СОДЕРЖАНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 16
ВЫПУСК 6
•
ДЕКАБРЬ
1974

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 16, № 6 (1974), 899—906

УДК 512

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ САМОЦЕНТРАЛИЗУЮЩУЮСЯ ЭЛЕМЕНТАРНУЮ АБЕЛЕВУ ПОДГРУППУ ПОРЯДКА 8

В. М. Ситников

Доказано, что конечная 2-группа, содержащая самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8, имеет секционный ранг $\leqslant 4$. Библ. 6 назв.

В настоящей работе дается секционная характеризация конечных 2-групп, обладающих самоцентрализующейся элементарной абелевой подгруппой порядка 8. Другое описание этого класса 2-групп было получено ранее А. Н. Фоминым [1]. Настоящее описание специально приспособлено для изучения конечных простых групп, силовская 2-подгруппа которых принадлежит вышеупомянутому классу 2-групп. При этом весьма полезной оказалась теорема из работы А. Н. Фомина [2]. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА А. *Пусть T — конечная 2-группа и пусть T содержит самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8. Тогда секционный ранг группы T не превосходит* 4.

В качестве непосредственного следствия теоремы А и фундаментального результата Горенстейна и Харады [3] вытекает следующая теорема, частный случай которой был исследован в [4].

ТЕОРЕМА Б. *Пусть силовская 2-подгруппа конечной простой группы G имеет самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка* 8. *Тогда G изоморфна* *одной из следующих групп*:

$$G_2(q),\ D_4^2(q),\ PSp(4, q),\ q \text{ — нечетно},$$

$PSL(4, q)$, q — *нечетно и* $q \not\equiv 1\ (8)$, $PSU(4, q^2)$, q — *нечетно и* $q \not\equiv 7\ (8)$,

$$G_2'(q),\ q = 3^{2n+1},\ A_8,\ A_9,\ A_{10},\ A_{11},\ PSL \qquad (2,8),$$

$$J_1,\ M_{12},\ M_{22},\ M_{23},\ M^C,\ L_Y.$$

Обозначения — стандартные. Отметим некоторые. $\langle x\rangle_n$ — циклическая группа, порожденная элементом x порядка n. $r(H)$ — ранг группы H. $r_C(H)$ — секционный ранг группы H. $A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение групп A и B с инвариантным множителем A, $A \lhd B$ — подгруппа A инвариантна в группе B. M^C — группа Маклафлина, L_Y — группа Лайонса, J_1 — группа Янко с абелевой силовской 2-подгруппой, M_{12}, M_{22}, M_{23} — группы Матье степени 12, 22, 23 соответственно.

Под секционным рангом группы H понимается максимум рангов ее всевозможных сечений.

Доказательство теоремы А будем вести от противного. Пусть конечная 2-группа T удовлетворяет условиям теоремы, но не удовлетворяет ее заключению.

Если $SCN_3(T) = \varnothing$, то по теореме А. Д. Устюжанинова [5] группа T является расширением метациклической группы при помощи подгруппы из группы диэдра порядка 8. Следовательно, в этом случае $r_C(T) \leqslant 4$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $SCN_3(T) \neq \varnothing$.

Заметим также, что $|T| > 2^6$. Предположим, что $|T| \leqslant 2^6$. Если $r_C(T) > 4$, то $|T| = 2^6$. Обозначим через K минимальную подгруппу из T такую, что $r_C(K) > 4$. Если K — абелева, то в силу минимальности K является элементарной абелевой группой порядка 2^5. Но тогда $|Z(T)| \geqslant 8$ и порядок централизатора любой абелевой подгруппы из T будет строго больше 8, что противоречит выбору T. Если K — неабелева, то $K = T$, T/T' — элементарная абелева группа порядка 2^5, $|T'| = 2$. Ясно, что в этом случае в T нет самоцентрализующихся элементарных абелевых подгрупп порядка 8. Следовательно, $|T| > 2^6$.

Предположим сначала, что среди самоцентрализующихся элементарных абелевых подгрупп порядка 8 существует подгруппа P, содержащая инвариантную в T четверную подгруппу V. Положим $P = \langle\tau\rangle_2 \times \langle\rho\rangle_2 \times \langle\sigma\rangle_2$, $V = \langle\tau\rangle \times \langle\rho\rangle$ и $\langle\tau\rangle \leqslant Z(T)$. Пусть H — централизатор V в группе T и пусть W — инвариантная в T элементарная подгруппа порядка 8, содержащая подгруппу V. Ясно, что $|T : H| \leqslant 2$ и $W \neq P$. Положим $W = \langle\tau\rangle \times \langle\rho\rangle \times \langle\mu\rangle$. Эти обозначения сохраним в дальнейшем.

Группа H удовлетворяет условиям теоремы Фомина [2]. Если H' — циклическая группа, то по теореме из [2] $r_C(H) \leqslant 3$. Но тогда $r_C(T) \leqslant 4$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что H' — нециклическая группа. По теореме из [2] группа H — одного из следующих двух типов:

I) $H = (\langle x\rangle\cdot\langle y\rangle) \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$, $x^2y^2 = y^2x^2$, $r\langle x^2, y^2\rangle = 2$, $\sigma^{-1}x^2\sigma = x^{-2}$, $\sigma^{-1}y^2\sigma = y^{-1}$, $H' = \langle x^2, y^2\rangle = \langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle$, где $x_1 = [\sigma, x]$, $y_1 = [\sigma, y]$.

II) $H = (\langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle)\langle z\rangle \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$, $z^2 \notin \langle x_1, y_1\rangle$, $z^4 \in \langle x_1, y_1\rangle$, $H' = \langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle$, $\sigma x_1\sigma = x_1^{-1}$, $\sigma y_1\sigma = y_1^{-1}$, $[\sigma, z] = x_1$, $[\sigma, z^2] = x_1^n y_1$ для некоторого целого числа n.

Заметим, что в нашем случае

$$Z(H) = \Omega_1(H') = \langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle.$$

Обозначим $L = H'W = (\langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle) \leftthreetimes \langle\mu\rangle$. Рассмотрим два основных случая в зависимости от принадлежности элемента σ группе L.

Предположим, что $\sigma \in L$. Так как в этом случае элемент μ индуцирует на H' такой же автоморфизм, что и элемент σ, то $|H'| \leqslant 2^4$. Следовательно, $|H| \leqslant 2^7$, а $|T| \leqslant 2^8$. Заметим, что $L \lhd T$. Поэтому все сопряженные с P подгруппы из T содержатся в L. Если $|H'| = 2^3$, то $L = \langle\rho\rangle_2 \times (\langle x_1\rangle_4 \leftthreetimes \langle\sigma\rangle) \simeq Z_2 \times D_8$. Так как L содержит инвариантную в T подгруппу W, то P также должна быть инвариантной в T, что противоречит выбору T. Пусть $|H'| = 2^4$. Так как $W \lhd L$, то $L = (\langle x_1\rangle \times \langle y_1\rangle_4) \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$ и в L содержится не более двух подгрупп, сопряженных в T с подгруппой P. Поэтому $|T| \leqslant |N_T(P)|\cdot 2 \leqslant 2^7$. Так как $|H : H| = 8$, то $T = H$ и $|T| = 2^7$. Пусть K — минимальная подгруппа из H такая, что $r_C(K) > 4$. Ясно, что в этом случае $H = H'\cdot K$. Так как коммутант не дополняем в группе, то полученное противоречие показывает, что в этом случае $r_C(T) \leqslant 4$.

Поэтому будем в дальнейшем считать, что $\sigma \notin L$. Рассмотрим группу $N = L \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$. Пусть $[\mu, \sigma] = z$, где $z \in \langle\tau\rangle \times \langle\rho\rangle = \Omega_1(H')$. Если $|x_1| \geqslant |y_1| \geqslant 2$, то

$| C_{N|\langle z\rangle} (\sigma\langle z\rangle) | > 8$, что противоречит лемме 1 из [2]. Следовательно, $H' = \langle x_1\rangle \times \langle\rho\rangle$ и без ограничения общности можно считать, что $[\mu, \sigma] = \rho$. Покажем теперь, что H совпадает с T. Прежде всего заметим, что $T = HC_T(\sigma)$. Если $H \neq T$, то $C_T(\sigma)$ одного из следующих двух типов:

1) $C_T(\sigma) = (\langle\tau\rangle \times \langle\rho\rangle \times \langle\sigma\rangle) \lambda \langle\nu\rangle_2$, $\rho^\nu = \rho\tau$, $\tau^\nu = \tau$, $\sigma^\nu = \sigma$.

2) $C_T(\sigma) = (\langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle) \lambda\langle f\rangle_4$, $f^2 = \sigma$, $\rho^f = \tau\rho$, $\tau^f = \tau$.

Рассмотрим группу $F = WC_T(\sigma)$. Ясно, что $C_F(W) = W$. Если $C_T(\sigma)$ типа 1), то $F = (\langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle\times\langle\mu\rangle) \lambda (\langle\sigma\rangle\times\langle\nu\rangle)$. Так как автоморфизм σ представим матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ в базисе τ, ρ, μ, а автоморфизм ν представим матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\alpha&\beta&1\end{pmatrix}$, то $[\sigma, \nu] \neq 1$, что противоречиво. Если же $C_T(\sigma)$ типа 2), то $F = (\langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle\times\langle\mu\rangle) \lambda\langle f\rangle_4$. Так как $C_F(W) = W$, то автоморфизм $f^2 = \sigma$ должен быть представлен матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, что противоречит $[\mu, \sigma] = \rho$.

Следовательно, H совпадает с T. Если группа H типа II, то $r_C(H) \leqslant 4$, что противоречит выбору T. Поэтому будем считать, что H — группа типа I. Так как $H'\langle x\rangle = \langle x\rangle\lambda\langle\rho\rangle$ и $| H : H'\langle x\rangle| = 4$, то и в этом случае $r_C(H) \leqslant 4$. Следовательно, мы доказали, что если в P содержится инвариантная в T четверная подгруппа, то $r_C(T) \leqslant 4$.

Предположим теперь, что в T нет самоцентрализующихся элементарных абелевых подгрупп порядка 8, содержащих инвариантную в T четверную подгруппу. Пусть, как и прежде, $P = \langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle\times\langle\sigma\rangle$ — самоцентрализующаяся в T элементарная абелева подгруппа порядка 8. Обозначим через $V = \langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle$ инвариантную в T четверную подгруппу, где $\langle\tau\rangle = Z(T)$ и $\nu^\sigma = \nu\tau$, через W — инвариантную абелеву подгруппу порядка 8, содержащую V. Положим $C_P(V) = \langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle$. Тогда $T = H\lambda\langle\sigma\rangle$, где $H = C_T(V)$. Рассмотрим централизатор $C_T(\rho) = C$. Ясно, что $C_C(\sigma) = P$. Следовательно, C удовлетворяет условиям теоремы из [2]. Легко показать, что $\exp(C') = 2$. Так как $| C : C' | = 8$, то порядок централизатора C равен либо 16, либо 32.

Если $| C_T(\rho) | = 16$, то $C_T(\rho) = (\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle) \lambda \lambda\langle\sigma\rangle$. Но тогда $C_T(Q) = Q$, где $Q = \langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$, и Q содержит инвариантную в T четверную подгруппу V. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, порядок $| C_T(\rho) | = 32$.

Так как $\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle \leqslant Z(C_H(\rho))$, то $C_H(\rho)$ — абелева группа. Поэтому $C_H(\rho)$ — абелева группа типа (2, 2, 2, 2), либо типа (4, 2, 2). Из строения централизатора $C_T(\rho)$ будет видно, что коммутант $C_T(\rho)'$ — нециклический. Следовательно, T' — также нециклическая группа. По теореме Бехтеля [6] центр $Z(T')$ — также нециклический. Поэтому в центре $Z(T')$ существует инвариантная в T четверная подгруппа. Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $V = \langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle \leqslant T'$.

Докажем теперь, что в этом случае $| T | = 2^7$, подгруппа $Q = \langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle \leqslant T'$ и $Q \lhd T$.

Предположим сначала, что $C_H(\rho)$ типа (4, 2, 2). Тогда $C = C(\rho) = (\langle f\rangle_4\times\langle a\rangle_2 \times\langle b\rangle_2) \lambda\langle\sigma\rangle$. Так как $\langle f\rangle\times\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ — характеристическая подгруппа в C, то $\langle f^2\rangle$ инвариантна в $N_T(C)$. Следовательно, $f^2 = \tau$ и $C = [\langle f\rangle_4 \times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle] \lambda\langle\sigma\rangle$. Чтобы уточнить действие σ на f, рассмотрим факторгруппу $\bar C = C / \langle\tau\rangle \equiv (\langle\bar f\rangle\times\langle\bar\nu\rangle\times\langle\bar\rho\rangle) \lambda\langle\bar\sigma\rangle$. В базисе $\bar\nu$, $\bar\rho$, f элемент $\bar\sigma$ имеет представление $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\alpha&\beta&1\end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta = 0, 1$. Если $\alpha = \beta = 0$, то $\langle f\rangle$ инвариантна в C и $| C_C(\sigma) | > 8$, что противоречиво. Если $\alpha = 1$, то $C = \langle\rho\rangle\times C_0$ и $\sigma \in C_0$. Из того, что C_0 — не максимального класса, вытекает, что $| C_C(\sigma) | > 8$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $\bar f^\sigma = \bar f\rho$. Поэтому

$$C = (\langle f\rangle\times\langle\rho\rangle\times\langle\nu\rangle) \lambda\langle\sigma\rangle,\ \rho^\sigma = \rho,\ \nu^\sigma = \tau\nu,\ f^\sigma = f\rho,$$
$$f^2 = \tau \text{ и } C' = \langle\tau\rangle\times\langle\rho\rangle.$$

Если $W = \langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\mu\rangle \leqslant C$, то либо $W = P$ и тогда $| T | \leqslant 2^6$, либо $W = \langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$ и тогда $| T | \leqslant 2^7$. Заметим, что мы уже отмечали раньше, что $| T | > 2^6$, поэтому $| T | = 2^7$, $W \leqslant T'$ и $W \lhd T$, что и требовалось доказать.

Будем теперь считать, что $W \not\leqslant C$. Рассмотрим группу $L = C\cdot W$. Можно считать, что $\mu^\sigma = \mu$ и $\mu^\rho = \tau\mu$. Поэтому $L = (\langle f\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle) \lambda (\langle\sigma\rangle\times\langle\mu\rangle)$. Чтобы полностью задать группу L, нам нужно задать действие элемента μ на группе $\langle f\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$. Для этого рассмотрим группу

$W\langle f\rangle=(\langle f\rangle_4\times\langle\nu\rangle_2)\,\lambda\langle\mu\rangle_2$. Ясно, что $f^\mu=fx$, где $x\in\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle$. Так как $L/P=(\langle\bar\nu\rangle\times\langle\bar\mu\rangle)\,\lambda\langle\bar f\rangle\simeq D_8$, то можно считать без ограничения общности, что $f^\mu=f\nu$. Таким образом, $L'=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle\neq\varnothing(L)$ и $C_L(L')=\langle f\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$. Так как $|T|>2^6$, то $T\neq L$. Пусть подгруппа N из T содержит L в качестве подгруппы индекса 2. Тогда $N=L\langle x\rangle$, $x^2\in L$. Рассмотрим факторгруппу $\bar N=N/L'=(\langle\bar f\rangle\times\langle\bar\mu\rangle\times\langle\bar\sigma\rangle)\langle\bar x\rangle$. Заметим, что $\langle\bar f\rangle\times\langle\bar\mu\rangle\leqslant Z(\bar N)$ и $\bar N'\leqslant\langle\bar f\rangle\times\langle\bar\mu\rangle$. Так как N—группа не максимального класса, то $\bar N$ — собственная подгруппа в $\langle\bar f\rangle\times\langle\bar\mu\rangle$. Нетрудно показать, что либо $\Omega_1(N')=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$, либо $N'=(\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle)\,\lambda\langle\mu\rangle$. В последнем случае N' содержит точно две элементарные подгруппы: $\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$ и $\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\mu\rangle=W$. Теперь докажем, что $N=T$. Предположим противное, тогда в T существует такая подгруппа N_1, содержащая N, что $|N_1:N|=2$. Заметим, что все инволюции из $(\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle)\setminus(\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle)$ сопряжены с ρ в группе N. Поэтому, если $\Omega_1(N')=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$, то принимая во внимание, что $\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\lhd N_1$, получаем $N_1=NC_{N_1}(\rho)$. Так как $C_{N_1}(\rho)\leqslant N$, то $N_1=N$. Полученное противоречие показывает, что $N'=(\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle)\,\lambda\langle\mu\rangle$. Но тогда $\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$ также инвариантна в N_1, так как вторая элементарная подгруппа W из N' инвариантна в N_2. Это, как и выше, приводит к противоречию. Следовательно, $T=N$, $|T|=2^7$, $Q=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle\subseteq T'$ и $Q\lhd T$.

Предположим теперь, что $C_T(\rho)=(\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle\times\langle\omega\rangle)\,\lambda\langle\sigma\rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau^\sigma=\tau$, $\nu^\sigma=\tau\nu$, $\rho^\sigma=\rho$, $w^\sigma=w\rho$. Положим $A=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle\times\langle w\rangle$. Если $W<C_T(\rho)$, то ясно, что W совпадает с подгруппой $Q=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle$, $C_T(W)=A$. Следовательно, в этом случае $|T|=2^7$, $Q\leqslant T'$ и $Q\lhd T$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $W\not\subset C_T(\rho)$. Рассмотрим группу $L=C_T(\rho)\,W=A\,\lambda(\langle\sigma\rangle\times\langle\rho\rangle)$, где $W=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\mu\rangle$. Возьмем подгруппу $K=(\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\mu\rangle)\,\lambda(\langle\rho\rangle\times\langle\omega\rangle)$ из L. Имеем $C_K(W)=W$. Так как ρ представляется в базисе τ, ν, μ матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, то инволюция и в этом базисе представима матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\alpha&1&1\end{pmatrix}$, где $\alpha=0,\ 1$. Следовательно,

$\nu\in K'$. Таким образом, $L'=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle=\phi(L)$. Если $L=T$, то $r_C(T)\leqslant 4$ и все доказано. Пусть $L<N\leqslant T$ и $|N:L|=2$. Так как A — характеристическая подгруппа в L и $W\lhd T$, то $\langle\bar\omega\rangle\times\langle\bar\mu\rangle/\leqslant Z(\bar N)$, где $\bar N=N/L'$.

Заметим, что

$$N/C_N(L')=N/A\simeq D.$$

Следовательно, $N'\nleqslant A$. С другой стороны, $A\nleqslant N'$, ибо N — группа не максимального класса. Поэтому N' совпадает либо с $L'\langle\mu\rangle$, либо с $L'\langle\omega\mu\rangle$.

В первом случае N' содержит точно две элементарные подгруппы порядка 8, именно, W и L. Во втором случае $\Omega_1(N')=L'$. Как и в первом случае, теперь можно показать, что $N=T$, ибо $L'\lhd N_T(N)$, а $N_T(L')=N$. Следовательно, и в этом случае $|T|=2^7$ и $\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle\lhd T$.

Таким образом, мы доказали, что в случае $|C_T(\rho)|=32$ порядок $|T|=2^7$, группа $Q=\langle\tau\rangle\times\langle\nu\rangle\times\langle\rho\rangle\leqslant T'$ и $Q\lhd T$.

Покажем теперь, что $r_C(T)\leqslant 4$. Так как факторгруппа $T/C_T(Q)$ изоморфна группе диэдра порядка 8, то $Q\neq T$. С другой стороны, T — группа не максимального класса. Поэтому $|T'|=2^4$ и $C_T(Q)\leqslant T'$. Пусть K — минимальная подгруппа из T такая, что $r_C(K)>4$. Если K — неабелева подгруппа, то $|K|=2^6$ и $|T|<2^4$, что противоречит доказанному выше. Следовательно, K — элементарная абелева подгруппа порядка 2^5. Ясно, что K неинвариантна в T. Поэтому существует элемент x из T такой, что $K^x\neq K$. Так как $K\cap K^x\leqslant Z(\langle K,K\rangle)$ и $|Z(T)|=2$, то $|K\cap K^x|=2^4$. С другой стороны, $|T:\langle K,K^x\rangle|\leqslant 2$ и $|Z(\langle K,K^x\rangle)|\geqslant 2^4$. Следовательно, $|Z(T)|>2$, что противоречиво. Полученное противоречие доказывает, что $r_C(T)\leqslant 4$. Теорема А доказана.

Институт математики и
механики УНЦ АН СССР

Поступило
8.IV.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Фомин А. Н., Конечные 2-группы с самоцентрализующейся элементарной подгруппой порядка 8, XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Тезисы сообщений, т. 1, Свердловск, 1973.

[2] Фомин А. Н., Конечные 2-группы, в которых централизатор некоторой инволюции имеет порядок 8, Матем. записки Уральского ун-та, 8, № 3 (1973), 122—132.

[3] G o r e n s t e i n D., H a r a d a K., Finite groups of sectional 2-rank at most 4, «Finite Groups 72, Proc. Gainesville Conf., 1972», Amsterdam, 1973, 57—67.
[4] H a r a d a K., Generalizations of the main theorem on finite groups of sectional 2-rank at most 4, Notices Amer. Math. Soc., 20, № 1 (1973), A-98.
[5] У с т ю ж а н и н о в А. Д., Конечные группы, в которых множество самоцентрализующихся абелевых инвариантных подгрупп с числом образующих $\geqslant 3$ пусто $(SCN_3(2) = \phi)$, Изв. АН СССР, Сер. матем., 37 (1973), 251—283.
[6] B e c h t e l l H., Frattini subgroups and central groups, Pacific J. Math., 18 (1966), 15—23.