МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
ЮУРГГПУ

Методика обучения учащихся 10-11 классов решению тригонометрических уравнений в процессе подготовки к ЕГЭ

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05. Педагогическое образование (два профиля подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
68 % авторского текста

Работа ________________ к защите
рекомендована/не рекомендована

«25» мая 2020 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
____________Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Садыкова Лидия Ирековна Садыкова

Научный руководитель:
доктор педагогических наук,
доцент
Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск

2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Что такое тригонометрия? Многие школьники скажут, что это множество неинтересных формул. Но на самом деле – это не так. Если ученики плохо усвоили самый простой материал тригонометрии, дальше им будет гораздо сложнее. Главная задача каждого учителя должна быть сосредоточена на усвоении основных тригонометрических формул, это принесет более легкое усвоение последующего материала. Поэтому в нашей выпускной квалификационной работе мы раскроем поэтапно изучение тригонометрии, от самых простых задач до самых трудных.

Все прекрасно знают, что тригонометрия начинается еще на уроках геометрии при изучении прямоугольных треугольников. Отложим геометрию в сторону и перейдем сразу к алгебре, а именно к подготовке школьников к единому государственному экзамену. Эту тему они встретят в нем не раз и задания по данной теме могут принести им неплохие баллы, поэтому стоит уделить ей должное внимание. Для того, чтобы школьники уверенно решали экзаменационные задачи по тригонометрии, нужна тренировка. На сегодняшний день статистика решений заданий в ЕГЭ по теме «Тригонометрия» показывает недостаточную подготовленность и наличие ошибок.

Основу выполнения задач по тригонометрии в Едином государственном экзамене составляют: преобразование тригонометрических выражений, простейшие тригонометрические уравнения, использование модели единичной окружности. Поэтому подготовку к решению тригонометрических задач ЕГЭ следует начать именно с них. Для этого нужно выделить необходимый теоретический минимум выполнения этих заданий. Важно научить детей не только запоминать формулы, но и понимать, откуда берутся формулы, как в них ориентироваться. Чаще всего трудность вызывает у учащихся то, что они привыкли к обычной постановке формул, но в тригонометрии чаще всего важно понимать и представлять логику решений экзаменационных задач.

Значимость проблемы обучения решению тригонометрии высока, ввиду наличия такого типа заданий в обязательном для всех выпускников старших классов ЕГЭ по математике.

Актуальность темы заключается в том, что данная тема затрагивает каждого школьника при подготовке к единому государственному экзамену.

Цель: разработка методики обучения тригонометрии в школьном курсе алгебры при подготовке к единому государственному экзамену.

Гипотеза: для продуктивного решения задач по тригонометрии целесообразно использовать методику, включающую:

– организацию ознакомительной работы на ранних этапах обучения для формирования знаний, умений и навыков;

– проведение изучения тригонометрии в трех основных группах задач;

– использование в каждой группе обучения системы упражнений, способствующих достижению предметных и метапредметных результатов обучения.

Задачи:

1. Дать характеристику изучения тригонометрических функций в школьном курсе.

2. Рассмотреть методику изучения тригонометрических функций.

3. Рассмотреть задачи в ЕГЭ, в которых присутствует тригонометрия

4. Выявить основные проблемы, возникающие в процессе обучения решению тригонометрии и предложить пути их ликвидации;

5. Разработать систему упражнений на каждую группу изучения тригонометрии.

6. Рассмотреть тригонометрические функции и разбить их на группы по уровню сложности.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

1.1 Обучение тригонометрии в теории и практике методики математики

Слово «тригонометрия» произошло от двух греческих слов «тригонон» треугольник и «метрео» измеряю, и его можно перевести как знакомое по курсу планиметрии «решение треугольников». При решении прямоугольного треугольника, впервые школьники встречаются с синусом и косинусом острого угла [20, с.36].

В этой главе мы показали, с чего начать знакомство с методикой преподавания тригонометрии как в теории, так и в практике.

Если обратимся к истокам зарождения тригонометрии, то увидим, что ее начало положили астрономия, землемерия и строительное дело. Все эти науки основывались на геометрии и представляли «исчисление хорд». Уже в XVIII веке тригонометрия начала относится к математическому анализу, т.к. в неё входило изучение функции. Важно, что это несло методико-педагогический интерес, а не только историко-математический.

В школьной программе изучение тригонометрии проходит по такой же схеме, знакомство начинается с геометрии, далее школьники сталкиваются с тригонометрией, уже в курсе алгебры и начал анализа. Предлагаем построить изучение темы «Тригонометрия» по следующей схеме: функция – уравнения – преобразования.

Выделены взаимосвязанные ступени формирования предметной компетенции по тригонометрии, но для начала необходимо ознакомиться с «простыми моделями» (сюда входят элементарные функции), далее уже стоит рассмотреть «сложные модели» (к ним относятся сложные выражения, решение которых приводит к упрощению, с помощью использованию формул).

Пример 1

Найти период функции $y = \sin 3x$.

Решение: Пусть T – основной период

$$t(x) = f(x + T) \tag{1}$$

$$t(x) = sin(x) \tag{2}$$

Применим, выше указанные, формулы – (1) и (2):

$$f(x + T) = sin3(x + T) = sin(3x + 3T)$$

$$sin3x = sin(3x + 3T) \rightarrow 3T = 2\pi n, \text{т. к. нужен основной период } n = 1$$

$$3T = 2\pi, \qquad T = \frac{2\pi}{3}$$

Основной период функции $y = sinkx (y = coskx)$ равен $\frac{2\pi}{k}$.

После изучения функций $y = sinx,\ y = cosx$ знакомятся с преобразованием графиков функции $y = f(x), y = mf(x), y = f(kx)$.

Далее знакомятся с функциями $y = tgx, y = ctgx$.

Приходим к выводу, что при изучении тригонометрии стоит опираться на следующую схему:

1. Изучение действительного числа и его свойств в тригонометрической форме записи.

Для учащихся важно ознакомиться с такими математическими моделями как числовая окружность, а также числовая окружность на координатной плоскости. Одной из целей будет изучение неалгебраических функций – тригонометрических. В свою очередь обучение учащихся находить значение некоторого аргумента тригонометрических функций по уже данному значению иной функции того же аргумента. Рассмотрение как градусной меры измерения углов, так и радиальной.

2. Непосредственно тригонометрические уравнения.

На данном этапе главной целью будет обучить учащихся решать простейшие тригонометрические уравнения.

Для начала важно познакомить школьников с самыми «простыми вариантами» уравнений, в них входят простейшие тригонометрические уравнения и все те уравнения, которые можно с помощью алгебраических операция свести к простейшим. После закрепления этих материалов, осваивать более сложные виды тригонометрических уравнений.

3. Тригонометрические формулы и их применение.

После того, как учащиеся будут не только знать числовую окружность и простейшие уравнение, но уметь применять их на практике, начинаем знакомить их с более сложным, но не менее интересным разделом – тригонометрические формулы, главной целью которого является в первую очередь изучить тригонометрические формулы, научиться быстро находить подходящие формулы и владение ими в уравнениях. Это применимо в доказательствах тригонометрических тождеств, а также упрощении тригонометрических выражений.

После того, как пройдена тема «Простейшие тригонометрические уравнения», учащимся предлагаются задания с использованием формул тригонометрии. Отсюда и вытекает для учащихся польза от изучения формул: «жуткие» уравнения принимают после преобразований вполне знакомый вид.

Согласно стандарту среднего общего образования в теме «Основы тригонометрии» должны быть рассмотрены следующие темы: синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла; радианная мера угла; синус, косинус, тангенс, котангенс числа; основные тригонометрические тождества; формулы привидения; синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов; синус, косинус двойного угла; формулы половинного угла; преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму; выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента; преобразование простейших тригонометрических выражений; простейшие тригонометрические уравнения; решение тригонометрических уравнений; простейшие тригонометрические неравенства; арксинус, арккосинус, арктангенс числа; тригонометрические функции, их свойства и графики, периодичность, основной период.

Если мы рассмотрим изучение тригонометрии в школьном курсе, можем выделить несколько этапов:

I. Учащиеся впервые узнают тему «Тригонометрия» благодаря тригонометрическим функциям углового аргумента в разделе геометрии. (Но на начальном этапе значение аргумента берем в промежутке от 0^{o} до 90^{o}. Они знакомятся с синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом, а также их табличными значениями, основными тождествами и формулами приведения.

II. На данном этапе учащимся дается обобщение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса. (Значение аргумента берется от 0^{o} до 180^{o}). Изучают координаты точки на плоскости, при этом рассматривают их связь с тригонометрическими функциями. В этот этап также входит доказательства теорем синусов и косинусов, рассматривается вопрос решения треугольников с помощью тригонометрических соотношений.

III. Третьим шагом является изучение числового аргумента тригонометрических функций.

IV. Знакомство с графиками функций, усвоение логически последовательных знаний о тригонометрических функциях. Применение производной для исследования тригонометрических функций.

В настоящее время вопросы тригонометрии изучаются в 10-11 классах в рамках 85-часового курса "Алгебра и начала анализа". В разных вариантах тематических планов, опирающихся на учебники разных авторов, отводится от 15 до 28 часов, при этом в основном ставятся следующие цели:

1) ввести понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса для произвольного числа;
2) систематизировать, обобщить и расширить уже имеющиеся у учащихся знания о тригонометрических функциях углового аргумента;
3) изучить свойства тригонометрических функций;
4) научить учащихся строить графики тригонометрических функций и выполнять некоторые преобразования этих графиков.

Проанализировав с точки зрения реализации вышеперечисленных целей те учебники, которые наиболее распространены в общеобразовательных школах, а именно учебники [1, 2, 13, 18], пришли к выводу, что курс тригонометрии представлен в полноценном объеме для изучения тригонометрии.

1.2 Тригонометрия в ЕГЭ

С одной стороны, тригонометрия является составной частью школьного курса математики. С другой стороны, многие выпускники школ показывают весьма слабую подготовку в решении тригонометрических задач, о чём свидетельствуют результаты итоговой аттестации по математике прошлых лет. Анализ сдачи единого государственного экзамена по математике показал, что ученики допускают много ошибок при выполнении заданий именно этого раздела или вообще не приступают к их решению. Хорошие знания и прочные навыки по тригонометрии являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения в вузе математики, физики и ряда технических дисциплин. Вопросы по тригонометрии встречаются почти в трети видов заданий ЕГЭ по математике.

Во-первых, тригонометрические уравнения являются наиболее легкой для усвоения темой из рассматриваемых во второй части ЕГЭ. У большого количества школьников сформированы навыки их решения. Во-вторых, к решению приступает менее половины школьников, решающих задания с развернутым ответом, что, очевидно, не соответствует их желаемым образовательным результатам. Напомним, что получение 60 баллов по ЕГЭ, что является пороговым значением, установленным для среднего балла абитуриентов при мониторинге вузов, дает школьнику гораздо большие возможности для выбора вузов, а для получения такого результата необходимо как минимум начать решать задания с развернутым ответом (при условии верного выполнения части с краткими ответами [15].

В вариантах профильного ЕГЭ по математике тригонометрические задачи встречаются во многих заданиях [5].

Задание №5 (проверяет умение решать простейшие рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические или логарифмические уравнения).

Для выполнения этого задания необходимо уметь решать простейшие тригонометрические уравнения, а также уравнения, сводящиеся к простейшим. Знание основных фактов и формул тригонометрии, свойств корней, степеней и логарифмов.

<u>Пример 2</u>

Дано уравнение $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$. Решите и найдите наибольший отрицательный корень.

Решение:

$$tg\frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathrm{Z}$$

Значению k соответствует x, при этом $\mathrm{k} = 0$, а $\mathrm{x} = -1$. Положительные значения корней зависят от положительных значений параметра, таким образом меньшие значения корней зависят от отрицательных значений параметра. Отсюда следует, что наибольшим отрицательным корнем будет -1.

Ответ: -1

<u>Пример 3</u>

Дано уравнение $cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. Найдите наибольший отрицательный корень.

Решение:

$$\frac{cos\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x - 7 = \pm 1 + 6n$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 + 6n; \\ x = 6 + 6n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Если $\mathrm{n} \geq 0$, то корни положительные.

Если $\mathrm{n} = -1$, то $\mathrm{x} = 2$ и $\mathrm{x} = 0$.

Если $\mathrm{n} = -2$, то $\mathrm{x} = 8 - 12 = -4$ и $\mathrm{x} = 6 - 12 = -6$.

Если $n = -3$, то $x = 8 - 18 = -10$ и $x = 6 - 18 = -12$. – не подходит, т.к. корни имеют меньшее значение.

Отсюда следует, что наибольшим отрицательным корнем будет 4.

Ответ: 4

Задание №9 (проверяет умение выполнять несложные вычисления или преобразования рациональных, иррациональных, тригонометрических или логарифмических выражений).

Для выполнения этого задания достаточно уметь выполнять действия с числами, знать определение и простейшие свойства степеней, корней, логарифмов, синуса, косинуса, тангенса.

- **вычисление значений тригонометрических выражений;**

<u>Пример 4</u>

Найдите $24cos2\alpha$, если $cos\alpha = \sqrt{0{,}96}$.

Решение:

Применим формулу двойного угла $cos2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha$.

Получим: $24cos2\alpha = 24(1 - 2\,sin^2 x)$

Найдём $\sin^2 x$:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

$$24(1 - 2 \cdot 0{,}04) = 24 \cdot 0{,}92 = 22{,}08.$$

Ответ: 22,08.

- **преобразования числовых тригонометрических выражений;**

<u>Пример 5</u>

Найдите значение выражения $\frac{14sin409°}{sin49°}$.

Решение:

Вспомним, что синус периодичен, тогда:

$$\frac{14\sin409°}{\sin49°} = \frac{14\sin(360° + 49°)}{\sin49°} = \frac{14\sin49°}{\sin49°} = 14.$$

Ответ: 14

- **преобразования буквенных тригонометрических выражений;**

Пример 6

Найдите значение выражения $\frac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\alpha+\pi)}$.

Решение:

$$\frac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-2\sin(\pi-\alpha)+\sin\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{-2\sin\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha}=1.$$

Ответ: 1

Задание №13 (проверяет умение решать тригонометрические, показательные, логарифмические, а также смешанные уравнения с дальнейшим отбором найденных корней).

Структура задания №13 в ЕГЭ такова, что простое решение тригонометрического уравнения не приносит учащемуся два первичных балла. Для этого необходимо выбрать из общего множества решений тригонометрического уравнения (которое бесконечно) значения, попадающие в заданный интервал.

Рассмотрение указанных типов тригонометрических уравнений позволяет охватить практически весь спектр уравнений, представленных в заданиях №13 профильного ЕГЭ по математике. Проведение классификации задания и четкая реализация алгоритма решения позволит школьнику добиться положительного результата при решении задания. Именно поэтому при подготовке учащихся большинство преподавателей уделяют много внимания данному заданию.

Выполнение этого задания требует либо уметь выполнять замену переменной, что позволяет свести уравнение к квадратному, либо, используя несложные преобразования, разложить левую часть уравнения на множители и перейти к совокупности простейших или более простых уравнений. Отбор корней, как правило, связан с условием задачи, с ограниченностью новой переменной, наличием выражений с переменной в знаменателях алгебраических дробей, под знаками корней четной степени и логарифмов.

В вариантах базового ЕГЭ по математике тригонометрические задачи встречаются в следующих заданиях [6].

- **тригонометрические уравнения, разложение на множители;**

Пример 7

a) решите уравнение $cos^2(\pi - x) - sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$ [27];

b) укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение:

а) применим формулы приведения, получим:

$$\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + cosx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ cosx = -1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

b) отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{2}, 3\pi$ *и* $\frac{7\pi}{2}$ (рисунок 1).

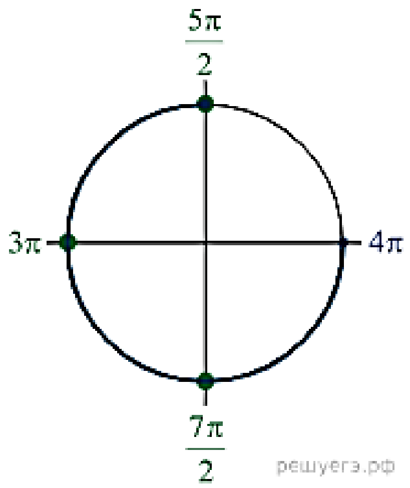

Рисунок 1 – Точки на тригонометрическом круге, к примеру 6

Ответ: a) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, x = \pi + 2\pi k, k \in Z.\right\}$ *b)* $\frac{5\pi}{2}, 3\pi$ *и* $\frac{7\pi}{2}$.

- **тригонометрические уравнения;**

Пример 8

a) решите уравнение $2cos2x + 4\sqrt{3}cosx - 7 = 0$;

b) укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$;

Решение:

a) $2cos2x + 4\sqrt{3}cosx - 7 = 0.$

$$2(2\cos^2 x - 1) + 4\sqrt{3}cosx - 7 = 0.$$

$$4\cos^2 x + 4\sqrt{3}cosx - 9 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} cos = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ cosx = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad |cosx| \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \;\; k \in Z$$

b) воспользуемся числовой окружностью (рисунок 2), с её помощью отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$;

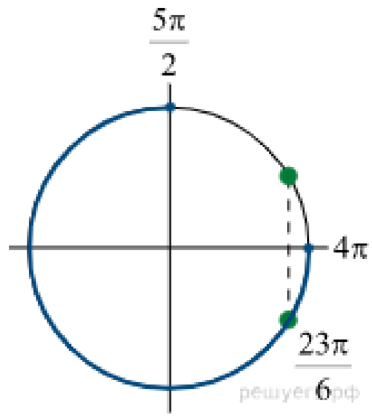

Рисунок 2 – Точки, отмеченные на числовой окружности, к примеру 7

Получим точку $\frac{23\pi}{6}$.

Ответ: a) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \;\; k \in Z\right\}$, *b)* $\frac{23\pi}{6}$.

- **тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ;**

Пример 9

a) решите уравнение $\frac{sin2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \sqrt{3}$;

b) укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$;

Решение:

а) применим формулы синуса двойного угла и формулу приведения, получим:

$$\frac{sin2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\sqrt{3}\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{2sinxcosx}{-sinx}=\sqrt{3}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ sinx\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in Z \end{array}\right.$$

воспользуемся числовой окружностью (рисунок 3), с её помощью отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$;

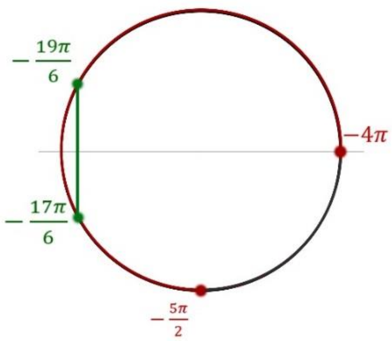

Рисунок 3 – Точки, отмеченные на тригонометрическом круге, для примера 9

Получим $-\frac{19\pi}{6},-\frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{5\pi}{6}+2\pi k,-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}$ *b)* $-\frac{19\pi}{6},-\frac{17\pi}{6}$.

А также все задания планиметрии и стереометрии (задания №13, 15, 16).

Проанализировав задания ЕГЭ по математике профильного, мы пришли к выводу, что основу выполнения задач по тригонометрии в ЕГЭ составляют преобразование тригонометрических выражений, простейшие тригонометрические уравнения, использование модели единичной окружности. Поэтому подготовку к решению тригонометрических задач ЕГЭ следует начать именно с них. Для этого нужно выделить необходимый теоретический минимум выполнения этих заданий, разработать систему занятий по подготовке к их решению.

1.2 Проблемы, возникающие в процессе обучения решению тригонометрических уравнений и пути их ликвидации

Ошибки, которые допускают учащиеся в школе могут быть абсолютно различными. Сюда можно включить как неправильное оформление задач, так и неправильные преобразования. Именно эти ошибки мы разберем. Обратим внимание на то, что каждому примеру стоит уделить особое внимание, т.к. они могут указать на типичные ошибки школьников.

Кроме ошибок в оформлении задач, учащиеся чаще всего нарушают логику решения задач. Причиной этому является применение преобразований без пошаговых пояснений получения результата. Несомненно, это противоречит равносильности, и в ответе они получают либо не все корни уравнения, либо посторонние корни. Важно заметить, что лучше получить второй вариант, так как всегда можно провести проверку. Этим навыком должен владеть каждый ученик.

При решении уравнений учащиеся допускают много ошибок при решении тригонометрических уравнений и неравенств:

1. Потеря корней по причине применения формулы преобразования tgx и $ctgx$.
2. Не проверяя полученные корни, получают посторонние корни в ответе.
3. Записывают решение в ответ, не объединяя семейства корней, если это допустимо.
4. Не учитывая область допустимых значений, получать посторонние корни.
5. Неправильно выделяют дугу числовой окружности.
6. При наличии отрезка, не учитывают его и записывают в ответ все корни, которые получились при вычислении.

7. При замене переменной, в конце решения не показывают, что полученное семейство корней входит в другое и т.д.

Для того, чтобы понять на что обратить внимание для ликвидации ошибок учащихся, важно рассмотреть несколько примеров:

Пример 10

Решить уравнение $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2ctgx-1$ [17].

Решения: чтобы решить данное уравнение, необходимо воспользоваться формулами (3) и (4):

$$tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tgx+1}{1-tgx} \tag{3}$$

$$ctgx=\frac{1}{tgx}. \tag{4}$$

Данное уравнение примет вид:

$$\frac{tgx+1}{1-tgx}=\frac{2}{tgx}-1.$$

Заменим $tgx=z,$ получим уравнение вида:

$$\frac{z+1}{1-z}=\frac{2}{z}-1$$

Отсюда, $\begin{cases} z^2+z=2-2z-z+z^2, \\ 1-z\neq 0, \\ z\neq 0. \end{cases}$

После преобразования система уравнений будет иметь вид $4z=2$, таким образом $z=\frac{1}{2}$, т.е. $tgx=\frac{1}{2}$. Корнями уравнения будет $x=arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$.

Это семейство корней удовлетворяет уравнению $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2ctgx-1$. Но это не все корни уравнения. Но если мы рассмотрим, к примеру $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, тогда эти корни тоже подойдут в исходное уравнение. Можем сделать вывод, что корни были потеряны. Ее причина в том, что в самом начале решения мы произвели замену $tgx\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ выражением $\frac{tgx+1}{1-tgx}$, эта же ситуация произошла и с ctgx, сделали замену на $\frac{1}{tgx}$. Данное преобразование сужает область определения исходного уравнения, по этой причине мы потеряли семейство корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Для того, чтобы решить данное уравнение правильно, пойдем другим путем.

Решение:

$$tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2ctgx - 1$$

Применим формулу

$$tgx = \frac{sinx}{cosx} \tag{5}$$

для $ctgx$ аналогично

$$ctgx = \frac{cosx}{sinx} \tag{6}$$

Получим,

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2cosx}{sinx} = -1$$

Преобразуем части дроби $\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sinxcos\frac{\pi}{4} + cosxsin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}sinx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(sinx + cosx).$$

Таким же образом,

$$cosx\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = cosx\cos\frac{\pi}{4} - sinx\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(cosx - sinx).$$

ОДЗ:

(ОДЗ получено из преобразования cosx, где получили cosx-sinx находятся в знаменателе, значит cosx-sinx=/0. Отсюда, cosx=/sinx)

$cosx \neq sinx$

Приводим к общему знаменателю:

$$\frac{\sin^2 x + sinxcosx + 2sinxcosx - 2\cos^2 x}{(\sin^2 x - sinxcosx)} = -1$$

$$\sin^2 x + sinxcosx + 2sinxcosx - 2\cos^2 x = +\sin^2 x - sinxcosx$$

$$-2\cos^2 x + 4sinxcosx = 0$$

$$-cosx(2cosx - 4sinx) = 0$$

Отсюда получаем корни,

$$cosx = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Найдем другие корни,

$$2cosx - 4sinx = 0 \qquad |: sinx \quad (sinx \neq 0 - \text{по ОДЗ})$$

$$\frac{2cosx}{sinx} - \frac{4sinx}{sinx} = 0$$

По формуле (6), получим:

$$2ctgx = 4$$

$$tgx = \frac{1}{2}$$

$$x = arctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $\left\{arctg\frac{1}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$.

Пример 11

Решить уравнение $\frac{1+cos2x}{2cosx} = \frac{sin2x}{1-cos2x}$.

Решение: для начала упростим обе части, уравнение примет вид

$$\frac{1 + cos2x}{2cosx} = \frac{2\cos^2 x}{2cosx} = cosx;$$

$$\frac{sin2x}{1 - cos2x} = \frac{2sinxcosx}{2\sin^2 x} = \frac{cosx}{sinx}.$$

Подставим в исходное уравнение

$$cosx - \frac{cosx}{sinx} = 0,$$

$$\frac{cosx(sinx-1)}{sinx}=0$$

$\begin{cases} cosx=0, \\ sinx\neq 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} sinx-1=0, \\ sinx\neq 0. \end{cases}$

Отсюда имеем

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z \quad \text{или} \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$$

Оба семейства корней можно объединить в одно: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$

Школьники допускают ошибку в том, что не видят, что одно семейство корней может содержатся в другом. Также, если подставим полученные корни в уравнение, то можем заметить, что появились лишние корни. Причиной является не учитывание ОДЗ перед решением исходного уравнения. [8, с.112].

ОДЗ:

$$\begin{cases} cos2x\neq 1; \\ cosx\neq 0. \end{cases}$$

Решение:

С учётом ОДЗ, отбросим некоторые корни и получим, что решение не имеет действительных корней.

Пример 12

Решить уравнение $\sqrt{cos2x+sin3x}=\sqrt{2}cosx.$

В данном примере ученики сразу начинают решать уравнение, забывая про наложение ОДЗ (область допустимых значений). А значит, появляется лишний промежуток, в который не входят корни. Поэтому в конце решения данного уравнения появляются лишние корни. Обратимся к левой части уравнения и получим: $cos2x+sin3x\geq 0.$

Но этой операции будет недостаточно. Важно вспомнить определение квадратного корня, если левая часть содержит арифметический квадратный корень, а он больше 0, то и его правая часть также будет больше 0. Получаем: $cosx\geq 0.$

Итак, мы получили, что корни должны удовлетворять ОДЗ:

$$\begin{cases} cos2x + sin3x \geq 0 \\ cosx \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Решим заданное уравнение, учитывая ОДЗ.

Возведем обе части в квадрат

$$cos2x + sin3x = 2\cos^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + sin3x - 2\cos^2 x = 0$$

$$-(\cos^2 x + \sin^2 x) + sin3x = 0$$

$$sin3x = 1$$

Получим корни,

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi x, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, k \in Z$$

На следующем этапе важно определить в какой четверти будут лежать корни уравнения. В нашей случае – это I и IV четверти. В них входят корни:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\right\}$.

Чтобы не допускать получение лишних корней, важно учащимся быть внимательными. Выработать навык, решая подобные уравнение как можно чаще – перед решением уравнений всегда проверять на область допустимых значений.

Итак, можем указать важные аспекты по устранению ошибок в решении тригонометрических уравнений и неравенств:

– решить уравнение разными способами, чтобы проверить, нет ли потерянных корней;
– в конце решения делать проверку;
– в полученном вычислении проверить может ли одно из семейств корней входить в другое семейство;

– перед решением уравнения или неравенства ввести область допустимых значений, если это необходимо;
– нарабатывать умение применять числовую окружность;
– проверять в конце решения, был ли дан отрезок в исходном уравнении и т.д..

ВЫВОДЫ ПО 1 ГЛАВЕ:

В данной главе мы рассмотрели поэтапное изучение тригонометрии в школьном курсе алгебры и начал анализа при подготовке к единому государственному экзамену по математике. Безусловно, задания, включающие в себя тригонометрию, могут принести много баллов. Мы рассмотрели не только подобные задания и их решения, но и разобрали поэтапно важность и пользу изучения нашей темы в школьном курсе и пришли к выводу, что школьная программа даёт полный спектр нужного материала для успешной сдачи экзамена. Рассмотрели задания, которые представлены в КИМах (контрольно-измерительные материалы), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы. Как в базовом, так и в профильном уровнях ЕГЭ присутствуют задания, затрагивающие тему «Тригонометрия».

Таким образом, нами было выведено некоторые количество типичных аббераций в процессе обучения решению тригонометрических уравнений. На примерах мы показали, по каким причинам возникают неправильные ответы у учащихся, провели анализ и вывели пути решения ликвидации частых ошибок.

ГЛАВА 2. СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

2.1 Подготовительные упражнения

Для изучения темы «Тригонометрия» учащимся необходимо научиться решать самые, как может показаться на первый взгляд, «примитивные» упражнения. Решение таких заданий для школьников развивает навыки запоминания числового аргумента тригонометрических функций: синуса, косинуса, тангенса и котангенса, их свойства и графики, применение числовой окружности на практике, применение на практике тождественные преобразования тригонометрических выражений и решение тригонометрических уравнений основных видов.

1) радианная мера угла;

Первое, с чего нужно начать подготовку к изучению тригонометрии, важно рассмотреть радианную меру угла.

Лучше не ориентировать школьников на запоминание формул перевода, так как они со временем все равно забудутся, а предложить им всегда отталкиваться от простого соотношения между радианами и градусами π рад=180° [22].

Для решения данных упражнений применимы формулы:

1. Перевод градусной меры в радианную

$$\alpha° = \frac{\alpha\pi}{108}\text{рад.} \tag{6}$$

2. Переход из радианной меры в градусную $\alpha_{\text{рад}} = \frac{\alpha 180°}{\pi}$.

<u>Пример 13</u>

Выразить в радианной мере значения углов: $30°, 40°, -480°$.

Решение:

$$30° = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6}\text{рад,}$$

$$40° = \frac{40 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{9}\text{рад,}$$

$$-480° = \frac{-480 \cdot \pi}{180} = -2\frac{2\pi}{3} \text{рад.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{9}, -2\frac{2\pi}{3}$.

<u>Пример 14</u>

Перевести значения углов в градусную меру: $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, -6$

Решение:

$$\frac{\pi}{3} \text{рад} = \frac{\pi \cdot 180}{3 \cdot \pi} = 60°,$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{рад} = \frac{3\pi \cdot 180}{2 \cdot \pi} = 270°,$$

$$-6\text{рад} = \frac{-6 \cdot 180}{\pi} = \frac{-6 \cdot 180}{3{,}14} \approx -344°.$$

Ответ: $60°, 270°, -344°$.

2) синус и косинус любого угла;

На данном этапе пройдет подготовка по нахождению синусов и косинусов произвольных углов. Безусловно, учащиеся должны знать часто встречающиеся значения для быстрого применения в решениях уравнения (Таблица 1).

Таблица 1 – Таблица значений синуса и косинуса некоторых углов

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
φ рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Рассмотрим единичную окружность – окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

Для углов от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (от 0° до 90°) координаты точки P_φ найдем из прямоугольного треугольника $P_\varphi CO$(рисунок 4), гипотенуза которого равна 1:

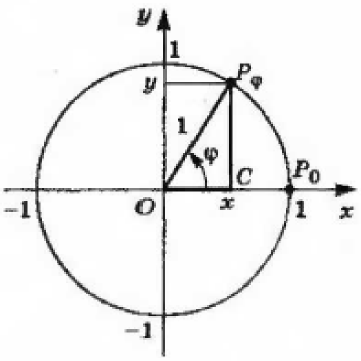

Рисунок 4 – Прямоугольного треугольника $\boldsymbol{P_\varphi\ CO}$

$x = cos\varphi, y = sin\varphi.$

Синусом угла φ называется ордината конечной точки поворота точки (1;0) вокруг начала координат на угол φ.

Косинусом угла φ называется абсцисса конечной точки поворота (1;0) вокруг начала координат на угол φ [21].

<u>Пример 15</u>

Найдите: $sin45°, \cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{6}, \cos\pi, \sin\frac{3\pi}{2}, cos0°$.

Решение:

Отметим точки на числовой окружности (рисунок 5).

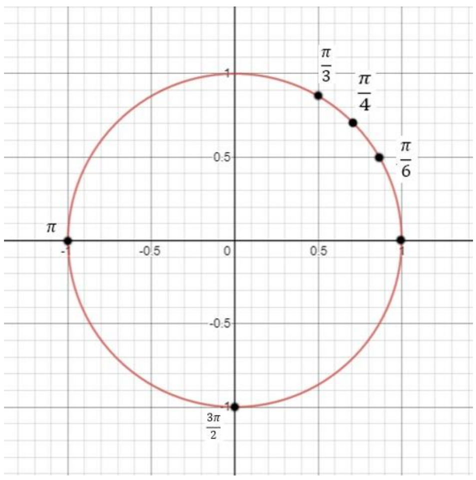

Рисунок 5 – Точки, отмеченные на тригонометрическом круге, для примера 15

Получаем, $sin45° = \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\pi = -1,$$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = -1,$$

$cos0° = 2\pi = 1.$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1, 1.$

3) тангенс и котангенс любого угла;

Тангенсом угла называется частное синуса и косинуса этого угла.

Для углов $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ тангенс не будет существовать. И имеет формулу:

$$tgx = \frac{sinx}{cosx}. \tag{7}$$

Котангенс угла – это частное косинуса и синуса.

Котангенс не существует в углах πn. И его формула выглядит так:

$$ctgx = \frac{cosx}{sinx}. \tag{8}$$

Как и с изучением синуса и косинуса, тангенс и котангенс имеют часто применимые значения, которые важно знать наизусть (Таблица 2):

Таблица 2 – Таблица значений тангенс и котангенс некоторых углов

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
φ рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$tg\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Продолжение таблицы 2

$ctg\varphi$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

<u>Пример 16</u>

Найти тангенс и котангенс угла $220°$.

Решение:

Построим единичную окружность с центром в начале координат и проведем ось тангенсов. Отметим на окружности с помощью с транспортира точку $P_{220°(220°=360°-140°)}$. Через точку $P_{220°}$ и начало координат проведем прямую – она пересечет ось тангенсов в точке С (рисунок 6).

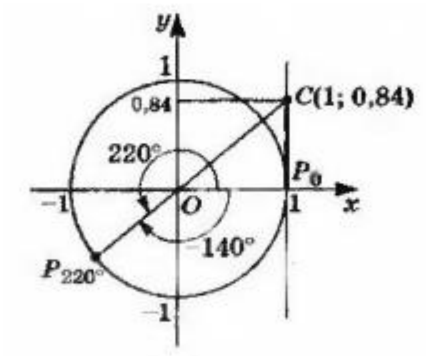

Рисунок 6 – Нахождение точки на числовой окружности

Ордината этой точки приближенно равна 0,84. Значит,

$$tg220° \approx 0{,}84$$

Заметив, что по формуле (8)

$$ctg\varphi = \frac{cos\varphi}{sin\varphi} = \frac{\frac{1}{sin\varphi}}{cos\varphi} = \frac{1}{tg\varphi},$$

Найдем:

$$ctg\ 220° = \frac{1}{tg220°} = \frac{1}{0{,}84} = 1{,}2$$

Ответ: $tg220° = 0{,}84, ctg220° = 1{,}2.$

Пример 17

Заполните Таблицу 3:

Таблица 3 – Таблица для заполнения значений тангенса и котангенса некоторых углов

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$
φ рад	0	$\frac{\pi}{6}$				
$tg\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$				
$ctg\varphi$	$-$	$\sqrt{3}$				

Решение:

Таблица 4 – Заполненая таблица значений тангенса и котангенса некоторых углов

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$
φ рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$tg\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$
$ctg\varphi$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) простейшие тригонометрические уравнения;

Простейшие уравнения $\sin\varphi = a, \cos\varphi = a, \mathrm{tg}\varphi = a, \mathrm{ctg}\varphi = a$ являются фундаментом тригонометрии, поэтому любое уравнение нельзя решить, не используя их, так как при решении любого уравнения в тригонометрии оно сводится к простейшему.

1. Уравнение $\sin\varphi = a$

Число φ, принадлежащее промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, называют арксинусом a.

Уравнение $sin\varphi = a$ при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней:

$$\varphi_1 = arcsina + 2\pi n,$$

$$\varphi_2 = \pi - arcsina + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

2. Уравнение $cos\varphi = a$

Число φ, принадлежащее промежутку $[0;\pi]$, косинус которого равен a, называют аркосинусом a. Как и в ситуации с синусом $-1 < a < 1$.

$$\varphi_1 = arccosa + 2\pi n,$$

$$\varphi_2 = -arccosa + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

3. Уравнения $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{a}$ и $\mathrm{ctg}\varphi = \mathrm{a}$.

Решения уравнений $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{a}$ и $\mathrm{ctg}\varphi = \mathrm{a}$ проиллюстрируем с помощью осей тангенсов и котангенсов (рисунок 7).

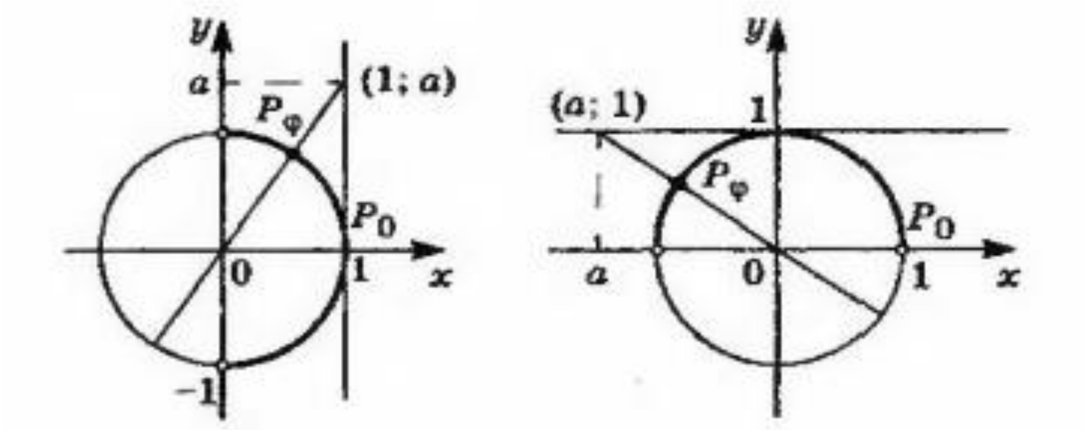

Рисунок 7 – Оси тангенсов и котангенсов

У $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{a}$ и $\mathrm{ctg}\varphi = \mathrm{a}$ получим по одной серии корней:

$$\varphi = arctga + \pi n,$$

$$\varphi = arcctga + \pi n, n \in Z.$$

Но $arctga$ и $arcctga$ не существуют в некоторых точках, поэтому:

$$-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < arcctga < \pi.$$

<u>Пример 18</u>

Решить уравнение $7tg^2x - tgx - 6 = 0$.

Решение:

Заменим tgx = y, уравнение примет вид:

$$7y^2 - y - 6 = 0.$$

$$y_1 = 1, y_2 = -\frac{6}{7}.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\begin{cases} tgx = 1; \\ tgx = -\frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = arctg\left(-\frac{6}{7}\right) + \pi n, \end{cases} n \epsilon Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, -arctg\left(\frac{6}{7}\right) + \pi n.$

5) свойства и графики функций;

Для начала выясним какие знаки имеют функции в координатных четвертях.

Допустим, что при повороте радиуса OA, который равен R. Возьмем точку A, она перейдет на угол α в точку B, координаты которой (x, y).

Получаем $sin\alpha = \frac{y}{R}$, значит, что знак sinα зависит от знака y. В I и II четвертях $y > 0$, а в III и IV четвертях $y < 0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{sin\alpha} > 0$, ***если α является углом I или II четвертях, и*** $\boldsymbol{sin\alpha} < 0$, ***если α является углом III или IV четверти.***

Знак cosα зависит от знака x, т.к. $cos\alpha = \frac{x}{R}$. В I и IV четвертях $x > 0$, а вот II и III четвертях $x < 0$. Поэтому $cos\alpha > 0$, ***если α является углом I или IV четверти,*** $\boldsymbol{cos\alpha} < 0$, ***если α является углом II*** и ***III четверти.***

Так как $tg\alpha = \frac{y}{x}$, *а* $ctg\alpha = \frac{x}{y}$, то знаки $tg\alpha$ *и* $ctg\alpha$ зависят от знаков x и y. В I и III четвертях x и y имеют одинаковые знаки, а во II и IV – разные. Значит $tg\alpha > 0$ *и* $ctg\alpha > 0$, *если* α ***является углом I или III четверти;*** $\boldsymbol{tg\alpha} < 0$ ***и*** $\boldsymbol{ctg\alpha} > 0$, ***если α является углом II и IV четверти.***

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в каждой из четвертей показаны на рисунке 8.

Рисунок 8 – Знаки четвертей числовой окружности синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Перейдем к вопросу о чётности и нечётности функций.

Пусть при повороте на угол α, а радиус *OA* переходит в радиус *OB*, а при повороте на угол $-\ \alpha$ в радиус *OC* (рисунок 9).

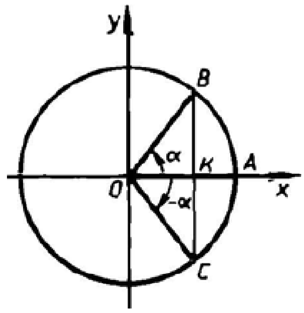

Рисунок 9 – Угол $\boldsymbol{\alpha}$

Соединим отрезком точки *B* и *C*, получим равнобедренный треугольник *BOC*. Луч *OA* является биссектрисой угла *BOC*. Отсюда следует, что точки *B* и С симметричны относительно оси абсцисс. Пусть координаты точки *B* равны x и y, тогда координаты точки С равны x и $-y$. Пользуясь этим, найдем, что

$$\sin(-\alpha) = -\frac{y}{R} = \frac{-y}{R} = -sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -tg\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -ctg\alpha.$$

Получили формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов:

$$\sin(-\alpha) = -sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -tg\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

Сделаем вывод: ***синус, тангенс и котангенс – функции нечетные, а косинус является чётной функцией.***

Рассмотрим ещё одно свойство тригонометрических функций.

Если при повороте радиуса OA на угол α получен радиус OB, тот же радиус получится и при повороте OA на угол, отличающийся от α на целое число оборот. Отсюда следует, что ***при изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются.***

Пример 19

Найдем $sin765°и\ cos(-1170°)$.

Решение:

$$sin765° = sin(2 \cdot 360° + 45°) = sin45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(-1170°) = cos1170° = \cos(3 \cdot 360° + 90°) = cos90° = 0.$$

Ответ: $sin765° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-1170°) = 0$.

6) зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Равенства $tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi}$ и $ctg\varphi = \frac{cos\varphi}{sin\varphi}$ выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента φ. Благодаря тому, что мы знаем синус и косинус, можем найти его тангенс и котангенс.

Из исходных равенств возможно получить тангенс и котангенс, которые связаны между собой равенством:

$$tg\varphi \cdot ctg\varphi = 1. \tag{9}$$

Введем в суть вопроса другие зависимости среди тригонометрических функций.

Вспомним, что абсцисса и ордината любой точки окружности связанны, через уравнение самой окружности $-\ x^2 + y^2 = 1$, с её центром. Отсюда,

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \tag{10}$$

Данное равенство называют – ***основным тригонометрическим тождеством.***

<u>Пример 20</u>

Упростить выражение $(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha)$.

Решение:

$$(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

В данном решении мы воспользовались заменой суммы квадратов синуса и косинуса.

Важно,

$$1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi,$$

$$1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi.$$

Данные равенства мы вывели с помощью основного тригонометрического тождества (10), а значит, что они тоже являются тождествами.

Если мы возьмем основное тригонометрическое тождество (10) и разделим каждый его член на $cos^2\,\varphi$, имеем:

$\frac{\cos^2\varphi}{cos^2\,\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{cos^2\,\varphi} = \frac{1}{cos^2\,\varphi}$, т.е.

$$1 + tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \tag{11}$$

Также поступим и с $\sin^2\varphi$:

$$ctg^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \tag{12}$$

Зависимости между тригонометрическими функциями позволяют по значению одной из функций находить значения остальных тригонометрических функций при том же значении аргумента.

Ранее мы рассмотрели простейшее преобразование с применением основного тригонометрического тождества. Далее рассмотрим более сложный пример.

<u>Пример 21</u>

Упростить выражение $ctg^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)$.

Решение:

Применим формулы: (8) *и* (10). Выражение будет выглядеть следующим образом:

$$ctg^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) = \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}(-\sin^2\alpha) = -\cos^2\alpha.$$

Ответ: $ctg^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) = -\cos^2\alpha$.

<u>Пример 22</u>

Упростить выражение $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} + \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha}$.

Решение:

$$\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} + \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+cos\alpha)^2}{sin\alpha(1+cos\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2cos\alpha + \cos^2\alpha}{sin\alpha(1+cos\alpha)}$$

$$= \frac{2+2cos\alpha}{sin\alpha(1+cos\alpha)} = \frac{2(1+cos\alpha)}{sin\alpha(1+cos\alpha)} = \frac{2}{sin\alpha}$$

Ответ:

$$\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} + \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{2}{sin\alpha}$$

2.2 Структура системы упражнений

Если рассмотреть различные термины понятия «умения» в педагогической литературе, заметим, что трактовок может быть множество. Например, Р. С. Немов считает, что умения — это элементы деятельности, позволяющие что-либо делать с высоким качеством, например, точно и правильно [23, с.158].

А термин «навык» он трактует как полностью автоматизированные, инстинкто-подобные компоненты умений, реализуемые на уровне бессознательного контроля. Если под действием понимать часть деятельности, имеющую четко поставленную сознательную цель, то навыком также можно назвать автоматизированный компонент действия [23, с.159].

При подготовке к ЕГЭ у старшеклассников безусловно присутствует цель: обучиться решению типовых заданий. Для достижения этой цели необходимы навыки и умения при изучении функций, решений уравнений и неравенств различных видов. Они выступают немалой группой, и являются неотъемлемой частью деятельности школьников, такие как:

- умение найти точки на числовой окружности, которые заданы определенными числами, выраженными в долях числа π ($\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{12}$ и т.д.) и не выраженными в долях π;
- умение вычислять значения тригонометрических функций на числовой окружности;
- умение изображать числа точкой числовой окружности и надписывать точки (имеется в виду определять все числа, которые соответствуют данной точке);
- умение составлять двойные неравенства для дуг числовой окружности;
- умение определять вид уравнения и/или неравенства с помощью анализа;
- умение самостоятельно прийти к выбору приема решения;
- умение решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства и иллюстрировать решение с помощью графика, тригонометрического круга;

- умение при решении уравнений и неравенств применять тригонометрические свойства;
- умение выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений, которое, в свою очередь, предполагает умение применять приемы преобразований алгебраических выражений и соответствующие тригонометрические формулы;
- умение находить решение алгебраических уравнений видов: линейных, квадратных дробно-рациональных, однородных, сводящихся к совокупностям алгебраических уравнений указанных видов) и др.

Изучение тригонометрии в старших классах выступает как вид деятельности, в ходе которого ученики приобретают знания, умения и навыки.

А.Г. Мордкович выделяет «три кита тригонометрии». Это числовая окружность, простейшие тригонометрические уравнения и теорема сложения. С теоремой сложения в школе все в порядке: получив ее (с доказательством или без его, это не суть важно), легко и естественно выводятся все формулы тригонометрии. А вот с двумя другими «китами» тригонометрии дело обстоит хуже. Именно поэтому следует уделить большое внимание подготовке к введению основных определений: длине дуги единичной окружности, модели «числовая окружность» и модели «числовая окружность на координатной плоскости» [18, с.12-13].

Научение умениям может осуществляться разными путями. Один из них заключается в том, что учащемуся сообщают необходимые знания, затем перед ним ставят задачи на их применение. Учащийся сам ищет решения, обнаруживая путем проб и ошибок соответствующие ориентиры, способы переработки информации и приемы деятельности. Этот путь называют проблемным обучением. Другой путь заключается в том, что учащихся обучают признакам, по которым можно однозначно распознать тип задачи и требуемые для ее решения операции. Этот путь называют алгоритмизированным обучением или обучением на полной ориентировочной основе. Наконец, третий путь заключается в том, что учащегося обучают самой психической деятельности, необходимой для применения знаний. В этом случае педагог не только знакомит учащегося с ориентирами отбора признаков и операций, но и организует деятельность учащегося по переработке и использованию полученной информации для решения поставленных задач. Это достигается систематическим проведением учащегося через все этапы деятельности, требующей ориентировки на признаки, которые закреплены в изучаемом понятии. На первом этапе эти ориентиры (существенные признаки) предмета предъявляются ученику в готовом, материализованном виде, в виде схем, символа, предметов, а операции по выделению ориентиров осуществляются в форме предметных действий. На втором этапе ориентиры и предметные операции заменяются речевыми обозначениями и действиями. На третьем этапе отпадают и словесные действия, их заменяют мыслительные операции, которые протекают по все более свернутой схеме. Эту концепцию называют методикой поэтапного формирования умственных действий [12].

Основная цель школьников – хорошо подготовиться к сдаче единого государственного экзамена. Основная цель учителя (тьютора) – помогать детям успешно преодолевать трудности в выполнении заданий ЕГЭ: обеспечивать квалифицированное консультирование обучаемых по программному материалу, оказывать оперативную помощь в случаях возникновения у них затруднений при выполнении заданий, своевременно давать ответы на возникающие у школьников вопросы, подводить итоги и проводить рефлексию, создавать условия для слаженной работы всего контингента учеников класса.

Уравнения вообще, и тригонометрические в частности, способствуют формированию у учащихся взглядов на математику как единую научную область, формируют представления о ее целостности, показывают взаимосвязь с реальной действительностью, а также решение уравнений развивает логическое мышление школьников, активизирует творческий потенциал учащихся. Поэтому мы можем сказать, что математические навыки в целом развивают каждого учащегося.

При обучении школьников решению тригонометрических уравнений в контексте алгоритмического подхода следует:

1) дать определение тригонометрического уравнения;
2) выделить основные типы уравнений и способы их решения;
3) рассмотреть способы решения более сложных уравнений.

Заметим, что многие школьные учебники не дают определение тригонометрическому уравнению вообще. И это во многом оправдано, ибо общее понятие тригонометрического уравнения не входит в логические связи при его решении, а уравнения определенных видов, как правило, определяются. Так, например, в учебнике простейшее тригонометрическое уравнение определяется как «уравнение *f(x)=a*, где *a* – данное число, а *f(x)* – одна из основных тригонометрических функций» [26].

Как показывает практика, этого определения вполне достаточно для дальнейшего изучения темы.

В соответствии с видом и методами решения тригонометрических уравнений, на наш взгляд, следует выделять три их группы.

2.2.1 Простейшие тригонометрические уравнения

I группа – это простейшие тригонометрические уравнения (и сводящиеся к ним уравнения вида $\sin(kx+b)=a, \cos(kx+b)=a, tg(kx+b)=a$).

Обобщение решения простейших тригонометрических уравнений может быть представлено в виде таблицы (Таблица 5).

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Таблица 5 – Решение простейших тригонометрических уравнений.

$sinx=a$	$cosx=a$
$x=(-1)^n arcsin\alpha+\pi n,$	$x=\pm arccosa+2\pi n,$
$n\in Z\ (-1\le\alpha\le1)$ $\arcsin(-\alpha)=arcsin\alpha$	$n\in Z\ (-1\le\alpha\le1)$ $\arccos(-\alpha)=\pi-arccos\alpha$

Продолжение таблицы 5

$sinx = 0, \quad x = \pi n, n \in Z$ $sinx = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ $sinx = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, n \in Z$ $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in Z$
$x = tg\alpha$ $x = arctg\alpha + \pi n, n \in Z$ $\mathrm{arctg}(-\alpha) = -arctg\alpha$	$x = tg\alpha$ $x = arcctg\alpha + \pi n, n \in Z$ $\mathrm{arcctg}(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha$

Вполне понятно, что каждая из представленных в таблице (Таблица 4) формул достаточна сложна для школьников, изучающих ее на начальном этапе. Это во многом связано с тем, что здесь «учащиеся впервые имеют дело с бесконечным множеством корней уравнения» [9]. Поэтому должна быть организована соответствующая работа по осознанному получению, запоминанию и применению данных формул.

2.2.2 Уравнения определенных видов

II группа – это уравнения определенных видов. Выделим четыре вида.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным заменой $sinx = t$ и $cosx = t$ или (в более общем случае это уравнения вида *F(f(x))*, где *F* – рациональная функция, *f(x)* – одна из основных тригонометрических функций).

Пример 23

$2\cos^2 x - 3cosx + 1 = 0$

Пусть $cosx = t,$ тогда: $2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 1.$

1) $cosx = \frac{1}{2}, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

$cosx = 1, x = 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = 2\pi n, n \in Z$

2. Однородные тригонометрические уравнения.

Уравнение вида $\alpha sinx + bcosx = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение 1-ой степени; $\alpha \sin^2 x + bsinx * cosx + ccos^2 x = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение 2-ой степени, $\alpha \sin^3 x + bsin^{2x} * cosx + csinx * cos^2 x + dcos^3 x = 0$ – однородное тригонометрическое уравнение 3-ей степени и т.д.

Наиболее распространены в школьном курсе математики однородные уравнения первой и второй степеней. Метод решения таких уравнений – деление на любое слагаемое (как правило, на $\cos^2 x$), и далее – замена переменной, которая приводит к рациональному уравнению.

<u>Пример 24</u> *(однородное тригонометрическое уравнение 2-ой степени)*

$\sin^2 - 5sinx * cosx + 4\cos^2 x = 0$

Разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5sinx * cosx}{\cos^2 x} + \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

1) $tgx = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

2) $tgx = 4, x = arctg4 + \pi n, n \in Z.$

Значения x при которых $\cos^2 x = 0$, не удовлетворяют уравнению.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = arctg4 + \pi n,\ n \in Z.$

Заметим, что данному уравнению не удовлетворяют значения x , при которых $\cos^2 x = 0$ (т.к. в случае $\cos^2 x = 0$, получаем $\cos x = 0$ и из исходного уравнения следует, что $\sin^2 x = 0$, чего быть не может, поскольку$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), поэтому деление обоих частей уравнения на $\cos^2 x$ не приводит к потере корней.

<u>Пример 25</u> *(однородное тригонометрическое уравнение 1-ой степени)*

$$sinx + \sqrt{3}cosx = 0$$

Разделим уравнение на $cosx \neq 0$:

$$tgx + \sqrt{3} = 0, tgx = -\sqrt{3},$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

В рассмотренных двух примерах мы привели решение полных однородных тригонометрических уравнений ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$), однако, если один из этих коэффициентов будет равен нулю, тригонометрическое уравнение обращается в неполное, и решение его требует более сложных размышлений.

Покажем на следующем примере методы решения неполных тригонометрических уравнений.

Пример 26 *(неполное однородное тригонометрическое уравнение)*

$$sinx * cosx - \cos^2 x = 0.$$

Решение:

Разделим уравнение на $\cos^2 x \ \neq 0$:

$$tgx - 1 = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Уравнению удовлетворяют значения x, при которых $\cos^2 x = 0$, поэтому в ответе будет вторая серия $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Заметим, что деление уравнения на выражение, содержащее переменную, требует особого внимания, поскольку при этом сужается область допустимых значений и может произойти потеря корней.

Приведем еще одно решение рассматриваемого неполного однородного уравнения. Только в данном случае будем делить обе его части не на $\cos^2 x$, как в предыдущем случае, а на $\sin^2 x$. Предварительно заметим, что значения x, при которых $\sin^2 x = 0$, не удовлетворяют данному уравнению. Поэтому при делении на $\sin^2 x$ потери корней не произойдет.

Пример 27 *(неполное однородное тригонометрическое уравнение)*

$$sinx \cdot cosx - \cos^2 x = 0.$$

Решение:

Разделим уравнение на $\sin^2 x \neq 0$:

$$ctgx - ctg^2x = 0, ctgx(1 - ctgx) = 0,$$

$$1)\ ctgx = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in Z$$

$$2)\ ctgx = 1, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in Z$$

Значения x, при которых $sin^2 x = 0$, не удовлетворяют уравнению.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Отметим, что решение неполного однородного уравнения делением на одно из слагаемых требует от учащихся хорошей математической подготовки. Как показывает опыт, подобные уравнения целесообразнее решать разложением на множители, вынося общий множитель за скобки.

Пример 28 *(неполное однородное тригонометрическое уравнение)*

$$sinx * cosx - \cos^2 x = 0.$$

Решение:

Вынесем за скобки $cosx$:

$$cosx * (sinx - cosx) = 0.$$

$$1)\ cosx = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in Z$$

$$2)\ sinx - cosx = 0, \qquad tgx - 1 = 0, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

3. Уравнения вида $asinx + bcosx = c$.

Уравнения данного вида решаются разными способами. Наиболее распространенные из них:

1) сведение к однородному уравнению;
2) введение вспомогательного аргумента;
3) решение уравнения с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

Решая уравнение посредством сведения его к однородному уравнению, используют тригонометрические формулы двойного угла:

1) $sinx = 2sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2}$;

2) $cosx = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$.

В итоге получается однородное тригонометрическое уравнение второй степени, которое решается по известному алгоритму.

Пример 29

$$2sinx + cosx = 2$$

Решение:

Преобразуем левую и правую части уравнения

$$2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + (\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = 2 \cdot (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}),$$

$$3\sin^2\frac{x}{2} - 4 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0, \qquad \Big|: \cos^2\frac{x}{2} \neq 0$$

$$3tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0,$$

$$1)\ tg\frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in Z;$$

$$2)\ tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Второй способ решения уравнений вида $asin + bcosx = c$ основан на преобразовании уравнения к виду

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, что дает возможность обозначить коэффициенты $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ одного и того же угла, то есть через sinφ и cosφ (в этом случае называют вспомогательным аргументом); далее по формулам сложения уравнение приводится к виду

$sin(x \pm \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *или* $cos(x \pm \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, которые решаются по известному алгоритму.

Пример 30

$$2sinx + cosx = 2.$$

Решение:

$$2sinx + cosx = 2 \qquad \Big| : \sqrt{2^2 + 1^2 = \sqrt{5}}$$

$\frac{2}{\sqrt{5}} sinx + \frac{1}{\sqrt{5}} cosx = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

Пусть $sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}},$ тогда:

$$sin\varphi sinx + cos\varphi cosx = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad cos(x - \varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$x - \varphi = \pm arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n, \quad n\epsilon Z ,$$

$$x = arctg2 \pm arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n, \quad n\epsilon Z .$$

Ответ: $x = arctg2 \pm arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n, \quad n\epsilon Z$.

Третий способ решения уравнений вида $asinx + bcosx = c$основан на приведении этого тригонометрического уравнения к рациональному с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2} = t$.

Пусть $tg\frac{x}{2} = t$, тогда:

$$sinx = \frac{sinx}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$cosx = \frac{cosx}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 + tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$

Заметим, что применение данной подстановки сужает ОДЗ уравнения, поскольку $tg\frac{x}{2}$ определен для всех x , кроме $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$, поэтому нужно проверить, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ решениями данного уравнения.

<u>Пример 31</u>

$$2sinx + cosx = 2$$

Решение:

Пусть $tg\frac{x}{2} = t$, *тогда* $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$, $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, *следовательно:*

$$2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2,$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0, \qquad t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}$$

$$1)\ tg\frac{x}{2} = 1\ ,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z;$$

2) $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \epsilon Z$.

Ответ: $x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Резюмируя описание решения уравнения вида $asinx + bcosx = c$, отметим, что применение разных способов к решению одного и того же конкретного уравнения может дать правильные, но совершенно различные по форме ответы. Это наглядно демонстрирует В.А. Далингер при решении уравнения $2sinx - 2cosx = 1 - \sqrt{3}$ [7].

Уравнения вида $a(sinx \pm cosx) + bsin2x + c = 0$.

Если ввести подстановку $sinx \pm cosx = t$, то при возведении ее в квадрат получится:

$$(sinx \pm cosx)^2 = t^2,$$

$$\sin^2 x \pm 2sinx \cdot cosx + \cos^2 x = t^2,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) \pm 2sinx \cdot cosx = t\text{^}2,$$

$$1 \pm sin2x = t^2,$$

$$sin2x = \pm(t^2 - 1).$$

Следовательно, данное трансцендентное тригонометрическое уравнение с помощью указанной подстановки приводится к алгебраическому рациональному уравнению $a \cdot t \pm b(t^2 - 1) + c = 0$.

Пример 32

$$sin2x - 4(sinx + cosx) + 4 = 0$$

Решение:

Пусть $sinx + cosx = t$, *тогда* $sin2x = t^2 - 1$, *следовательно,* $(t^2 - 1) - 4 \cdot t + 4 = 0$,

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 3,$$

1) $sinx + cosx = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} sinx + \frac{1}{\sqrt{2}} cosx = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{4} sinx + \cos\frac{\pi}{4} cosx = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \;\; n \in Z;$$

2) $sinx + cosx = 3$,

$$x \in \emptyset \text{ т.к.} sinx \leq 1, cosx \leq 1 \Rightarrow sinx + cosx \leq 2.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \;\; n \in Z$;

Подводя промежуточный итог, отметим, что нами выделены типовые уравнения, алгоритмы решения которых учащиеся должны понимать и уметь применять в стандартных случаях.

Все же остальные уравнения с помощью тех или иных преобразований сводятся к решению уравнений рассмотренных видов и отнесены нами к третьей группе.

2.2.3 Уравнения, решение которых предполагает выполнение определенных преобразований

III группа – это уравнения, решение которых предполагает выполнение определенных преобразований, приводящих данное уравнение к решению либо простейших уравнений (I группа), либо уравнений определенных видов (II группа).

Все преобразования, выполняемые над уравнениями III группы, можно разделить на общие, применяемые для всех видов уравнений и неравенств (умножение обеих частей на не равное нулю число, перенос слагаемых из одной части в другую и др.), и специальные, основанные на свойствах тригонометрических функций и преобразованиях тригонометрических выражений. Как показывают результаты ЕГЭ, не все учащиеся успешно справляются с решением тригонометрических уравнений.

Исходя из сказанного, можно говорить и о приоритетных направлениях в методике обучения учащихся решению тригонометрических уравнений:

1. Доведение до уровня навыка решения простейших тригонометрических уравнений.

2. Доведение до уровня умения (умение – выполнение действия при активном контроле сознания, навык – автоматизированное умение) решения уравнений определенных видов, а именно:

1) сводящихся заменой к квадратным,

2) однородных,

3) вида $asinx + bcosx = c$,

4) вида.$a(sinx \pm cosx) + bsin2x + c = 0$.

3. Реализация внутрипредметных связей: «направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики» [28, с.269]. В первую очередь, здесь можно выделить функциональную содержательно-методическую линию [20, с.122], а также линии числовую и тождественных преобразований.

4. Обучение «обобщенному приему решения уравнений» [11, с.80] за счет обобщения и систематизации методов в решении уравнений различных видов.

2.3. Особенности реализация методики обучения тригонометрии при подготовке к ЕГЭ

Рассмотрев подготовительные упражнения при подготовке к ЕГЭ и структуру упражнений по теме «Тригонометрия», мы разработали ряд упражнений для подготовки учащихся к успешной сдаче экзамена. Данный блок задач в дальнейшем можно включать при работе в подготовке к ЕГЭ по математике в элективные курсы, факультативы, а также дополнительные домашние задания.

Созданный нами блок задач предназначен для обучающихся 10 и 11 классов. Он поможет расширить, углубить и систематизировать знания при решении тригонометрических уравнений. Для каждого элективного курса или факультатива важно улучшение логического мышления у учащихся, развитие познавательного интереса к данной теме.

Требования к ранее приобретенным навыкам:

1) знать тригонометрические формулы и владеть их применением в преобразованиях выражений;

2) уметь применять различные методы решения тригонометрических уравнений;

3) уметь проверять полученный ответ, а также записывать его полноценно.

Для удобства включения следующих упражнений, разобьём их на несколько блоков:

1. Метод разложения на множители. Метод замены переменной.

<u>Пример 33</u>

Решите уравнение $4x^2-20x+28=\left(\sqrt{3}-cos3\pi x\right)\left(\sqrt{3}+cos3\pi x\right)$

Решение: $4x^2-20x+28=\left(\sqrt{3}-cos3\pi x\right)\left(\sqrt{3}+cos3\pi x\right)\Leftrightarrow 4x^2-20x+28=3-\cos^2 3\pi x\Leftrightarrow 4x^2-20x+25+\cos^2 3\pi x=0\Leftrightarrow (2x-5)^2+\cos^2 3\pi x=0$

Поскольку

$$(2x-5)^2\geq 0,$$

$$\cos^2 3\pi x=0,$$

то $(2x-5)^2+\cos^2 3\pi x=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-5=0\\ cos3\pi x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ \cos\frac{15\pi}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

<u>Пример 34</u>

Решите уравнение $(2sinx-1)\left(\sqrt{-cosx}+1\right)=0$

ОДЗ:

$$cosx>0$$

Решение:

Поскольку

$$\sqrt{-cosx}\geq 0$$

то

$$\sqrt{-cosx}+1>0$$

Следовательно,

$$(2sinx-1)\left(\sqrt{-cosx}+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2sinx-1=0,\\ -cosx>1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}sinx=\frac{1}{2},\\ cosx<1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

С учётом ОДЗ:

$$\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\epsilon Z,\\ 0<cosx<1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\epsilon Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\epsilon Z$.

<u>Пример 35</u>

Решите уравнение $\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}\,(tg2x-1)=0$.

Решение:

Воспользуемся формулами

$$\cos^2 x - \sin^2 x = cos2x \tag{11}$$

$$tgx = \frac{sinx}{cosx} \tag{12}$$

С применением (11) и (12) получим:

$$\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}\,(tg2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg2x = 1, \\ cos2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x)_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \qquad (2x)_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n, \qquad n \in Z \\ cos2x > 0 \end{cases}$$

Т.к. вторая серия корней не удовлетворяет условию, то она должна быть отброшена. Следовательно,

$$(2x)_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + \pi n, \qquad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 36

Найдите корни уравнения $5sin\,x - \sin^5 x = 0.$

Решение:

$$5sinx - sin^5 x = 0$$

$$sin\,x \cdot (5 - sin4\,x) = 0$$

$$sinx = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \pi n, n \in Z.$$

$$\sin^4 x = 5 \Rightarrow$$

$$sinx = \pm\sqrt[4]{5} \Rightarrow$$

Не имеет решения, т.к. $-1 \le sinx \le 1$, *а* $\begin{cases} \sqrt[4]{5} > 1, \\ -\sqrt[4]{5} < -1. \end{cases}$

Ответ: $\pi n.$

Пример 37

Чему равна сумма корней уравнения *3sinx + sin2x = 0* на отрезке *[3π; 5π]*?

Решение:

$$3sinx + sin2x = 0$$

$$3sinx\cdot(3 + 2cosx) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} sinx = 0 \\ 3 + 2cosx = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k, k \in Z \\ cos2x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 = \pi k, k \in Z \\ x \in \emptyset \text{ (нет решений, т к } -1 \leq cos\, x \leq 1) \end{array}\right.$$

$$k = 0, x = 0$$

$$k = 1, x = \pi$$

$$k = 2, x = 2\pi$$

$$k = 3, x = 3\pi \in [3\pi;\ 5\pi]$$

$$k = 4, x = 4\pi \in [3\pi;\ 5\pi]$$

$$k = 5, x = 5\pi \in [3\pi;\ 5\pi]$$

$$k = 6, x = 6\pi \text{ не } \in [3\pi;\ 5\pi]$$

Ответ: $3\pi + 4\pi + 5\pi = 12\pi$

<u>Пример 38</u>

Чему равно количество решений уравнения $sin\,4x + sin\,5x + sin\,6x = 0$ на $[-\pi;\ \pi]$?

Решение:

$$sin\,4x + sin\,5x + sin\,6x = 0, 2sin\,5x\,cos\,x + sin\,5x = 0$$

$$sin\,5x\,(cos\,x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \sin 5x = 0 \\ 2cos\,x + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} 5x = \pi n, n \in Z \\ cos\,x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi n}{5}, n \in Z \\ x = \pm(\pi - \dfrac{\pi}{3}) + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = \pi n5, n \in Z \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$n = -5, -4, -3, -2, \dots, 4, 5 \Rightarrow \text{ корни } \in [-\pi;\ \pi] - 11 \text{ решений}$$

$$k = 0, X = \pm\frac{2\pi}{3} - 2 \text{ решения}$$

Ответ: 13 решений

Пример 39

Чему равна сумма корней уравнения $\cos 7x + \sin 3x \cdot \sin 4x = 0$ на промежутке $[0; \pi]$?

$$cos\ 7x + sin\ 3x \cdot sin\ 4x = 0$$

$$cos\ 7x + \frac{1}{2} \cdot (cos\ (3x - 4x) - cos(3x + 4x)) = 0$$

$$cos\ 7x + \frac{1}{2} cosx - \frac{1}{2} cos7x = 0; \quad \frac{1}{2} cos7x + \frac{1}{2} cosx = 0$$

$$cos\ 7x + cos\ x = 0$$

$$2\ cos\ \frac{7x - x}{2} \cdot cos\ \frac{7x + x}{2} = 0$$

$$2\ cos\ 3x \cdot cos\ 4x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0 \\ cos\ 4x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z \end{array}\right.$$

Рассмотрим некоторые n и k:

$$n = 0, x = \frac{\pi}{6} \in [0; \pi] \qquad k = 0, x = \frac{\pi}{8} \in [0; \pi]$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi] \qquad k = 1, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \in [0; \pi]$$

$$n = -1, x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \text{ не } \in [0; \pi] \qquad k = -1, x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} \text{ не } \in [0; \pi]$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi] \qquad k = 2, x = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4} = \frac{5\pi}{8} \in [0; \pi]$$

$$n = 3, x = \frac{\pi}{6} + \pi \text{ не } \in [0; \pi] \qquad k = 3, x = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{8} \in [0; \pi]$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{2}$

Пример 40

Найдите корни уравнения $-22sin\ 4x - 5cos\ 8x + 17 = 0$.

Решение:

$$-22 sin\,4x - 5 cos\,8x + 17 = 0$$

$$-22 sin\,4x - 5(1 - 2\sin^2 4x) + 17 = 0$$

$$-22 sin\,4x - 5 + 10\sin^2 4x + 17 = 0$$

$$10\sin^2 4x - 22 sin\,4x + 12 = 0 \mid : 2$$

$$5\sin^2 4x - 11 sin\,4x + 6 = 0$$

$$sin\,4x = a, |a| \le 1$$

$$5a^2 - 11a + 6 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 121 - 120 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{11+1}{10}, \\ a = \dfrac{11-1}{10}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{12}{10}, \\ a = \dfrac{10}{10}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1{,}2, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

$$1)\ sin\,x = 1{,}2$$

$$\text{Нет корней, т. к.} \mid sin\,x| \ge 1$$

$$2)\ sin\,x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$

<u>Пример 41</u>

Решите уравнение $cos\,5x = cos\,3x$

Решение:

$$cos\,5x = cos\,3x, cos\,5x - cos\,3x = 0$$

$$-2 sin\,4x \cdot sin\,x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ sin\,x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \pi n, n \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{4}, n \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Объединяя корни, получим $x = \dfrac{\pi n}{4}, n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$

2. Однородные уравнения 1-й и 2-й степени и сводящиеся к ним.

<u>Пример 42</u>

Решите уравнение $sin\,x\ +\ \sqrt{7}cos\,x\ =\ 0.$

Решение: $sin\,x\ +\ \sqrt{7}cos\,x\ =\ 0\ |:\ cos\,x$

$$tg\,x\ +\ \sqrt{7}\ =\ 0$$

$$tg\,x\ =-\ \sqrt{7}$$

$$x\ =-\ arctg\,\sqrt{7}\ +\ \pi k, k\in Z$$

Ответ: – arctg√7 + πk, k ϵ Z

<u>Пример 43</u>

Решите уравнение $4sin\,x\ +\frac{\sqrt{3}}{5}\ cos\,x\ =\ 0.$

Решение:

$$4sin\,x\ +\frac{\sqrt{3}}{5}\ cos\,x\ =\ 0\ |:\ cos\,x$$

$$4tg\,x\ +\ \frac{\sqrt{3}}{5}=\ 0$$

$$4tg\,x\ =-\ \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$tg\,x\ =-\ \frac{\sqrt{3}}{520}$$

$$x\ =-\ arctg\frac{\sqrt{3}}{20}\ +\ \pi k, k\in Z$$

Ответ: $-\ arctg\frac{\sqrt{3}}{20}\ +\ \pi k, k\in Z$

<u>Пример 44</u>

Найдите корни уравнения $7\sin^2 x\ +\ 2sin\,2x\ =3\cos^2 x.$

Решение:

$$7\sin^2 x\ +\ 2sin\,2x\ =3\cos^2 x$$

$$7\sin^2 x\ +\ 4sin\,x\,cos\,x=3\cos^2 x\ |:\ cos^2\,x$$

$$7tg^2x\ +\ 4tg\,x-\ 3\ =\ 0$$

$$tg\,x\ =\ t, t\in R$$

$$7t^2\ +\ 4t-3\ =\ 0$$

$$D\ =\ 16\ +\ 4*7*3\ =\ 16\ +\ 84\ =\ 100$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-4+10}{14}, \\ t = \dfrac{-4-10}{14}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{6}{14}, \\ t = -\dfrac{14}{14}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{7}, \\ t = -1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\, x = \dfrac{3}{7}, \\ tg\, x = -1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = arctg\dfrac{3}{7} + \pi n, n \epsilon Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \epsilon Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \epsilon Z; arctg\frac{3}{7} + \pi n, n \epsilon Z.$

<u>Пример 45</u>

Решите уравнение $2sin\, x\, cos\, x + 6\cos^2 x = 7.$

Решение:

$$2sin\, x\, cos\, x + 6\cos^2 x = 7$$

$$2sin\, x\, cos\, x + 6\cos^2 x - 7 = 0$$

$$2sin\, x\, cos\, x + 6\cos^2 x - 7 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$2sin\, x\, cos\, x + 6\cos^2 x - 7\sin^2 x - 7\cos^2 x = 0$$

$$-7\sin^2 x + 2sin\, x\, cos\, x - \cos^2 x = 0 \,|: (-1)$$

$$7\sin^2 x - 2sin\, x\, cos\, x + \cos^2 x = 0 \,|: \cos^2 x$$

$$7tg^2 - 2tg\, x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = 4 - 28 = -24$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

<u>Пример 46</u>

Найти корни уравнения $2\sin^2 x - 2\, sin\, 2x + 1 = 0.$

Решение:

$$2\sin^2 x - 2\, sin\, 2x + 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 4\, sin\, x\, cos\, x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \,|: \cos^2 x$$

$$3tg^2 x - 4tg\, x + 1 = 0$$

$$tg\, x = a, -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,x = 1, \\ tg\,x = \frac{1}{3}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = arctg\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $arctg\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

ВЫВОДЫ ПО 2 ГЛАВЕ

Проанализировав уравнения и неравенства, мы пришли к выводу, что подготовительные упражнения помогают в дальнейшем изучении тригонометрии. Без базовых знаний основных тригонометрических формул, верно записанных ответов сложно перейти к уравнениям более сложного уровня.

Изучили тригонометрические выражения и структурировали их по сложности решения и разработали систему упражнений, охватывающую все основные методы решения такого типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В школьном курсе математики тригонометрия является достаточно молодым разделом элементарной математики, но если обратить не неё внимание, то она оказывается влиятельной темой для развития логики и математического мышления у школьников, и, конечно же, играет важную роль в курсах алгебра и начал анализа.

Изучив задания единого государственного экзамена по математике базового и профильного уровней, мы убедились, что данная тема является необходимой для учащихся, чтобы набрать хорошие баллы. На примерах показали, как можно не зубрить формулы, а уметь их преобразовать и применить. Благодаря этому, тригонометрия является многогранной темой, и привычная подстановка формул здесь может не работать.

Проведя ознакомительную работу на первых этапах изучения тригонометрии, мы пришли к выводу, что каждый учащийся сможет овладеть первоначальной стадией изучения тригонометрии, показали частые ошибки, которые допускают экзаменуемые, и сделали вывод, что чаще всего это потеря корней, неумение объединять их серии. Все встречающиеся ошибки в большей степени связаны с простейшими уравнениями, а ведь они являются фундаментом всей темы. Чтобы избежать типичных ошибок, мы сумели не только провести анализ и прийти к верным решениям уравнений, но и предложить пути ликвидации ошибок.

Для того, чтобы наша разработка была полноценной, мы провели исследование тригонометрических уравнений, их методику решения и разбили на 3 блока:

1. Простейшие тригонометрические уравнения.
2. Уравнения определенных видов.
3. Уравнения, решение которых предполагает выполнение определенных преобразований.

Нами были разработан ряд тригонометрических уравнений для применения на практике при подготовке к ЕГЭ для 10-11 классов. Для их решения необходимы базовые знания формул, умение их применять. Важность нашей разработки заключается в том, что уравнения структурированы по уровню сложности.

Таким образом, представленные тригонометрические уравнения и их решения могут быть применены школьниками и учителями на факультативах и элективных курсах при подготовке к единому государственному экзамену.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11. Учебник / Ш.А. Алимов – Москва: Просвещение, 2012. – 465 с.
2. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа 10-11. Учебник / М.И.Башмаков – Москва: Просвещение, 1992. – 358 с.
3. Высоцкий, И.Е. ЕГЭ – 2014. Математика. Типовые экзаменационные работы. 30 вариантов / И.Е. Высоцкий, И.В. Ященко // Национальное образование – 2013. – 192 с.
4. Гельфанд, И. М. Тригонометрия. / И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Л. Тоом –М.: МЦНМО, 2018. –199 с.
5. Гущин, Д.Д. «Решу ЕГЭ»: математика. Обучающая система Дмитрия Гущина [Электронный ресурс] / Д.Д. Гущин // – URL: https://ege.sdamgia.ru/test?theme=219(дата обращения 06.04.2020)
6. Гущин, Д.Д. ЕГЭ по математике. Образовательный портал для подготовки к ЕГЭ [Электронный ресурс] / Д.Д. Гущин // URL: http://reshuege.ru/test?theme=59 (дата обращения 06.04.2020)
7. Далингер, В.А. Размышления по поводу одной задачи ЕГЭ по математике / В.А. Делингер // Науч. журнал: Математика в школе – 2018. – № 9. – С. 34-37.
8. Далингер, В. А. Математика: обратные тригонометрические функции. Решение задач: учебное пособие для среднего профессионального образования – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 147 с.
9. Дворянинов, С.В. О традициях, пережитках и недомолвках в школьной математика // Науч. журнал: Математика в школе – 2013. – №5. С. 41-46.
10. Единый государственный экзамен 2019. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2019.

11. Епишева, О.Б. Специальная методика обучение арифметике, алгебре и началам анализ в средней школе. Курс лекций: Учеб. пособие для вузов – Тобольск: Изд-во ТГПИ я. Д.И. Менделеева, 2000. –126 с.

12. Зайкин, М.И. Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении (сборник научных и методических работ, предоставленных на региональную научно-практическую конференцию) / М.И. Зайкин – М.: Арзамас, 2002. – 334 с.

13. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа 10-11(учебник) / А.Н. Колмогоров–Москва: Просвещение, 2019. – 387 с.

14. Тригонометрические уравнения: методы решения и отбор корней. Математика ЕГЭ 2012 (типовые задания С 1) / А.Г. Корянов, А.А. Прокофьев – Москва: Просвещение, 2019. – 146 с.

15. Ладошкин, М.В. Обучение решению тригонометрических уравнений при подготовке к единому государственному экзамену / М.В. Ладошкин, Н.В. Ходырева // Журнал «Учебный эксперимент в образовании» – Изд. - МГПИ имени М.Е. Евсевьева, 2018. – С. 34-41.

16. Лысенко, Ф.Ф. Математика. Сборник тестов ЕГЭ 2001-2010 учебно-методическое пособие / Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова — Ростов-на-Дону: Лагион – М, – 2010. 192 с.

17. Макарычев, Ю.Н. Тригонометрия. 10кл. / Ю.Н. Макарычев – М.: Просвещение, 1999-2002. – 60 с.

18. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе. Математика в школе / А.Г. Мордкович – 2002. – 23 с.

19. Мордкович, А.Г., Алгебра и начала анализа 10-11. Учебник / А.Г. Мордкович — Москва: Мнемозина, 2015. – 402 с.

20. Мордкович, А.Г. Беседы с учителями математики: Учеб.-метод. Пособие / А.Г. Мордкович – Москва: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Изд-во «Мир» и образование», 2005. – 336 с.

21. Муравин, Г.К. Элементы тригонометрии. 10кл.: Пособие для общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Тараканова – М.: Дрофа, 2003. – 128 с.

22. Муравина, Г.К. Методические рекомендации к учебнику «алгебра и начала математического анализа. 10 класс» / Г.К. Муравина, О.В. Муравина – М.: Дрофа, 2017. – 145 с.

23. Немов, Р.С. Психология: Учеб. для студ. высш. пед. учеб. Заведений / Р.С. Немов – М.: Гумакнит. изд. центр ВЛАДОС, 2011. – 688 с.

24. Новиков, А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства / А.И. Новиков – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. – 260 с.

25. Новиков, А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства / А.И. Новиков – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. – 260 с.

26. Никольский, С.М Алгебра и начало математического анализа. 10 класс: Учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углублённый уровень / С.М. Никольский, М.К. Потапов., Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин – Москва: Просвещение, 2014. – 431 с.

27. Свенцицкая, Г.М. Подготовка к ЕГЭ по математике «Ох, уж эта тригонометрия!» [Электронный ресурс]// Подготовка к ЕГЭ [сайт]. [2020]. URL: http://festival.1september.ru/articles/621971(дата обращения 14.05.2020).

28. Стефанова, Н.Л., Подходова, Н.С., Методика и технология обучения математика. Курс лекций: Пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.