкретных знаний и образов, но существенно, чтобы для самой личности эта система была по преимуществу ясной, во всяком случае после осознания своего обобщённого представления.

6. *Систематизирующая функция повторения*. Она направлена на формирование систематичности и системности знаний учащихся. Систематичность знаний характеризуется осознанием состава некоторой совокупности знаний, их иерархии и последовательности, то есть

осознанием одних знаний как базовых для других, но при определённом, заданном угле зрения на эту совокупность. Системность как качество знаний предполагает инвариантность роли того или иного знания. Она предусматривает осознание личностью (учеников) знаний по их месту в структуре научной теории. Учащиеся должны уметь различать и знать, что в данной системе знаний является основным положением, что является следствием, а что приложением. При этом для каждой данной теории статус каждого знания выполняет постоянную функцию.

Таким образом, функция систематизации знаний предполагает:

а) выстраивание изученного материала в сжатую с логической точки зрения структурную систему;

б) демонстрацию взаимосвязей между отдельными вопросами или целыми разделами курса;

в) установление межпредметных связей;

г) овладение учащимися методологическими знаниями, процессом получения знаний, средствами познания (процесс, законы, способы и приёмы получения новых знаний, история развития науки и т.д.).

В данном параграфе дипломной работы на основе изучения психолого-педагогической литературы выделены основные функции и принципы организации повторения.

1.2 Теоретические основы изучения темы «Функция» в школьной программе

Линейка темы «Функции» – это одна из ведущих линий в школьной математике. Обучение ею начинается в 7 классе, а заканчивается в 11. В основной школе происходит изучение следующих понятий: функция, область определения функции, способы задания функции, график функции, возрастание и убывание функции, сохранение знака на промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции, чётная и нечётная функции.

Также рассматриваются простейшие преобразования графиков функций.

После изучения функциональной линии в основной школе учащиеся должны:

- понимать, что функция – это математическая модель, которая позволяет описывать и изучать различные зависимости между реальными величинами, что конкретные типы функций описывают большое разнообразие реальных зависимостей;
- правильно употреблять функциональную терминологию (значение функции, аргумент, график функции, область определения, возрастание и др.) и символику;
- понимать её при чтении текста, в речи учителя, в формулировке задач;
- находить значение функций, заданных формулой, таблицей, графиком, решать обратную задачу;
- находить по графику функции промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, находить наибольшее и наименьшее значения;
- строить графики функций – линейной, прямой и обратной пропорциональностей, квадратичной функции;
- интерпретировать в несложных случаях графики реальных зависимостей между величинами, отвечая на поставленные вопросы [1].

В школьных учебниках место изучения функций различно. В учебниках под ред. Фёдоровой Н. Е. в 7 классе вводятся понятия функции (как зависимость одной переменной от другой), аргумента, области определения функции, графика функции, рассматриваются способы задания функции. Там же изучается прямая пропорциональность, линейная функция и степенные функции вида $y = x^2$, $y = x^3$, их свойства и графики.

В 8 классе рассматриваются обратная пропорциональность и функция $y = \sqrt{x}$. В 9 классе вводятся понятия возрастающей и убывающей функций, чётности и нечётности функций. Рассматриваются квадратичная функция (её график и свойства), простейшие преобразования графиков (на примере квадратичной функции) и степенная функция $y = x^n$ с натуральным показателем.

В учебниках Ю. М. Колягина понятие функции вводится в 7 классе, как зависимость одной переменной от другой. Но здесь не вводится понятие аргумента, области определения функции, а рассмотрены только способы задания функции и график функции. После этого изучаются прямая пропорциональность и линейная функция, их графики. В 8 классе рассматривается квадратичная функция, сначала изучается график и свойства функции $y = x^2$, затем $y = ax^2$, и $y = ax^2 + bx + c$. В 9 классе вводятся понятия области определения функции, возрастание и убывание функции, чётность и нечетность функции. Рассматриваются обратная пропорциональность и степенная функция у = x^n.

В учебниках А.Г. Мордковича функция начинает изучаться в 7 классе. Здесь рассматриваются линейное уравнение с двумя переменными и его график, линейная функция, прямая пропорциональность и функция $y = x^2$, их графики. Учащиеся учатся находить наибольшее и наименьшее значения этих функций на заданном промежутке. Вводится понятие о непрерывных и разрывных функциях, разъясняется запись $y = f(x)$, а также вводится функциональная символика. В 8 классе рассматриваются следующие функции: $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x$ и их графики. В 9 классе вводятся определение функции, способы задания функции, область значения, область определения функции, свойства функций: монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке, чётность и нечётность. Даны наглядно-геометрические представления о непрерывности и выпуклости функции [6].

В учебниках Г. В. Дорофеева изучение функциональной линии начинается в 7 классе. Здесь вводится понятие функции, таблица значений и график функции, пропорциональные переменные. Учащиеся знакомятся с прямой пропорциональностью, с линейной функцией, с функцией $y = \frac{k}{x}$ их свойствами и графиком, а также с графиком линейного уравнения с двумя переменными. В 8 классе изучается функция $y = x^2$, в 9 классе рассматривается квадратичная функция и функция $y = x^n$ (особое внимание уделяется случаю $n = 3$).

Итак, можно сделать вывод, что в учебниках А. Г. Мордковича функциональная линия является ведущей. В других учебниках (выше рассмотренных) внимание уделяется другим содержательно-методическим линиям, а значение функциональной линии в этих учебниках умеренное. В рассмотренных учебниках содержание и место изучения данной содержательной линии отличается несущественно.

В различных учебниках используются различные способы исследования функции.

В учебниках под ред. Макарычева применяется комбинированный метод в 7 и 8 классе, а в 9 классе – аналитический. В учебниках Е. А. Бунимовича, Г. В. Дорофеева используется комбинированный метод, в учебниках А. Г. Мордковича – графический метод.

Остановимся на методике введения общего понятия функции по учебнику алгебры 7-го класса Ю. Н. Макарычева и др., в котором функция трактуется как особого рода зависимость одной переменной от другой. Термин «зависимость» мыслиться как связь между переменными. Такая точка зрения имеет богатые исторические корни, тесно связана с приложениями и позволяет полнее использовать язык графиков. Кроме того, у учащихся уже имеется достаточный опыт в использовании понятия зависимости между величинами. Поэтому целесообразно избирать индуктивный метод с эвристической беседой при введении понятия функции, рассмотрев и проанализировав три-четыре ранее встречающиеся зависимости между переменными, заданные формулой, графиком и таблицей, которые позволили бы раскрыть содержание терминов: «независимая переменная», «зависимая переменная». В учебнике предлагаются четыре задачи на движение, площади квадрата, стоимости проезда, графике температуры, в которых величины выступают как переменные. При этом подчеркнуть, что каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Сообщить, что такая зависимость одной переменной от другой называется функциональной, или функцией. После такой подготовительной работы можно вводить определение, а затем термины «аргумент», «область определения функции», «значения аргумента и функции». Важно обратить внимание на то, что термин «функция» в учебнике употребляется в двух смыслах: как особого рода зависимость между двумя переменными, так и сама зависимая переменная. Для учащихся должны быть привычными обороты речи типа «площадь квадрата является функцией длины его стороны», «зависимость площади квадрата от длины его стороны является функциональной» и т. п. [6].

Учащиеся учатся при любом способе задания находить значение функции по значению аргумента и решать обратную задачу, осуществлять переход от одного способа задания функции к другому (если это возможно). Каждый из названных способов задания функции обладает определенными недостатками (какими?), поэтому на практике пользуются одновременно несколькими из них. Не допускать в речи учащихся фразы «функция $y = 2x + 5$», заменяющей правильное произношение «функция, заданная формулой $y = 2x + 5$», т. к. это приводит к ошибочному отождествлению функции с формулой. Учитель должен постоянно подчеркивать различие между этими понятиями. Следует обращать внимание учащихся на то, что при задании функции формулой необходимо указывать область определения – множество значений независимой переменной. На данном этапе продолжается работа поформированию умения строить и читать графики реальных зависимостей, выяснять, принадлежит ли точка графику, выполнять задания на подведение конкретных зависимостей под понятие.

Аналогичный подход раннего введения понятия функции принят и в учебниках алгебры 7-го класса А. Г. Мерзляка и др.; К. С. Муравина и др. как одной из пары переменных (*y* есть функция от $x - y(x)$).

В определении функции по К. С. Муравину и др. включены слова «допустимое значение» для переменной *x*, появление этих слов объясняется учащимся тем, что буквенные выражения, с помощью которых задаются функции, не всегда имеют смысл. В других учебниках федерального списка формально-логическое определение функции дается позднее (8-й или 9-й класс). К этому времени учащиеся уже знакомы со множеством действительных чисел и поэтому можно без опасений говорить об области определения функции и графики строить в виде непрерывной линии [1].

Во многих школьных учебниках алгебры изучение темы «Линейная функция» традиционно начинается с прямой пропорциональности и ее графика. С понятием прямой пропорциональной зависимости двух величин, числовые значения которых выражаются положительными числами, ученики уже знакомы. Им известно, что две величины являются прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз. Они решали задачи на пропорциональные величины используя пропорции, учитывая, что отношения соответствующих значений этих величин равны. Такая зависимость называлась прямой пропорциональностью. Выше приведенное определение верно только для положительных чисел. В алгебре оно заменяется на другое, которое включает и отрицательные числа.

Изучение прямой пропорциональности необходимо начать с рассмотрения некоторых подводящих задач, которые ученики уже неоднократно решали.

Например, таких:

Мотоциклист двигался соскоростью 16 м/с в течение t секунд. Сколько метров (s) проехал он за это время?

Ученик купил n карандашей по 5 рублей. Сколько рублей (r) он заплатил за покупку?

Далее внимание учащихся следует обратить на то, что формулы, выражающие совершенно различные явления, имеют одинаковую математическую структуру и в общем виде могут быть записаны одной формулой: у = kx, где $k \neq 0$, x и y – две переменные. Поэтому можно сказать, что такие явления описываются одной и той же функцией, которую можно назвать прямой пропорциональностью. Следовательно, можно сформулировать следующее определение: прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число. Обратить внимание учеников на исключение, что $k \neq 0$, т. к. k – это коэффициент прямой пропорциональности. Для усвоения определения нужно предлагать учащимся упражнения на распознавание прямой пропорциональности среди функций, заданных формулой (таблицей), нахождение коэффициента пропорциональности. При пропорциональности переменных выражение, стоящее в правой части формулы, имеет смысл при всех значениях x и каждому x соответствует единственное y, следовательно, формула задает функцию. Теперь можно перейти к изучению и построению графика прямой пропорциональности. Учащимся предлагается построить несколько графиков функции (например, $y = 2x$, $y = 0{,}5x$, $y = –2x$) по нескольким точкам (например, шести-семи), указанным в таблице значений. После нанесения точек на координатную плоскость учащиеся с помощью линейки (эмпирически) убеждаются, что все отмеченные точки лежат на прямой, которая проходит через начало координат. Проведя с помощью линейки прямую в каждом случае, ученики удостоверяются, что она и есть график заданной функции. Из курса геометрии, ученики знают, что положение прямой определяется двумя точками, поэтому для построения графика достаточно вычислить координаты двух точек, одна из которых может являться началом координат. На первых порах в целях контроля за вычислениями и построением целесообразно находить координаты третьей точки. Далее можно перейти к исследованию расположения графика в координатной плоскости в зависимости от коэффициента. Предварительно предложить учащимся в качестве самостоятельной работы на координатной плоскости построить графики конкретных функций при различных значениях $k > 0$ и $k < 0$, а затем ответить на вопрос: от чего зависит расположение графиков в каждом случае? Рассматривая графики, учащиеся наглядно установят роль коэффициента.

Итогом проделанной работы будет общий вывод, касающийся графика изучаемой функции:

- графиком является прямая;
- прямая проходит через начало координат;
- прямая строится по двум точкам;
- прямая располагается при $k > 0$ в I и III координатных четвертях, а при $k < 0$ – во II и IV;
- прямая не совпадает с осями координат;
- точка принадлежит прямой, если ее координаты соответствующие друг другу значения аргумента и функции [1].

Следующий шаг – изучение очередной функции – линейной и ее графика. Название говорит о геометрической модели функции прямой линии, служащей ее графиком. Знакомство с новой функцией происходит с опорой на знания о прямой пропорциональности и осуществляется по тому же плану. Вначале рассматриваются две-три сюжетные задачи в качестве мотивировки.

Приведем возможные из них:

Автомобиль, находясь в 5 км от города, начал движение от него со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии (s) от города он будет через t часов?

На складе было 500 тонн угля. Ежедневно стали увозить по 30 тонн угля. Сколько угля будет наскладе (m) через n дней? Решение задач приводит к двум формулам: $s = 60t + 5$ (t0), $m = – 30n + 500$ (n = 1, 2, 16), которые не напоминают прямую пропорциональность, следовательно, имеем дело с новой функцией, которая задается общей формулой $y = kx + b$ и называется линейной. Как видим, формула возникает в результате обобщения результатов реальных ситуаций. Дается соответствующее определение. Внимание учеников обращается на то, что в формулировке нет ограничений на числа k и b. Сразу же необходимо заметить, что если в формуле положить $b = 0$, то будем иметь при $k \neq 0$ уже изученную функцию, т.е. линейная функция обратилась в прямую пропорциональность. Этот факт может навести учащихся на мысль, что у этих функций много общего. Все эти теоретические знания целесообразно подкреплять наглядными графиками, выполненными заблаговременно учителем в различных прикладных программах, и предложить ребятам выполнить построение на бумаге, а в качестве творческой работы дома с помощью электронных таблиц или диаграмм.

Квадратичная зависимость между величинами обнаруживается как в самой математике, так и в её приложениях в других науках и в технической практике. С помощью квадратичной функции выражаются законы многих явлений и процессов в природе и технике. Этим объясняется повышенное внимание к ней в школьной программе, которая предусматривает сначала изучение элементарными средствами (основная школа), затем – с помощью понятия производной (старшая школа). В основной школе учащиеся имеют возможность познакомиться с новыми свойствами функций; с построением и чтением более сложных графиков; с элементарными преобразованиями графиков; с решением простейших задач на максимум и минимум; с графическим способом решения квадратного уравнения и неравенства и др. Решение квадратного уравнения и неравенства целесообразно приблизить к изучению квадратичной функции, т. к. этот материал тесно взаимосвязан. Кроме того, нужно подчеркнуть различие между понятиями «квадратное уравнение» и «квадратичная функция»: при решении уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ мы находим те значения x (корни уравнения), при которых равенство обращается в тождество, а при изучении функции $y = ax^2 + bx + c$ интересуемся законом, по которому каждому значению x соответствует определенное значение у (учащиеся часто смешивают эти понятия). Квадратичную функцию часто называют еще квадратным трехчленом, т. к. в правой части формулы он и записан. Изучение квадратичной функции по традиции в основной школе проводится поэтапно. По числу выделяемых этапов учебники различаются. В учебниках Ю.Н. Макарычева и др. последовательность такова: $y = x^2$ (7-й класс), $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = (x - m)^2$, $y = (x - m)^2 + n$, $y = ax^2 + bx + c$ (9-й класс); в учебниках А. Г. Мерзляка и др. весь материал сосредоточен в 8-м классе и особо выделяются три функции: $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$. Постепенное рассмотрение графиков частных случаев квадратичной функции необходимо для нахождения наиболее рационального способа её построения, поскольку по выбранным точкам, принадлежащим графику, трудно установить его вид. Чтобы легче было определить точки, нужно преобразовать квадратный трехчлен, задающий функцию. На конкретном графическом материале учащиеся знакомятся с линейными преобразованиями графиков. Кроме того, по формуле

$$y = a\,(x - m)^2 + n$$

можно провести простейшие исследования свойств функции, не используя график. Заметим, что во всех учебниках алгебры излагаются свойства функций $y = x^2$ и $y = ax^2$, а также вытекающие из них особенности графиков. Исследование свойств квадратичной функции в общем виде не предусматривается. Учащиеся должны уметь исследовать только конкретные примеры функций по построенному графику и частично по аналитическому заданию (формуле) [6].

Для облегчения построения графиков целесообразно использовать лекала (шаблоны) парабол $y = x^2$, $y = 0{,}5x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{3x^2}$, $y =$ $= 3x^2$ (для классной доски с масштабом 1 дециметр = 1единица, для тетради – 1 санитиметр = 1единица), координатную сетку, миллиметровую бумагу. На уроках применять готовые таблицы различных графиков, использовать компьютерные варианты преобразований графиков.

При изучении квадратичной функции графический метод разумно сочетается с аналитическим методом.

Изучение семейства квадратичной функции начинается с $y = x^2$, связанной с действием возведения числа в квадрат. В некоторых учебниках эта функция ещё и не получает названия. Но, она важна тем, что учащиеся знакомятся с новым видом функциональной зависимости, отличным от линейной (графиком, его особенностями и свойствами), её график в дальнейшем поможет ввести понятия четности и монотонности функции, иррационального числа, установить неравномерный характер изменения значений функции и др. Мотивировкой изучения функции является задача об установлении зависимости площади квадрата от длины его стороны. График функции $y = x^2$ строится по большому числу точек, координаты которых занесены в таблицу. Для большей точности построения нужно проследить, как график ведет себя вблизи начала координат, для чего полезно дополнительно выбрать еще несколько значений функции на отрезке [–1;1]. После нанесения точек на координатную плоскость и соединения их можно выявить некоторую плавную кривую линию. Дается название полученной линии – парабола. Обращается внимание на то, что график неограниченно продолжается вверх, справа и слева от оси ординат, а на рисунке мы изображаем только часть его [4].

Исходя из формулы, таблицы и графика, формулируют свойства функции и графика, а также дают им обоснование.

В 8-м или 9-м классе вводится понятие квадратичной функции, рассматриваются её свойства, особенности графика и приёмы построения параболы, приводятся примеры квадратичной зависимости величин. Квадратичная функция определяется, как обычно, формулой $y = ax^2 + bx + c$. Здесь же выясняются её частные случаи в зависимости от коэффициентов b и c (один или оба равны нулю); коэффициент, $a \neq 0$ по определению. Учащиеся должны научиться распознавать квадратичную функцию по формуле и определять коэффициенты. Изучение квадратичной функции начинается с частного случая $y = ax^2$ ($a \neq 0$). При $a = 1$ получаем уже знакомую функцию $y = x^2$, которая послужит своеобразным эталоном при изучении других функций.

Уместно показать на двух-трех задачах потребность в особом изучении функции $y = ax^2$. Например, сопротивление среды движению тела пропорционально квадрату его скорости; путь, пройденный телом при равномерно-ускоренном (замедленном) движении, пропорционален квадрату времени; площадь круга пропорциональна квадрату радиуса. Вызвав познавательный интерес к функции, можно её изучение начать с выяснения влияния коэффициента ($a \neq 1$) на поведение функции (иначе говоря, установление геометрического смысла a) при $a > 1$, $0 < a < 1$, $a < 0$. Для этого предложить ученикам в одной системе координат построить графики функции $y = ax^2$ при различных значениях, a (a = 1; 2; 0,5; –2). Предложить занести значения функций в таблицу и на графике для одних и тех же значений аргумента, выяснить особенности расположения графиков в сравнении с графиком при, $a = 1$. Учащиеся знакомятся с понятиями растяжения и сжатия графика, однако отработка этих преобразований не приводится. Говорится, о симметрии графиков относительно оси абсцисс при $a > 0$ и при $a < 0$. От величины коэффициента a зависит степень крутизны параболы: большему значению a соответствует более «крутая» парабола, меньшему – более «пологая», а от его знака – направление ветвей параболы. После выяснения особенностей расположения параболы формулируются свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$ и при $a < 0$, выясняется их общность и различие.

Изучение двух других частных случаев квадратичной функции $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$ происходит по аналогии с первым случаем, но здесь главное внимание обращается на построение графиков, а свойства их остаются в тени. Эталоном для сравнения будет выступать уже функция $y = ax^2$ ($a \neq 1$). Рассуждения все ведутся на конкретных примерах функций.

Для первого случая можно выбрать:

$$y = 2x^2;$$

$$y = 2x^2 + 2;$$

$$y = 2x^2 - 2.$$

Для второго:

$$-y = 2x^2;$$

$$y = 2(x - 2)^2;$$

$$y = 2(x + 2)^2.$$

Сравнивая составленные таблицы значений функций и соответствующие графики, учащиеся, смогут сформулировать вывод.

Понятие обратной функции не имеет аналогов, поэтому приходится вводить их посредством явного определения. Роль обратной функции велика. Использование обратной функции необходимо для введения большого количества классов основных элементарных функций: корня k-й степени, логарифмической, обратных тригонометрических функций. При изучении обратной функции выясняется зависимость ее монотонности от монотонности исходной функции – это необходимо для того, чтобы обосновать существование обратной функции и подробно рассматривать взаимное расположение графиков данной и обратной функций. Преподаватель может подвести учащихся к понятию обратной функции, поставив новую для учащихся познавательную задачу. На основе усвоенного учениками важного представления, входящего в понятие функции – однозначности соответствия аргумента и определенного по нему значения функции провести следующее рассуждение: «Каждому допустимому значению переменной x равенство $y = f(x)$ ставит в соответствие вполне определенное значение переменной величины y. Однако в некоторых случаях соотношение $y = f(x)$ можно рассматривать и как такое равенство, которое каждому допустимому значению переменной величины y ставит в соответствие вполне определённое значение переменной величины x». Далее следует пояснение данного сопоставления на примере. Равенство $y = 2x - 1$ каждому значению y ставит в соответствии следующее значение x: $x = \frac{y+1}{2}$. Например при $y = 1$, $x = 1$; при $y = 2$, $x = 1{,}5$; при $y = 3$, $x = 2$ и так далее. Поэтому можно сказать, что равенство $y = 2x - 1$ определяет x как некоторую функцию переменной величины y. В явном виде эта функция записывается таким образом:

$$x = \frac{y + 1}{2}.$$

«Если в каждом случае обозначить независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим формулы: $y = f(x)$, и $x = \varphi(y)$ во второй формуле y выступает в качестве аргумента, а x – в роли функции. Переписав в привычном виде, мы получим $y = \varphi(x)$. Определенная, таким образом, что функция $y = \varphi(x)$ называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке X и областью ее значений является промежуток Y, то не существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (убывает) на Y. Таким образом, чтобы построить график функции, обратной к функции $y = f(x)$, надо график функции $y = f(x)$ подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой $y = x$» [4].

Методика введения понятия функции вида $y = \sqrt{x}$ основана на аналогичном примере: пусть длина стороны квадрата равна a см, а его площадь S см². Каждому, значению стороны квадрата a соответствует единственное значение его площади S. Зависимость площади квадрата от его стороны выражается формулой $S = a^2$, где $a > 0$. Наоборот, для каждого значения площади квадрата S можно указать соответствующее ему единственное значение стороны a. Зависимость стороны квадрата от его площади выражается формулой $a = \sqrt{S}$. Формулами $S = a^2$, где $a > 0$, $a = \sqrt{S}$ задаются функциональные зависимости между одними и теми же переменными, однако в первом случае независимой переменной является сторона квадратаа, а во втором – площадь S. Если в каждом случае обозначить независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим формулы: $y = x^2$, где $x > 0$, и $y = \sqrt{x}$.

Построим график известной учащимся функции $y = x^2$ и предложить им составить таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$. По точкам таблицы построить график функции $y = \sqrt{x}$, и затем предложить сформулировать некоторые свойства функции. Подвести учащихся к понятию симметричности графиков относительно прямой $y = x$.

Для закрепления темы найти по графику значения аргумента по функции и наоборот. Пользуясь, графиком найдите:

а) значение $\sqrt{x}$ при $x = 0{,}5;\ 5{,}5;\ 8{,}4$;

б) значение x, которому соответствует $\sqrt{x} = 1{,}2;\ 1{,}7;\ 2{,}5$.

При обучении функциям целесообразно использовать компьютерные технологии, что позволяет активизировать устойчивый интерес к математике, получить всесторонние представления об изучаемом математическом объекте.

1.3 Роль организации обобщающего повторения в школьной программе

Как и любая учебная деятельность повторение характеризуется наличием своей цели, содержанием учебного материала и системой учебных заданий. В соответствии с этим повторение может быть рассмотрено как комплекс взаимосвязанных компонентов, в состав которых мы включаем целевой, содержательный и технологический.

Целевой компонент определяется формированием целей и задач повторения, а также потребностей и мотивов предстоящей деятельности, которые в целом отвечают на вопрос «зачем нужно повторять». Предметом повторения является учебный материал, изученный ранее и по каким-либо причинам требующий дополнительного внимания со стороны учеников и учителя. Обоснование выбора такого учебного материала в зависимости сопоставленной цели, на котором будет строиться повторение, определяет содержательный компонент [1].

Технологический компонент включает в себя определение методов и способов реализации повторения. Выбор тех или иных методических приемов обусловлен поставленными целями и особенностями учебного материала, входящего в содержательный компонент. Кроме того, можно выделить ряд факторов, которые не являются составной частью повторения, но оказывают существенное влияние на функционирование этой системы. Они составляют так называемую внешнюю среду. К таковым мы относим индивидуальные, возрастные и групповые особенности учащихся, цели и содержание школьного курса математики, структура и ход учебного процесса. Действительно, повторение есть часть обучения, поэтому его цели подчинены целям обучения в целом и служат его реализации.

Формирование содержательного компонента осуществляется на основе содержания школьного курса математики. При этом повторение должно естественным образом включаться в ход учебного процесса.

Необходимо четко определить место повторения в системе уроков по теме и в течение всего учебного года. Как и все обучение в целом, организация повторения обязана учитывать индивидуальные, возрастные и групповые особенности учеников. Только в этом случае ожидаемый результат будет достигнут.

Целевой компонент включает в себя следующие цели и задачи [2]:

• подготовка учащихся к усвоению нового учебного материала, заключающаяся в актуализации необходимых знаний и способов деятельности;

• предупреждение забывания полученных знаний, их углубление и уточнение;

• обобщение и систематизация знаний учеников.

Перечисленные цели повторения реализуются на различных этапах обучения, соответственно им можно выделить несколько этапов повторения, направленных на их достижение. Подготовка учащихся к усвоению нового учебного материала осуществляется в ходе предваряющего повторения в начале учебного года, каждой темы и урока. Предупреждение забывания полученных знаний, их углубление и уточнение в ходе предупреждающего, обобщение и систематизация знаний учеников – тематического и заключительного обобщающе-систематизирующего повторения. Успешность организации повторения при этом определяется реализацией каждогоеого этапа [6].

Содержательный компонент определяет принципы отбора и организации учебного материала на каждом этапе повторения.

При этом мы пришли к выводу, что материал для повторения должен отвечать следующим требованиям:

а) быть ведущим, т.е. таким, который периодически используется и пополняется в ходе обучения математике;

б) иметь широкие межпредметные связи;

в) включать в себя не только формулировки определений понятий и теорем, но и адекватные им способы деятельности, эвристики и эвристические приемы;

г) иметь высокую степень трудности усвоения для учащихся.

Для определения содержания предваряющего повторения необходимо проанализировать новую порцию информации для учащихся с точки зрения выделения основных вопросов, изученных ранее, на которых она базируется. Они и составят содержание повторения. В ходе предваряющего повторения вначале учебного года в обзорном порядке рассматриваются основные вопросы из пройденного, изученные в течение прошлых лет. При выборе таковых руководствуются общими принципами, сформулированными выше [2].

Содержание предупреждающего повторения во многом зависит от материала, привлекаемого для изучения очередного вопроса, от возможности установить связи между новым и старым, от состояния знаний учеников в данный момент.

При выборе материала для обобщающе-систематизирующего повторения необходимо следовать следующим рекомендациям:

• составить перечень всех понятий и их свойств, изученных в рамках одной темы;

• дополнить их особо трудными вопросами темы;

• включить учебный материал, фиксирующий связь данной темы с другими, пройденными ранее;

• рассмотреть приложение повторяемого материала, предварительно выделив основные действия, адекватные изучаемым понятиям и теоремам.

При формировании технологического компонента главными критериями в выборе методических приемов организации повторения необходимо считать:

а) обеспечение достаточно высокого уровня сознательности, активности и самостоятельности учащихся;

б) максимальное приближение деятельности учащихся к процессу исследования в математике;

в) соответствие возрастным особенностям и возможностям учащихся;

г) обеспечение естественной взаимосвязи повторяемого материала с вновь изучаемым;

д) возможность осуществления дифференциации и индивидуализации в работе учащихся.

Как показывает опыт работы и результаты исследования, при организации повторения в начале учебного года приходится прибегать в большинстве случаев к повторному восприятию учебного материала учащимися. Это может быть осуществлено посредством, сообщения учащихся, индивидуальной работы дома с учебником, эвристической беседы.

Повторение с помощью самостоятельной работы с учебником целесообразно применять в виде домашнего задания. Однако в этом случае учитель не может непосредственно контролировать процесс работы учащихся, а они не могут самостоятельно разнообразить свою деятельность, и повторение ими обычно сводится к простому перечитыванию текста учебника, что мало эффективно. В связи с этим полезно давать такие задания, которые требовали бы от учеников некоторой реконструкции повторяемого материала.

Укажем основные формы реконструкции материала, а в скобках типы заданий реализующие данную форму:

1. Обобщение или сгущение того, что дано в конкретной, развернутой, детализированной форме (составление перечня сведений о некотором понятии, «базы» теоремы, краткое изложение сути текста 2-3 предложениями).

2. Конкретизация и детализация того, что дано в более общем виде (рассмотрение частных случаев, разворачивание цепочки логических рассуждений).

3. Замена одного содержания другим, равнозначным по смыслу, а также по степени обобщенности и детализации (доказательство теорем по измененному чертежу, с другими обозначениями, иллюстрация материала собственными примерами).

4. Смещение или перемещение отдельных частей материала (задание на сравнение нескольких понятий или теорем, выделение общего плана доказательства нескольких теорем) [2].

В ряде случаев характер материала таков, что его можно повторить с помощью «активного припоминания» без предварительной самостоятельной работы учащихся (если промежуток между изучением и повторением невелик и материал не успел еще забыться и легко восстанавливается в памяти). В таком случае применяется эвристическая беседа.

На данном этапе повторения преобладают фронтальные формы работы с учащимися, а также их индивидуальная работа дома, так выделенные знания и способы деятельности должны быть актуализированы у всех учеников. Чтобы уточнить содержание материала для повторения рекомендуется проводить тест либо контрольную работу с целью диагностики пробелов в знаниях учащихся.

Точно такая же проверочная работа завершает организацию выделенного этапа повторения, что позволяет судить учителю о достигнутых результатах.

Предупреждающее повторение направлено на формирование умений также навыков, учащихся в практическом применении нового знания в сочетании с ранее усвоенным. Таким образом, с одной стороны, совершенствуются умения также навыки применения новых знаний, а с другой – предупреждается забывание пройденного материала. Основным средством реализации данного этапа повторения является система специально подобранных задач комплексного характера с применением знаний из различных тем курса. Затруднения учащихся при решении задач выделенного типа преимущественно связаны с широким спектром используемого материала. Успех в решении таких задач зависит от умения учеников читать чертеж, выделять на нем необходимые конфигурации, анализировать условие задачи, выводить нужные следствия.

С целью формирования выделенных умений учитель должен систематически использовать в своей работе задания на чтение чертежей, выведение все возможных следствий из данных условий. Преобладающими формами работы являются групповая и индивидуальная. Это связано с тем, что каждый ученик обладает собственным темпом продвижения по материалу, и разные учащиеся нуждаются в разной степени в консультации учителя.

Обобщающе-систематизирующее повторение в рамках одной темы направлено на обобщение и систематизацию знаний о математическом факте независимо от других фактов системы, а также включение его в систему ранее изученных знаний. Организация данного этапа повторения предполагает решение задач о формировании следующих умений учащихся:

а) умение определять понятия на основе различных совокупностей существенных признаков или через другое родовое понятие;

б) уметь сравнивать изученные понятия по выделенному признаку;

в) устанавливать подчиненность вида роду в случае сопоставимых понятий;

г) уметь проводить классификацию понятия;

д) уметь давать определенную трактовку изученным знаниям с позиции тех или иных фундаментальных идей [2].

Это может быть достигнуто посредством упражнений, направленных на:

а) воспроизведение фактов, законов, алгоритмов, формулировок определений и теорем с опорой на практическое применение;

б) анализ какого-либо факта, закона, ситуации;

в) иллюстрацию теоретических положений своими примерами;

г) конструирование различных определений понятий;

д) сравнение понятий и их классификацию;

е) составление классификационных схем, таблиц и опорных конспектов;

ж) отыскание различных способов доказательства теорем и решений задач [2].

Целесообразно подобную работу проводить не для отдельно взятого понятия или теоремы, а сразу для нескольких, изучаемых в пределах одной темы. Причем при организации тематического повторения большое внимание уделяется составлению опорных конспектов, чтобы потом использовать их для актуализации необходимых знаний в ходе заключительного и предваряющего повторения.

Для завершающего обобщающе-систематизирующего повторения используются задания на отыскание различных способов решения задачи доказательств теорем. Они способствуют совершенствованию умения применять полученные знания и позволяют повторить большой объём материала.

Проведенные исследования еще раз подтвердили эффективность данного подхода. Исходя из того, что процесс обучения – это деятельность по взаимодействию учителя и ученика.

Отсутствие одного из компонентов разрушает целостность – педагогической системы. В настоящем параграфе рассматривается возможность комплексного подхода при организации повторения в курсе математики основной школы.

ГЛАВА 2. ОРГАНИЗАЦИЯ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ АЛГЕБРЕ

В 9 классе при подготовке к экзаменам возникает необходимость в повторении и обобщении ранее изученного. Правильно организованное повторение учебного материала позволяет школьнику увидеть в пройденном материале что-то новое; помогает установить логические связи между вновь и ранее изученным; развивает память ученика; приводит знания ученика в систему; дисциплинирует ученика [3].

Обобщение позволяет вскрыть существенные связи между явлениями и объектами, установить новое отношение к объекту, установить новые связей между уже изученным материалом, известными фактами [8].

По школьной программе, в большинстве случаях, функциональная линия начинает изучаться с 7 класса. Поэтому возникает необходимость обобщения знаний учащихся 9 класса по теме «Функция».

В пробных вариантах ОГЭ [7; 9] и в различных сборниках заданий для подготовки к ОГЭ в рамках функциональной линии встречаются задания различных типов.

Для выполнения этих заданий у школьника должны быть сформированы следующие знания и умения:

1) школьнику необходимо знать, как выглядят графики элементарных функций и как они меняются, в зависимости от элементарных преобразований;

2) школьник должен знать графический способ решения системы уравнений и понимать суть этого метода;

3) школьник должен уметь читать график, определять по нему необходимые параметры;

4) школьник должен знать свойства функций, уметь описывать их для различных функций, в том числе по графику;

5) школьник должен понимать от каких параметров зависит взаимное расположение графиков двух различных функций и уметь находить эти параметры;

6) школьник должен уметь строить графики сложных функций, требующих преобразования.

2.1 Анализ распределения учебного материала по теме «Функция» в школьном курсе алгебры на примере учебников двух авторов А. Г. Мерзляка и А. Г. Мордковича

Рассмотрим распределение учебного материала по теме «Функция» в школьном курсе алгебры на примере учебников двух авторов А. Г. Мерзляка и А. Г. Мордковича.

Изучение функциональной линии начинается с изучения линейной функции. Оба автора рассматривают отдельно функцию $y = kx$ и функцию $y = kx + b$, затем вопрос о взаимном расположении графиков этих функций. Изучение квадратичной функции происходит по такой же схеме. Сначала изучается функция $y = ax^2$, затем функция $y = ax^2 + bx + c$, далее рассматривается связь графиков функций $y = x^2$ и $y = = (x + m) + n^2$.

В 8 классе в учебнике А. Г. Мордковича проводится обобщение для различных функций с целью построения графика функции $y = f(x) + m$ и $y = f(x + 1) + m$, если известен график функции $y = f(x)$. В учебнике А. Г. Мерзляка такое обобщение не предусмотрено. Заданий на установление соответствия между графиком функции и формулами, которые их задают, в учебнике А. Г. Мерзляка не встречается.

В учебнике А. Г. Мордковича для учащихся 7 класса представлено одно задание на установление соответствия между графиком функции и формулами, которые их задают. В учебниках для учащихся 8 и 9 классов таких заданий не представлено, но есть задания, в которых необходимо написать уравнение функции, график которой изображен на рисунке.

С графическим методом решения системы уравнений с двумя неизвестными ученики знакомятся в 7 классе. В 8 и 9 классах этому методу особого внимания не уделяется.

Задания, формирующие умение выявлять параметры каких-либо явлений по графику, встречаются в учебнике А. Г. Мерзляка для учащихся 7 класса при введении понятия функции. Далее внимание этому не уделяется. В учебнике А. Г. Мордковича задания подобного типа не представлены.

В учебнике А. Г. Мерзляка свойства функций не выделяются в отдельную тему. В 7 классе при введении понятия функции предлагается одно задание на нахождение аргумента по значению функции и наоборот, на нахождение аргумента, при котором функция принимает положительные или отрицательные значения. Далее понятия положительное и отрицательное значение функции, нули функции рассматриваются при графическом методе решения уравнений и неравенств.

Некоторые свойства функций (возрастание и убывание функции, четность и нечетность) рассматриваются в учебнике А. Г. Мерзляка 9 классе, но отсутствуют задания на закрепление умения определять свойства функции по графику. В учебнике А. Г. Мордковича рассматриваются свойства функции по такой же схеме. В 9 классе происходит повторение свойств изученных функций, но свойства функций рассматриваются изолированно. То есть в одном задании нужно исследовать функцию на четность, в другом найти промежутки возрастания и убываний и т.д. Отсутствуют задания, в которых необходимо выявить различные свойства функций.

Таким образом, проведение обобщающего повторения по теме «Функция» позволяет объединить знания школьников в систему. Ученики смогут описывать свойства функций, осуществлять элементарные преобразования, решать графически системы уравнений.

2.2 Методическое пособие для подготовки к ОГЭ по теме «Функции и их графики»

Целью данного пособия является оказание практической помощи выпускникам 9 класса в приобретение, освоение и закрепление знаний как теоретического, так и практического характера по теме «Функция» на ОГЭ, а также с целью повышения уровня самостоятельности к ОГЭ по математике.

Тема «Функции, их свойства и графики» является одной из важных тем курса алгебры основной школы. Она отражена в заданиях первый (базового уровня) и второй (повышенного и высокого уровня) частях экзаменационной работы.

Готовясь к итоговому экзамену учащимся необходимо ориентироваться на задания более высокой сложности и тогда можно рассчитывать на положительный результат. Учащиеся выпускного класса должны иметь более высокий уровень теоретических знаний и умений правильно применять их.

По моему мнению, тема «Функции и графики» очень важная и серьезная, ей нужно уделять достойное внимание.

Разбор типовых заданий.

I. На рисунках изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$ (рисунок 2.1). Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

Коэффициенты:

А) $a > 0, c > 0$;

Б) $a < 0, c > 0$;

В) $a > 0, c < 0$.

Графики функций:

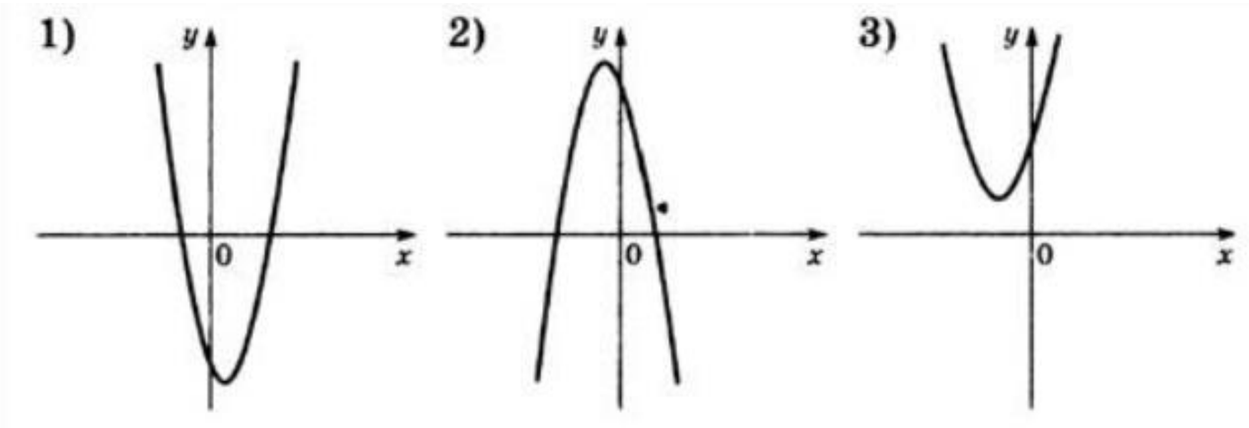

Рисунок 2.1

Решение.

Мы вспоминаем, за что отвечают коэффициенты a и b при построении графиков функции вида $y = ax^2 + bx + c$. Коэффициент a определяет направление ветвей параболы: если $a > 0$, то ветви направлены вверх, а если $a < 0$, то ветви направлены вниз.

Таким образом, мы видим, что только у второй параболы ветви направлены вниз, а значит $a < 0$. У первой и у третьей ветви направлены вверх, то есть $a > 0$.

Далее мы смотрим, на что влияет коэффициент c. Коэффициент с отвечает за положение параболы относительно оси x, или же отвечает за сдвиг по оси y, а именно:

если $c > 0$, то вершина параболы расположена выше оси x;

если $c < 0$, то вершина параболы расположена ниже оси x.

Так, у первой параболы $c < 0$, у второй и третьей $c > 0$.

Из выше перечисленного можно найти ответ: 321.

II. Установите соответствие между функциями и их графиками (рисунок 2.2).

Функции:

А) $y = -\frac{3}{x}$;

Б) $y = \frac{3}{x}$;

В) $y = \frac{1}{3x}$.

Графики функций:

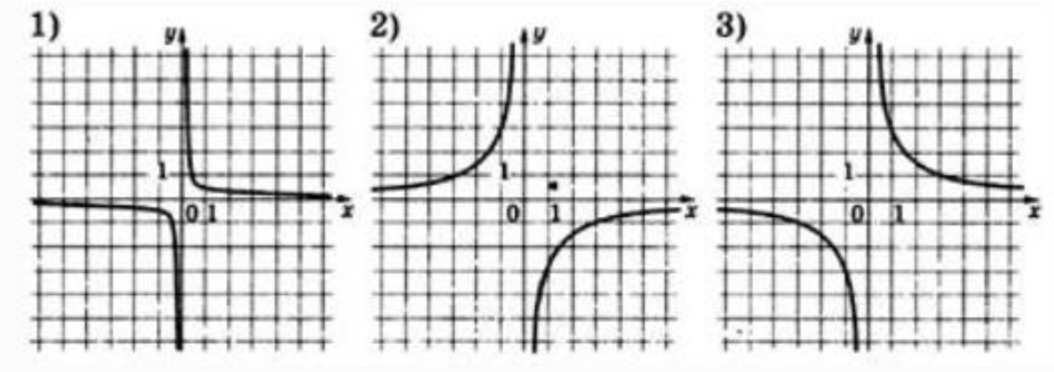

Рисунок 2.2

Решение.

В данной ситуации можно воспользоваться двумя подходами – можно руководствоваться общими соображениями, а можно просто решить задачу подстановкой. Я рекомендую решить задачу общими соображениями, а проверять подстановкой.

Первое правило:

- если уравнение гиперболы положительное (то есть не стоит знак –, как во втором и третьем случае), то график функции лежит в первой и третьей координатной четверти;
- если перед уравнением гиперболы стоит знак – (как в первом случае), то график лежит во второй и четвертой четвертях.

Таким образом, можно сразу определить, что первое уравнение соответствует графику под номером 2.

Второе правило звучит так:

- чем больше число в знаменателе гиперболы (рядом с x), тем сильнее гипербола жмется к осям координатной плоскости;
- и наоборот, чем больше число в числителе уравнения гиперболы, тем слабее и медленнее график функции прижимается к осям.

Следовательно, функция Б слабее прижимается к осям и ей соответствует график 3, а функции В соответствует график 1, так как она сильнее прижимается к осям.

Ответ: 231.

III. Выявить влияние коэффициентов a, b и c на расположение графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Решение.

Учащиеся обладают достаточными знаниями, чтобы выполнить это задание самостоятельно. Следует предложить им все полученные выводы занести в тетрадь, при этом выделив «основную» роль каждого коэффициента.

1. Коэффициент a влияет на направление ветвей параболы: при $a > 0$ – ветви направлены вверх, при $a < 0$ – вниз.

2. Коэффициент b влияет на расположение вершины параболы. При b = 0 вершина лежит на оси OY.

3. Коэффициент c показывает точку пересечения параболы с осью OY.

После этого можно привести пример, показывающий, что можно сказать о коэффициентах a, b и c по графику функции (рисунок 2.3).

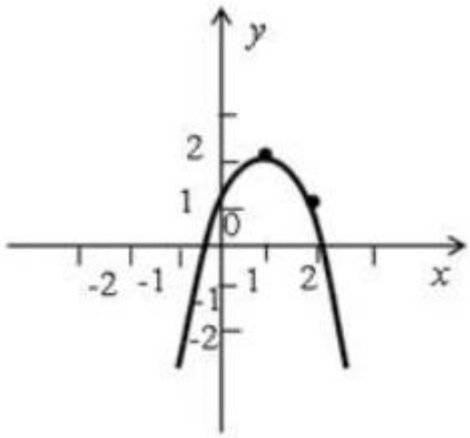

Рисунок 2.3

Значение c можно назвать точно: поскольку график пересекает ось OY в точке (0; 1), то c = 1.

Коэффициент a можно сравнить с нулем. Так как ветви параболы направлены вниз, то $a < 0$.

Знак коэффициента b можно узнать из формулы, определяющей абсциссу вершины параболы: $m = -\frac{b}{2a}$, так как $a < 0$ и m = 1, то $b > 0$.

IV. Определите, график какой функции изображен на рисунке (рисунок 2.4), опираясь на значение коэффициентов a, b и c.

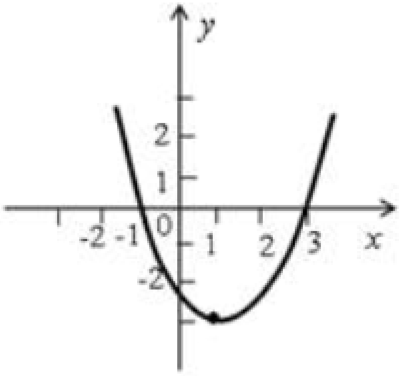

Рисунок 2.4

1) $y = -x^2 + 2x$;

2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$;

3) $y = 2x^2 - 3x - 2$;

4) $y = x^2 - 2x$.

Решение.

По изображенному графику на рисунке 2.4 делаем следующие выводы о коэффициентах a, b и c:

$a > 0$, так как ветви параболы направлены вверх;

$b \neq 0$, так как вершина параболы не лежит на оси OY;

$c = -2$, так как парабола пересекает ось ординат в точке (0; −2).

Всем этим условия удовлетворяет только функция $y = 2x^2 - 3x - 2$.

Ответ: 3.

V. Найдите значение c по графику $y = ax^2 + bx + c$ (рисунок 2.5).

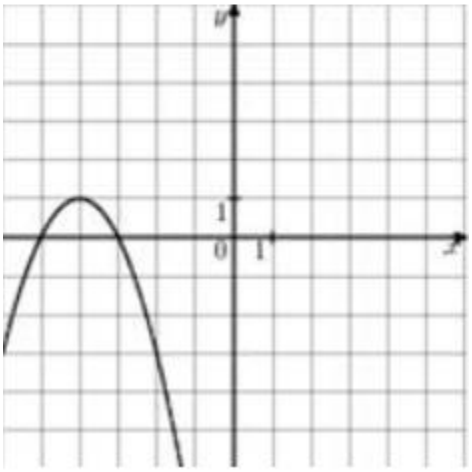

Рисунок 2.5

Если у нас график квадратичной функции на рисунке пересекает ось ординат, то достаточно вместо x подставить 0. Получим $y = c$ – это и будет искомое значение. Если график на рисунке не пересекает ось ординат то:

1. Найти значение a по графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ запишем в другом виде: $y = a(x - m)^2 + n$, где $(m; n)$ – координаты вершины параболы.

Поиск:

А) $(m; n) = (-4; 1)$ – вершина;

Б) $(x; y) = (-3; 0)$ – точка параболы;

В) $a(-3 + 4)^2 + 1 = 0$;

Г) $a = -1$.

2. Найти значение b по графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ запишем в другом виде: $y = a(x - m)^2 + n$, где $(m; n)$ – вершина параболы. Формула абсциссы параболы: $m = \frac{-b}{2a}$, $b = = -2am$.

Значит, $b = -8$.

Чтобы найти значение c, подставим в формулу $y = ax^2 + bx + c$, значение коэффициента $a = -1$, значение коэффициента $b = -8$, значение $(x; y) = (-3; 0)$ – координаты точки параболы.

$0 = -1 * (-3)^2 + (-8) * (-3) + c$;

$0 = -9 + 24 + c$;

$c = -15$.

Ответ: -15.

VI. На рисунке изображен график квадратичной функции $y = f\,(x)$ (рисунок 2.6).

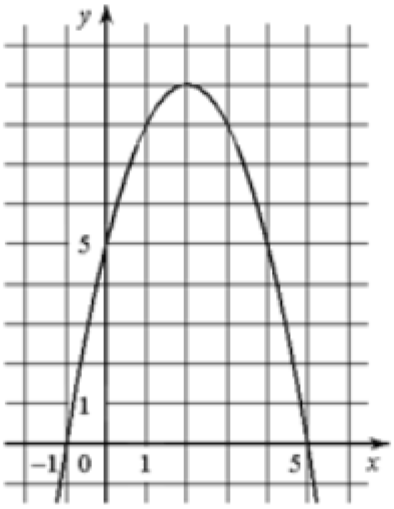

Рисунок 2.6

Какие из следующих утверждений о данной функции является верными? Запишите их номера.

1. $f\,(x) > 0$, при $x > 2$.

2. Функция убывает на промежутке $[2; +\infty)$.

3. $f\,(0) < f\,(5)$.

Решение.

1. $f\,(\mathrm{x}) > 0$, при $x > 2$ (рисунок 2.7).

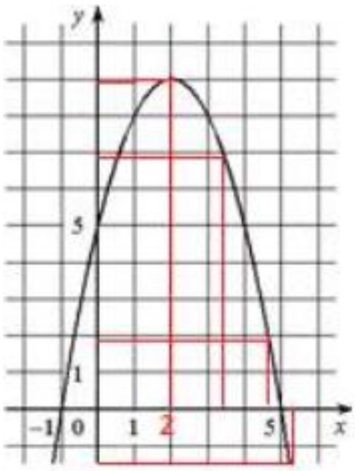

Рисунок 2.7

Вывод: утверждение не верно.

2. Функция убывает на промежутке [2; + ∞) (рисунок 2.8).

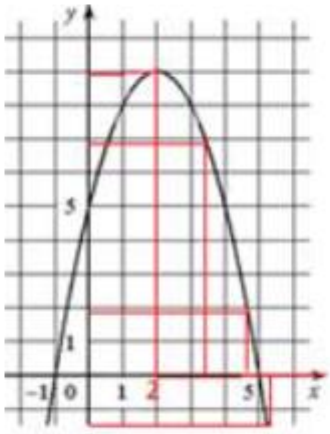

Рисунок 2.8

Вывод: утверждение верно.

3. $f(0) < f(5)$ (рисунок 2.9).

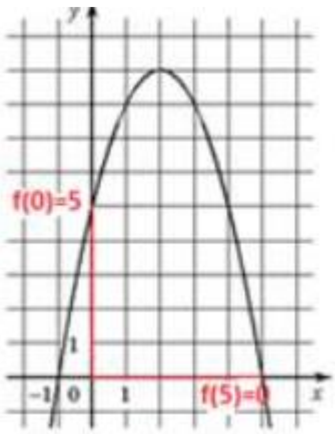

Рисунок 2.9

Вывод: утверждение верно.

Ответ: 2.

VII. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах) (рисунок 2.10). На какой высоте (в километрах) давление составит 540 миллиметров ртутного столба?

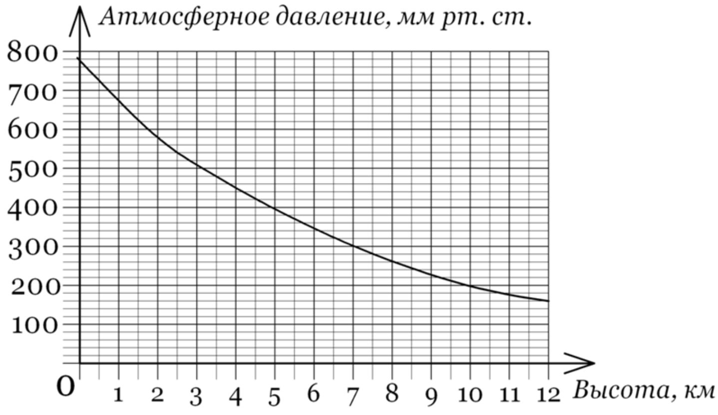

Рисунок 2.10

Решение.

Определим цену деления вертикальной оси (оси давления). Для этого возьмем две указанные отметки и посчитаем количество делений между ними. Затем разделим разность этих отметок на количество делений между ними и узнаем цену деления одной отметки.

Например, между 400 и 500 ровно 5 делений, а значит цена одного деления равна 20 миллиметров ртутного столба. Аналогично, цена деления горизонтальной оси (оси высоты) равна 0,5 километра.

Теперь находим отметку 540 миллиметров ртутного столба (на два деления выше отметки 500) и ищем точку пересечения с графиком. Прикладываем линейку к этой точке горизонтально и находим, что ей соответствует отметка 2,5 километра.

Ответ: 2,5.

VIII. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ y - x = -3. \end{cases}$$

Решение.

Уравнение $x^2 + y^2 = 9$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом 3 (рисунок 2.11).

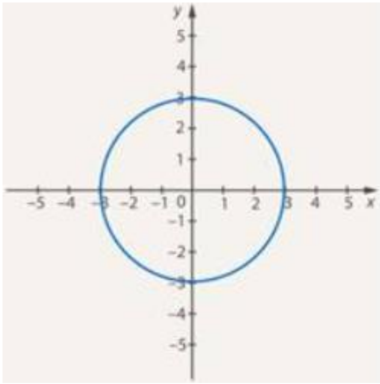

Рисунок 2.11

Для построения графика $y = \sqrt{9 - x^2}$ выразим y: $y = x - 3$.

Графиком полученной функции будет прямая (рисунок 2.12). Для ее построения найдем две точки в Таблице 1:

Таблица 1 – Координаты функции

x	0	3
y	– 3	0

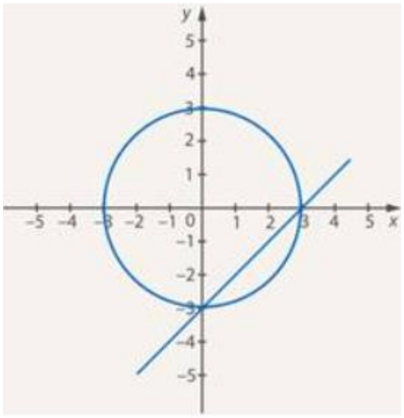

Рисунок 2.12

Все точки окружности соответствуют решениям первого уравнения $x^2 + y^2 = 9$, точки прямой – решениям второго $y = x - 3$. А решение системы – это множество точке, удовлетворяющих обоим уравнениям. Это будут точки пересечения графиков: точка A с координатами (3; 0) и точка B с координатами (0; – 3).

Ответ: (3; 0), (0; – 3).

IX. Постройте график функции $y = x^2 - 8x - 4|x - 3| + 15$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Первый способ решения.

Раскроем модуль. При $x \geq 3$ имеем:

$$y = x^2 - 8x - 4(x - 3) + 15;$$

$$y = x^2 - 12x + 27.$$

Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 6$, ордината вершины $y_0 = y(6) = -9$. Точка пересечения графика с осью ординат: $y(0) = 27$. Точки пересечения с осью абсцисс найдем из уравнения $x^2 - 12x + 27 = 0$, получим: $x = 3$, $x = 9$. Дополнительная точка: $y(11) = 16$.

При $x < 3$ имеем:

$$y = x^2 - 8x - 4(-x - 3) + 15;$$

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Графиков данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$, ордината вершины $y_0 = y(2) = -1$. Точка пересечения графика с осью ординат: $y(0) = 3$. Точки пересечения с осью абсцисс найдем из уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$, получим: $x = 1$, $x = 3$. Дополнительная точка: $y(5) = 8$.

График функции $y = x^2 - 8x - 4|x - 3| + 15$ изображен на рисунке 2.13.

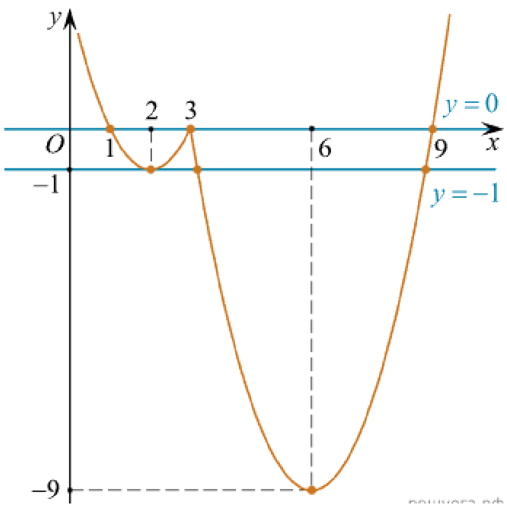

Рисунок 2.13

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно три общее точки при $m = 0$ и $m = –1$.

Ответ: $m = –1$ и $m = 0$.

Приведем *другой способ* построения графика.

Раскроем модуль:

$$y = x^2 - 8x - 4|x-3| + 15 = \begin{cases} x^2 - 8x - 4x + 12 + 15, x \geq 3, \\ x^2 - 8x + 4x - 12 + 15, x < 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 12\mathrm{x} + 27, x \geq 3, \\ x^2 - 4\mathrm{x} + 3, x < 3. \end{cases}$$

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 12\mathrm{x} + 27 = x^2 - 12x + 27 + 9 - 9 = x^2 - 12x + 36 - 9 =$$

$$= (x-6)^2 - 9;$$

$$y = x^2 - 4\mathrm{x} + 3 = x^2 - 4\mathrm{x} + 3 + 1 - 1 = x^2 - 4\mathrm{x} + 4 - 1 =$$

$$= (x-2)^2 - 1.$$

Следовательно, график функции $y = x^2 - 12\mathrm{x} + 27$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на 6 единиц по оси Ox и на -9 единиц по оси Oy; а график функции $y = x^2 - 4\mathrm{x} + 3$ сдвигом на 2 единицы по оси Ox и на -1 единицу по оси Oy.

Графиком функции $y = x^2 - 8x - 4|x-3| + 15$ изображен на рисунке 2.13 выше.

X. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{5}{x}, \text{если } x \leq -1, \\ -x^2 + 4x, \text{если } x > -1. \end{cases}$ и определите, при каких значениях c, прямая $y = c$ будет пересекать построенный график в трех точках.

Решение.

Выделим полный квадрат: $y = –x^2 + 4x = –x^2 + 4x – 4 + 4 = – (x^2 – 4x + 4) + 4 = – (x – 2)^2 + 4$.

Следовательно, график функции $y = –x^2 + 4x$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на вектор $(2; 4)$ и отражением относительно оси Ox.

График функции $y = \frac{5}{x}$ получается из графика функции $y = \frac{1}{x}$ растяжением в 5 раз вдоль оси ординат.

Построим график функции (рисунок 2.14).

$$y = \begin{cases} \frac{5}{x}, \text{если } x \le -1, \\ -x^2 + 4x, \text{если } x > -1. \end{cases}$$

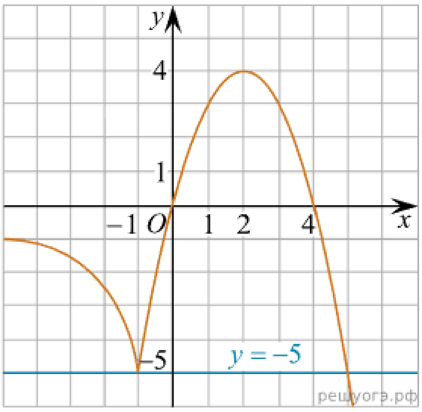

Рисунок 2.14

Из графика видно, что прямая $y = c$ будет иметь с графиком функции ровно три точки пересечения при c принадлежащем множеству: (–5; 0).

Ответ: (–5; 0).

2.3 Вывод по второй главе

Все изученные в школе функции относятся к классу элементарных функций, и строить графики этих функций интересно и просто. А график является портретом функции, поэтому выполнять задания следует после того, как изучен весь теоретический материал по теме.

В своей работе я обобщила знания о функции, о их графиках и свойствах. Изучила и систематизировала прототипы заданий ОГЭ, привела алгоритмы и их решения. В процессе этой работы наглядно видно, что задания по теме «Функции», представленные в разных вариантах, имеют не одинаковый уровень сложности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Повторение немаловажно в развитии долговременной памяти и в формировании орфографического навыка. Также оно предупреждает о его забывании, позволяет восстановить забытое, помогает углублению и расширению знаний, умений и навыков. Делает их оссознанными и прочными.

Многие психологи в своих работах показывают, что умение обобщать есть важная частица умственного развития школьников. В процессе учения и практической деятельности человек применяет различные правила действий. Условием применения правила в конкретной ситуации или к единичному предмету является его предварительное отнесение к определенному общему классу. Поэтому немаловажно уметь «видеть» это общее в каждой конкретной ситуации. Наиболее надежным способом, лежащим в основе выполнения этого умения, служат системы понятийных обобщений, представляющие возможность выделить четкие и однозначные опознавательные признаки тех или иных общих классов ситуаций или предметов.

Не всегда знания учеников достигают необходимого уровня обобщенности и целостности. Многие из них не могут оценить весь изученный ими материал с позиций тех теоретических положений, которые заложены в программах и учебниках. Наблюдается слабое знание основных положений, неумение отделить главное от второстепенного.

Практика обучения математике в школе показывает, что обобщения в сознании учащихся при существующей структуре курсов, сами по себе, спонтанно не возникают. Учащиеся не всегда осознают, что любому теоретическому материалу изучаемого курса присуща определенная система. Отсутствие у учащихся умения обобщать есть одна из основных причин слабого овладения ими системой знаний.

Исследования психологов и методистов показали, что обобщения должны выступать вначале не как средство достижения цели – формирования системы знаний, а как содержание цели действия.

Итак, обобщающая функция повторения направлена на формирование системы знаний, а также на формирование умения обобщать учебный материал, на развитие способности подводить конкретное знание под обобщенное, показывать конкретное как проявление обобщенного.

Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики. Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решить многие задачи и парой является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Авдеева, Т. К.** Оптимизация процесса повторения учебного материала на уроках алгебры / Т. К. Авдеева. – Москва, 2014. – 188 с.

2. **Вахтеров, В. П.** Основы новой педагогики / В. П. Вахтеров. – Москва : издание И. Д. Сытина, 2016 – 592 с.

3. **Давыдов, В. В.** Виды обобщения в обучении: логико-психологические проблемы построения учебных предметов / В. В. Давыдов. – Москва : Педагогическое общество России, 2018. – 480 с.

4. **Далингер, В. А.** Методические рекомендации к проведению продуктивного повторения / В. А. Далингер // Математика в школе. – 2020. № 1. – 104 с.

5. **Лернер, И. Я.** Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? / И. Я. Лернер. – Москва : «Знание», 2018. – 48 с.

6. **Лебедева, С. В.** Методика обучения математике. Практикум по общей методике. Учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки Педагогическое образование (профиль подготовки – Математическое образование) / С. В. Лебедева. – Саратов : СГУ, 2020. – 170 с.

7. **Лысенко, Ф. Ф.** Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА 2013: учебные методические пособия / Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2020. – 288 с.

8. **Рубинштейн, С. Л.** Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – Санкт-Петербург : Питер Ком, 2019. – 688 с.

9. **Семенов, В. А.** Государственная итоговая аттестация выпускников 9 класса в новой форме. Математика 2018: учебное пособие / В. А. Семенов. – Москва : Интеллект-Центр, 2018. – 88 с.