МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Групповой анализ уравнения Габова

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.04.01 Педагогическое образование
код, направление
Направленность программы магистратуры
«Математическое образование в системе профильной подготовки»

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа ________________ к защите
рекомендована/не рекомендована

« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике
_____________ Е.А. Суховиенко

Выполнил (а):
студентка группы ЗФ-313/131-2-1
Казакова Анастасия Сергеевна

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат наук, доцент
_________Клебанов Игорь Иосифович

Челябинск
2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

С середины XX века групповой анализ является одним из основных рабочих инструментов в области механики сплошных сред. Уравнение Габова, моделирующее плоские волны в идеальной жидкости, представляет большой интерес для специалистов в указанной области. Однако групповой анализ уравнения Габова не проводился.

Проведение группового анализа уравнения Габова является основной целью нашей работы.

Задачами работы являются расчет алгебры Ли, допускаемой уравнением Габова, и поиск инвариантных решений уравнения.

Работа состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются основные положения группового анализа дифференциальных уравнений. Во второй главе вычисляются алгебры Ли, допускаемые уравнением Габова, и изучается частное инвариантное решение, моделирующее аксиально симметричные стационарные структуры поля скоростей жидкости.

1. ОСНОВЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Общие сведения о групповом анализе

1.1.1. Общие сведения о группах Ли

Удобнее всего ввести понятие группы Ли на примере преобразования плоскости $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$, которое задается следующими формулами:

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x, y, a), \\ \bar{y} = \psi(x, y, a), \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим произвольную точку $P = (x, y)$ в плоскости (x, y). Переход этой точки в новое положение $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ - это изменение переменных x, y, связанное с параметром a $(a \in \mathbb{R})$ - $T_a(P) = \bar{P}$:

$$T_a: \quad \bar{x} = \varphi(x, y, a), \quad \bar{y} = \psi(x, y, a)$$

где функции φ и ψ удовлетворяют условиям при a=0

$$T_0: \quad \varphi(x, y, 0) = x, \quad \psi(x, y, 0) = y, \qquad (1)$$

а T_0 – тождественное преобразование:

$$T_0(P) = P.$$

Функции $\varphi(x, y, a)$ и $\psi(x, y, a)$ функционально независимы, а значит их якобиан отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

А, следовательно, существует обратное преобразование T_a^{-1}:

$$T_a^{-1}(\bar{P}) = P. \qquad (2)$$

Если преобразование T_a: $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$, то T_b: $(\bar{x}, \bar{y}) \to (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$. Существует композиция (произведение) преобразований $T_b T_a$, определяемое как последовательное выполнение преобразований T_a и T_b (3).
С геометрической точки зрения T_a перемещает точку P в точку $\bar{P}$ $(T_a(P) = \bar{P})$, а T_b – в положение $\bar{\bar{P}}$ $(T_b(\bar{P}) = \bar{\bar{P}})$. Таким образом, произведение $T_b T_a$ переносит P в конечное положение $\bar{\bar{P}}$ без промежуточной остановки в точке $\bar{P}$.

$$T_a(P) = \bar{P}. \ T_b(\bar{P}) = \bar{\bar{P}} = T_b T_a(P)$$

Если условия (1, 2, 3) выполняются, то преобразования образуют группу. Группа – любое множество, на котором определена операция умножения, и имеющее следующие свойства:

1. Ассоциативность.
2. Произведение двух элементов группы дает элемент группы.
3. Существует единица группы.
4. Существует обратный элемент для каждого элемента.

Теорема. Параметр a всегда можно выбрать таким образом, чтобы $a_0 = 0$, а $f(a,b) = a + b$. Тогда этот параметр будет называется каноническим.

Пример 1. Группа переносов (трансляций) вдоль вещественной прямой (оси x):

$$\bar{x} = T_a x = x + a \tag{4}$$

$$\bar{\bar{x}} = T_b \bar{x} = T_b T_a x = \bar{x} + b = (x + a) + b = x + (a + b) \tag{5}$$

Пример 2. Группа растяжений: $\bar{x} = ax$. Тождественное преобразование получается при $a = 1$. После сдвига параметра $a \to a + 1$ получаем:

$$\bar{x} = T_a x = (1 + a)x \text{ и } T_0 x = x (T_0 = 1).$$

Обратное преобразование определяется условием $T_{a^{-1}}\bar{x} = (1 +$
$a{-}11{+}ax{=}x \Leftrightarrow a{-}1{=}{-}a1{+}a$

при $a > -1$, т.е. $\Delta = (-1, +\infty)$. Для $b, a \in \Delta$ имеем:

$$\bar{x} = T_b T_a x = T_b \bar{x} = (1 + b)\bar{x} = (1 + b)(1 + a)x = (1 + a + b + ab)x$$

1.1.2. Орбита точки и касательное векторное поле

Вернемся к преобразованию T_a:

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x, y, a), \\ \bar{y} = \psi(x, y, a). \end{cases}$$

При непрерывном изменении параметра каждая точка плоскости под действием преобразования будет двигаться по какой-то кривой. Эта кривая называется орбитой точки. [1]

Если $\vec{\tau}$ – касательный вектор к орбите в начальной точке, то его компоненты в декартовых координатах:

$$\begin{cases} \tau_x = \xi(x,y) = \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{a=0} \\ \tau_y = \eta(x,y) = \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial a}\right|_{a=0}. \end{cases},$$

Тогда, в окрестности значения $a = 0$ можно представить преобразование в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + a\xi(x,y) + o(a), \\ \bar{y} = y + a\eta(x,y) + o(a) \end{cases}$$

где ξ и η – компоненты касательного векторного поля.

1.1.3. Генератор группы

Генератор группы (инфинитезимальный оператор) – это оператор вида

$$\hat{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6}$$

Если есть дифференцируемая функция $F(x,y)$, то действие генератора на F даст следующий результат:

$$\hat{X}F = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y}.$$

1.1.4. Теорема Ли

Зная генератор, можно восстановить полную группу преобразований, то есть по бесконечно малому преобразованию можно восстановить конечное преобразование. Для этого нужно решить систему уравнений Ли:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x},\bar{y}), \quad \bar{x}(a=0) = x, \\ \dfrac{d\bar{y}}{da} = \eta(\bar{x},\bar{y}); \quad \bar{y}(a=0) = y. \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим группу поворотов:

$$\begin{cases} \overline{x} = x \cdot cos(a) + y \cdot sin(a), \\ \overline{y} = -x \cdot sin(a) + y \cdot cos(a). \end{cases}$$

Решим прямую задачу, то есть найдем генератор группы.

$$\xi = \left.\frac{\partial\overline{x}}{\partial a}\right|_{a=0} = (-x \cdot sin(a) + y \cdot cos(a))|_{a=0} = y.$$

$$\eta = \frac{\partial \bar{y}}{\partial a}\Big|_{a=0} = (-x \cdot cos(a) - y \cdot \sin(a))|_{a=0} = -x.$$

Тогда генератор группы поворотов:

$$\hat{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Пример 4. Решим обратную задачу, то есть по генератору найдем группу преобразований:

$$\hat{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Решаем уравнения Ли:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{da} = \bar{y}, & \bar{x}(a=0) = x, \\ \dfrac{d\bar{y}}{da} = -\bar{x}; & \bar{y}(a=0) = y. \end{cases}$$

Возьмем первое уравнение и еще раз продифференцируем по а:

$$\frac{d^2\bar{x}}{da^2} = \frac{d\bar{y}}{da} = -\bar{x} - \text{ уравнение гармонических колебаний.}$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{da^2} = -\bar{x}$$

$$\bar{x}'' + \bar{x} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\bar{x} = \text{C}_1 cosa + \text{C}_2 sina\ .$$

Тогда y можно найти из первого уравнения дифференцированием по а. Получим:

$$\bar{y} = \frac{d\bar{x}}{da} = -\text{C}_1 sina + \text{C}_2 cosa.$$

Константы найдем, используя начальные условия:

$$\bar{x}(a=0) = \text{C}_1 = x,$$

$$\bar{y}(a=0) = \text{C}_2 = y.$$

Получаем группу поворотов:

$$\begin{cases} \bar{x} = xcosa + ysina, \\ \bar{y} = -xsina + ycosa. \end{cases}$$

1.1.5. Экспоненциальное отображение

Второй способ решения системы уравнений Ли – это экспоненциальное отображение, или экспоненцирование векторного поля.

Пусть есть генератор:

$$\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим оператор $e^{a\hat{X}}$ (под экспонентой от оператора понимается формальный ряд Тейлора для нее):

$$e^{a\hat{X}} = \hat{I} + a\hat{X} + \frac{(a\hat{X})^2}{2!} + \frac{(a\hat{X})^3}{3!} + \cdots,$$

где под степенью оператора понимается n-кратное действие на функцию:

$$\hat{X}^2 = \hat{X}(\hat{X}F). \tag{7}$$

Тогда решение уравнение Ли запишется короче:

$$\begin{cases} \bar{x} = e^{a\hat{X}}(x), \\ \bar{y} = e^{a\hat{X}}(y). \end{cases}$$

Пример 5. Для трансляций $\hat{X} = \frac{\partial}{\partial x}$.

Тогда оператор $e^{a\hat{X}} = \hat{I} + a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n} + \cdots,$

следовательно, его действие на переменную x приводит к трансляции $x+a$. [2]

1.1.6. Инвариант группы

Инвариантом группы называется функция $F(x,y)$, вид которой не меняется при групповых преобразованиях: $F(\bar{x},\bar{y}) = F(x,y)$.

Необходимое и достаточное условие инвариантности - действие генератора на функцию должно давать 0:

$$\hat{X}F = 0, \tag{8}$$

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Решение такого уравнения эквивалентно решению системы дифференциальных уравнений (уравнений характеристик):

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n} \qquad (9)$$

Решение всегда можно представить в виде:

$$J_i(x) = C_i \ ,$$

$$F(J_1, J_2, \dots, J_{n-1}) \qquad (10)$$

где i=1, 2, …, (n-1) – номер уравнения, (n-1) – количество уравнений в системе.

Функция $J(x)$ – базисный инвариант. Следовательно, любая достаточно гладкая функция $F(J)$, зависящая от базисного инварианта, тоже будет инвариантом.

Пример 6. Дан генератор:

$$\hat{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\hat{X}F = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

$$-xdx = ydy$$

$$xdx + ydy = 0$$

$$d(x^2 + y^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

$$J = x^2 + y^2$$

$$F(J) = F(x^2 + y^2).$$

$x^2 + y^2$ – квадрат расстояния от начала координат до точки. А расстояние при повороте не меняется.

1.1.7. Инвариантное многообразие в n-мерном пространстве

Пусть есть n-мерное пространство, в котором задана система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots \\ F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \quad \text{где } s < n.$$

В такой системе независимых переменных будет $n - s$. Если выполняются следующие требования:

$$\forall x \; Rg \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x} \right\| = s, \text{где } i = \overline{1, n}, k = \overline{1, s} \,,$$

то в n-мерном пространстве задана $(n - s)$-мерная гиперповерхность, или многообразие размерности $(n - s)$.

Гиперповерхность называется инвариантной относительно групповых преобразований, если любая ее точка под действием преобразований группы движется по этой же поверхности (орбита каждой точки принадлежит самой поверхности).

Необходимое и достаточное условие инвариантности многообразия – действие генератора группы на каждое уравнение системы в точках, принадлежащих поверхности, должно давать 0:

$$\hat{X}(F_k)/_M = 0, \; k = \overline{1, s}.$$

Пример 7. Многообразие $F = 2x^6 - 5y^3 + z^2 = 0$ инвариантно относительно группы, порождаемой оператором

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Воспользуемся критерием инвариантности:

$$\hat{X}(F) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x^6 - 5y^3 + z^2) = (12x^6 - 30y^5 +$$
$$6z^2) = 6(2x^6 - 5y^3 + z^2) \equiv 0.$$

Найдем базисные инварианты:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{3z}.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}, \qquad \frac{dz}{3z} = \frac{dx}{x},$$

$$ln|y| = 2\,ln|x| + ln|C_1|, \qquad \frac{y}{x^2} = C_1 => J_1 = \frac{x^2}{y}$$

$$3ln|y| = 2\,ln|z| + ln|C_2|, \qquad \frac{y^3}{z^2} = C_2 => J_2 = \frac{z^2}{y^3}$$

Получили 2 базисных инварианта:

$$J_1 = \frac{x^2}{y} \text{ и } J_2 = \frac{z^2}{y^3}.$$

Преобразуем исходное уравнение:

$$2x^6 - 5y^3 + z^2 = 0 \ \ (: y^3),$$

$$2\frac{x^6}{y^3} - 5 + \frac{z^2}{y^3} = 0$$

$$2\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3 + \frac{z^2}{y^3} = 5$$

$$2J_1^3 + J_2 = 5$$

Получим $2J_1^3 + J_2 = 5$ – представление уравнения через базисные инварианты группы. [3]

1.1.8. Канонические переменные

Для любой однопараметрической группы преобразований плоскости можно ввести канонические перемененные:

$$(x, y) \to (t, u),$$

где $t(x, y)$ и $u(x, y)$, при этом

$$\hat{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \to \frac{\partial}{\partial t}. \qquad (11)$$

Другими словами, любую однопараметрическую группу подходящей заменой переменных можно привести к группе трансляций вдоль t. Для доказательства достаточно продифференцировать сложную функцию.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial t}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Тогда:

$$\hat{X}F = \xi\left(\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\eta\left(\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\xi\frac{\partial t}{\partial x}+\eta\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial t}+(\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial}{\partial u}.$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases}\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}=0,\\ \xi\frac{\partial t}{\partial x}+\eta\frac{\partial t}{\partial y}=1.\end{cases}\qquad(12)$$

В качестве u можно взять любой инвариант группы, разумнее всего взять базисный инвариант. В качестве t подойдет любое частное решение второго уравнения.

Пример 8. Дан генератор:

$$\hat{X}=xy^2\frac{\partial}{\partial x}+x^2y\ \frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{x^2y}$$

$$\frac{x^2dx}{x}=\frac{y^2dy}{y}$$

$$xdx=ydy$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\mathrm{C}$$

$$y^2-x^2=\tilde{C}$$

Тогда в качестве u можно сразу взять базисный инвариант

$$u=y^2-x^2.$$

Решаем второе уравнение для t:

$$xy^2\frac{\partial t}{\partial x}+x^2y\frac{\partial t}{\partial y}=1.$$

Так как *t(x)*, то

$$x^2y\frac{\partial t}{\partial y}=0$$

Будем искать такую функцию t, которая зависит только от x:

$$xy^2\frac{dt}{dx}=1,$$

$$dt = \frac{dx}{xy^2},$$

$$y^2 = x^2 + \tilde{C}$$

$$dt = \frac{dx}{x(x^2 + \tilde{C})}$$

$$t = \int \frac{1}{x(x^2 + \tilde{C})} dx$$

$$\frac{1}{x(x^2 + \tilde{C})} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{(x^2 + \tilde{C})} = \frac{A\left(x^2 + \tilde{C}\right) + x(Bx + D)}{x(x^2 + \tilde{C})}$$

$$Ax^2 + A\tilde{C} + Bx^2 + xD = 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ D = 0 \\ A\tilde{C} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -\dfrac{1}{\tilde{C}} \\ D = 0 \\ A = \dfrac{1}{\tilde{C}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x^2 + \tilde{C})} = \frac{1}{x\tilde{C}} - \frac{x}{\tilde{C}(x^2 + \tilde{C})}$$

$$t = \int \left(\frac{1}{x\tilde{C}} - \frac{x}{\tilde{C}\left(x^2 + \tilde{C}\right)}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x\tilde{C}}\right) dx - \int \left(\frac{1}{2\tilde{C}\left(x^2 + \tilde{C}\right)}\right) d\left(x^2 + \tilde{C}\right)$$

$$t = \frac{1}{\tilde{C}} \ln|x| - \frac{1}{2\tilde{C}} \ln\left|x^2 + \tilde{C}\right| + C_1$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{\tilde{C}} \ln|x| - \dfrac{1}{2\tilde{C}} \ln\left|x^2 + \tilde{C}\right| + C_1 \\ u = y^2 - x^2 \end{cases}$$

Переход к каноническим переменным упрощает вид сложного дифференциального уравнения.

Если дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Если уравнение второго порядка и известна какая-то его однопараметрическая группа, то переход к каноническим переменным понижает его порядок.

Если есть уравнение в частных производных, то переход к каноническим переменным позволит либо уменьшить число переменных, либо даже свести его к обыкновенному дифференциальному уравнению.

1.1.9. Уравнение в частных производных *n*-го порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-го порядка – это дифференциальное уравнение для функции от одной переменной, где $y(x)$ – неизвестная функция, число n – порядок дифференциального уравнения (порядок старшей производной, входящей в данное уравнение):

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (13)$$

Уравнение в частных производных n-го порядка – это уравнение, для функции $u(x, y, \dots)$ двух или более переменных $(x, y, \dots)$, содержащее частные производные до некоторого порядка p включительно:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n), u_1, u_2, \dots, u_p\right) = 0, \qquad (14)$$

где u_i – всевозможные частные производные i-го порядка.

Для системы дифференциальных уравнений в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – набор m зависимых переменных,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – набор n независимых переменных,

$\overrightarrow{u_{(1)}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \overrightarrow{u_{(2)}} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}, \dots$ – всевозможные частные производные 1-го, 2-го, … порядка ($i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}$).

Тогда саму систему дифференциальных уравнений можно записать так:

$$F_\alpha\left(x, u, \overrightarrow{u_{(1)}}, \overrightarrow{u_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{u_{(p)}}\right) = 0, \qquad \alpha = \overline{1, s}.$$

Требуется найти такие преобразования зависимых и независимых переменных, которые не изменяют уравнение (уравнение инвариантно относительно этих преобразований). При этом производные, как и переменные, будут меняться.

Уравнение допускает данную группу преобразований (инвариантно относительно этой замены), если при таких преобразованиях переменных вид уравнения не меняется.

Пример 9. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = f(\frac{y}{x}).$$

Это уравнение допускает группу однородных растяжений:

$$\begin{cases} \bar{x} = e^{a}x \\ \bar{y} = e^{a}y \end{cases}$$

поскольку

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{y}{x}, \frac{\overline{\partial y}}{\overline{\partial x}} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Пример 10. Уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$, $u = u(x,t)$.

Оно описывает такие процессы как диффузия и теплопроводность. Это уравнение допускает трансляции по переменным x и t и растяжения по u:

Идея Софуса Ли состояла в том, чтобы представить себе дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений) как многообразие, но уже не в обычном, а в так называемом продолженном пространстве.

Другими словами, Ли предложил рассматривать воображаемое пространство, в котором роль независимых переменных играют функции, аргументы и все производные.

Таким образом, Ли впервые понял, что дифференциальное уравнение можно себе представить геометрически как многообразие в этом продолженном пространстве.

Идея Ли состояла в том, чтобы перейти в продолженное пространство и представить дифференциальное уравнение в виде многообразия (гиперповерхности). Но тогда совершенно понятным становится следующее.

Дифференциальное уравнение будет допускать группу преобразований, если гиперповерхность в продолженном пространстве, соответствующая этому ДУ, будет инвариантным многообразием, то есть если любая точка, лежащая на гиперповерхности, на ней же и останется под действием преобразований группы.

Это, в свою очередь, означает и другое эквивалентное утверждение: под действием группы преобразований любое решение ДУ будет переходить в его же решение. В частном случае, решение может переходить само в себя. Тогда будем говорить об инвариантном решении.

Фактически во всех модельных задачах, где применяется групповой анализ, ключевую роль играют как раз инвариантные решения.

Возникает чисто техническая задача: получить генератор группы преобразований в продолженном пространстве по известному генератору в обычном пространстве.

То есть надо понять, как преобразуются производные при известном преобразовании переменных, причем будем рассматривать преобразование бесконечно малое.

1.1.10. Формулы продолжения

Пусть есть генератор какой-то однопараметрической группы:

$$\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Это означает, что когда параметр $a \to 0$ можно записать формулу Тейлора:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + a\xi(x, y) + o(a), \\ \bar{y} = y + a\eta(x, y) + o(a). \end{cases}$$

Тогда очевидно, производные запишутся следующим образом:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx} + \varphi^{x}(x, y, y')a + o(a),$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi^{xx}(x, y, y', y'')a + o(a),$$

… .

Возникает вопрос: как, зная функции $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$, посчитать функции $\varphi^x(x,y,y'), \varphi^{xx}(x,y,y',y''), \dots$.

Как только мы их посчитаем, получаем продолжение генератора, или то, что называется формулой продолжения.

Пример 10 (продолжение). Для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ узнаем, что будет играть роль продолженного пространства и как будет выглядеть в полном виде второе продолжение.

В уравнение входят первая производная по времени и координате, и вторая – по координате. Это значит, что продолженное пространство в общем виде должно включать все первые и все вторые производные, то есть координатами продолженного пространства будут $(t, u, x, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt})$. Получили, что если пространство, в котором работаем, трехмерно, то продолженное пространство будет восьмимерно.

Тогда генератор группы преобразований будет выглядеть так:

$$\hat{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}.$$

В этом случае второе продолжение будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{X}^{(2)} = \hat{X} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}. \qquad (15)$$

Вообще говоря, неважно, обыкновенное ли дано дифференциальное уравнение, в частных ли производных, система ли уравнений, всегда есть стандартная формула продолжения.

Повторим, что данном случае вопрос заключается в том, как выразить $\varphi^t, \varphi^x, \varphi^{xx}, \varphi^{tt}, \varphi^{xt}$ через компоненты (ξ, τ, φ) векторного поля, которые мы ищем.

Оказывается, что для этого достаточно умело применять формулу дифференцирования сложной функции.

Запишем общую формулу продолжения без доказательства.

Вначале введем оператор полной частной производной.

Пусть есть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, \overrightarrow{u_{(1)}}, \overrightarrow{u_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{u_{(p)}})$. Выберем какую-нибудь переменную x_i. Тогда по определению оператора полной частной производной получим оператор следующего вида:

$$D_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_{(1,j)}} \cdot \frac{\partial u_{(1,j)}}{\partial x_i} + \cdots, \text{где } u_{(1,j)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j}. \quad (16)$$

Другими словами, сначала берем самую обычную производную, а затем дифференцируем как сложную функцию. [4]

Условно говоря, оператор полной частной производной – это оператор, который, действуя на такую дифференциальную функцию, действует по правилу цепочки дифференцирования сложной функции.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(p)}\right) = 0, \alpha = \overline{1, m},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Генератор группы преобразований будет выглядеть так:

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (17)$$

Нужно продолжить этот оператор вплоть до n -го порядка.

Определение. Формула продолжения выглядит так:

$$\hat{X}^{(p)} = \hat{X} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^I(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(p)}) \frac{\partial}{\partial u_I^j}, \quad (18)$$

где I – мультииндекс (указывает, производную по каким переменным преобразуем),

индекс j указывает, какую функцию из зависимых переменных дифференцируем,

$$\varphi_j^I = D_I\left(\varphi_j - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot u_i^j\right) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot u_{I,i}^j,$$

D_I – оператор действия по мультииндексу,

$$u_i^j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$u_{I,i}^{j} = \frac{\partial u_I^j}{\partial x_i} \text{ (частные производные по } x_i\text{).}$$

Теорема (Критерий инвариантности СДУ). Пусть имеется СДУ: $M\colon \begin{cases} F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(p)}\right) = 0, \\ \alpha = \overline{1, m}. \end{cases}$ Необходимое и достаточное условие того, что данная система уравнений допускает группу с генератором $\hat{X}$, состоит в том, чтобы действие -го продолжения генератора на левые части уравнений в точках, принадлежащих многообразию, дает 0: $\hat{X}^{(p)} F_\alpha /_M \equiv 0, \alpha = \overline{1, m}.$

Определение. Это уравнение будем называть определяющим уравнением. Из него и получим все необходимые функции.

Идеология такая: когда запишутся определяющие уравнения, слева будут стоять, грубо говоря, полиномы по производным, а производные уже рассматриваются как независимые переменные. В этом случае полином «равен 0» тогда и только тогда, когда коэффициенты при всех независимых переменных равны нулю.

Таким образом, получим систему более простых уравнений. Эту систему уравнений (они тоже будут дифференциальными) для определения всех ξ_i и φ_j и будем называть системой определяющих уравнений.

Забегая вперед, скажем, что эта система всегда является переопределенной, то есть уравнений будет больше, чем неизвестных. Эти уравнения всегда будут линейными, значит, всегда будут решаться.

Конечно, может случится ситуация, когда решение будет тривиальным (только нулевые значения для ξ_i, φ_j). Это означает, что никаких симметрий у уравнения нет. Такие уравнения неподвластны групповому анализу (раз симметрий нет, то что анализировать?).

Но существует интересная техника. Иногда уравнение можно, как говорят, погрузить в более общую модель, то есть считать уравнение частным случаем какой-то более общей системы, которая уже имеет симметрии. Здесь групповой анализ снова работает.

Продемонстрируем на примере уравнения теплопроводности алгоритм составления и решения системы определяющих уравнений.

Пример 10 (продолжение). $u_t = u_{xx}$ (19)

$u = u(x,t)$ – уравнение теплопроводности.

Следовательно, генератор группы будем искать в следующем виде:

$\hat{X} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$.

Тогда второе продолжение будет выглядеть так:

$$\hat{X}^{(2)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}. \quad (20)$$

Подействуем вторым продолжением на уравнение теплопроводности, при этом все производные рассматриваются как независимые переменные. Тогда ненулевыми будут только те слагаемые генератора, в которых идет дифференцирование по u_t и u_{xx}:

$$\hat{X}^{(2)}(u_t - u_{xx}) = \varphi^t - \varphi^{xx}. \quad (21)$$

Тогда критерий инвариантности запишется так:

$$(\varphi^t - \varphi^{xx})/_{u_t = uu_x} = 0. \quad (22)$$

Задача свелась к вычислению φ^t, φ^{xx} и, заменив $u_t = uu_x$, к получению определяющих уравнений, которые будут дифференциальными уравнениями относительно ξ, τ и φ.

По формуле продолжения получим следующее выражение для φ^t:

$\varphi^t = D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}$, здесь мультииндекс $I = (x)$,

$$D_t(\varphi) = \varphi_t + \varphi_u u_t$$

$$D_t(\xi) = \xi_t + \xi_u u_t$$

$$D_t(\tau) = \tau_t + \tau_u u_t$$

$$D_t(u_x) = u_{xt}$$

$$D_t(u_t) = u_{tt}$$

Окончательно получаем:

$$\varphi^t = \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u {u_t}^2 \qquad (23)$$

Действуя аналогично, получаем:

$\varphi^{xx} = D_x D_x(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt}$, здесь мультииндекс $I = (xx)$.

$D_x(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) =$

$$= \varphi_x + \varphi_u u_x - \xi u_{xx} - \xi_x u_x + \xi_u {u_x}^2 - \tau u_{xt} - u_t \tau_x - u_x \tau_u u_t$$

$\varphi^{xx} = \varphi_{xx} + u_x(2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) - \tau_{xx} u_t + u_x^2(\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) - u_t 2\tau_{xu} u_x - u_t u_x^2 \tau_{uu} - u_x^3 \xi_{uu} + u_{xx}(\varphi_u - 2\xi_x) - 2u_{tx}\tau_x - 3\xi_u u_x u_{xx} - u_{xx} u_t \tau_u - 2u_x u_{tx} \tau_u$. (24)

Далее находим разность $(\varphi^t - \varphi^{xx})/_{u_t = u_{xx}} \equiv 0$ и приравниваем все коэффициенты при одинаковых комбинациях производных к нулю:

$$u_x u_{tx}\colon -2\tau_u = 0, \qquad (25)$$

$$u_{tx}\colon 2\tau_x = 0, \qquad (26)$$

Отсюда следует, что $\tau = \tau(t)$.

$$u_{xx}^2\colon 0 = 0 \text{ (верно)}$$

$$u_{xx} u_x^2\colon \tau_{uu} = 0, \text{ (верно)} \qquad (27)$$

$$u_x u_{xx}\colon 2\xi_u + 2\tau_{xu} = 0$$

Следовательно, $\xi = \xi(t, x)$.

$$u_{xx}\colon \varphi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x$$

Тогда

$$u_x^3\colon -\xi_{uu} = 0, \qquad \text{(верно)} \qquad (28)$$

$$u_x^2\colon \varphi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \qquad (29)$$

Тогда $\varphi_{uu} = 0$. Следовательно, функция φ линейна по переменной u:

$$\varphi = b_1(t, x)u + b_2(t, x).$$

$$u_x\colon -\xi_t = 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}, \qquad (30)$$

$$1\colon \varphi_t = \varphi_{xx}, \qquad (31)$$

Таким образом, решение системы определяющих уравнений имеет вид:

$\tau = 4C_6 t^2 + 2C_4 t + C_2$,

$\xi = C_1 + C_4 x + 2C_5 t + 4C_6 x t$, (32)

$$\varphi = C_1 x + C_2 + (C_3 - C_5 x - 2C_6 t - C_6 x^2)u + b(t, x)$$

Таким образом, удалось вычислить компоненты касательного векторного поля, то есть найти полную группу симметрий.

Мы искали однопараметрические группы, но когда нашли генератор, то видим, что он содержит 6 произвольных констант. Значит, на самом деле в общем случае получаем 6-параметрическую группу.

Итак, если есть 6-параметрическая группа, то можно поочередно каждый параметр считать единицей, а все остальные – нулями. Тогда получим так называемые базисные генераторы.

Выпишем базисные генераторы для уравнения теплопроводности:

$$C_1 = 1: \hat{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$C_2 = 1: \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$C_3 = 1: \hat{X}_3 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_4 = 1: \hat{X}_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$C_5 = 1: \hat{X}_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_6 = 1: \hat{X}_6 = 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + 4tx\frac{\partial}{\partial x} - (2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u}$$

Каждому генератору соответствует конечное однопараметрическое преобразование:

$$\hat{X}_1:\ \bar{x} = x + a, \bar{t} = t, \bar{u} = u \text{ (трансляция по оси } x\text{);}$$

$$\hat{X}_2:\ \bar{x} = x, \bar{t} = t + a, \bar{u} = u \text{ (трансляция по времени);}$$

$$\hat{X}_3:\ \bar{x} = x, \bar{t} = t, \bar{u} = e^a u \text{ (однородное растяжение по } u\text{);}$$

$$\hat{X}_4: \bar{x} = e^a x, \bar{t} = e^{2a} t, \bar{u} = u \text{ (неоднородное растяжение по } x, t\text{);}$$

$$\hat{X}_5:\ \bar{x} = x + 2ta, \bar{t} = t, \bar{u} = ue^{-xa-2ta^2};$$

$$\hat{X}_6:\ \bar{x} = \frac{x}{1-4\mathrm{t}a}, \bar{t} = \frac{t}{1-4at}, \bar{u} = u\sqrt{1-4\mathrm{t}a}\,e^{-\frac{x^2 a}{1-4\mathrm{t}a}}. \text{ [2]}$$

Таким образом, найдены все преобразования, которые оставляют уравнение инвариантным. Получилась достаточно богатая группа преобразований, где каждому генератору соответствует свое однопараметрическое преобразование (их всего 6).

Возникает вопрос, нельзя ли объединить все эти 6 однопараметрических групп в одну 6-параметрическую группу преобразований? Оказывается, можно. Для этого нужно воспользоваться аппаратом алгебр Ли.

Для этого сначала введем понятие коммутатора двух операторов.

Определение. Пусть есть произвольные операторы X_1, X_2. Тогда по определению коммутатором называется следующая разность:

$[X_1, X_2] = X_1 \cdot X_2 - X_2 \cdot X_1 \neq 0$ (в общем случае).

Другими словами, если коммутатор действует на какую-либо функцию F, то получаем на выходе:

$$[X_1, X_2](F) = X_1 \cdot X_2(F) - X_2 \cdot X_1(F). \qquad (33)$$

Теперь рассмотрим (по аналогии с векторным пространством) некоторое -мерное пространство операторов, то есть такое пространство L, в котором можно выбрать n линейно независимых базисных операторов $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, и тогда любой другой оператор этого пространства может быть записан в виде линейной комбинации базисных операторов: $\forall X \in L: X = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot X_i$. [5]

Теперь можно ввести понятие алгебры Ли.

Определение. Пространство является алгеброй Ли, если оно замкнуто относительно действия коммутатора, то есть: $\forall (X, Y) \in L: [X, Y] \in L$.

Это условие верно и для базисных операторов, поэтому можно написать, что для любой пары генераторов $\forall (X_i, X_k)$ из базиса коммутатор $[X_i, X_k]$ можно представить в виде линейной комбинации базисных же операторов:

$[X_i, X_k] = \sum_{l=1}^{n} C_{ik}^{l} \cdot X_l$, где C_{ik}^{l} – структурные константы алгебры Ли.

Таким образом, чтобы проверить, является ли некий набор операторов алгеброй Ли, нужно построить таблицу коммутаторов. [6]

Пример 10 (продолжение). Ответ на вопрос, составляют ли преобразования, которые допускают уравнения теплопроводности, многопараметрическую группу, мы получим тогда, когда убедимся, что операторы образовывают базис некоторой алгебры Ли.

Для этого нужно найти коммутаторы всех пар и убедиться, что в результате выполнения операции коммутирования будут получены операторы, которые принадлежат пространству L^6 с базисными операторами $X_i (i = 1, \dots, 6)$ вида.

Для вычисления будем использовать формулу (33), которая в покомпонентной записи ($X_1 = \xi_1^i \partial_{x^i}, X_2 = \xi_2^i \partial_{x^i}, i = 1, \dots, N$) имеет вид

$$[X_1, X_2] = ((X_1 \xi_2^i) - (X_2 \xi_1^i)) \frac{\partial}{\partial_{x^i}}. \qquad (34)$$

Так, например, для операторов X_2, X_3 имеем

$$[X_2, X_3] = uF_{tu} - uF_{tu} = 0$$

Результаты вычислений приведены в следующей таблице, где коммутаторы операторов $[X_i, X_j]$ содержатся на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Таблица 1. Таблица коммутаторов

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	0	X_1	$-X_3$	$2X_5$
X_2	0	0	0	$2X_2$	$2X_1$	X_3
X_3	0	0	0	0	0	0
X_4	$-X_1$	$-2X_2$	0	0	$2X_5$	$-X_6$
X_5	X_3	$-2X_1$	0	$-2X_5$	0	$2X_3$
X_6	$-2X_5$	$-X_3$	0	X_6	$-2X_3$	0

Теорема: Множество генераторов преобразований симметрии ДУ (СДУ) всегда образует базис алгебры Ли.

Причина состоит в том, что определяющие уравнения линейны.

Строгое доказательство этого факта было дано еще самим Ли (он и ввел понятие этой алгебры, которая в дальнейшем уже стала носить его имя). Его также можно посмотреть в [7].

1.2. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим возможности группового анализа применительно к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Уже говорилось о том, что практически все методы интегрирования ОДУ, которые входят в учебники, находят свое обоснование в групповом анализе.

Естественно начать с самого простого случая – с ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной: $y' = f(x, y)$. Это уравнение всегда можно переписать в следующем виде:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{35}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – функции, обладающие достаточной степенью гладкости.

Софус Ли доказал, что групповой анализ позволяет решать такие уравнения двумя способами.

1) Если данное уравнение допускает группу симметрий с генератором $\hat{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$, то оно сразу же имеет интегрирующий множитель следующего вида:

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N}. \tag{36}$$

Это означает, что после умножения уравнения на μ получаем уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, в неявном виде получим решение $F(x, y) = C$.

2) Второй способ решения уравнения – переход к каноническим переменным, то есть в этом случае оператор $\hat{X}$ сводится к трансляции:

$$(x, y) \to (t, u)$$

$$\begin{cases} \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \xi\frac{\partial t}{\partial x} + \eta\frac{\partial t}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

После перехода к каноническим переменным уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными.

В случае ОДУ второго порядка, разрешенного относительно второй производной: $y'' = f(x, y, y')$, действуют следующим образом.

Пусть это уравнение допускает однопараметрическую группу с генератором:

$$\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда переходом к каноническим переменным порядок уравнения можно понизить на единицу.

Если уравнение допускает двумерную алгебру Ли:

$$\hat{X}_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\hat{X}_2 = \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y},$$

то уравнение можно проинтегрировать полностью по алгоритму Ли, то есть перейти к каноническим переменным, что приведет алгебру Ли к одной из четырех стандартных форм. В новых переменных уравнение также примет форму одной из четырех стандартных форм, каждая из которых легко интегрируется [8].

Что касается уравнений более высокого порядка, то здесь ситуации намного сложнее. На сегодняшний день достаточно хорошо разобраны уравнения 3-го и 4-го порядка [9].

Пример 11. Рассмотрим уравнение $\left(y^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx + dy = 0$.

Генератор этой группы $\hat{X} = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$, то есть $\xi = x, \eta = -y$.

1) Строим интегрирующий множитель:

$$\mu = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}.$$

Получим после умножения исходного уравнения на μ следующее:

$$\frac{x}{x^2y^2 - xy - 2} \frac{x^2y^2 - 2}{x^2} dx + \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2} dy = 0,$$

$$\frac{1}{x^2y^2-xy-2}\,\frac{x^2y^2-2}{x}dx+\frac{x}{x^2y^2-xy-2}dy=0,$$

$$P=\frac{1}{x^2y^2-xy-2}\,\frac{x^2y^2-2}{x},Q=\frac{x}{x^2y^2-xy-2}.$$

Удостоверившись, что $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=\frac{-2-x^2y^2}{(x^2y^2-xy-2)^2}$, перейдем стандартным образом к решению системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dF}{dx}=\dfrac{1}{x^2y^2-xy-2}\,\dfrac{x^2y^2-2}{x},\\ \dfrac{dF}{dy}=\dfrac{x}{x^2y^2-xy-2}.\end{cases}$$

Интегрирование первого уравнения дает общий вид решения:

$$F(x,y)=ln|x|+ln\left|\frac{xy-2}{xy+1}\right|+C(y).$$

Дифференцирование $F(x,y)$ по y и дальнейшая подстановка во второе уравнение системы позволяет найти вид функции $C(y)$:

$$C(y)=-\frac{2}{3}ln\left|\frac{xy-2}{xy+1}\right|+C.$$

Таким образом, решением исходной системы уравнений является функция $F(x,y)=ln|x|+ln\left|\frac{xy-2}{xy+1}\right|-\frac{2}{3}ln\left|\frac{xy-2}{xy+1}\right|+C=ln|x|+\frac{1}{3}ln\left|\frac{xy-2}{xy+1}\right|+C.$

2) Перейдем к каноническим переменным.

$$\begin{cases}x\dfrac{du}{dx}-y\dfrac{du}{dy}=0,\\ x\dfrac{dt}{dx}-y\dfrac{dt}{dy}=1.\end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы и получаем:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y},\ ln|x|=-ln|y|+C,\ u=C=yx.$$

Для решения второго уравнения системы возьмем в качестве t следующее частное решение: $t=t(x)$. Тогда получим следующее уравнение с очевидным частным решением:

$$x\frac{dt}{dx}=1,\ t=ln|x|.$$

Делаем подстановку $y = \frac{u(x)}{x}$ в исходное уравнение:

$$\left(\frac{u^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) dx + \frac{du}{x} = 0.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $dt = \frac{dx}{x}$, окончательно получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{u-2} = -dt.$$

Разложение левой части на простейшие дроби и дальнейшее интегрирование обеих частей дает следующий ответ: $C = ln|u - 2| + t$. Переход от переменных (u, t) к переменным (x, y):

$$u = yx, t = ln|x|,$$

приводит к такой окончательной записи решения:

$$C = ln|yx - 2| + ln|x| = ln \ |\frac{yx - 2}{x}|.$$

1.3. Групповой анализ уравнений в частных производных

Перейдем к интегрированию уравнений в частных производных. Для определенности будем все объяснять на примере следующего уравнения не выше второго порядка для функции двух переменных $u = u(x,t)$:

$$F(x,t,u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tt},u_{tx}) = 0.$$

Пусть это уравнение допускает группу симметрий с генератором:

$$\hat{X} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Тогда можно, решая уравнения Ли, получить конечные преобразования:

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(x,t,u,a), \\ \bar{t} = \bar{t}(x,t,u,a), \\ \bar{u} = \bar{u}(x,t,u,a). \end{cases}$$

Появляются 2 замечательные возможности.

1) Можно «размножать» решения, поскольку группа всегда одно решение переводит в другое решение. Этот алгоритм достаточно прост.

Пусть известно какое-либо решение $u = \Phi(x,t)$.

Тогда в новых переменных эту формулу можно переписать так:

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x},\bar{t}).$$

Теперь подставим в это равенство явные выражения, которые связывают новые переменные и старые:

$$\bar{u}(x,t,u,a) = \Phi(\bar{x}(x,t,u,a),\bar{t}(x,t,u,a)).$$

Это уравнение уже можно разрешить относительно u и тем самым получить новое решение.

2) Умение находить групповые инвариантные решения.

На примере выбранного уравнения это делается следующим образом.

Сначала найдем инварианты группы:

$$\xi\frac{\partial J}{\partial x} + \tau\frac{\partial J}{\partial t} + \varphi\frac{\partial J}{\partial u} = 0.$$

Для этого составляем уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\varphi}. \qquad (37)$$

В результате получим два базисных инварианта: J_1, J_2.

Теперь делается простой шаг – переход от переменных (u, x, t) к базисным инвариантам (J_1, J_2): $(u, x, t) \to (J_1, J_2)$. В этом случае ищется один базисный инвариант как функция другого: $J_1 = f(J_2)$. В результате уменьшается число переменных.

В самых простых случаях можно свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Далее составляется уравнение для функции f, оно уже будет ОДУ.

Если это ОДУ будет решаться, то получим групповое инвариантное решение, либо по крайней мере это уравнение можно будет решить численно. Другими словами, хоть аналитически, хоть численно это решение найдется.

Исторически физики задолго до появления группового анализа знали о таких решениях (особенно специалисты в области газо- и гидродинамики): они имели дело с автомодельными решениями. А в дальнейшем уже стало понятно, что автомодельные решения – это решения, которые инвариантны относительно группы растяжений.

Уже после работ Л.В. Овсянникова выяснилось, что автомодельные решения – лишь очень маленький класс всего множества групповых инвариантных решений.

Пример 10 (продолжение) $u_t = u_{xx}$, $u = u(x, t)$ – уравнение теплопроводности с генератором

$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}.$$

Посмотри, к каким инвариантным решениям приводит этот генератор.

Составляем формальные уравнения для инвариантов группы:

$$\frac{dx}{2t} = \frac{du}{-xu} = \frac{dt}{(0)}.$$

Интегрирование первого уравнения даст $C = ue^{\frac{x^2}{4t}}$.

Тогда в качестве базисных инвариантов возьмем $J_1 = t$ (поскольку время не преобразуется).

Тогда для $J_1 = f(J_2)$ в качестве $f(t)$ возьмем $f(t) = ue^{\frac{x^2}{4t}}$.

Значит $u = e^{-\frac{x^2}{4t}}f(t)$.

Продифференцировав по t и дважды по x, а затем подставив в исходное уравнение теплопроводности, получим уравнение относительно функции

$$f: \frac{df}{dt} + \frac{f}{2t} = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид $f(t) = \frac{C}{\sqrt{t}}$.

Окончательно для u получим следующее выражение:

$$u = \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Возникает следующий интересный момент. С одной стороны, можно построить такие инвариантные решения относительно любого генератора. С другой стороны, раз генераторы образуют алгебру Ли, то любая линейная комбинация генераторов даст новый генератор. Значит, относительно него тоже можно построить инвариантные решения.

2. ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ГАБОВА

2.1. Вывод уравнения Габова

Рассмотрим плоские движения идеальной несжимаемой жидкости в поле потенциальных массовых сил. Тогда, вводя функцию тока $\psi(x, y, t)$ и подставляя ее в уравнение Эйлера для случая плоских движений, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_y + \psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = -\frac{1}{\rho}(p+U)_x\ , \qquad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_x + \psi_y\psi_{xx} - \psi_x\psi_{xy} = \frac{1}{\rho}(p+U)_y\ . \qquad (39)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по y, а второе — по x, а затем складывая, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{yy} + \psi_{yy}\psi_{xy} + \psi_y\psi_{xyy} - \psi_{xy}\psi_{yy} - \psi_x\psi_{yyy} = -\frac{1}{\rho}(p+U)_{xy}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{xx} + \psi_{xy}\psi_{xx} + \psi_y\psi_{xxx} - \psi_{xx}\psi_{xy} - \psi_x\psi_{xxy} = \frac{1}{\rho}(p+U)_{xy}\ .$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{yy} + \psi_{yy}\psi_{xy} + \psi_y\psi_{xyy} - \psi_{xy}\psi_{yy} - \psi_x\psi_{yyy} + \frac{\partial}{\partial t}\psi_{xx} + \psi_{xy}\psi_{xx} + \psi_y\psi_{xxx} - \psi_{xx}\psi_{xy} - \psi_x\psi_{xxy} = -\frac{1}{\rho}(p+U)_{xy} + \frac{1}{\rho}(p+U)_{xy} \qquad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{yy} + \frac{\partial}{\partial t}\psi_{xx} + \psi_y\psi_{xyy} - \psi_x\psi_{yyy} + \psi_y\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xxy} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_{yy} + \psi_{xx}) + \psi_y(\psi_{xyy} + \psi_{xxx}) - \psi_x(\psi_{yyy} + \psi_{xxy}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_{yy} + \psi_{xx}) + \psi_y\frac{\partial}{\partial x}(\psi_{yy} + \psi_{xx}) - \psi_x\frac{\partial}{\partial y}(\psi_{yy} + \psi_{xx}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \psi_y\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi - \psi_x\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi = 0 \qquad (41)$$

Уравнение (41) назовем общим уравнением плоских движений идеальной несжимаемой жидкости. [10]

2.2. Расчет допускаемой алгебры Ли

Расчёт допускаемых алгерб Ли по алгоритму Ли, описанному в главе 1, с применением специализированного пакета Game дает систему определяющих уравнений компонент касательного векторного поля. X1 генератор группы

$$\widehat{X1} = \xi_1 \partial x + \xi_2 \partial y + \tau \partial t + \eta \partial u$$

$$u(x, y, t)$$

$$\xi_{1_{tty}} = 0$$

$$\xi_{1_{yy}} = 0$$

$$\xi_{1_u} = 0$$

$$\xi_{1_x} = \frac{1}{2}\tau_t + \frac{1}{2}\eta_u$$

$$\xi_{2_u} = 0$$

$$\xi_{2_x} = -\xi_{1_y}$$

$$\xi_{2_y} = \frac{1}{2}\tau_t + \frac{1}{2}\eta_u$$

$$\tau_x = 0$$

$$\tau_y = 0$$

$$\tau_u = 0$$

$$\tau_{tt} = 0$$

$$\eta_{tu} = 0$$

$$\eta_{uu} = 0$$

$$\eta_y = \xi_{1_t}$$

$$\eta_x = -\xi_{2_t}$$

Решая определяющие уравнения, получим:

$$\begin{cases} \xi_1 = (k_1 t + k_2) y + a x + F_3(t) \\ \xi_1 = (-k_1 t - k_2) x + \frac{1}{2} C_1 y + a y + F_1(t) \\ \tau = C_1 t + C_2 \\ \eta = 2au + \frac{1}{2} k_1 y^2 + F_{3_t} y + \frac{1}{2} k_1 x^2 - F_{1_t} x + F_1(t) \end{cases} \tag{42}$$

Таким образом, решение системы дает бесконечномерную алгебру Ли с генераторами:

$$X_1 = \partial x$$

$$X_2 = \partial y$$

$$X_3 = \partial t$$

$$X_4 = y\partial x - x\partial y$$

$$X_5 = -u\partial u + t\partial t$$

$$X_6 = 2u\partial u + x\partial x + y\partial y$$

$$X_7 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\partial u + t(y\partial x - x\partial y)$$

$$\begin{cases} X_1{}^{(\infty)} = F_1'(t) y\partial u + F_1(t)\partial x \\ X_2{}^{(\infty)} = F_2'(t) x\partial u - F_2(t)\partial y \\ X_3{}^{(\infty)} = F_3(t)\partial u \end{cases}$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ – произвольные функции времени.

2.3. Инвариантные решения

Рассмотрим инвариантные решения, порождаемые генератором X_4 (поворот). Инварианты группы в данном случае u, t и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому решение будем искать в виде $u = u(r, t)$. Для уравнения (41) сделаем переход к полярным координатам.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + u_y \frac{\partial}{\partial x}\Delta u - u_x \frac{\partial}{\partial y}\Delta u = 0 \tag{43}$$

Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{44}$$

Но так как $u = u(r, t)$, то

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{45}$$

Представим уравнение (43) в полярных координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = \frac{1}{r}(u_r + ru_{rr}) = \frac{u_r}{r} + u_{rr}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r cos(\varphi)}{r} = cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \frac{r sin(\varphi)}{r} = sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial(\frac{u_r}{r} + u_{rr})}{\partial r} = (\frac{u_{rr}r - u_r}{r^2} + u_{rrr})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_r}{r} + u_{rr}\right) = \frac{\partial(\frac{u_r}{r} + u_{rr})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = (\frac{u_{rr}r - u_r}{r^2} + u_{rrr})cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta u = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_r}{r} + u_{rr}\right) = \frac{\partial(\frac{u_r}{r} + u_{rr})}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = (\frac{u_{rr}r - u_r}{r^2} + u_{rrr})sin(\varphi)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = u_r\, cos(\varphi)$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = u_r\, sin(\varphi)$$

Подставим в (43):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + u_r\, sin(\varphi)(\frac{u_{rr}r - u_r}{r^2} + u_{rrr})cos(\varphi) - u_r\, cos(\varphi)(\frac{u_{rr}r - u_r}{r^2} + u_{rrr})sin(\varphi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = 0 \;\; => \;\; \Delta u = f(r) \tag{46}$$

Допустим, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = f(r)\ . \tag{47}$$

Рассмотрим два варианта значения $f(r)$ и найдем уравнение $u(r)$:

1) Постоянный источник $f(r) = C$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = C$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = C \cdot r$$

$$r\frac{du}{dr} = \int Crdr$$

$$r\frac{du}{dr} = \frac{Cr^2}{2} + C_1$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{Cr}{2} + \frac{C_1}{r}$$

$$\int du = \int (\frac{Cr}{2} + \frac{C_1}{r})dr$$

$$u(r) = \frac{Cr^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2 \qquad (48)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{C(x^2+y^2)}{4} + C_1 \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C_2 \qquad (49)$$

2) Переменный источник $f(r) = \frac{C}{r^\alpha}$, $\alpha > 1$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{C}{r^\alpha}$$

$$r\frac{du}{dr} = \int Cr^{1-\alpha}dr$$

$$r\frac{du}{dr} = C\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + C_1$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{C}{2-\alpha}r^{1-\alpha} + \frac{C_1}{r}$$

$$u = \int \left(\frac{C}{2-\alpha}r^{1-\alpha} + \frac{C_1}{r}\right)dr$$

$$u(r) = \frac{C}{(2-\alpha)^2}r^{2-\alpha} + C_1 \ln(r) + C_2 \qquad (50)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{C}{(2-\alpha)^2}(\sqrt{x^2 + y^2})^{2-\alpha} + C_1 \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + C_2 \qquad (51)$$

2.4. Выводы по работе

При визуализации решения, полученного в п.2.3 (48), можем наблюдать, что при постоянном источнике зависимость $u(r)$ приобретает следующий вид:

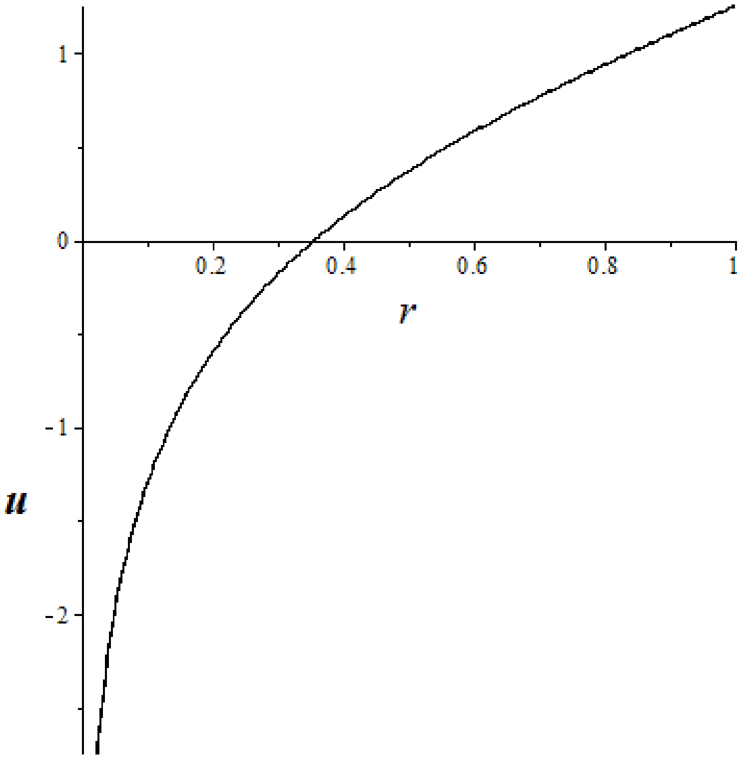

Рис. 1. Зависимость функции тока $u(r)$ при постоянном источнике

Сделав замену $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим зависимость $u(x, y)$ (уравнение 49), график которой будет выглядеть следующим образом (при $C = C_1 = C_2 = 1$, $x \in [-10; 10]$, $y \in [-10; 10]$):

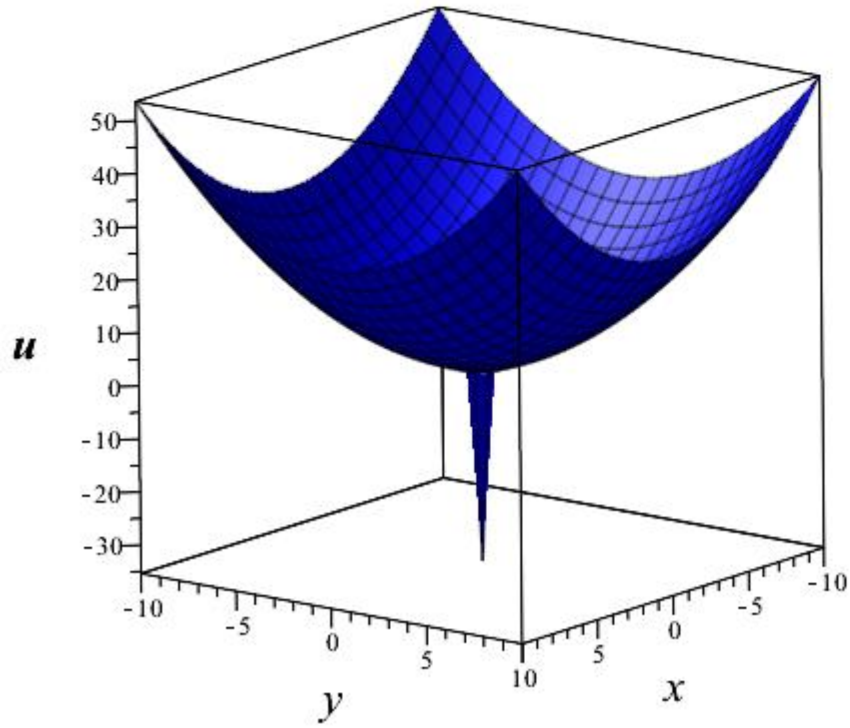

Рис. 2. Зависимость функции тока $u(x, y)$ при постоянном источнике

При переменном источнике зависимость $u(r)$ (уравнение 50) приобретает следующий вид: $(\alpha = -2)$

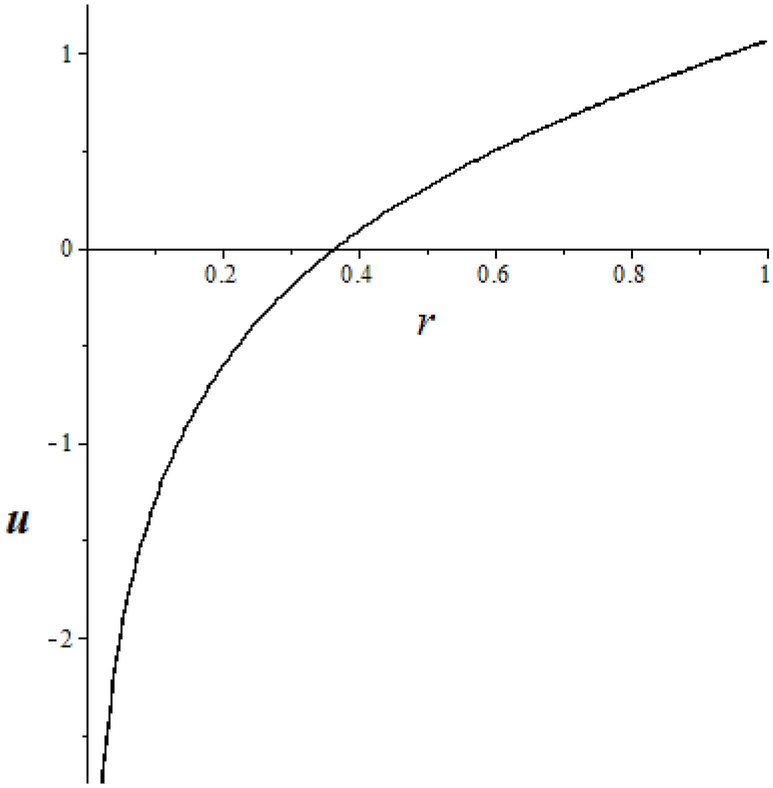

Рис. 3. Зависимость функции тока $u(r)$ при переменном источнике

А зависимость $u(x, y)$ (уравнение 51) (при $C = C_1 = C_2 = 1$, $\alpha = -2$, $x \in [-5; 5]$, $y \in [-5; 5]$):

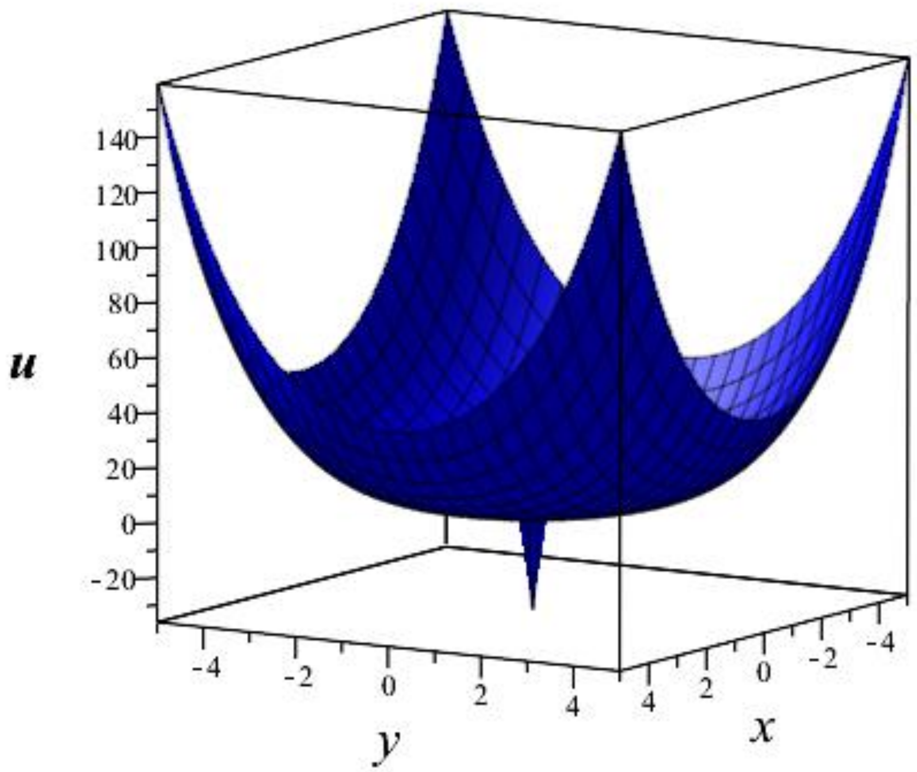

Рис. 4. Зависимость функции тока $u(x, y)$ при переменном источнике

Оба решения содержат сингулярность на оси. Так как функция тока u – потенциал поля скоростей, а оно не может иметь сингулярность, то существует 2 варианта:

1. Решение имеет физический смысл при $C_1=0$.
2. Если $C_1 \neq 0$, то решение имеет физический смысл только при r большем α, где α – параметр, имеющий размерность длины и определяющий область применимости механики сплошных сред.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Изучены основы группового анализа ДУ.
2. Впервые проведен расчет алгебры Ли, допускаемой уравнением Габова.
3. Получены аксиально симметричные инвариантные решения уравнения Габова.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шефтель М.Б. Группы Ли и дифференциальные уравнения: симметрии, законы сохранения и точные решения математических моделей в физике. / Физика элементарных частиц и атомного ядра. Северо-Западный политехнический институт, Санкт-Петербург, том 28, вып.3. 1997.
2. Клебанов И.И, Д.А. Емелин. Методы группового анализа в задачах классической статистической механики. / Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2015. – 77 с.
3. Головин С.В., Чесноков А.А. Групповой анализ дифференциальных уравнений. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009, 119 с.
4. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Перевод с англ. И.С. Емельяновой. Нижний Новгород: издательство Нижегородского госуниверситета, 2007.
5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. / М.: Мир, 1989.
6. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа / М.: Знание, 1989.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. / М.: Наука, 1978.
8. Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В. Принцип использования симметрий в теории нелинейных волн / Акустический журнал, том 50, № 4. – М., 2004. – с. 481-495.
9. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений / М.: Знание, 1991.
10. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. / М.: Изд-во МГУ, 1988. – 176 с.