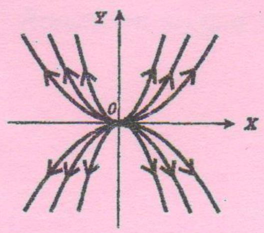
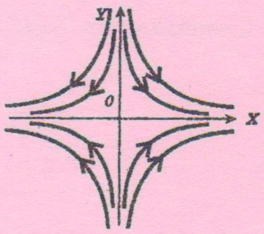
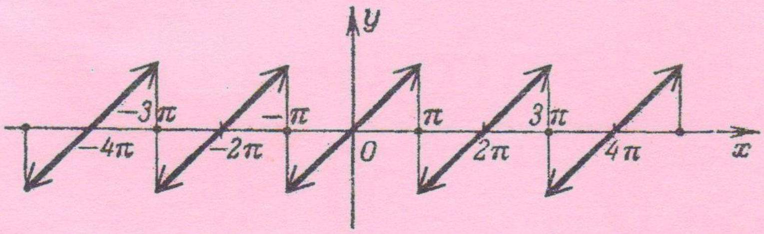
И.И. Клебанов, М.Ю. Вагина

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
РЯДЫ ФУРЬЕ

Конспект лекций по курсу высшей математики







Челябинск 2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Челябинский государственный педагогический университет

И.И. Клебанов, М.Ю. Вагина

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
РЯДЫ ФУРЬЕ

Конспект лекций по курсу высшей математики

Челябинск 2009

УДК 517.91(021)
ББК 22.161.61 я 73
К 48

Клебанов И.И., Вагина М.Ю.
Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды Фурье: конспект лекций по курсу высшей математики / И.И. Клебанов, М.Ю. Вагина. — Челябинск: Изд-во Челяб.гос.пед.ун-та, 2009. – 84 с.
ISBN 978-5-85716-756-4

Материал представляет собой подробный конспект лекционного курса, включающего дифференциальные уравнения и ряды Фурье, который читается студентам физического факультета в четвертом семестре в рамках общего курса высшей математики. Основной акцент сделан на обучение студентов эффективной математической технике, необходимой для решения физических задач. Лекции предназначены для студентов физических специальностей вузов.

Рецензенты: Н.Ж. Гейт, к. ф.-м. н., доцент ЧГПУ
В.П. Андрейчук, к. ф.-м. н., доцент ЧГПУ

ISBN 978-5-85716-756-4

Пояснительная записка

Материал представляет собой конспект лекционного курса, включающего дифференциальные уравнения и ряды Фурье. Читается студентам – физикам в четвертом семестре в рамках курса высшей математики. Изучаются основные понятия теории дифференциальных уравнений, методы интегрирования уравнений первого порядка и уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка, общая теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка, линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ряды Фурье.

Содержание данной работы соответствует государственным образовательным стандартам для студентов физических факультетов педагогических университетов по специальности "Физика с дополнительной специальностью". В целях более качественного усвоения материала после каждой лекции предлагаются упражнения для самостоятельной работы.

ЛЕКЦИЯ 1

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Теорема Коши. Метод изоклин. Уравнение семейства кривых

Дифференциальные уравнения являются наиболее распространенной математической моделью в естествознании. Поэтому, прежде чем приводить формальные определения, рассмотрим несколько простых задач.

Задача 1. Найти зависимость скорости тела, падающего под действием силы тяжести, от времени, если известно, что сила сопротивления воздуха пропорциональна мгновенной скорости движения (коэффициент пропорциональности k).

Решение. На основе второго закона Ньютона запишем уравнение движения в проекции на ось y (рис. 1):

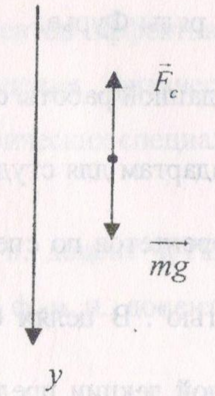


Рис. 1

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV. \qquad (1)$$

Напомним, что ускорение есть первая производная скорости по времени. Уравнение (1) связывает первую производную функции с самой функцией. Решением этого уравнения является любая функция вида

$$V = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}}, \qquad (2)$$

в чем легко убедиться прямой подстановкой.

Чтобы из семейства функций (2) выделить одно решение, необходимо добавить дополнительное условие, позволяющее определить постоянную C, например, в данном случае, задать значение скорости в некоторый момент времени.

Задача 2. Найти зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени в колебательном контуре, изображенном на рис. 2.

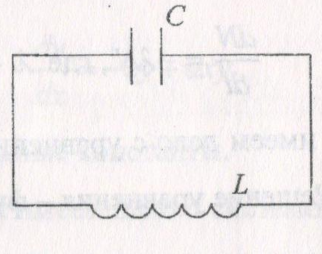


Рис. 2

Решение. ЭДС самоиндукции катушки $E_c = -L\frac{dI}{dt}$, а падение напряжения на конденсаторе $U_c = \frac{Q}{C}$. Согласно второму закону Кирхгофа имеем

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}, \text{ где } I = \frac{dQ}{dt}.$$

Окончательно получим уравнение, связывающее функцию $Q(t)$ и ее вторую производную:

$$-L\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{Q}{C}.$$

Решением этого уравнения будет любая функция вида

$$Q = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt \text{, где } w = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Решение содержат две произвольные постоянные C_1 и C_2, которые можно найти, зная значение заряда и тока в некоторый момент времени t.

Задача 3. Скорость радиоактивного распада пропорциональна числу радиоактивных частиц в данный момент времени t. Найти зависимость от времени числа нераспавшихся частиц.

Решение. Если $N(t)$ – это число радиоактивных атомов в данный момент времени, то закон распада имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \text{, где } \lambda \text{ – постоянная распада.}$$

Вновь мы имеем дело с уравнением, связывающим функцию с ее производной. Решение уравнения – функция вида

$$N = Ce^{-\lambda t}.$$

Чтобы найти постоянную C, необходимо знать число атомов в некоторый момент времени.

В качестве последнего примера рассмотрим одну из классических задач популяционной биологии, получившую название модели Вольтерра-Лоттки, или модели «хищник-жертва».

Задача 4. Биологическая популяция состоит из двух видов: хищников и жертв. Хищники питаются исключительно жертвами, пищевые же ресурсы жертв считаются неограниченными. Найти зависимость от времени числа хищников и жертв.

Решение. Пусть число жертв в данный момент времени – x, а число хищников – y. Тогда количество жертв увеличивается за счет того, что рождаемость превышает смертность (это предположение совершенно естественно при неограниченных пищевых ресурсах) и уменьшается за счет поедания жертв хищниками. Если предположить, что вероятность встречи хищника с жертвой пропорциональна числу тех и других, то скорость изменения числа жертв определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy,$$

где a и b – положительные константы. Аналогично, число хищников в отсутствие жертв может только убывать, а возрастает за счет поедания жертв. Тогда скорость изменения числа хищников определяется уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -cy + dxy,$$

где c и d – также положительные константы.

Таким образом, здесь мы имеем дело с системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Перейдем к формулировке основных математических понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Определение 1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее между собой функцию, независимую переменную и производные этой функции различных порядков. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.*

$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ – символическая запись обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. Таким образом, дифференциальные уравнения, полученные в задачах 1 и 3, являются уравнениями первого порядка, а уравнение, полученное в задаче 2, – второго порядка.

Определение 2. *Дифференциальным уравнением в частных производных называют уравнение, связывающее между собой функцию многих переменных, сами эти переменные и частные производные функции различных порядков.*

Рассмотрим, например, уравнение, описывающее звуковую волну. Плотность воздуха в звуковой волне является функцией координат и времени $U(x,y,z,t)$:

$$\Delta U - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, C – скорость звука. Уравнения такого типа изучаются в курсе математических методов физики.

Определение 3. *Решением дифференциального уравнения является любая функция, обращающая уравнение в тождество.*

Для уравнения n-го порядка, без наложения дополнительных условий, решением является n-параметрическое семейство функций, называемое иначе общим решением или общим интегралом дифференциального уравнения.

Если задать дополнительные условия, которые позволяют найти неопределённые константы, мы получим частные решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие этим условиям.

Определение 4. *Фазовым пространством называется геометрический образ всевозможных состояний системы, описываемой дифференциальным уравнением или системой уравнений.*

Легче всего осознать это понятие на конкретных примерах.

1. Радиоактивный распад: $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N, N \geq 0$.

Фазовое пространство – множество точек полупрямой $N \geq 0$

2. Колебательный контур. Любая точка плоскости будет характеризовать состояние контура.

3. Модель Вольтерра-Лоттки: $x(k) \geq 0, y(щ) \geq 0$.

Здесь k означает «караси», а щ-«щуки», поскольку именно этот пример наиболее популярен в биологической литературе.

4. Пусть имеется система из n материальных точек. Фазовое пространство такой системы имеет размерность $6n$ (3 координаты точки, 3 проекции скорости). Если в системе имеется S связей, то размерность фазового пространства равна $6N - S$. С этим примером вы подробно познакомитесь в курсе механики.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(y, x, y') = 0 . \qquad (3)$$

Если можно выразить в явном виде первую производную как функцию x и y , то говорят, что имеется дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y) . \qquad (4)$$

Дифференциальное уравнение (4) задаёт направление касательной к интегральной кривой, проходящей через точку с координатами (x, y) (интегральной кривой называют график решения). Строя касательные в некоторой области координатной плоскости, получим поле направлений.

Зададимся теперь вопросом, при каких условиях дифференциальное уравнение имеет решение? На этот вопрос отвечает теорема Коши.

Теорема. *Если в уравнении* $y' = f(x, y)$ *функция* $f(x, y)$ *и её частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *по y непрерывны в некоторой замкнутой области Д на плоскости Оху* (рис.3), *содержащей некоторую точку* $M(x_0, y_0)$*,то существует единственное решение этого уравнения* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее условию* $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

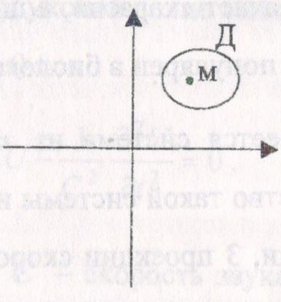


Рис. 3

Доказательство этой теоремы можно найти в любом подробном курсе дифференциальных уравнений (см. напр., библиографию). Мы же ограничимся простейшим примером нарушения условий теоремы Коши. Рассмотрим уравнение вида:

$$y' = 2\sqrt{y}\,, \tag{5}$$

решением которого является любая функция вида $\sqrt{y} = x + c$, где c – неопределенная константа. Однако легко увидеть, что решением уравнения является также функция $y = 0$, которая не может быть получена из предыдущей ни при каком значении постоянной c. Функция $\sqrt{y} = x + c$ называется общим решением уравнения (5), а функция $y = 0$ – особым решением (см. лекцию 4). Таким образом, решение уравнения не единственно, так как через любую точку оси Ox проходят две кривые, являющиеся решениями уравнения (5) (рис.4). Связано это с тем, что частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ разрывна на оси Ox

(если $y \to 0$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y} \to \infty$).

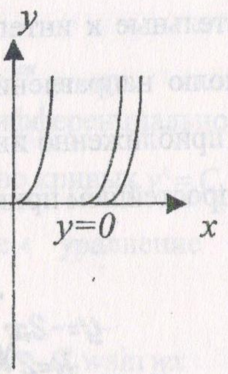


Рис. 4

Решить уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, означает найти однопараметрическое семейство функций $y = \varphi(x,c)$, называемое иначе общим решением или общим интегралом. Для получения частного решения надо выбрать из общего решения такую функцию, которая удовлетворяла бы условию $y(x_0) = y_0$. Задача о поиске частного решения в виде $\begin{cases} y = \varphi(x,c) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ называется задачей Коши.

Если задано дифференциальное уравнение, то возникает вопрос, как его решить в квадратурах (т.е. свести задачу к вычислению интегралов). Подавляющее большинство уравнений в явном виде решить нельзя. Подробно узкий класс дифференциальных уравнений, разрешимых в явном виде, изложен в лекции 2 и 3. Здесь рассмотрим метод приближенного анализа дифференциального уравнения, называемый *метод изоклин*.

Определение 5. *Изоклиной называется кривая, которая для дифференциального уравнения* (4) *удовлетворяет уравнению* $f(x,y) = const$.

Ясно, что $y' = const$ – геометрическое место точек, в каждой из которых касательные к интегральным кривым имеют один и тот же наклон. По полю направлений, которое образуют изоклины, можно восстановить приближенно интегральные кривые. Метод изоклин легко понять на простейшем примере (рис.5).

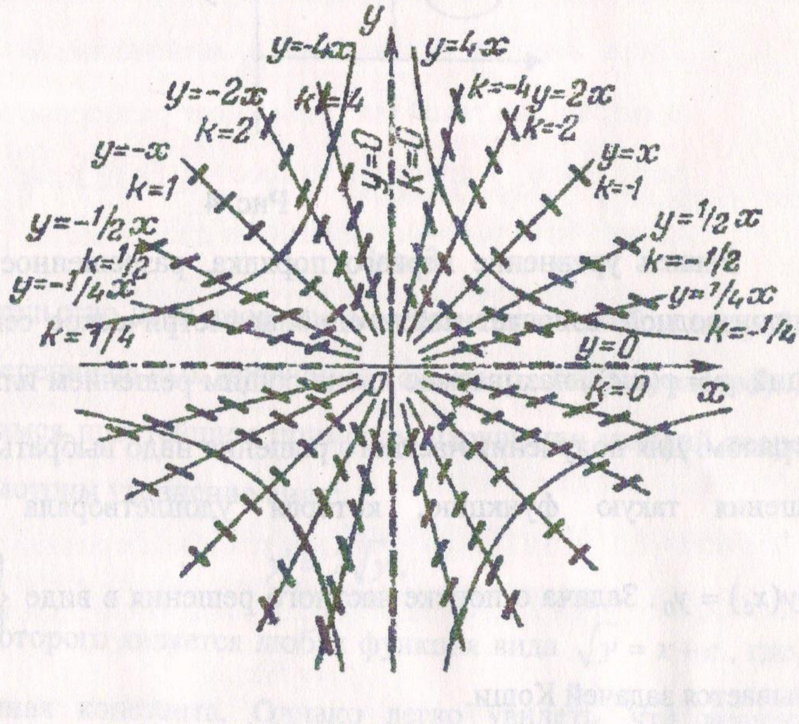


Рис.5

На рис.5 изображены изоклины и интегральные кривые уравнения $y' = -\dfrac{y}{x}$. Изоклинами здесь являются прямые $-\dfrac{y}{x} = k$, или $y = -kx$.

В заключение рассмотрим обратную задачу, которую сформулируем в общем виде.

Задача 5. Имеется однопараметрическое семейство кривых $y = Ce^{-ax}$. Решением какого дифференциального уравнения оно является?

Решение. Продифференцируем один раз уравнение семейства кривых и исключим константу:

$$y' = -aCe^{-ax} = -ay.$$

Задача 6. Решением какого дифференциального уравнения является двухпараметрическое семейство кривых $y' = C_1 \sin wx + C_2 \cos wy$?

Решение. Продифференцируем уравнение семейства кривых дважды и исключим константы.

$$y' = C_1 w \cos wx - C_2 w \sin wx$$

$$y'' = -C_1 w^2 \sin wx - C_2 w^2 \cos wx = -w^2 (C_1 \sin wx + C_2 \cos wx) = -w^2 y$$

$$y'' = -w^2 y$$

Ясно, что уравнение n-параметрического семейства кривых находится n-кратным дифференцированием с последующим исключением констант.

Упражнения

1. Решить методом изоклин задачи 1 и 3.
2. Найти дифференциальное уравнение, решением которого является семейство кривых. $y^2 + Cx = x^3$.

ЛЕКЦИЯ 2

Интегрируемые типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения

Простейшим типом дифференциальных уравнений первого порядка, разрешимых в квадратурах (это означает, что решение сводится к вычислению интегралов), являются уравнения с разделяющимися переменными, имеющие вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – заданные функции. Если $g(y) \neq 0$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C .$$

Это и есть разделение переменных. Если существует значение $y = a$ такое, что $g(a) \equiv 0$, то очевидно, что функция $y = a$ также является решением уравнения (1). Оно может быть как частным, так и особым решением.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$.

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx + C$$

$\sqrt{y} = x + C$ – общее решение, $y = 0$ – особое решение.

<u>Пример 2.</u> Решить задачу о радиоактивном распаде, дифференциальное уравнение которого было получено в первой лекции: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N, N(0) = N_0$.

$$\int \frac{dN}{N} = -\int \lambda dt + \ln|C|$$

$$\ln|N| = -\lambda t + \ln|C|$$

$$N = Ce^{-\lambda t}, \ N_0 = Ce^{-\lambda 0} = C$$

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ – частное решение.

Пример 3. Решить уравнение $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$, описывающее падение тела под действием силы тяжести с учетом сопротивления воздуха (см. лекция 1, задача 1).

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{kv}{m}$$

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt$$

$$-\frac{m}{k}\int \frac{d(g - \frac{k}{m}v)}{g - \frac{k}{m}v} = t + \ln|C|$$

$$-\frac{m}{k}\ln\left| g - \frac{k}{m}v \right| = t + \ln|C|$$

$$g - \frac{k}{m}v = e^{\frac{-kt}{m}} C$$

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}}$$

Чтобы найти постоянную C, необходимо задать значение скорости в момент времени $t = 0$. Заметим, что при $t \to \infty$ $v \to \frac{mg}{k}$ – предельное значение скорости, называемой скоростью установившегося движения (продумайте физический смысл полученного результата).

К уравнению с разделяющимися переменными могут быть приведены однородные уравнения.

Определение 1. *Функция $F(x,y)$ называется однородной функцией степени m, если при замене x на αx и замене y на αy функцию $F(x,y)$ можно представить в виде $\alpha^m F(x,y)$, где α – произвольный множитель.*

<u>**Пример 4.**</u> $F(x,y) = x^2 + xy + y^2$ – однородная функция степени 2.

Определение 2. *Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $y' = f(x,y)$, где в правой части стоит однородная функция нулевого порядка, или уравнение вида $F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0$, где F и G – однородные функции одного порядка.*

Однородные уравнения решаются подстановкой: $y = xu(x)$. Тогда $y' = u + xu'$ и

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C\,.$$

Таким образом, однородное дифференциальное уравнение решается в общем виде при $f(u) - u \neq 0$.

Если $f(u) - u \equiv 0$, то прямые $y = cx$, где c некоторая константа, также будут решениями уравнения.

Пример 5. Решить уравнение: $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

$$y' = \frac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}},$$

$$y = xu, \quad y' = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-u-u-u^2}{1+u} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\int\frac{(u+1)du}{u^2+2u-1} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{(u+1)du}{u^2+2u-1} = -\ln|x| + C.$$

Вычислив интегралы, окончательно получим: $(y+x)^2 = 2x^2 + C$.

В некоторых случаях неоднородные уравнения заменой переменных могут быть сведены к однородным:

а) если уравнение имеет вид: $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, то начало координат следует перенести в точку пересечения прямых $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$. Если прямые не пересекаются ($a_1x+b_1y=k(ax+by)$), то уравнение имеет вид $y' = F(ax+by)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax+by$ или $z = ax+by+c$.

Пример 6. Привести уравнение $y' = \dfrac{x+y+1}{2x+y+2}$ к однородному.

Пусть $x = z + x_0$, $y = t + y_0$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dz} \Rightarrow \frac{dt}{dz} = \frac{z + x_0 + t + y_0 + 1}{2z + 2x_0 + t + y_0 + 2}$$

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = -1 \\ 2x_0 + y_0 = -2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z+t}{2z+t} = \frac{1 + t/z}{2 + t/z}$$ – однородное уравнение;

б) иногда уравнение удается свести к однородному подстановкой $y = z^m$ с последующим подбором числа m.

Пример 7. Привести уравнение $y' = \dfrac{4x^6 - y^4}{2x^4 y}$ к однородному:

$$y = z^m, \; y' = mz^{m-1}z'$$

$$mz^{m-1}z' = \frac{4x^6 - z^{4m}}{2x^4 z^m}$$

$$z' = \frac{1}{m} \cdot \frac{4x^6 - z^{4m}}{2x^4 z^{2m-1}}$$

$$x \to \alpha x, \;\; z \to \alpha z, \; z' = \frac{1}{m} \cdot \frac{4\alpha^6 x^6 - \alpha^{4m} z^{4m}}{2\alpha^4 x^4 \alpha^{2m-1} z^{2m-1}}.$$

Очевидно, что уравнение будет однородным, если одновременно выполняются условия: $6 = 4m = 4 + 2m - 1$. Это верно при $m = \dfrac{3}{2}$.

$$y = z^{3/2} \Rightarrow z' = \frac{2}{3}\frac{4x^6 - z^6}{2x^4 z^2} = \frac{1}{3}\frac{4 - \left(\dfrac{z}{x}\right)^6}{\left(\dfrac{z}{x}\right)^2}$$ – однородное уравнение.

Определение 3. *Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$y' + a(x)y = b(x), \qquad (2)$$

где $a(x)$, $b(x)$ – заданные функции.

Уравнение (2) решается методом вариации постоянной, который сводится к следующему:

1. Рассмотрим уравнение (2) без правой части:

$$y' + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y\,, \qquad \int\frac{dy}{y} = \int -a(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int a(x)dx + \ln|C|$$

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}.$$

2. Предположим, что C не постоянная, а неизвестная функция.

Будем искать решение уравнения в виде $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$.

$$y' = \frac{dC}{dx}e^{-\int a(x)dx} - a(x)Ce^{-\int a(x)dx}$$

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int a(x)dx} - a(x)Ce^{-\int a(x)dx} + a(x)Ce^{-\int a(x)dx} = b(x)$$

$\dfrac{dC}{dx} = b(x)e^{\int a(x)dx}$ – уравнение для функции с разделяющимися переменными.

$$C = \int\left[b(x)e^{\int a(x)dx}\right]dx + c_1$$

$$y = \left\{\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + c_1\right\}e^{-\int a(x)dx}.$$

<u>Пример 7.</u> Пусть имеется радиоактивный элемент A с постоянной полураспада λ_1, который распадается и преобразуется в элемент B с

постоянной полураспада λ_2, а элемент B преобразуется в элемент C. Как изменяется число радиоактивных атомов вещества B со временем?

Решение. Число атомов вещества B увеличивается за счет распада вещества A и уменьшается за счет распада вещества B. Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид:

$$\frac{dN_B}{dt} = -\lambda_2 N_B + \left|\frac{dN_A}{dt}\right| = -\lambda_2 N_B + \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t},$$

так как $N_A = N_0 e^{-\lambda_1 t}$, или $\dfrac{dN_B}{dt} + \lambda_2 N_B = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$, здесь $a(t) = \lambda_2$, $b(t) = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$.

Тогда $N_B = \left[\int \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} e^{\int \lambda_2 dt} + C\right] e^{-\lambda_2 dt} = \dfrac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + Ce^{-\lambda_2 t}$.

Чтобы найти постоянную C, необходимо знать число атомов B в начальный момент времени.

Упражнения

1. Решить уравнения:

1) $y' ctgx + y = 2$, $y(0) = 1$, 2) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$,

3) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$, 4) $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4 + y^2}$,

5) $xy' - 2y = 2x^4$, 6) $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$.

2. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

ЛЕКЦИЯ 3

Интегрируемые типы уравнений первого порядка: уравнения Бернулли и Риккати, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

Определение 1. *Уравнение вида*

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \tag{1}$$

где $n \neq 0, 1$, называется уравнением Бернулли.

Уравнение Бернулли, как и линейное уравнение, решается методом вариации постоянной.

Пример 1. Решить уравнение: $y' + y = xy^2$

1) $y' + y = 0$;

$$\frac{dy}{dx} = -y; \; y = Ce^{-x}$$

2) $y = C(x)e^{-x}$; $y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$

$$C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = xC^2e^{-2x}.$$

$$\frac{dC}{dx} = xC^2e^{-x}$$

$$\int\frac{dC}{C^2} = \int xe^{-x}dx + C_0$$

$$-\frac{1}{C} = \int xe^{-x}dx + C_0$$

$$y = \frac{e^{-x}}{C_0 + e^{-x}(x+1)} = \frac{1}{C_0e^x + x + 1}$$

Определение 2. *Уравнение вида*

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x), \tag{2}$$

где a, b, c – известные функции, называется уравнением Риккати.

Уравнение Риккати в общем виде не интегрируется, но если удастся каким-нибудь образом найти его частное решение, то его можно свести к уравнению Бернулли.

В самом деле, пусть существует частное решение $y_1(x)$. Тогда $y_1' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 \equiv c(x)$. Представив общее решение в виде $y = z(x) + y_1(x)$, получим после подстановки в уравнение (2):

$$z' + y_1' + az + ay_1 + b(z + y_1)^2 = c$$

$$z' + y_1' + az + ay_1 + bz^2 + 2by_1z + by_1^2 = c$$

$$z' + z(a + 2y_1b) = -bz^2 \text{ – уравнение Бернулли с } n = 2.$$

Иногда частное решение можно найти подбором, исходя из вида функции $c(x)$.

<u>**Пример 2.**</u> Привести уравнение к уравнению Бернулли:

$$y' + y^2 = x^2 + 2x + 2$$

$$y' + y^2 = (x+1)^2 + 1.$$

Будем искать частное решение в виде $y_1 = Ax + B$, где A и B – неизвестные постоянные. Подставляя это выражение в исходное уравнение и требуя обращения последнего в тождество, получим $y_1 = x + 1$. Тогда:

$$y = z + (x+1)$$

$$z' + 1 + (z^2 + (x+1) \cdot 2z + x^2 + 2x + 1) = x^2 + 2x + 1 + 1$$

$$z' + 2(x+1)z = -z^2 \text{ – уравнение Бернулли.}$$

Определение 3. *Уравнение вида*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

где левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, *называется уравнением в полных дифференциалах.*

В этом случае $P = \frac{\partial F}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Отсюда следует метод решения: $P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – неизвестная функция. Значит $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x, y)dx\right] + \frac{d\varphi}{dy}$ – это дифференциальное уравнение, позволяющее найти функцию $\varphi(y)$.

__Пример 3.__ Решить уравнение $(x^2 + y)dx + (y^2 + x)dy = 0$.

1 способ:

$$P = x^2 + y$$

$$Q = y^2 + x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$x^2 + y = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$F = \int (x^2 + y)dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} + xy + \varphi(y)$$

$$Q = y^2 + x = \frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} + x = x + y^2$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = y^2$$

$$\varphi = \frac{y^3}{3} + C$$

$$F(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{3} + xy + C$$

$$\frac{x^3+y^3}{3}+xy+C=0 \text{ – общее решение.}$$

2 способ:

$$x^2dx+y^2dy+ydx+xdy=0$$

$$d\left(\frac{x^3+y^3}{3}+xy\right)=0$$

$$\frac{x^3+y^3}{3}+xy=C$$

Пусть теперь $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$. В принципе, можно подобрать функцию $\varphi(x,y)$, называемую интегрирующим множителем, такую, что уравнение (3) превращается в уравнение в полных дифференциалах, то есть $\varphi Pdx+\varphi Qdy=0$ и $\frac{\partial}{\partial y}(\varphi P)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi Q)$.

Раскрыв скобки, получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}P+\varphi\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}Q+\varphi\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}P+\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{Q}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\ln\varphi);\quad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\ln\varphi)$$

$$P\frac{\partial}{\partial y}(\ln\varphi)+\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{\partial}{\partial x}(\ln\varphi)+\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$P\frac{\partial}{\partial y}(\ln\varphi)-Q\frac{\partial}{\partial x}(\ln\varphi)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Таким образом, задача сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка в частных производных, что сделать сложнее, чем решить исходное уравнение. Однако в ряде случаев интегрирующий множитель все же удается найти.

Пример 4. Решить линейное уравнение: $y' + a(x)y = b(x)$.

$$dy + a(x)ydx - b(x)dx = 0$$

$$1 \cdot dy + (a(x)y - b(x))dx = 0$$

$$P = a(x)y - b(x)$$

$$Q = 1$$

$$(ay - b)\frac{\partial}{\partial y}(\ln\varphi) - \frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi = 0 - a(x).$$

Если предположить, что интегрирующий множитель зависит только от переменной x, то:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi = a(x)$$

$$\ln\varphi = \int a(x)dx + C$$

$$\varphi = C_1 e^{\int a(x)dx}.$$

Итак, интегрирующим множителем линейного уравнения является функция $\varphi = e^{\int a(x)dx}$. В самом деле:

$$e^{\int a(x)dx}dy + e^{\int a(x)dx}(ay - b)dx = 0$$

$$P = e^{\int a(x)dx}(ay - b)$$

$$Q = e^{\int a(x)dx}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = ae^{\int a(x)dx}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ae^{\int a(x)dx}.$$

Таким образом, линейное уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель можно найти также, если он зависит только от переменной y или же если функции P и Q являются однородными функциями одинаковой степени. В этом случае интегрирующий множитель имеет вид:

$$\varphi(x,y) = [xP + yQ]^{-1}.$$

Эти случаи будут подробно рассмотрены на практическом занятии.

Упражнения

1. Решить уравнения:

1) $y' = y^4 \cos x + ytgx$,

2) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$,

3) $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$ (частное решение искать в виде $A \cdot e^x + B$),

4) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$,

5) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$,

6) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$.

ЛЕКЦИЯ 4

Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной

В этой лекции рассмотрим уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной, т. е. имеющие общий вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Познакомимся вначале с понятием огибающей семейства кривых, имеющим в дальнейшем фундаментальное значение и, кроме того, представляющим самостоятельный физический интерес.

Определение 1. *Огибающей однопараметрического семейства кривых, заданного уравнением $\Phi(x, y, c) = 0$, называется кривая, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства.*

Определение подсказывает нам способ нахождения уравнения огибающей. Так как в каждой своей точке огибающая касается одной из кривых семейства, постоянную c можно рассматривать (для огибающей) как функцию x. Тогда, дифференцируя уравнение семейства по x, получим:

$$\frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\frac{dy_0}{dx} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dx} = 0,$$

где индекс 0 означает «огибающая». С другой стороны, для кривой семейства, касающейся огибающей в данной точке, аналогичное дифференцирование дает

$$\frac{d\Phi_c}{dx} = \frac{\partial \Phi_c}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_c}{\partial y}\frac{dy_c}{dx} = 0,$$

где индекс C означает, что теперь эта величина рассматривается как постоянная. Поскольку $\dfrac{dy_0}{dx} = \dfrac{dy_c}{dx}$, окончательно имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \\ \Phi(x, y, c) = 0, \end{cases}$$

исключая из которой *C*, получим уравнение огибающей.

<u>**Пример 1.**</u> $\Phi = y - (x + c)^2 = 0$

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = -2 \cdot (x + c) = 0$, $x + c = 0$, $y = 0$ – огибающая (см. лекцию 1).

<u>**Пример 2.**</u> Найти огибающую семейства траекторий снарядов, выпущенных из пушки с начальной скоростью V_0 под различными углами α к горизонту. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Запишем уравнение траектории в параметрической форме (роль параметра играет время):

$$\begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t \\ y = V_0 \sin \alpha t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получим:

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2V_0^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2V_0^2}(1 + tg^2\alpha)$$

$$\Phi = y - tg\alpha \cdot x + \frac{gx^2}{2V_0^2}(1 + tg^2\alpha) = 0; tg\alpha \equiv c$$

$$\Phi = y - cx + \frac{gx^2}{2V_0^2}(1 + c^2) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = -x + \frac{gx^2}{V^2_0}c = 0; c = \frac{V_0^2}{gx}$$

$$\Phi = y - \frac{V_0^{\ 2}}{g} + \frac{gx^2}{2V_0^{\ 2}}\left(1 + \frac{V_0^{\ 4}}{g^2x^2}\right) = 0$$

$$y - \frac{V_0^{\ 2}}{g} + \frac{gx^2}{2V_0^{\ 2}} + \frac{V_0^{\ 2}}{2g} = 0$$

$$y - \frac{V_0^{\ 2}}{2g} + \frac{gx^2}{2V_0^{\ 2}} = 0; y = \frac{V_0^{\ 2}}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^{\ 2}}$$ – огибающая (рис. 1).

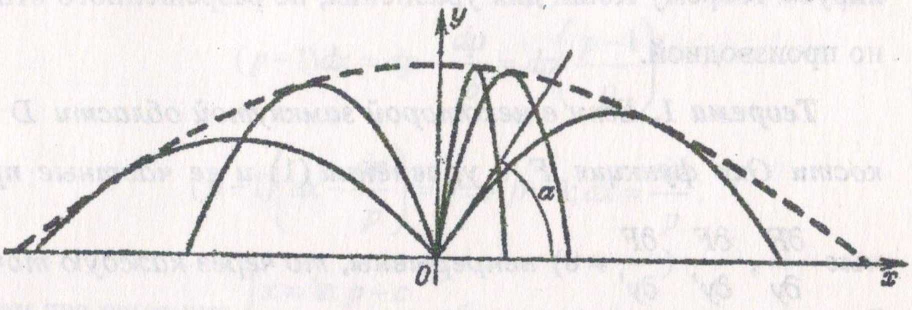


Рис. 1

Эта кривая в баллистике называется параболой безопасности, поскольку, как видно из рисунка, область, лежащая выше огибающей, для снарядов недоступна.

Пример 3. Огибающая лучей света, распространяющихся в неоднородной среде, называется каустикой (по-гречески «жгучая»), т.к. освещенность в точках каустики в приближении геометрической оптики стремится к бесконечности.

Перейдем к изложению методов интегрирования уравнения, не разрешенного относительно производной.

1. Если это возможно, разрешим уравнение (1) относительно производной. Поскольку решение неоднозначно, необходимо анализировать каждую его ветвь. Таким об-

разом, имеется не одно, а несколько однопараметрических семейств решений.

Пример 4. Решить уравнение: $(y')^2 = 1$.

Разрешая это уравнение относительно производной, получаем:

$$y' = 1,\ y' = -1.$$

Таким образом, $y = x + c$ – первое семейство решений, $y = -x + c$ – второе семейство решений.

Чтобы иметь возможность находить частные решения, сформулируем теорему Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной.

Теорема 1. *Если в некоторой замкнутой области D на плоскости Oxy функция F в уравнении (1) и ее частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ $(\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0)$ непрерывны, то через каждую точку этой плоскости проходит единственная интегральная кривая с заданным направлением касательной.*

Доказательство теоремы можно найти в [1] – [4].

2. Предположим, что уравнение (1) неразрешимо относительно производной, но может быть разрешено однозначно относительно y: $y = f(x, y')$. Тогда это уравнение может быть проинтегрировано в параметрической форме.

Пусть $y' = \frac{dy}{dx} = P$, значит

$$y = f(x, P)$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial P}dP = Pdx.$$

Если второе уравнение разрешимо в квадратурах, то известна зависимость $x(P)$. Тогда $\begin{cases} x = x(P) \\ y = f(x(P), P) \end{cases}$ – интегральная кривая в параметрической форме (роль параметра играет производная).

Пример 5. Решить уравнение $y = x + y' - \ln y'$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,\ y = x + p - \ln p$$

$$dy = pdx = dx + dp - \frac{dp}{p}$$

$$(p-1)dx = dp - \frac{dp}{p} = dp\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

$$(p-1)\left(dx - \frac{dp}{p}\right) = 0 \Rightarrow p = 1; dx = \frac{dp}{p}.$$

Имеем два решения: $\begin{cases} x = \ln p + c \\ y = p + c \end{cases}$ – общее решение, $y = x + 1$ – особое.

Докажем это: $p = e^{x-c}; y = e^{x-c} + c$.

Найдём огибающую для семейства $\Phi = y - e^{x-c} - c = 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = -e^{x-c} \cdot (-1) - 1$$

$$e^{x-c} - 1 = 0$$

$$e^{x-c} = 1$$

$$x = c$$

$$\Phi = y - 1 - x = 0,$$

$y = x + 1$ – огибающая семейства кривых – особое решение, поскольку, исходя из определения, огибающая в общем случае не совпадает с одной из кривых семейства.

Определение 2. *Уравнение вида*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \qquad (2)$$

где φ, ψ – известные функции, называется уравнением Лагранжа.

Уравнение Лагранжа также решается в параметрической форме:

$$y' = p$$

$$dy = pdx = dx\varphi + x\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\psi}{dp}dp$$

$$\begin{cases} (p - \varphi(p))\dfrac{dx}{dp} = x \cdot \dfrac{d\varphi}{dp} + \dfrac{d\psi}{dp} \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}.$$

Рассмотрим два случая:

а) $p - \varphi(p) \neq 0$. Тогда $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{\dfrac{d\varphi}{dp}x}{p - \varphi(p)} + \dfrac{\dfrac{d\psi}{dp}}{p - \varphi(p)}$ – линейное уравнение. Решая его, получим уравнение интегральной кривой в параметрической форме, подставив $x(P)$ во второе уравнение системы;

б) пусть существуют также значения p_i, при которых $p_i - \varphi(p_i) \equiv 0$, тогда прямые $y_i = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ также будут решениями уравнения, являющимися как частными, так и особыми.

__Пример 6.__ Решить уравнение $y = 2xy' - 4(y')^3$

$$y' = p, \; y = 2xp - 4p^3$$

$$dy = pdx = 2dxp + 2xdp - 12p^2dp$$

$$-p\frac{dx}{dp} = 2x - 12p^2$$

1) $p \neq 0$; $-\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2x}{p} - 12p$

$$\frac{dx}{dp} = 12p - \frac{2x}{p}$$

$$а)\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int 2\frac{dp}{p} + \ln c$$

$$\ln|x| = -2\ln|p| + \ln c$$

$$x = \frac{c}{p^2}$$

$$б)x = \frac{c(p)}{p^2}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{c'}{p^2} - \frac{2c}{p^3} = -\frac{2c}{p^3} + 12p$$

$$\frac{c'}{p^2} = 12p; c' = 12p^3$$

$$c = \frac{12p^4}{4} + c_1 = 3p^4 + c_1$$

$$x = \frac{3p^4 + c_1}{p^2}; y = 2p\left(\frac{3p^2 + c}{p^2}\right) - 4p^3$$

$$\begin{cases} y = 2\dfrac{3p^4 + c_1}{p} - 4p^3 \\ x = \dfrac{3p^4 + c_1}{p^2} \end{cases} \text{– общее решение.}$$

2) $\begin{cases} p = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, (подумайте, является это решение частным или особым).

Определение 3. *Уравнение вида*

$$y = xy' + \psi(y'), \tag{3}$$

где ψ – известная функция, называется уравнением Клеро.

Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа и решается в параметрической форме:

$$y' = p$$

$$dy = pdx = dxp + xdp + \frac{d\psi}{dp}dp$$

$$y = xp + \psi(p)$$

$$\left(x + \frac{d\psi}{dp}\right)dp = 0; dp = 0, p = c$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{d\psi}{dp} \\ y = -\dfrac{d\psi}{dp} \cdot p + \psi(p) \end{cases}$$

$y = cx + \psi(c)$ – общее решение (семейство прямых).

Пример 7. Решить уравнение: $y = xy' + (y')^2$

$$y' = p\,,\; y = xp + p^2$$

$$dy = pdx = pdx + xdp + 2\,pdp$$

$$0 = (x + 2p)dp$$

$$x = -2p\,,\; dp = 0$$

$y = -2p^2 + p^2 = -p^2, p = c; y = cx^2 + c^2$ – общее решение

$$p = -\frac{x}{2}; y = -\frac{x^2}{4}$$

$$\Phi = y - cx - c^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = -x - 2c = 0$$

$x = -2c; c = -\dfrac{x}{2} \Rightarrow \Phi = y + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 0$, $y = -\dfrac{x^2}{4}$ – особое решение.

3. Если уравнение (1) разрешимо в виде $x = f(y, y')$, то метод решения аналогичный (разберите этот случай самостоятельно).

Во всех рассмотренных примерах особое решение представляло собой огибающую семейства кривых, являющегося общим решением. Этот факт не случаен. Можно показать, что если левая часть уравнения (1) непрерывна по x и непрерывно дифференцируема по y и y', то особые решения являются решениями системы

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

которая решается путём исключения y'.

Следует, однако, иметь в виду, что решениями системы (4) являются не только огибающие, но и кривые, представляющие собой геометрическое место точек возврата интегральных кривых либо точек их соприкосновения. В этом случае решение системы (4) вообще не является решением дифференциального уравнения (1). Кроме того, иногда решения системы (4) совпадают с частными решениями уравнения (1). Поэтому в каждом конкретном случае необходим дополнительный анализ.

Упражнения

1. Решить уравнения и выделить, если есть, особые решения.

1) $(y')^2 - y^2 = 0$,

2) $x = (y')^3 + y'$,

3) $y = \ln(1 + (y')^2)$,

4) $y = xy' - (y')^2$.

ЛЕКЦИЯ 5

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Определение 1. *Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида* $F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$, *где символ* (n) *означает производную* n *-го порядка*

Уравнение, разрешенное относительно n-ой производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)}). \qquad (1)$$

Для уравнения (1) имеет место теорема Коши.

Теорема 1. *Пусть в некоторой замкнутой области на плоскости Оху функция f, а также ее частные производные* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'},..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *непрерывны. Тогда в этой области существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$y(x_0) = \omega_0, y'(x_0) = \omega_1, y''(x_0) = \omega_2,..., y^{(n-1)}(x_0) = \omega_n$, *где* (x_o, y_o) *– некоторая точка, принадлежащая данной области.*

Если начальные условия не заданы, можно найти общее решение, которое представляет собой n–параметрическое семейство кривых $\varphi(x, y, c_1,..., c_n) = 0$.

Рассмотрим основные случаи, когда уравнение (1) может быть проинтегрировано в явном виде.

1) Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается n-кратным интегрированием правой части.

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение: $y''' = e^x$.

$$y'' = \int e^x dx + c_1 = e^x + c_1$$

$$y' = \int (e^x + c_1) dx + c_2 = e^x + c_1 x + c_2$$

$$y=\int\left(e^{x}+c_1x+c_2\right)dx+c_3=e^{x}+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3.$$

2) Уравнение вида $y^{(n)}=f\left(x,y^{(n-1)}\right)$ решается подстановкой

$y^{(n-1)}=F(x)$. Тогда $y^{(n)}=\dfrac{dF}{dx}$, и задача сводится к решению уравнения первого порядка относительно функции F:

$$\frac{dF}{dx}=f(x,F),$$

интегрируя которую $(n-1)$ раз, получим общее решение.

<u>**Пример 2.**</u> Решить уравнение: $y''=x\cdot y'$.

$$y'=F(x);\;\; y''=\frac{dF}{dx};\;\; \frac{dF}{dx}=x\cdot F$$

$$\int\frac{dF}{F}=\int x dx+c_1$$

$$\ln|F|=\frac{x^2}{2}+c_1,\;\; F=A_1\cdot e^{x^2/2}$$

$$y'=A_1\cdot e^{x^2/2},$$

$y=A_1\int e^{x^2/2}dx+A_2$ – общее решение.

3) Уравнение вида $y''=f(y,y')$ решается подстановкой

$y'=F(y)$.

$$y''=\frac{dF}{dy}y'=\frac{dF}{dy}F$$

$$\frac{dF}{dy}\cdot F=f(y,F)$$

$$\frac{dy}{dx}=F(y)$$

$$\int \frac{dy}{F(y)} = \int dx + c = x + c.$$

<u>**Пример 3.**</u> Решить уравнение: $y'' = y \cdot y'$.

$$y' = F(y)$$

$$y'' = F\frac{dF}{dy}; \quad F\frac{dF}{dy} = yF$$

$$F = \frac{y^2}{2} + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + c_1$$

$$\int \frac{dy}{y^2/2 + c_1} = x + c_2 .$$

Дальнейший анализ решения предоставляем читателю.

<u>**Пример 4.**</u> *Закон сохранения энергии*

Запишем второй закон Ньютона для материальной точки, движущейся под действием силы $\vec{F}$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор движущейся точки. Предположим, что сила консервативна, то есть $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dU}{d\vec{r}}$, где U – потенциальная энергия.

Тогда

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) \equiv \vec{V} \text{ – мгновенная скорость}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{d\vec{r}} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\vec{r}}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$m\frac{d}{d\vec{r}}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\frac{d}{d\vec{r}}\left(\frac{mV^2}{2}+U(\vec{r})\right)=0$$

$$\frac{mV^2}{2}+U(\vec{r})=c.$$

Последнее уравнение представляет собой закон сохранения энергии при движении в потенциальном поле, который можно использовать вместо закона Ньютона для интегрирования уравнений движения.

В самом деле, $\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2+U(\vec{r})=c$ – дифференциальное уравнение первого порядка.

<u>**Пример 5.**</u> Физический маятник (рис. 1)

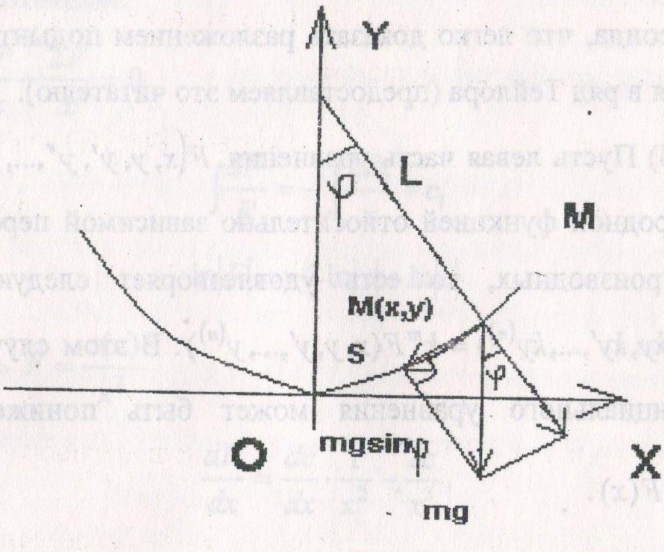


Рис. 1

$$T = \frac{Jw^2}{2} = \frac{J}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$U = -mg \cdot y = -mgl \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{J}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - mgl \cdot \cos\alpha = c = -mgl \cdot \cos\alpha_0$$

$$\frac{J^2}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = mgl \cdot (\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mgl}{J}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2mgl}{J}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}} = t + c_1 \, .$$

Интеграл в левой части выражается через эллиптические функции. В случае малых колебаний ($\alpha_0 << 1$) получается «стандартная» синусоида, что легко доказать разложением подынтегрального выражения в ряд Тейлора (предоставляем это читателю).

4) Пусть левая часть уравнения $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ является однородной функцией относительно зависимой переменной y и всех ее производных, то есть удовлетворяет следующему условию: $F(x, ky, ky', ..., ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', ..., y^{(n)})$. В этом случае порядок дифференциального уравнения может быть понижен подстановкой $\frac{y'}{y} = F(x)$.

Пример 6. Решить уравнение: $x^2 y \cdot y'' = (y - xy')^2$.

Правая и левая части являются однородными функциями ($m = 2$).

$$\frac{y'}{y} = F(x)$$

$$y' = F \cdot y$$

$$y'' = F' \cdot y + y' \cdot F = F' \cdot y + F^2 \cdot y$$

$$x^2 \cdot y\left(F' \cdot y + F^2 \cdot y\right) = \left(y - x \cdot Fy\right)^2$$

$$x^2 y^2\left(F' + F^2\right) = y^2(1 - xF)^2$$

$$x^2\left(F' + F^2\right) = (1 - xF)^2$$

(тривиальное решение $y = 0$ не рассматриваем)

$$x^2 F' + x^2 F^2 = 1 - 2xF + x^2 F^2$$

$$x^2 \frac{dF}{dx} = 1 - 2xF$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{2F}{x}.$$

Уравнение $\frac{dF}{dx} + \frac{2F}{x} = \frac{1}{x^2}$ решается методом вариации произвольной постоянной:

а) $\frac{dF}{dx} + \frac{2F}{x} = 0$

$$\int \frac{dF}{F} = -\int \frac{2dx}{x} + c_1$$

$$\ln|F| = -2\ln|x| + \ln|c|$$

б) пусть $F = \frac{c(x)}{x^2}$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dc}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2c}{x^3},$$

$$F = \frac{c}{x^2}.$$

$$\frac{dc}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2c}{x^3} + \frac{2c}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dc}{dx} = 1$$

$$c = x + c_1$$

$$F = \frac{x + c_1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$$

$$\frac{y'}{y} = F = \frac{d}{dx}\left(\ln|y|\right)$$

$$\ln|y| = \int F(x)dx + c_2$$

$$\ln|y| = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}\right)dx + c_2$$

$\ln|y| = \ln|x| - \dfrac{c_1}{x} + c_2$ – общее решение.

5)Уравнения вида $F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ допускают понижение порядка, если левая часть является полной производной.

Пример 7. Решить уравнение: $y \cdot y'' + 2y^2(y')^2 + (y')^2 - \dfrac{2y \cdot y'}{x} = 0$.

Разделив обе части уравнения на $y \cdot y'$, получим:

$$\frac{y''}{y'} + 2y \cdot y' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x|\right) = 0$$

$$\ln\left|\frac{y' \cdot y}{x^2}\right| + y^2 = c_1$$

$$\left|\frac{y' \cdot y}{x^2}\right| = e^{c_1 - y^2} = e^{c_1} e^{-y^2}$$

$$\frac{y \cdot y'}{x^2} = A_1 \cdot e^{-y^2}$$

$$\int e^{y^2} y dy = \int A_1 x^2 dx + A_2$$

$$\frac{1}{2}\int e^{y^2}d(y^2)=\frac{1}{2}e^{y^2}=\frac{A_1x^3}{3}+A_2$$

$$e^{y^2}=\frac{2}{3}A_1x^3+2A_2$$

$$, \quad e^{y^2}=B_1x^3+B_2.$$

Упражнения

1. Решите уравнения:

   1) $xy^{(IV)}=1$,

   2) $y'''(e^x+1)+y''=0$,

   3) $y^3\cdot y''=1$,

   4) $y'\cdot y'''=2(y'')^2$,

   5) $xyy''-x(y')^2=yy'$,

   6) $yy''=2x(y')^2; y(2)=2; y'(2)=0{,}5$.

2. Луч света из воздуха (показатель преломления n_0) падает под углом α_0 с вертикалью в жидкость с переменным показателем преломления. Последний линейно зависит от глубины и постоянен в плоскости, параллельной горизонту; на поверхности он равен n_1, а на глубине $h-m_2$. Найти форму светового луча в жидкости.

ЛЕКЦИЯ 6

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка (общая теория)

Определение 1. *Линейным называется дифференциальное уравнение, в которое функция и все ее производные входят в степени не выше первой.*

Линейные однородные уравнения второго порядка

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

$a_0(x) \neq 0$ (во всей интересующей нас области оси Ox, определяемой условиями конкретной задачи).

Уравнение однородно, так как его левая часть есть однородная функция первой степени относительно y, y', y''.

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (2) – стандартного вида, где

$$f_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}; \; f_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}.$$

При произвольных значениях функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ уравнение (2) невозможно проинтегрировать в общем виде, поэтому рассмотрим вначале общие теоремы о свойствах решений линейного уравнения второго порядка.

Теорема 1. *Если две функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения (2), то их сумма (разность) также является решением.*

Доказательство. Поскольку функции являются решениями уравнения, они обращают его в тождества. Складывая, получим

$$y_1'' + y_2'' + f_1(y_1' \pm y_2') + f_2(y_1 \pm y_2) \equiv 0$$

$$(y_1 \pm y_2)'' + f_1(y_1 \pm y_2)' + f_2(y_1 \pm y_2) \equiv 0 .$$

Теорема 2. Если некоторая функция y_1 является решением уравнения (2), то, будучи умноженной на константу, она также останется решением этого уравнения.

Доказательство. Имеем: $y_1''+f_1y_1'+f_2y_1=0$. Умножим левую и правую части на λ, тогда

$$\lambda\cdot y_1''+\lambda\cdot f_1y_1'+\lambda\cdot f_2y_1=\lambda\cdot 0=0,$$

$$(\lambda y_1)''+f_1(\lambda y_1)'+f_2(\lambda y_1)\equiv 0.$$

Теоремы 1 и 2 являются определением свойства линейности уравнения.

Определение 2. *Пусть на некотором интервале (a,в) заданы две функции y_1 и y_2. Функции называются линейно зависимыми на интервале (a,в), если для любого значения x из этого интервала отношение этих двух функций есть постоянная. В противном случае функции называются линейно независимыми.*

Пример 1. Линейно зависимые и линейно независимые решения дифференциального уравнения $y''-y=0$. Прямой подстановкой легко убедиться, что функции $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=2e^x$ являются его решениями. Поскольку $\frac{y_1}{y_3}=\frac{1}{2}$, $\frac{y_1}{y_2}=e^{2x}$, то y_1 и y_3 – линейно зависимы, y_1 и y_2 – линейно независимы.

Определение 3. *Пусть y_1 и y_2 являются решениями некоторого уравнения второго порядка. Составим из этих функций и их производных определитель:* $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2\cdot y_1'$. *Этот определитель называется определителем Вронского (вронскианом).*

Теорема 3. Если y_1 и y_2 линейно зависимы на некотором интервале, то на этом интервале вронскиан равен нулю.

Доказательство:

$$y_1 = c \cdot y_2$$

$$y_1' = cy_2'.$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cy_1 & y_2 \\ cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 4. *Пусть y_1 и y_2 – решения уравнения (2), и вронскиан, составленный из этих функций, не равен нулю в какой-либо точке, принадлежащей некоторому интервалу. Тогда он не равен нулю на всем интервале, при условии, что коэффициенты уравнения непрерывны на этом интервале.*

Доказательство. Поскольку y_1 и y_2 обращают уравнение в тождество, то $y_1'' + f_1 y_1' + f_2 y_1 = 0$ и $y_2'' + f_1 y_2' + f_2 y_2 = 0$. Умножим первое уравнение на y_2, второе на y_1 и вычтем второе из первого. Тогда

$$y_1'' y_2 + f_1 y_1' y_2 + f_2 y_1 y_2 - y_2'' y_1 - f_1 y_2' y_1 - f_2 y_1 y_2 = 0$$

$$(y_1'' y_2 - y_2'' y_1) + f_1 (y_1 y_2 - y_2' y_1) = 0$$

$$\frac{dW}{dx} + f_1(x) W = 0$$

$$\int \frac{dW}{W} = -\int f_1(x) dx + c$$

$$\ln|W| = -\int f_1(x) dx + \ln|c|$$

$$W = ce^{-\int f_1(x) dx}$$

$$c \neq 0 \rightarrow W \neq 0, \; c = W(x_0).$$

Таким образом, если W хотя бы в одной точке равен нулю, то он равен нулю на всем интервале.

Теорема 5. Если два решения уравнения (2) y_1 *и* y_2 *линейно независимы на некотором интервале, то ни в одной точке этого интервала вронскиан не может обратиться в нуль.*

Доказательство. Пусть существует некоторая точка, в которой W обращается в нуль, тогда он равен нулю на всем интервале. Если предположить, что $y_1y_2' - y_1'y_2 = 0$, то, поделив на y_1^2, получим: $\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = 0$, или $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = 0$. Это значит, что $\frac{y_2}{y_1} = const$, т.е. функции линейно зависимы, что противоречит условию теоремы.

Теорема 6. Если функции y_1 *и* y_2 *являются линейно независимыми частными решениями уравнения* (2), *то их линейная комбинация* $c_1y_1 + c_2y_2$ *является общим решением этого уравнения.*

Доказательство. То, что линейная комбинация $c_1y_1 + c_2y_2$ является решением уравнения (1), следует из теорем 1 и 2. Докажем теперь, что решение общее, то есть при любых начальных условиях вида $y'(x_0) = \omega_0$, $y(x_0) = y_0$ константы c_1 и c_2 определяются однозначно. В самом деле,

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = \omega(x_0). \end{cases}$$

Главный определитель этой системы – вронскиан. Поскольку y_1 и y_2 линейно независимы по условию теоремы, то W нигде не обращается в нуль, а это значит, что система имеет единственное решение.

Теорема 7. Если известно одно частное решение дифференциального уравнения (2), *то другое частное решение (линейно независимое) можно найти путем двух интегрирований.*

Доказательство:

$$W = ce^{-\int f_1(x)dx} = y_1 y_2' - y_2 y_1'. \quad (3)$$

Пусть известна функция $y_1 \neq 0$, тогда, поделив левую и правую части уравнения (3) на y_1^2, получим

$$\frac{ce^{-\int f_1(x)dy}}{y_1^2} = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{cdx}{y_1^2} \cdot e^{-\int f_1(x)dx} + c_0 .$$

Пусть $c = 1$, $c_0 = 0$, тогда:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{dx}{y_1^2} \cdot e^{-\int f_1(x)dx}$$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{dx}{y_1^2} \cdot e^{-\int f_1(x)dx}$$

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 .$$

<u>**Пример 2.**</u> Найти общее решение уравнения:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 .$$

Будем искать частное решение в виде: $y_1 = x^n$. Тогда

$$y' = nx^{n-1}, \ y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$(1 - x^2)n(n-1)x^{n-2} - 2xnx^{n-1} + 2x^4 = 0$$

$$n = 1, y_1 = x$$

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2} y' + \frac{2}{1 - x^2} y = 0$$

$$|x| \neq 1$$

$$f_1 = \frac{-2x}{1 + x^2}, \quad y_1 = x, \ y_2 = x \int \frac{dx}{x^2} \cdot e^{\int \frac{2xdx}{1-x^2}}$$

$$\int\frac{2xdx}{1-x^2}=-\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}=-\ln\left|1-x^2\right|=\ln\frac{1}{1-x^2}$$

$$y_2=x\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)}$$

(вычисление интеграла предоставляем читателю).

Общее решение: $y\ =c_1x+c_2y_2$.

Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Определение 4. *Линейным неоднородным уравнением второго порядка называется уравнение вида*

$$y''+f_1(x)y_1'+f_2(x)y=\varphi(x)\,. \qquad (4)$$

Теорема 8. *Общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения.*

Доказательство. Пусть y_0 – общее решение однородного уравнения, z – частное решение неоднородного уравнения..Тогда

$$\begin{cases} y_0''+f_1y_0'+f_2y_0\equiv 0 \\ z''+f_1z'+f_2z\equiv\varphi(x) \end{cases}$$

$$(y_o+z)''+f_1(y_o+z)'+f_2(y_o+z)\equiv\varphi(x).$$

Докажем, что $y=y_0+z$ – общее решение. В самом деле,

$y_0=c_1y_1+c_2y_2$, где y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения.

Зададим начальные условия для определения коэффициентов c_1 и c_2:

$$\begin{cases} y(x_0)=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+z(x_0) \\ \omega(x_0)=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+z'(x_0). \end{cases}$$

Главный определитель системы (вронскиан) отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение.

Если известно общее решение однородного уравнения $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, то частное решение z следует искать в том же виде, считая c_1 и c_2 некоторыми неизвестными функциями (метод вариации постоянных).

$$z = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

$$z' = c_1' y_1 + c y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$$

Подберем функции c_1 и c_2 так, чтобы выполнялось условие:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$z' = c_1 y_1' + c_2 y_2',\ z'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''.$$

Подставим первую и вторую производные в уравнение (4):

$$z'' + f_1 z' + f_2 z = \varphi(x)$$

$$c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + f_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + f_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \varphi(x).$$

Перегруппируем слагаемые:

$$c_1(y_1'' + f_1 y_1' + f_2 y_1) + c_2(y_2'' + f_1 y_2' + f_2 y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} c_1' y_1' + c_2' y_2' = \varphi(x) \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 \\ y_0 = A_1 y_1 + A_2 y_2 \end{cases}$$

$$y = (A_1 + c_1(x)) y_1 + (A_2 + c_2(x)) y_2 \text{ – общее решение.}$$

<u>**Пример 3.**</u> Найти общее решение уравнения: $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

1) $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$

$$y'' = \frac{y'}{x}$$

$$y' = F(x)$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{F}{x}$$

$$\int \frac{dF}{F} = \int \frac{dx}{x} + \ln|c|$$

$$F = y' = c_1 x$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 \cdot 1, \qquad \begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = 1 \\ \varphi(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' x^2 + c_2' \cdot 1 = 0 \\ c_1' 2x + c_2' \cdot 0 = x \end{cases}$$

$$c_1' \cdot 2 = 1, \qquad c_1' = \frac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{2} x^2 = -c_2', \qquad c_2 = -\frac{1}{6} x^3, \qquad z = \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{3} x^3$$

$$y = A_1 x^2 + A_2 \cdot 1 + \frac{1}{3} x^3 - \text{общее решение.}$$

Упражнения

1. Найти общее решение уравнений:

a) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$.

Указание: частные решения следует искать путём подбора в виде многочлена.

b) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x = 0$.

c) найти общее решение неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом : $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$.

ЛЕКЦИЯ 7

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1. *Уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1}$$

где a и b – постоянные.

Определение 2. *Уравнение вида*

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{2}$$

где a и b – постоянные, называется однородным.

Интегрирование однородных уравнений

Будем искать частные решения уравнения (2) в виде $y = e^{mx}$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

$$m^2 \cancel{e^{mx}} + am\cancel{e^{mx}} + b\cancel{e^{mx}} = 0.$$

$$m^2 + am + b = 0 \tag{3}$$

Определение 2. *Уравнение (3) называется характеристическим.*

Относительно решений характеристического уравнения

$m_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ $(\sqrt{a^2 - 4b} \equiv D)$, возможны три случая.

<u>**Случай 1.**</u> $D > 0$, $m_1, m_2 \in R$, $m_1 \neq m_2$, $y_{об} = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$, т.к. $e^{m_1 x}$ и $e^{m_2 x}$ – линейно независимы.

<u>**Случай 2.**</u> $D < 0$, $-\dfrac{a}{2} = \alpha$, $4b - a^2 \equiv 4\beta^2$

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

m_1 и m_2 – комплексно сопряженные, $m_1, m_2 \in C$

$$y_{об} = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x})$$

$$y_{об} = e^{\alpha x}(c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x))$$

$$y_{об} = e^{\alpha x}(c_1 + c_2)\cos\beta x + ie^{\alpha x}(c_1 - c_2)\sin\beta x$$

Лемма 1. *Если комплексная функция* $f(x) = u(x) + iv(x)$ *является решением уравнения* (2), *то* $u(x)$ и $v(x)$ *также являются решениями уравнения* (2).

Воспользовавшись леммой 1 и теоремой 6 (см. лекцию 6), получаем общее решение в виде: $y_{об} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Случай 3. $D = 0$, $m_1 = m_2 = -\dfrac{a}{2}$, $y = e^{-\frac{a}{2}x}$ – частное решение.

Предположим, что $m_1 \neq m_2$

$$y_2 = \frac{e^{m_2 x} - e^{m_1 x}}{m_2 - m_1}$$

$\lim\limits_{m_2 \to m_1} \dfrac{e^{m_2 x} - e^{m_1 x}}{m_2 - m_1} = \dfrac{\partial}{\partial m}(e^{mx}) = xe^{mx}$ – второе частное решение, где $m = -\dfrac{a}{2}$.

Тогда $y_{об} = c_1 e^{-\frac{ax}{2}} + c_2 x e^{-\frac{ax}{2}} = e^{-\frac{ax}{2}}(c_1 + c_2 x)$ – общее решение.

Пример 1. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 2y' + y = 0$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m_{1,2} = -1$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

б) $y'' + y' + y = 0$

$$m^2 + m + 1 = 0$$

$$D = -3 < 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_{об} = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\sqrt{3}\frac{x}{2} + c_2 \sin\sqrt{3}\frac{x}{2}\right).$$

в) $y'' + y' = 0$

$$m^2 + m = 0$$

$$m(m+1) = 0$$

$$m = 0 \text{ или } m = -1$$

$$y_0 = c_1 e^{ox} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

<u>**Пример 2.**</u> *Затухающие колебания*. Рассмотрим частицу, движущуюся под действием силы упругости пружины, которая пропорциональна удлинению x, и силы сопротивления воздуха, пропорциональной скорости движения (введем обозначения $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$). Запишем второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

$$\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2;$$

$$\frac{\alpha}{m} \equiv 2\lambda$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = e^{mt}$$

$$m^2 + 2\lambda m + \omega_0^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$$m_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\,.$$

Пусть $\omega_0 >> \lambda$ (этот случай соответствует физической реальности).

Тогда

$$\omega_0^2 - \lambda^2 \equiv \omega_1^2$$

$$m_{1,2} = -\lambda \pm i\omega_1$$

$$x = e^{-\lambda t}(c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t)\,.$$

Таким образом, слабое трение приводит к затуханию колебаний и уменьшению их частоты. Предлагаем читателю схематически изобразить фазовую траекторию на плоскости $(\dot{x}, x)$.

Интегрирование неоднородных уравнений

Общее решение неоднородного уравнения (1) записывается в виде: $y_н = y_{од} + \bar{y}$, где $y_н$ – общее решение уравнения (1), $\bar{y}$ – частное решение уравнения (1), которое можно найти методом вариации постоянных (см. предыдущую лекцию).

<u>Пример 3.</u> Найти общее решение уравнения $y'' - y = e^x$ методом вариации постоянных.

1. Найдем решение однородного уравнения:

$$y'' - y = 0$$

$$m^2 - 1 = 0$$

$$m = \pm 1$$

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

2. Частное решение будем искать в виде $\overline{y} = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1'(e^x)' + c_2'(e^{-x})' = e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = e^x \end{cases}$$

$$c_1' = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}x$$

$$c_2' = -\frac{e^{2x}}{2}$$

$$c_2 = -\frac{e^{2x}}{4}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x$$

$$y_{об} = \left(c_1 - \frac{1}{4}\right)e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \equiv \overline{c}_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x .$$

Кроме метода вариации произвольной постоянной частное решение неоднородного уравнения в некоторых случаях можно найти, используя следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Тогда частные решения можно найти методом подбора.

Рассмотрим 3 случая.

1) $(\alpha + i\beta)$ – не является корнем характеристического уравнения. Тогда $\overline{y} = F(x) \equiv e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x + G_n(x)\sin\beta x)$, где Q_n и G_n – мно-

гочлены той же степени, что и P_n, с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты находят подстановкой $\bar{y}$ в исходное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых слагаемых.

2) $(\alpha + i\beta)$ – простой корень характеристического уравнения, тогда $\bar{y} = xF(x)$.

3) $(\alpha + i\beta)$ – кратный корень характеристического уравнения ($\beta = 0$), тогда $\bar{y} = x^2F(x)$.

(Доказательство – прямая подстановка в уравнение (1) или метод вариации постоянных.)

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - y = e^x$ методом подбора частного решения.

Решение соответствующего однородного уравнения найдено в примере (3). Частное решение будем искать в виде $\bar{y} = Axe^x$, поскольку единица – простой корень характеристического уравнения.

Тогда:

$$y' = A(xe^x + e^x)$$

$$y'' = A(e^x + e^x + xe^x)$$

$$A(2e^x + xe^x) - Axe^x \equiv e^x$$

$$2Ae^x \equiv e^x$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$\bar{y} = \frac{1}{2}xe^x$ – искомое частное решение.

Т.о., $y_{об} = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$.

Уравнения, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами

1. *Уравнение Эйлера*

$$x^2y'' + axy' + by = f(x)$$

$$x = e^t, \ (x > 0)$$

$$x = -e^t, \ x < 0$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a\frac{dy}{dt} + by = f(x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = f(e^t).$$

2. *Уравнение Чебышева* $(1-x^2)y'' - xy' = ay$

$x = \sin t$.

3. *Обобщенное уравнение Чебышева* (термин введен Клебановым И.И.).

$(1+x^2)y'' + xy' = ay$

$x = sht$, $t = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Читателю рекомендуется проделать все выкладки в случаях 2 и 3.

Упражнения

1. Решить уравнения:

а) $y'' + y' - 2y = 0$,

б) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

в) $y'' - 2y' + y = 0$,

г) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$,

д) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$,

е) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$,

ж) $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$.

2. Электрическая цепь состоит из последовательно соединённых источников постоянного тока, дающих напряжение V, сопротивление R, самоиндукцию L и выключателя при $t = 0$. Найти зависимость силы тока от времени $t > 0$.

3. Решить предыдущую задачу, заменив самоиндукцию конденсатором, емкостью C. До замыкания цепи конденсатор не заряжен.

4. Частица движется под действием силы упругости, пропорциональной удлинению пружины, силы сопротивления воздуха, пропорциональной скорости движения, и вынуждающей силы $F = F_0 \sin \omega t$. Проинтегрировать уравнение движения частицы методом вариации постоянных и методом подбора частного решения.

ЛЕКЦИЯ 8

Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 1. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}, \qquad (1)$$

где функции f_i $(i = \overline{1, n})$ *определены в некоторой* $(n+1)$*-мерной области* G *переменных* $x, y_1, y_2, ..., y_n$, *называется нормальной системой* n *дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных от неизвестных функций* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Определение 2. *Порядком системы* (1) *называется число уравнений, входящих в систему.*

Определение 3. *Решением системы* (1) *в интервале* (a, b) *называется совокупность функций* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, *непрерывно дифференцируемых в* (a, b) *и обращающих вместе со своими производными каждое уравнение системы* (1) в тождество.

Теорема 1 (теорема Коши). *Если функции* f_i $(i = \overline{1, n})$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* y_i *в замкнутой области* G, *то система* (1) *имеет единственное решение* $y_i = \varphi_i(x)$, $(i = \overline{1, n})$, *удовлетворяющее начальным условиям* $\varphi_i(x_0) = y_{i0}$, *определенное на некотором отрезке, содержащем точку* x_0.

Будем рассматривать частный случай системы (1) – систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_3(x) \end{cases} \qquad (2)$$

Определение 4. *Если все* $f_i(x) \equiv 0$, $(i = \overline{1,n})$, *то система* (2) *называется однородной (иначе – неоднородной).*

Основной метод интегрирования системы дифференциальных уравнений (2) сводится к следующему: из уравнений системы и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключаем все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получаем одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Решая полученное уравнение, определяем одну из неизвестных функций, а остальные определяем из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Учитывая прикладной характер рассматриваемого вопроса, будем неизвестные функции считать зависимыми от t: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

<u>**Пример 1.**</u> Найти решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$.

Из первого уравнения имеем $y = \dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Подставляя во второе уравнение, получаем: $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$, $x = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

Тогда $y = \frac{dx}{dt}$, $y = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$ Таким образом, $x = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $y = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$.

Пример 2. Найти решение системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$.

Введем обозначения: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$, тогда $\frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$, $\frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$ и $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = x + y + z \end{cases}$. Из первого уравнения находим $\ddot{x} = \dot{y}$. С учетом второго уравнения $\ddot{x} - x = 0$. Отсюда $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $y = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$.

Подставляя найденные функции в третье уравнение системы, получим $\dot{z} - z = 2c_1 e^t$. Решая его, находим $z = c_3 e^t + c_1 t e^t$.

Итак, система функций $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $y = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$, $z = c_3 e^t + c_1 t e^t$ - решение системы.

Аналогично решаются неоднородные системы.

Пример 3. Решить линейную неоднородную систему $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x \end{cases}$.

Из первого уравнения находим $\ddot{x} = \dot{y} + 2e^t$ или $\dot{y} = \ddot{x} - 2e^t$, тогда

$$\ddot{x} - 2e^t = x$$

$$\ddot{x} - x = 2e^t.$$

Найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$m^2 - 1 = 0$$

$$m = \pm 1$$

$$x_0 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Частное решение будем искать в виде $\bar{x} = Ate^t$, поскольку единица – простой корень характеристического уравнения. Тогда

$$\dot{x} = A(te^t + e^t)$$

$$\ddot{x} = A(e^t + e^t + te^t)$$

$$A(2e^t + te^t) - Ate^t \equiv 2e^t$$

$$2Ae^t \equiv 2e^t$$

$$A = 1$$

$\bar{x} = te^t$ – искомое частное решение. Т.о., $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t$,

$$\dot{x} = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + e^t + te^t.$$

$$y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + e^t + te^t - 2e^t$$

$$y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + te^t - e^t.$$

Итак, система функций

$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^t, y = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + te^t - e^t$ является решением системы.

Дадим важную для механики и физики интерпретацию системы дифференциальных уравнений, причем рассмотрим лишь систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = P(t, x, y) \\ \dot{y} = Q(t, x, y) \end{cases} \tag{3}$$

Определение 5. *Система* (3), в которой P и Q – *непрерывно дифференцируемые функции, называется динамической системой, а координатная плоскость* Oxy – *ее фазовой плоскостью.*

Система (3) определяет в каждый момент времени t в данной точке (x, y) фазовой плоскости компоненты скорости $(\dot{x}, \dot{y})$ движущейся точки.

Задача решения системы (3) состоит в определении величин x, y, если известно, что при $t = t_0$ координаты точки имеют начальные значения x_0, y_0. Другими словами, надо найти функции $x = \varphi_1(t, t_0, x_0, y_0)$, $y = \varphi_2(t, t_0, x_0, y_0)$, которые дают положение движущейся точки для любого момента времени, если известно, что в начальный момент времени t_0 она занимала положение (x_0, y_0).

В этой интерпретации решение системы (3) называют движением.

Определение 6. *Кривая, описываемая точкой при движении, называется фазовой траекторией движения.*

Наибольшее приложение имеют системы, в которых правые части не зависят от t (автономные системы).

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

Под направлением на фазовой траектории подразумевают направление фазовой точки $(x(t), y(t))$ по фазовой траектории в сторону возрастания t.

Пример 4. Исследовать поведение фазовых траекторий системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 6y \end{cases} \quad (5)$$

$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} \\ y = c_2 e^{6t} \end{cases}$ – это параметрическое представление решения.

Чтобы получить вид фазовых траекторий, исключим t из этих уравнений.

Получим $y = c_2 e^{6t} = c_2 (e^{3t})^2 = \frac{c_2}{c_1^2} x^2$.

Фазовые траектории для системы (5) изображены на рисунке 1.

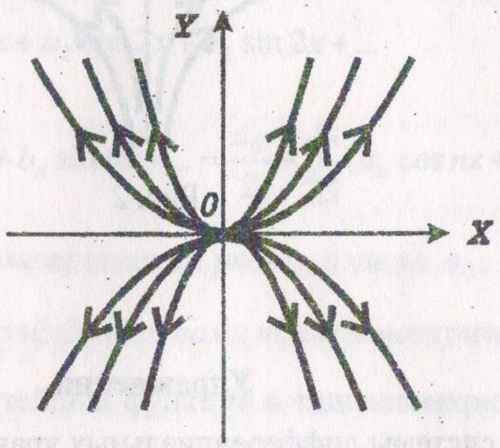


Рис. 1

Стрелки на траекториях указывают движение точки на фазовой траектории в сторону возрастания t, при $t \to \infty$ $y = c_2 e^{6t} \to \pm\infty$.

Такое поведение фазовых траекторий отвечает ситуации, когда динамическая система (5) имеет одно положение равновесия точки $(0,0)$, его называют *узлом*.

<u>Пример 4.</u> Исследовать поведение фазовых траекторий системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = -6x \end{cases}. \tag{6}$$

Здесь $x = c_1 e^{3t}$, $y = c_2 e^{-6t} = c_2 (e^{3t})^{-2} = c_2 \left(\frac{x}{c_1}\right)^{-2}$.

Значит, $y = \frac{k}{x^2}$ и фазовые траектории имеют вид «гипербол». Такая картина (рис. 2). называется *седлом*.

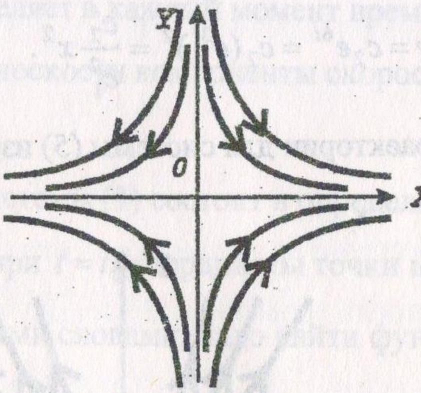


Рис. 2

Упражнения

1. Решить системы дифференциальных уравнений:

   1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$,

   2) $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$,

   3) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$,

   4) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$.

2. Исследовать поведение фазовых траекторий системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$.

ЛЕКЦИЯ 9

Тригонометрический ряд и его основные свойства. Ряд Фурье. Сходимость ряда Фурье

Определение 1. *Ряд*

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$$

$$... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

называется тригонометрическим рядом, а числа a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ... *- коэффициентами тригонометрического ряда.*

В качестве простейших функций в тригонометрическом ряде взята система функций:

$$\frac{1}{2}, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, ..., \ \cos nx, \ \sin nx, ... \qquad (2)$$

Свойства системы тригонометрических функций

1. *Все функции системы* (2) *являются периодическими с периодом* 2π.

Действительно, постоянная $1/2$ имеет любой период, а период функций $\sin nx$ и $\cos nx$ $(n = 1, 2, ...)$ равен $2\pi/n$, и , следовательно, число 2π также их период.

Определение 2. *Функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *называются ортогональными друг другу на отрезке* $[a, b]$, *если* $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$.

Определение 3. *Система функций называется ортогональной на отрезке* $[a, b]$, *если каждые две функции этой системы ортогональны друг другу на этом отрезке.*

2. Тригонометрическая система функций (2) *ортогональна на отрезке* $[-\pi,\pi]$.

Очевидно, если $k \neq 0$ и целое, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos kx dx = \frac{1}{2k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin kx dx = -\frac{1}{2k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,.$$

Значит, $\frac{1}{2}$ ортогональна ко всем остальным функциям системы (2).

При натуральных значениях m и n произведения $\sin nx \sin mx\ (m \neq n)$, $\sin nx \cos mx$, $\cos nx \cos mx\ \ (m \neq n)$ всегда можно представить суммой функций вида $\sin kx$ или $\cos kx$. Поэтому интеграл от $-\pi$ до π от этих произведений также равен нулю.

3. Интеграл по отрезку $[-\pi,\pi]$ *от квадрата любой функции тригонометрической системы* (2) *отличен от нуля.*

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2k}\sin 2kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2k}\sin 2kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2})^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Тригонометрические ряды удобны при изучении периодических функций, описывающих различные периодические процессы, которые имеют место в природе и технике. Примерами периодических процессов служат колебательные и вращательные движения различных деталей машин и приборов, периодическое движение небесных тел и элементарных частиц, акустические и электромагнитные колебания и др.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (3)$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно.

Доказательство. Интегрируя (3), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right],$$

откуда, учитывая свойство 2 системы тригонометрических функций (2), находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (4)$$

Для определения коэффициента a_k при $\cos kx$ умножим равенство (3) на $\cos kx$ и проинтегрируем по x от $-\pi$ до π, поскольку ряд (3) можно интегрировать почленно после умножения его на ограниченную функцию. Тогда, на основании свойств 2 и 3 системы функций (2), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx\right] = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx. \qquad (5)$$

Аналогично, умножая равенство (3) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π, имеем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx. \tag{6}$$

Таким образом, коэффициенты a_0, a_k и b_k ряда (3) определяются единственным образом формулами (4) – (6), что и доказывает теорему.

Определение 4. *Коэффициенты* a_0, a_n, b_n, *найденные по формулам* (4) – (6), *называются коэффициентами Фурье функции* $f(x)$, *а тригонометрический ряд* (1) *с такими коэффициентами называется рядом Фурье функции* $f(x)$.

Если x – время, то ряд Фурье – это разложение сложного сигнала на гармонические колебания. Он задает амплитудно-частотные характеристики. В этом заключается физический смысл ряда Фурье.

Сформулируем теорему, которая даст достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

Определение 5. *Функция* $f(x)$ *называется кусочно-монотонной на отрезке* $[a,b]$, *если этот отрезок можно разбить конечным числом точек* $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ *на интервалы* $(a,x_1),(x_1,x_2),...,(x_{n-1},b)$ *так, что на каждом из интервалов функция монотонна.*

Теорема 2. *Если периодическая функция* $f(x)$ *с периодом* 2π *кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда* $s(x)$ *равна значению функции* $f(x)$ *в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции* $f(x)$ *сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции* $f(x)$ *справа и* *слева (т.е. если $x = x_0$ – точка разрыва функции $f(x)$, то*

$$s(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \text{ где } f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и}$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)).$$

Из теоремы 2 следует, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных разделах математики. Особенно успешно ряды Фурье применяются в математической физике и ее приложениях к конкретным задачам механики и физики.

Замечание 1. Пусть функция $f(x)$ задана лишь на $[-\pi, \pi]$, кусочно-монотонна и ограничена на нем. Ряд Фурье для такой функции совпадает с рядом Фурье для функции, являющейся периодическим продолжением $f(x)$ на всю Ox.

Если $f(-\pi) = f(\pi)$, то периодическое продолжение приводит к функции, непрерывной в точках вида $x = (2k+1)\pi$, $k \in Z$, и в концах отрезка ряд будет сходиться к $f(x)$.

Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то периодическое продолжение приводит к функции, разрывной в точках вида $x = (2k+1)\pi$, $k \in Z$, и ряд заведомо не может сходиться к $f(x)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$. В этом случае задачу о разложении $f(x)$ в ряд Фурье имеет смысл ставить не для $-\pi \le x \le \pi$, а для $-\pi < x < \pi$.

<u>**Пример 1.**</u> Разложить периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$ в ряд Фурье: $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{\pi} xdx\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2}, & n\text{ - нечетное}\\ 0, & n\text{ - четное}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$=-\frac{\pi}{\pi n}\cos n\pi=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n\text{ - нечетное}\\ -\dfrac{1}{n}, & n\text{ - четное}\end{cases}.$$

Таким образом, ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).$$

В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева (т.е. в данном случае числу $\frac{\pi}{2}$). Полагая в полученном равенстве $x=0$, получаем:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Таким образом, с помощью рядов Фурье можно суммировать сложные числовые ряды.

Периодическая с периодом, равным 2π, функция $f(x)$ изображена на рисунке 1(а).

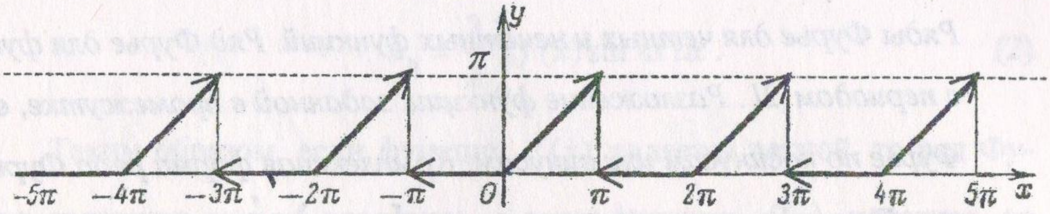


Рис. 1(а)

Сумма ряда Фурье для функции $f(x)$ изображена на рисунке 1(б).

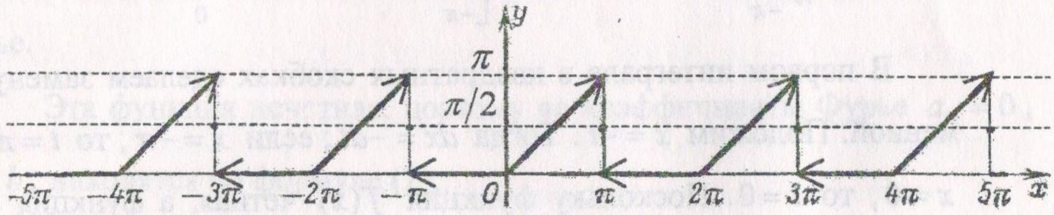


Рис.1(б)

ЛЕКЦИЯ 10

Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$. Разложение функции, заданной в промежутке, в ряд Фурье по косинусам или синусам. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ является четной, т.е. $f(-x) = f(x)$. Тогда ее коэффициенты Фурье b_n равны нулю. Действительно,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right].$$

В первом интеграле в квадратных скобках сделаем замену переменной. Положим $x = -t$. Тогда $dx = -dt$; если $x = -\pi$, то $t = \pi$; если $x = 0$, то $t = 0$. Поскольку функция $f(x)$ четная, а функция $\sin x$ - нечетная, получаем

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin n(-t)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nx\,dt.$$

Следовательно,

$$b_n = \frac{1}{n}\left[-\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0\right].$$

Аналогично, учитывая, что функции $f(x)$ и $\cos x$ четные, можно получить следующие выражения для коэффициентов a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,\; a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \qquad (1)$$

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ нечетная, т.е. $f(-x) = -f(x)$. Тогда, используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно показать, что коэффициенты Фурье a_n равны нулю, а коэффициенты b_n определяются выражениями вида:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\,. \tag{2}$$

Таким образом, если функция $f(x)$ является четной, то ряд Фурье содержит только косинусы, а если функция $f(x)$ нечетная, то только синусы. Формулы (1) и (2) позволяют значительно упростить вычисление коэффициентов Фурье, когда заданная функция является четной или нечетной.

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$ в ряд Фурье.

Эта функция нечетная, поэтому ее коэффициенты Фурье $a_n = 0$, а b_n находятся по формуле (2).

Имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\,.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье данной функции:

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Это равенство имеет место во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т.е. нулю. Полагая в полученном равенстве $x = \frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\,.$$

Сумма ряда Фурье для функции $f(x)$ изображена на рисунке 1.

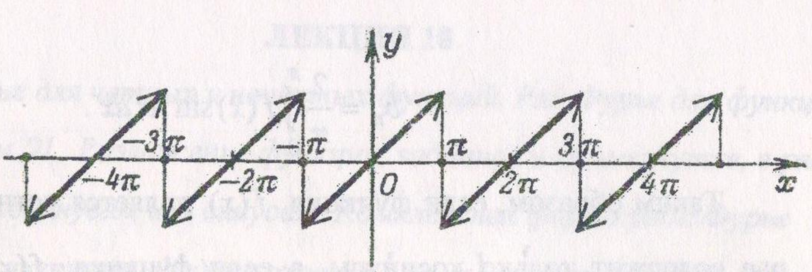


Рис. 1

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = x^2$ $(-\pi \le x \le \pi)$ в ряд Фурье.

Эта функция четная, значит ее коэффициенты Фурье $b_n = 0$. Определим по формуле (1) коэффициенты a_n.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx\right] = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Значит, ряд Фурье данной функции имеет вид:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right).$$

Так как функция кусочно-монотонная, ограниченная и непрерывная, то это равенство выполняется во всех точках. Полагая в полученном равенстве $x = \pi$, получаем:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Сумма ряда Фурье для функции $f(x)$ изображена на рисунке 2.

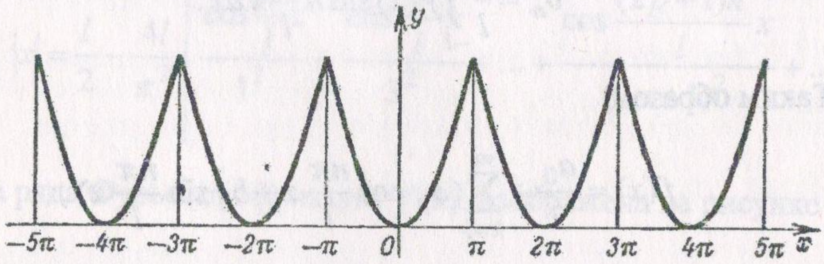


Рис. 2

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$ (вообще говоря, отличным от 2π). Разложим ее в ряд Фурье. Сделаем замену переменной по формуле $x = \frac{l}{\pi} t$. Тогда функция $f(\frac{l}{\pi} t)$ будет периодической функцией от t с периодом 2π. Ее можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$:

$$f(\frac{l}{\pi} t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) dt, \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{l}{\pi} t) \sin nt \, dt.$$

Возвратимся теперь к старой переменной x:

$$x = \frac{l}{\pi} t, \; t = x \frac{\pi}{l}, \; dt = \frac{\pi}{l} dx.$$

Тогда будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx, \; a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x \, dx \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx. \qquad (4)$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам (3) – (4).

Это и есть ряд Фурье для периодической функции с периодом $2l$.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ является четной, то вычисление коэффициентов ряда можно упростить. Очевидно, что $b_n = 0$, а коэффициенты a_n находятся следующим образом:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx. \qquad (5)$$

Аналогично, если функция $f(x)$ является нечетной, то $a_n = 0$, а коэффициенты b_n находятся по формуле

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx. \qquad (6)$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$, которая на отрезке $[-l, l]$ задается равенством $f(x) = |x|$.

Так как рассматриваемая функция четная, то

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x dx = l$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & n\text{ – четное},\\ -\dfrac{4l}{\pi^2 n^2}, & n\text{ - нечетное}.\end{cases}$$

Следовательно, разложение имеет вид

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1^2} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Сумма ряда Фурье для функции $f(x)$ изображена на рисунке 3.

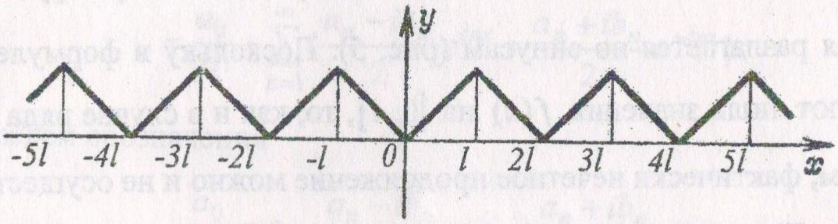


Рис. 3

Часто возникает задача о разложении в ряд по косинусам или в ряд по синусам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0,\ l]$.

Для разложения $f(x)$ в ряд по косинусам можно рассуждать следующим образом. Дополним определение данной функции $f(x)$ так, чтобы при $-l \le x < 0$ было $f(x) = f(-x)$. В результате получится четная функция (в этом случае говорят: функция $f(x)$ продолжена с отрезка $[0,\ l]$ на отрезок $[-l,\ 0]$ четным образом (рис. 4). Тогда для "продолженной" четной функции справедливы все предыдущие рассуждения, и она разлагается в ряд Фурье, который содержит только косинусы.

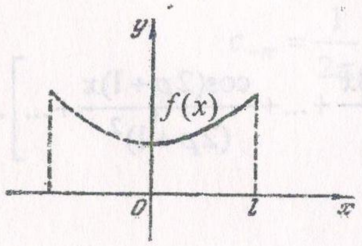


Рис. 4

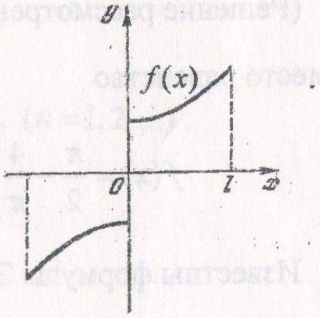


Рис. 5

В формулах (11) фигурируют лишь заданные на $[0, l]$ значения $f(x)$. Следовательно, при практических вычислениях фактически можно и не осуществлять указанное четное продолжение.

Если же мы продолжим определение функции $f(x)$ при $-l \le x < 0$ так: $f(x) = -f(-x)$, то получим нечетную функцию, которая разлагается по синусам (рис. 5). Поскольку в формуле (6) участвуют лишь значения $f(x)$ на $[0, l]$, то, как и в случае ряда по косинусам, фактически нечетное продолжение можно и не осуществлять.

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд по синусам.

Продолжая эту функцию нечетным образом (рис. 1), получим ряд

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

(Решение рассмотрено в примере 1.)

Пример 5. Разложить $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$ в ряд по косинусам.

Продолжая эту функцию четным образом (Рис. 3, при $l = \pi$), получим функцию $f(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$. Разлагая ее в ряд, найдем

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

(Решение рассмотрено в примере 3.) Итак, на отрезке $[0, \pi]$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Известны формулы Эйлера:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\,\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в ряд (1) (лекция 9), получаем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\, \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \ \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \ \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}. \qquad (7)$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}),$$

или, более компактно,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad (8)$$

Это и есть комплексная форма ряда Фурье.

Выразим коэффициенты c_n и c_{-n} через интегралы. Пользуясь формулами (4) – (6) из лекции 9, можем формулы (7) переписать так:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Упражнения

1. Пользуясь разложением в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$, вычислить сумму ряда $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$: $f(x) = \begin{cases} 5x+1, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$: $f(x) = 3 - |x|$, $-5 < x < 5$, $l = 5$.

4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 2^x$, заданную в интервале $(0, \pi)$, продолжив ее четным и нечетным образом. Построить графики для каждого продолжения.

5. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически (рис. 6):

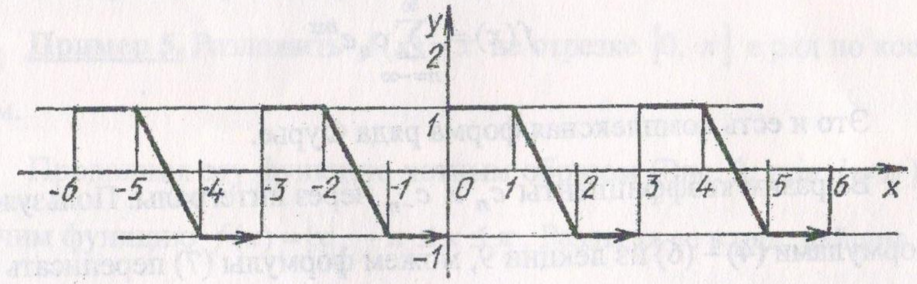


Рис. 6

Библиографический список

1. Карташев А.П. Математический анализ / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – М.: Наука, 1984.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1965.
3. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике, часть 3 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск.: Выш. шк., 1991.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Наука, 1953.
5. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1998.
6. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. – М.: Наука, 1980.
7. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1980.
8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов – М.: Наука, 1985.
9. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев. – М.: Высш. школа, 2001.
10. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц – М., 1954.

Содержание

Учебное издание

Клебанов Игорь Иосифович

Вагина Мария Юрьевна

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ

Конспект лекций по курсу высшей математики

Редактор Л.М. Бочкова

Компьютерная верстка: М.Ю. Вагина

Подписано в печать 28.01.2009

Формат 60×84 $^1/_{16}$

Объем 3,5 уч.-изд. л.

Заказ №674.

Тираж 100.

Издательство Челябинского государственного педагогического университета

454080, Челябинск, пр. Ленина, 69

Отпечатано с готового оригинал-макета

на ризографе в типографии ЧГПУ

454080, Челябинск, пр. Ленина, 69