МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения стандартным и нестандартным методам решения уравнений в основной школе

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения: очная

Проверка на объем заимствований:
88% авторского текста
Работа рекомену к защите
« 25 » мая 2020 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
_____________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Тангина Дарья Юрьевна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования предполагает воспитание конкурентоспособной личности, готовой к саморазвитию и непрерывному образованию, умеющей самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач.

Изучение математики в основной школе безусловно способствует достижению этих целей, однако стоит отметить, что, поскольку курс математики органичен по времени, на уроках обучающиеся успевают овладеть только стандартными методами решения задач. Более сложные же, нетривиальные методы, как правило, выносятся на изучение во внеурочное время: на факультативных и элективных курсах.

Тема «Уравнения» является одной из наиболее объемных по содержанию тем всего курса математики основной школы, причем ее изучение происходит в тесной связи с такими учебными предметами как, например, физика, биология и химия. Поэтому степень освоения различных методов решения уравнений напрямую влияет на возможность обучающихся усваивать более сложный материал, а также способствует формированию математического мышления и развитию творческих способностей, что, в свою очередь, отвечает требованиям ФГОС.

Гипотеза исследования: повысить уровень сформированности математического мышления и развития творческих способностей обучающихся возможно за счет изучения и освоения нестандартных методов решения уравнений.

Объектом данного исследования являются различные виды уравнений, встречающиеся в курсе математики основной школы.

Предметом исследования являются стандартные и нестандартные методы решения уравнений.

Цель данной работы: разработать программу факультативного курса по математике для 9 класса «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений» с методическими рекомендациями для преподавателя по обучению нестандартным методам решения уравнений, а также сборник задач, достаточных для полного и комплексного освоения представленных в курсе методов.

Задачи, которые необходимо решить:

1. Провести анализ современного подхода к обучению теме «Уравнения» в основной школе, в том числе, провести сравнительный анализ различных учебно-методических комплексов по математике для 7-9 классов, определить объем и содержание темы «Уравнения» в курсе математики основной школы, а также изучить учебно-методическую литературу по теме исследования.
2. Рассмотреть стандартные и нестандартные способы решения различных видов уравнений, встречающихся в курсе математики основной школы.
3. Разработать программу факультативного курса по математике для 9 класса «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений» с методическими рекомендациями для преподавателя по обучению нестандартным методам решения уравнений.
4. Разработать на основании различной учебно-методической литературы сборник задач, достаточных для полного и комплексного освоения представленных в курсе методов.

Методы исследования: сравнительный анализ, синтез, изучение и реферирование источников по теме исследования.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

ГЛАВА 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. СТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Анализ современных подходов к изучению темы «Уравнения» в основной школе

Проведем анализ некоторых учебно-методических комплексов (далее – УМК), включенных в Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования.

Для проведения сравнительного анализа выбраны следующие УМК:

Б1: УМК Алгебра. Макарычев Ю. Н. (7-9)

Б2: УМК А. Г. Мерзляка. Алгебра (7-9) (баз.)

Б3: УМК «Алгебра» авторского коллектива под рук. А. Г. Мордковича, 7-9 (базовый уровень)

У1: УМК Алгебра. Макарычев Ю. Н. (7-9) Углублённый уровень

У2: УМК В. М. Полякова. Алгебра (7-9) (углуб.)

У3: УМК «Алгебра» авторского коллектива под рук. А. Г. Мордковича, 7-9 (углубленный уровень)

Все данные собраны в Таблице 1.1 (см. Приложение 1).

Во всех рассмотренных учебно-методических комплексах по алгебре (как базового, так и углубленного уровня) тема «Уравнения» представлена достаточно полно. При этом достаточно широк спектр формулировок заданий, часть из которых требует «знать», а другая – «уметь». Изучение уравнений происходит поэтапно, с постепенным усложнением заданий и в тесной связи с практическим применением уравнений для решения задач иного характера, например, текстовых задач. Учебно-методические комплексы по геометрии у каждого автора (авторского коллектива) также предполагают включение уравнений в инструментарий для решения различных вычислительных и доказательных задач.

В 7 классе во всех приведенных УМК рассматриваются уравнения с одной переменной, линейные уравнения и сводящиеся к ним, а также отдельно выделен раздел «Решение текстовых задач с помощью уравнений». При этом в УМК Макарычева Ю. Н., Мерзляка А. Г. и Полякова В. М. сначала рассматриваются сами линейные уравнения и способы их решения, а затем – текстовые задачи, в то время как в УМК авторского коллектива под руководством Мордковича А. Г. уравнение вводится как математическая модель некоторого реального явления или задачи. Во втором полугодии вводится понятие уравнения с двумя переменными, рассматривается линейное уравнение с двумя переменными и его график.

В 8-9 классах обучающиеся знакомятся с квадратными и дробно-рациональными уравнениями, причем во всех рассмотренных учебно-методических комплексах по алгебре тема «Квадратные уравнения» представлена достаточно полно, весь материал дается разом, одной главой, в то время как изучение дробно-рациональных уравнений можно назвать эпизодическим. Так, в УМК Мерзляка А. Г., Полякова В. М. и авторского коллектива под руководством Мордковича А. Г. тема «Дробно-рациональные уравнения» вообще не выделена, а изучается в рамках других тем, таких как «Рациональные уравнения» и «Алгебраические дроби». Кроме того, во всех УМК в отдельную тему выделены иррациональные уравнения.

Что касается уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля (абсолютной величины), то в отдельную тему они выделены только в учебнике Макарычева Ю. Н. для углубленного изучения в 9 классе, однако эти уравнения встречаются во всех УМК на протяжении всего курса алгебры в основной школе, начиная с 6 класса, когда впервые вводится понятие «модуль числа».

Все задачи условно можно поделить на несколько типов:

– задачи на нахождения корня уравнения;

– задачи на определение наличия корней у уравнения и их количества;

– задачи на составление уравнения;

– задачи на построение графика уравнения;

– задачи на исследование уравнения.

Большинство заданий в теме «Уравнения» на протяжении всего курса алгебры в основной школе во всех рассмотренных учебно-методических комплексах решаются на основании изученного алгоритма и не требуют от обучающихся никакого математического «творчества». Большинство задач не требуют даже глубокого понимания материала, так как задач на доказательство или исследование тождеств сравнительно меньше, чем задач на нахождение корней уравнения, которые сводятся к следованию ранее изученному алгоритму.

Среди наиболее интересных задач можно выделить следующие:

1. Решите уравнение $kxy - 1 = -p$, где $k \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$, относительно переменной: а) x; б) y [3].

2. При каком значении b корни уравнений $5bx - 2(4x + b) - x = 16b$ и $1{,}6(2 + x) - 3{,}2(3x + 4) = 0$ являются противоположными числами? [3, №548]

3. Существует ли значение a, при котором множество корней уравнения $ax - 2x = a^2 + a - 6$: а) состоит из одного элемента; б) является пустым; в) является бесконечным [3]?

4. Имеет ли целочисленные решения уравнение $\frac{4}{7}x - 1\frac{1}{3}y = \frac{20}{21}$ [3]?

5. Решите в целых числах уравнение $3x - 11y = -4$ [3].

6. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 - 9a)x = = a^2 - 18a + 81$ [30].

7. Решите уравнение $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$ [30].

8. При каком значении a уравнение $(a-2)x^2+(2a-1)x+a^2-$ $-4=0$ является:

1) линейным;
2) приведенным квадратным;
3) неполным неприведенным квадратным;
4) неполным приведенным квадратным [30].

9. Докажите, что уравнение $x^2+px+p-2=0$ имеет два корня при любом значении p [30].

10. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-7x+m=0$ удовлетворяют условию $2x_1-5x_2=28$. Найдите корни уравнения и значение m [30].

11. Решите уравнение $(x^2+6x)^2-4(x+3)^2=156$, используя введение новой переменной [25].

12. Решите уравнение $3x+4\sqrt{x^2-3x}=x^2+4$, используя введение новой переменной [25].

13. Найдите замену переменной, при которой кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ сводится к приведённому кубическому уравнению вида $x^3+px+q=0$ [7].

14. Найдите нули функции $y=2x^5+2x^4-3x^3-3x^2-2x-2$ [7].

15. Решите уравнение $2x^4+5x^3-5x^2-13x-4=0$, разложив его левую часть на множители методом неопределенных коэффициентов [7].

16. Решите уравнение $\frac{1}{x^2+x+2}+\frac{1}{x^2+x}=\frac{6}{x^2+x+6}$, используя введение новой переменной [7].

17. Решите уравнение $\frac{x^2-4|x|-2}{|x|-2x^2}=1$, используя введение новой переменной [7].

18. Решите уравнение с параметрами a и b:

а) $\frac{x^2+2bx}{a^2+b^2+2ab}-\frac{2x-a+b}{a+b}=0$;

б) $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} + 2 = 0$ [7].

19. Используя свойства монотонных функций, найдите подбором корни уравнения: $\sqrt{x+17} + \sqrt{2x+11} + \sqrt{3x+7} + \sqrt{4x+5} = 10$ [7].

В большинстве приведенных задач указан метод решения, однако для того, чтобы, например, отыскать удобную замену, обучающемуся необходимо проанализировать уравнение и проявить некоторое творчество. В свою очередь, задачи с параметрами формируют у обучающихся способность мыслить критично, рационально и логично, то есть формируют математическое мышление.

Отметим также, что все приведенные задачи помечены в учебниках как задания повышенного и высокого уровня сложности, а значит, либо рассматриваются в неполном объеме, либо только наиболее подготовленной частью обучающихся, либо не рассматриваются вообще.

Анализ ФГОС, рабочих программ по математике, различных учебно-методических комплексов по алгебре для 7-9 классов и научной литературы по теме исследования показал, что к настоящему времени в существующих подходах к обучению математике в основной школе можно выделить некоторые проблемы и противоречия, требующие решения.

Так, Л. И. Токарева отмечает, что вместе с тем, что к настоящему периоду времени сложилась относительно стабильная логика предмета и инвариант понятийного аппарата, в существующих подходах формирования математических понятий существуют определенные противоречия между:

– конструктивно-деятельностной природой понятий и преимущественно репродуктивно-воспроизводящим уровнем их усвоения;

– формированием понятий и соответствующими видами учебно-познавательной деятельности;

– полифункциональной, многоуровневой, многоаспектной природой фундаментальных математических понятий и недостаточной мотивацией их введения, дальнейшего формирования и последующей интеграции [45].

Таким образом, при достаточно полном изложении теоретического материала в курсе алгебры основной школы, отмечаются некоторые трудности в прикладном их использовании, а также отсутствие интеграции сложных, многоаспектных математических понятий в практическую деятельность, что, в свою очередь, снижает мотивацию обучающихся к их изучению.

В методах доказательства, решения, исследования уравнений в школьном курсе математики Л. И. Токарева выделяет три взаимосвязанных, взаимозависимых аспекта:

1) алгебраический: отражает выполняемые алгебраические операции над числами и буквами (заменителями чисел) и свойства этих операций;

2) функциональный: под буквами понимаются переменные величины со множеством принимаемых ими значений, что накладывает требование на рассмотрение области определения тождества, уравнения, неравенства;

3) логический: отражает подстановку вместо букв конкретных чисел, а также выполнение переходов от одних тождеств, уравнений, неравенств к другим в процессе их доказательства, решения, исследования [45].

При этом в значительном большинстве учебно-методических комплексов, рассмотренных нами в предыдущей главе, ведущим является алгебраический аспект, что, во-первых, снижает уровень учебных компетенций обучающихся, во-вторых, не позволяет устанавливать содержательные связи между теоретическими положениями и их практическим применением. Поэтому, отмечает Л. И. Токарева, «алгебраический, функциональный и логический аспекты должны активно функционировать» [45].

Кроме того, современному этапу развития системы образования и школьного математического образования в частности характерен приоритет развивающих целей обучения: развитие и формирование творческого потенциала учащихся, индивидуализацию их обучения, которая заключается в предоставлении возможности всем учащимся проявить свои таланты и творческий потенциал, подразумевающий возможность реализации личных планов, развитие конкурентоспособной личности, то есть, личности, способной организовывать свою деятельность и поведение в динамических ситуациях, обладающей новым стилем мышления, творческим подходом к решению проблем, адекватным реагированием в любых ситуациях [20].

В связи с этим при изучении математики особую значимость приобретает организованное обучение приемам мышления, рационального выполнения учебной деятельности [12]. Кроме того, задания итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ) требуют от обучающихся не только сформированности приемов решения основных (стандартных) типов математических задач, но и навыка совершать перенос усвоенных приемов в новые нестандартные ситуации.

Н. А. Варенцова отмечает, что один из важнейших показателей эффективности обучения заключается в том, как обеспечивается в процессе обучения развитие мыслительных способностей учащихся, а применительно к математике можно сказать, что сам процесс ее изучения должен приводить к умению логически, доказательно мыслить [15].

При этом анализ учебно-методических комплексов и типологии заданий, содержащихся в них, показал, что большинство задач решается по определенным алгоритмам, и быстрое их решение обычно зависит от знания формул и умения их применять, а усложнение задачи, в основном, производится за счет увеличения количества действий (этапов решения) или усложнения вычислений. Н. А. Варенцова отмечает также, что «многие этапы решения таких задач у учеников приобретают автоматический характер, они не задумываются над каждым из них» [15].

И если доведение до автоматизма действий вычислительного характера положительно сказывается на скорости решения задач и расширение области задач, успешно решаемых обучающимися, то «автоматизм» в анализе, поиске способа решения задачи и его применения зачастую приводит к ошибочным суждениям и неправильным ответам.

В свою очередь, математика имеет широкие возможности для развития критического, логического, творческого мышления обучающихся. В то время как стандартные задачи формируют у обучающихся «механические» вычислительные навыки, нестандартные задачи, то есть, задачи, способ решения которых не лежит на поверхности и не сводится к алгоритмичным действиям, являются «важнейшим средством формирования математической культуры, таких качеств математического мышления, как гибкость, критичность, рациональность, логичность» [20].

В курсе математики основной школы значительный объем времени занимает изучение уравнений и неравенств, с их помощью на математическом языке формулируются задачи, ситуации, явления, модели процессов реального мира. Уравнения и неравенства также предлагаются обучающимся при изучении любой темы в качестве углубления, повторения и расширения теоретических знаний, например: числа, операции над числами и их свойства, метрические соотношения между элементами геометрических фигур, тождества и тождественные преобразования, при решении задач практического содержания, а также в смежных дисциплинах (физике, химии, биологии).

Именно поэтому для обучающихся основной школы важно, во-первых, в полном объеме освоить стандартные способы решения алгебраических уравнений, во-вторых, создать условия углубления, расширения их знаний по данной теме, возможность находить проблемы в знакомой ситуации, видеть альтернативные пути решения задач, комбинировать ранее усвоенные способы деятельности в новые, применительно к возникшей проблеме, а также строить субъективно новые способы решения.

А. И. Лагутинская отмечает: «Из школьной практики известно, что вопросы, требующие рассмотрения чего-то с непривычной стороны, нередко ставят учащихся в тупик. И это понятно, ведь их этому не учили. Разумеется, увидеть что-то по-новому, не так, как все, и не так, как ты видел раньше – очень непростая задача. Но этому можно научить, если направить процесс обучения на развитие творческих способностей учащихся системой задач, при решении которых у ребят проявляется не только интерес к знаниям, но и к самому процессу поиска» [20].

Некоторые нестандартные задачи, не требующие для решения специальных методов, можно рассматривать на уроках математики в ходе изучения темы «Уравнения», однако, в силу ограниченности времени, отводимого на изучение математики учебным планом дисциплины, имеет смысл в более старших – восьмых и девятых – классах основной школы организовывать кружки, элективные и факультативные курсы, другую внеурочную деятельность по решению и освоению новых, нестандартных методов решения алгебраических уравнений.

В данной главе будут рассмотрены основные виды алгебраических уравнений, изучающиеся в курсе алгебры основной школы, а также стандартные методы их решения.

Так как большинство авторов нестандартными методами решения уравнений называют те, для которых «нет специального алгоритма» [2], или те, «которые не входят в базовый курс математики основной школы» [40], то стандартными методами решения уравнений будем называть методы, представленные в курсе математики основной школы, а в более детальном их рассмотрении будем опираться на УМК Макарычева Ю. Н. для углубленного изучения математики в 7-9 классах. Выбор обусловлен тем, что, несмотря на общую схожесть в изложении темы «Уравнения» во всех рассмотренных в данном параграфе учебно-методических комплексах, в УМК Макарычева Ю. Н. данный материал представлен наиболее последовательно и структурировано, в нем каждый вид уравнений выделен в отдельный раздел (главу), в отличие от, например, УМК Мерзляка А. Г., Полякова В. М. и авторского коллектива под руководством Мордковича А. Г., что было отмечено выше. Кроме того, рассматривая УМК для углубленного изучения, мы можем наиболее точно установить максимальный объем теоретического материала, который получают обучающиеся в основной школе: так, например, в УМК Макарычева Ю. Н. для углубленного изучения в главе «Квадратные уравнения» представлены темы «Уравнения, сводящиеся к квадратным», «Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения» и «Разложение квадратного трехчлена на множители», чего нет в УМК базового уровня того же автора.

1.2 Алгебраическое уравнение с одним неизвестным. Корень уравнения

Определение. *Рациональным алгебраическим уравнением с одним неизвестным* называют уравнение вида

$$R(x) = 0, \qquad (1)$$

где $R(x)$ – алгебраическая дробь относительно x.

К такому виду можно привести любое уравнение $R_1(x) = R_2(x)$, где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ – алгебраические дроби. Например, уравнение

$$2x^3 + \frac{4}{x^2 - 1} = 0$$

является рациональным алгебраическим, или просто *алгебраическим*.

Каждое уравнение вида (1) можно заменить равносильным ему уравнением вида:

$$f(x) = 0, \qquad (2)$$

где $f(x)$ – многочлен от x. Для этого надо записать дробь $R(x)$ в виде отношения двух многочленов. Мы получим уравнение:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – многочлены от x. Но дробь может равняться нулю только в том случае, когда равен нулю ее числитель. Поэтому решение уравнения (1) сводится к решению уравнения (2) при условии, что $\varphi(x) \neq 0$ [8].

Определение. *Корнем уравнения* называются все допустимые значения x, при которых уравнение обращается в верное равенство, то есть, такие значения x, что $f(x) = 0$.

Решить уравнение — значит найти все его корни или установить, что их нет.

Например, уравнение $2x + 3 = 0$ имеет единственный корень $x = -1{,}5$, а уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней на множестве действительных чисел.

Пусть даны два уравнения

$$f_1(x) = F_1(x) \tag{3}$$

и

$$f_2(x) = F_2(x), \tag{4}$$

и пусть M – множество корней уравнения (3), N – множество корней уравнения (4).

Определение. Если $M \subset N$ (то есть, если всякий корень уравнения (3) является корнем уравнения (4)), то уравнение (4) называют *следствием* уравнения (3).

Определение. Если множества M и N корней уравнений (3) и (4) совпадают, то эти уравнения называются *равносильными*.

Иными словами, два уравнения называются *равносильными* (эквивалентными), если всякий корень одного уравнения является корнем другого, и наоборот. Если оба уравнения не имеют корней (решений), то они также считаются равносильными.

Если уравнения $f_1(x) = F_1(x)$ и $f_2(x) = F_2(x)$ равносильны, то пишут $f_1(x) = F_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = F_2(x)$.

Например, $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$, так как множества корней (решений) этих уравнений совпадают и корни равны $-1; 1$; $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0$, так как эти уравнения не имеют действительных корней. Ясно, что уравнения $x(x+1) = 0$ и $(x-1)(x+1) = 0$ неравносильны.

При решении уравнения путем различных преобразований стараются заменить его более простым, равносильным ему уравнением, однако такая замена не всегда удается. Тогда возможны следующие два случая.

Случай 1. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корней. Например, при переходе от уравнения $x(2x-1) = x^2$ к уравнению $2x - 1 = x$ сокращением на неизвестное x происходит потеря корня $x = 0$. Поэтому при переходе к новому уравнению надо учитывать возможность потери корня данного уравнения.

Случай 2. Новое уравнение может содержать корни, не являющиеся корнями данного уравнения (так называемые посторонние корни). Например, при переходе от уравнения $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$ к уравнению $2x - 1 = x - 1$ возведением в квадрат обеих частей исходного уравнения получим $x = 0$ – посторонний корень этого уравнения.

Поэтому часто делают проверку корней, подставив их в данное уравнение.

Приведем несколько теорем о равносильности уравнений, доказательства которых можно посмотреть в соответствующей учебно-методической литературе [8].

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения $f(x) = F(x)$ прибавить функцию $\varphi(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях неизвестного x, то получится новое уравнение $f(x)+\varphi(x)=F(x)+\varphi(x)$, являющееся следствием данного.

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(x)=F(x)$ умножить на функцию $\varphi(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях неизвестного x, то получится новое уравнение $f(x)\varphi(x)=F(x)\varphi(x)$, являющееся следствием данного.

Теорема 3. Если функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях x, то уравнения $f(x)=F(x)$ и $f(x)+\varphi(x)=F(x)+\varphi(x)$ равносильны.

Следствие: всякое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

Теорема 4. Если функция $\varphi(x)$ определена при всех допустимых значениях x и ни при одном допустимом значении x не обращается в нуль, то уравнения $f(x)=F(x)$ и $f(x)\varphi(x)=F(x)\varphi(x)$ равносильны.

Следствие: обе части уравнения можно умножать на произвольное отличное от нуля число.

Теорема 5. Если функции $f_1(x),\dots,f_n(x)$ определены на некотором множестве M, то на этом множестве уравнение $f_1(x)f_2\cdot\ldots\cdot(x)f_n(x)=0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$

1.3 Линейные уравнения и сводящиеся к ним

Определение. Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax+b=0$, где a и b – заданные действительные числа.

При этом число a называется коэффициентом при неизвестном x, а число b – свободным членом уравнения.

Если в уравнении $a=0$ и $b=0$, то есть, оно имеет вид $0\cdot x+0=0$, то корнем уравнения является любое число (бесконечное множество корней).

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то есть, уравнение имеет вид $0 \cdot x + b = 0$, то решением этого уравнения будет пустое множество. Говорят, что в таком случае уравнение не имеет корней.

Если $a \neq 0$, то корнем уравнения будет являться $x = -\frac{b}{a}$ [34].

Уравнение $ax + b = 0$ является частным случаем уравнения $ax + b = cx + d$, где a, b, c, d – заданные действительные числа, $a \neq c$.

Линейное уравнение сводится к равносильному ему уравнению вида $kx + m = 0$, где k и m – известные числа, причем $k \neq 0$, корнем которого является число $x = -\frac{m}{k}$.

Линейное уравнение можно определить по-другому.

Определение. *Уравнением первой степени с одним неизвестным* называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – заданные числа, причем $a \neq 0$, x – неизвестное.

Это уравнение равносильно уравнению $ax = -b$, из которого получаем, что $x = -\frac{b}{a}$. Таким образом, уравнение первой степени всегда имеет единственный корень $x = -\frac{b}{a}$.

Уравнение первой степени является частным случаем линейного уравнения $ax + b = cx + d$, где a, b, c, d – заданные числа, а x – неизвестное.

Линейное уравнение сводится к равносильному ему уравнению вида $kx = l$, где k и l – известные числа. При этом число k – коэффициент при неизвестном x, может оказаться равным нулю, в отличие от коэффициента при неизвестном в уравнении первой степени.

Может оказаться, что линейное уравнение не имеет корней или имеет бесконечное множество корней [4].

Мы будем пользоваться определением Мордковича А. Г. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $2(9x+3)=3(1+6x)$ [34].

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $18x-18x=3+6$. Оно, в свою очередь, равносильно уравнению $0\cdot x-9=0$. В этом уравнении $a=0$ и $b\neq 0$, значит, оно не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 2. Решить уравнение $3(8x-6)=4(6x-4{,}5)$ [34].

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $24x-24x=18-18$. Оно, в свою очередь, равносильно уравнению $0\cdot x=0$. В этом уравнении $a=0$ и $b=0$, значит, оно имеет бесконечное множество решений, то есть x – любое число.

Ответ: $x\in R$.

Пример 3. Решить уравнение $(m+8)x=m+8$ [28].

Решение. Сделаем замену $k=m+8$. Тогда исходное уравнение примет вид $kx=k$. Это уравнение содержит параметр k (переменную, которая в условии данной задачи сохраняет одно и то же значение).

Если $k\neq 0$, то $(m+8)x=m+8 \Leftrightarrow x=\frac{m+8}{m+8}$, то есть, $x=1$ – единственный корень уравнения, при этом $m\neq -8$.

Если $k=0$, то уравнение принимает вид $0\cdot x+0=0$ и его корнем является любое действительное число x.

Ответ: $x=1$ при $m\neq -8$; $x\in R$ при $m=-8$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}.$$

Решение.

После приведения дробей к общему знаменателю $(a-1)(x+3)$ получим линейное уравнение $3ax-5+(3a-11)(x+3)=(a-1)(2x+7)$, равносильное исходному, при условии, что $(a-1)(x+3)\neq 0$, то есть, $a\neq 1, x\neq -3$.

После приведения подобных слагаемых и сведения полученного уравнения к стандартному виду линейного уравнения $ax + b = 0$ имеем $(4a - 9)x - (31 - 2a) = 0$.

Случай 1. Если $4a - 9 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2\frac{1}{4}$, то $x = \frac{31-2a}{4a-9}$.

Теперь необходимо исключить те значения параметра a, при которых найденное значение x равно -3, чего не может быть по области допустимых значений (далее – ОДЗ) исходного уравнения. Приравняем дробь $\frac{31-2a}{4a-9}$ к -3:

$$\frac{31 - 2a}{4a - 9} = -3,$$

$$31 - 2a = -12a + 27,$$

$$10a = -4,$$

$$a = -\frac{2}{5}.$$

Таким образом, при $a = -\frac{2}{5}$ полученное в результате преобразования линейное уравнение имеет корень $x = -3$, посторонний для исходного уравнения.

Случай 2. Если $a = 2\frac{1}{4}$, то уравнение $(4a - 9)x - (31 - 2a) = 0$ примет вид $0 \cdot x = 31 - 2 \cdot \frac{9}{4}$ или $0 = 26\frac{1}{2}$ – неверное равенство, то есть, уравнение не имеет корней.

Ответ: При $a \neq 1, a \neq 2\frac{1}{4}$ и $a \neq -\frac{2}{5}$ уравнение имеет единственное решение $x = \frac{31-2a}{4a-9}$; при $a = 1$ данное уравнение не имеет смысла; при $a = 2\frac{1}{4}$ и $a = -\frac{2}{5}$ нет решений.

1.4 Квадратные уравнения и сводящиеся к ним

Определение. Квадратным уравнением (или уравнением второй степени) называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – заданные числа, причем $a \neq 0$, а x – неизвестное.

Числа a, b и c называются коэффициентами квадратного уравнения: a – коэффициент при квадрате неизвестного (старший коэффициент), b – коэффициент при неизвестном в первой степени (второй коэффициент), c – свободный член.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Неполное квадратное уравнение – это уравнение одного из следующих видов:

$$ax^2 = 0 \quad (a \neq 0),$$

$$ax^2 + c = 0 \quad (a \neq 0, c \neq 0),$$

$$ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения.

1. Уравнение $ax^2 = 0$ $(a \neq 0)$ имеет единственный корень $x = 0$.

2. Уравнение $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0, c \neq 0)$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$. Возможны два случая.

Если $\frac{c}{a} > 0$, то $-\frac{c}{a} < 0$, и поэтому уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ не имеет действительных корней.

Если $\frac{c}{a} < 0$, то $-\frac{c}{a} > 0$, и уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \left(-\frac{c}{a} > 0\right)$.

Доказательство. Действительно, перенося в уравнении $x^2 = -\frac{c}{a}$ величину $-\frac{c}{a}$ в левую часть, получаем $x^2 - \left(-\frac{c}{a}\right) = 0$.

Так как $-\frac{c}{a} > 0$, то $-\frac{c}{a} = \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$. Поэтому $x^2 - \left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 = 0$.

Разложив левую часть этого уравнения на множители, получим $\left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = 0$.

Данное произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Рассматривая $x - \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0$, получим $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$; рассматривая $x + \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0$, находим $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Следовательно, уравнение $ax^2 + c = 0$ при $\frac{c}{a} < 0$ имеет два корня $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, что и утверждалось. Ответ часто записывается в виде $x_2 = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \left(-\frac{c}{a} > 0\right)$.

Например, неполное квадратное уравнение $x^2 + 4 = 0$ не имеет действительных корней.

Для неполного квадратного уравнения $x^2 - 4 = 0$ получаем $(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$ или $x_{1,2} = \pm 2$.

Это уравнение можно решить по-другому:

$x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

3. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ можно решить с помощью разложения его левой части на множители. Очевидно, что $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow\ x(ax+b) = 0$, откуда $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$.

Например, $3x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x+8) = 0$, откуда $x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$.

Рассмотрим теперь некоторые стандартные способы решения полных квадратных уравнений.

В общем случае для решения квадратных уравнений применяется <u>метод выделения полного квадрата</u> [25].

Применение этого метода поясним сначала на примере.

Пример 1. Решить квадратное уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 3, получаем равносильное ему уравнение $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

Выделим из квадратного трехчлена $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ в левой части получившегося уравнения квадрат разности:

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}.$$

Поэтому получим:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Отсюда $x - \frac{1}{3} = \pm\frac{2}{3}$, следовательно, $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$.

Можно выделить полный квадрат в исходном уравнении и без предварительного деления на старший коэффициент 3:

$$3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3} - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}.$$

Поэтому:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Далее аналогично $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$.

Решая таким же способом квадратное уравнение общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

придем к еще одному стандартному методу решения квадратных уравнений: <u>решение по основной формуле корней квадратного уравнения</u>.

Разделим правую и левую части уравнения (1) на a, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим из квадратного трехчлена $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ квадрат суммы:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Отсюда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Определение. Выражение b^2-4ac называется *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ и обозначается буквой D: Значит,

$$D=b^2-4ac.$$

Используя обозначение дискриминанта, уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \qquad (3)$$

Знаменатель дроби положителен, так как по определению $a\neq 0$. Поэтому лишь от D зависит, какие значения принимает дробь $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ (положительные, нуль или отрицательные). Рассмотрим отдельно каждый случай.

Случай 1. Если $D>0$, то $\frac{D}{4a^2}>0$. В этом случае при решении неполного квадратного уравнения (3) относительно $x+\frac{b}{2a}$ получаем:

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \text{ или } x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{D}{4a^2}}.$$

Отсюда

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Следовательно, уравнение (1) при $D>0$ имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Применяется также запись: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Определение. Равенство $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ называют *основной формулой корней квадратного уравнения*.

Случай 2. Если $D = 0$, то $\frac{D}{4a^2} = 0$. В этом случае при решении неполного квадратного уравнения (3) относительно $x + \frac{b}{2a}$ получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = 0.$$

Отсюда

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Следовательно, уравнение (1) при $D = 0$ имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$. Этот корень можно получить по основной формуле корней квадратного уравнения. При $D = 0$ она дает:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Строго говоря, в этом случае квадратное уравнение имеет не один корень, а два равных (совпавших) действительных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Случай 3. Если $D < 0$, то $\frac{D}{4a^2} < 0$. В этом случае как уравнение (3), так и уравнение (1) не имеет корней в поле действительных чисел R.

Итак, по дискриминанту квадратного уравнения определяют, сколько оно имеет действительных корней:

– если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня;

– если $D = 0$, то уравнение один (два совпавших) действительный корень;

– если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

По основной формуле корней квадратного уравнения можно находить и корни неполных квадратных уравнений, но проще вычислять их путем разложения левой части неполного квадратного уравнения на множители, как было показано.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$$

имеет более одного корня?

Решение. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $a(a+3) = 0$, данное уравнение будет линейным.

При $a = 0$ уравнение примет вид $6x - 9 = 0$, корнем которого является $x = 1{,}5$.

При $a = -3$ уравнение примет вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$, корнем которого является любое число.

Случай 2. Если $a \neq 0, a \neq -3$, то получим квадратное уравнение, которое будет иметь более одного корня только в том случае, если дискриминант положителен. Составим неравенство:

$$D > 0,$$

$$D = (2a+6)^2 + 4a(a+3)(3a-9) > 0,$$

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 + 3a(a+3)^2 > 0,$$

$$(a+3)^2(3a+1) > 0,$$

$$a > -\frac{1}{3}.$$

С учетом $a \neq 0, a \neq -3$ получим, что уравнение имеет два корня при $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

Объединив оба случая, получим: $a \in -3 \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $a \in -3 \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

Рассмотрим отдельно квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$. Здесь $b = 2k$, то есть второй коэффициент является четным.

Определение. Выражение $D_1 = k^2 - ac$, где $D_1 = \frac{D}{4}$, называют *дискриминантом квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.*

Определение. Выражение $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$ называют *формулой корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом*.

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

Решение. Второй коэффициент уравнения $b = -16$ – четное число, отсюда $k = -8$. Найдем корни этого уравнения формуле $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$.

$D_1 = (-8)^2 - 3 \cdot 5 = 49$, тогда $x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{49}}{3}$, $x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $5; \frac{1}{3}$.

Рассмотрим также квадратные уравнения, в которых старший коэффициент $a = 1$. Обозначим в нем второй коэффициент буквой p, а свободный член буквой q. Уравнение примет вид $x^2 + px + q = 0$.

Определение. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ называют *приведённым*.

Из основной формулы квадратного уравнения можно получить более простую формулу корней приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2},$$

где $D = p^2 - 4q$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}.$$

Решение. Разложив знаменатели на множители, имеем

$$\frac{2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x - 4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}.$$

После приведения дробей к общему знаменателю $x(x^2-4)$ получим уравнение $2x+(x-4)(x-2)=x+2$ или $x^2-5x+6=0$, равносильное исходному уравнению, при условии, что $x(x^2-4)\neq 0$, т.е. $x\neq 0, x\neq \pm 2$. Находим корни приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$

отсюда $x_1=3, x_2=2$. Так как $x_2=2$ не входит в область допустимых значений исходного уравнения, то, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Ответ: 3.

Пример 5. Решить уравнение $(x-5)(x+8)=0$.

Решение. Левая часть равенства представляет собой произведение двух множителей. Так как это произведение равно нулю, то

$$x-5=0 \text{ или } x+8=0.$$

Отсюда $x_1=5, x_2=-8$.

Ответ: $5; -8$.

Раскроем скобки в левой части уравнения из примера 5 и приведем подобные слагаемые. Получим приведенное квадратное уравнение:

$$x^2-5x+8x-40=0,$$

$$x^2+3x-40=0.$$

Заметим, что второй коэффициент в этом уравнении равен числу, противоположному сумме корней данного уравнения, а свободный член – произведению этих корней. Этим свойством обладают корни любого приведенного квадратного уравнения, и на нем основан еще один стандартный способ решения квадратных уравнений: с помощью теоремы Виета.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$ [30].

Доказательство. Так как по условию квадратное уравнение имеет корни, то дискриминант D неотрицателен.

При $D > 0$ корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выражаются следующим образом:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Имеем:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{2a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

При $D = 0$ корни квадратного уравнения $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Имеем:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacksquare$$

Следствие. Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = c$.

Следствие является частным случаем теоремы Виета.

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ [30].

Доказательство. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Преобразуем его в приведенное:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Согласно условию теоремы это уравнение можно записать так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Подставим в левую часть этого уравнения сначала $x = \alpha$, а затем $x = \beta$. Получим:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0,$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким образом, числа α и β являются корнями уравнения $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$, а следовательно, и корнями равносильного ему квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. ■

Следствие. Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Это следствие позволяет решать некоторые квадратные уравнения устно, не используя формулу корней квадратного уравнения.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение [41].

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 6, x_1x_2 = a^2 - 4a + 12$. Отсюда модуль разности корней уравнения:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{-4a^2 + 16a - 12}.$$

Рассмотрим функцию $f(a) = -4a^2 + 16a - 12$. Ее график представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, значит, наибольшее значение этой функции достигается в вершине параболы.

$$a_0 = \frac{-16}{2 \cdot (-4)} = 2.$$

Ответ: при $a = 2$.

Рассмотрим также некоторые уравнения, сводящиеся к квадратным.

Определение. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется *биквадратным* [30].

Биквадратное уравнение сводится к квадратному путем замены переменной.

Пример 7. Решить уравнение $x^7 = 2x^5 + 3x^3$ [24].

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^7 - 2x^5 - 3x^3 = 0$, а затем вынесем общий множитель:

$$x^3(x^4 - 2x^2 - 3) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$x^3 = 0 \text{ или } x^4 - 2x^2 - 3 = 0.$$

Из первого уравнения получим $x = 0$. Во втором уравнении введем новую переменную $y = x^2, y \geq 0$ в поле действительных чисел. Получим:

$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

По теореме Виета $y_1 = 3, y_2 = -1$, причем y_2 – посторонний корень. Выполним обратную замену, получим:

$$x^2 = 3,$$

$$x = \pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $-\sqrt{3};\ 0;\ \sqrt{3}$.

Пример 8. Решить уравнение $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$ [30].

Введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x},\ y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Получим уравнение:

$$7y - 2(y^2 - 2) = 9,$$

$$2y^2 - 7y + 5 = 0.$$

По теореме Виета: $y_1 + y_2 = \frac{7}{2}, y_1 y_2 = \frac{5}{2}$, отсюда $y_1 = \frac{5}{2}, y_2 = 1$.

Выполним обратную замену:

1) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, отсюда $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.

2) $x + \frac{1}{x} = 1$ – уравнение не имеет корней в поле действительных чисел.

Ответ: $2; \frac{1}{2}$.

Пример 9. Решить уравнение $(x^2 + 3x - 20)(x^2 + 3x + 2) = 240$ [24].

Решение. Введем новую переменную $y = x^2 + 3x$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$(y - 20)(y + 2) = 240.$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и решим квадратное уравнение относительно переменной y:

$$y^2 - 18y - 280 = 0.$$

По теореме Виета: $y_1 = 28, y_2 = -10$. Выполним обратную замену:

1) $x^2 + 3x = 28 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0$, отсюда по теореме Виета корни $x_1 = -7, x_2 = 4$.

2) $x^2 + 3x = -10 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 10 = 0$, $D = -31 < 0$, следовательно, действительных корней нет.

Ответ: $-7;\ 4$.

1.5 Дробно-рациональные уравнения и уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

Определение. Уравнение, левая и правая части которого представляют собой рациональные выражения, называют *рациональными*.

Определение. Если обе части рационального уравнения или хотя бы одна из них являются дробными выражениями, то такое уравнение называется *дробно-рациональным* [7].

Любое дробно-рациональное уравнение можно заменить равносильным ему уравнением вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – некоторые многочлены.

Это уравнение, свою очередь, можно заменить равносильной ему системой уравнений

$$\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, дробно-рациональные уравнения решаются методом приведения к целому уравнению путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель дробей и последующим исключением посторонних корней (корней, обращающих знаменатели дробей в нуль).

Пример 1. Решить уравнение $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$, используя введение новой переменной [7].

Решение. Введем новую переменную $y = x^2 - 2x + 2$, $y \neq 0, y \neq -1$, $y \neq -2$. Получим уравнение:

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{y+1} = \frac{6}{y+2}.$$

Сложим дроби в левой части равенства, получим:

$$\frac{2y + y + 1}{y(y+1)} = \frac{6}{y+2} \Leftrightarrow \frac{3y+1}{y(y+1)} = \frac{6}{y+2}.$$

С учетом ограничений $y \neq 0, y \neq -1, y \neq -2$, перейдем к целому уравнению и решим его.

$$(3y+1)(y+2) = 6y(y+1),$$

$$3y^2 + y + 6y + 2 = 6y^2 + 6y,$$

$$3y^2 - y - 2 = 0.$$

По теореме Виета $y_1 = -\frac{2}{3}, y_2 = 1$. Выполним обратную замену:

1) $x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$, отсюда $x_{1,2} = 1$.

2) $x^2 - 2x + 2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$, $D < 0$, следовательно, действительных корней нет.

Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{(x^2-2x+5)^2}{x^3+5x} = 2\frac{2}{3}$ [7].

Решение. Преобразуем выражение в левой части равенства. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, разделим числитель и знаменатель на x^2. Получим:

$$\frac{\left(x - 2 + \frac{5}{x}\right)^2}{x + \frac{5}{x}} = 2\frac{2}{3}.$$

Введем новую переменную $y = x + \frac{5}{x}, y \neq 0$ и решим полученное уравнение:

$$\frac{(y-2)^2}{y} = \frac{8}{3},$$

$$8y = 3(y^2 - 4y + 4),$$

$$3y^2 - 20y + 12 = 0.$$

Отсюда $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = 6$. Выполним обратную замену:

1) $x + \frac{5}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x^2 - 2x + 15 = 0, D < 0,$ следовательно действительных корней нет.

2) $x + \frac{5}{x} = 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$, отсюда по теореме Виета $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Ответ: $1;\ 5$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$ [41].

Решение. Определим область допустимых значений: $x \neq 2$.

Введем новую переменную $y = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}$. Возведем обе части в квадрат, получим $y^2 = \frac{(x-2)^2}{4} - 3 + \frac{9}{(x-2)^2}, \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{9}{(x-2)^2} = y^2 + 3$.

Решим полученное уравнение:

$$2(y^2 + 3) = 7y + 10,$$

$$2y^2 - 7y - 4 = 0.$$

По теореме Виета $y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 4$. Выполним обратную замену:

1) $\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = -\frac{1}{2}$.

Так как $x \neq 2$, умножим обе части равенства на $2(x-2)$. Получим:

$$(x-2)^2 - 6 + x - 2 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Отсюда по теореме Виета корни $x_1 = -1, x_2 = 4$.

2) $\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = 4$.

Аналогично получим уравнение:

$$(x-2)^2 - 6 - 8(x-2) = 0,$$

$$x^2 - 12x + 14 = 0.$$

$D = 144 - 56 = 88$, отсюда корни $x_{3,4} = \frac{12 \pm \sqrt{88}}{2} = 6 \pm \sqrt{22}$.

Ответ: $-1;\ 6 - \sqrt{22};\ 4;\ 6 + \sqrt{22}$.

Рассмотрим также уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля, или абсолютной величины. Для действительных чисел модуль можно определить следующим образом.

Определение. Абсолютная величина, или модуль, действительного числа a – это неотрицательное число, обозначаемое $|a|$, определяемое следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Кроме того, модуль можно рассматривать как непрерывную кусочно-линейную функцию, определенную на всей числовой прямой [28].

Среди стандартных методов решения уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля, выделяют следующие:

- метод интервалов;
- возведение обеих частей уравнения в квадрат;
- замена уравнения равносильной ему совокупностью систем:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим их подробнее на примерах.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$ [41].

Решение. Найдем нули подмодульных выражений:

$$x_1 = a^2 - a - 2, \qquad x_2 = a^2 - 3a + 1.$$

Заметим, что $x_1 - x_2 = a^2 - a - 2 - (a^2 - 3a + 1) = 2a - 3 \geq 0$ (как сумма модулей, принимающих неотрицательные значения), следовательно, $x_1 \geq x_2$. Найдем корни уравнения на каждом интервале.

1) $x < x_2$

Тогда уравнение примет вид

$$-(x - a^2 + a + 2) - (x - a^2 + 3a - 1) = 2a - 3.$$

Решив это уравнение, получим $x = a^2 - 3a + 1 = x_2$ – не входит в указанный промежуток.

2) $x_2 \leq x \leq x_1$

Тогда уравнение примет вид

$$-(x - a^2 + a + 2) + x - a^2 + 3a - 1 = 2a - 3.$$

Решив это уравнение, получим $x \in [x_2; x_1]$.

3) $x > x_1$

Тогда уравнение примет вид

$$x - a^2 + a + 2 + x - a^2 + 3a - 1 = 2a - 3.$$

Решив это уравнение, получим $x = a^2 - a - 2 = x_1$ – не входит в указанный промежуток.

Таким образом, решением уравнения является отрезок $[x_2; x_1]$, причем по условию ни одно из решений не должно принадлежать интервалу

$(4;19)$. Тогда либо $x_1 \le 4$, либо $x_2 \ge 19$. С учетом $2a-3 \ge 0$, получим систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2-a-2 \le 4, \\ a^2-3a+1 \ge 19, \end{array}\right. \\ 2a-3 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2-a-6 \le 0, \\ a^2-3a-18 \ge 0, \end{array}\right. \\ a \ge \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Решив систему, получим $a \in [1{,}5;3] \cup [6;+\infty)$.

Ответ: при $a \in [1{,}5;3] \cup [6;+\infty)$.

Пример 5. Решить уравнение $|x-1| = |x^2-3x+2|$.

Решение. Разложим многочлен под знаком модуля в правой части равенства на множители. Получим

$$|x-1| = |(x-1)(x-2)|.$$

Возведем обе части равенства в квадрат, а затем преобразуем получившееся уравнение и найдем его корни.

$$(x-1)^2 = (x-1)^2(x-2)^2,$$
$$(x-1)^2(x-2)^2-(x-1)^2 = 0,$$
$$(x-1)^2((x-2)^2-1) = 0,$$
$$(x-1)^2(x-2-1)(x-2+1) = 0,$$
$$(x-1)^3(x-3) = 0.$$

Отсюда $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Ответ: $1;\ 3$.

Пример 6. Решить уравнение $|x^3-3x^2+x| = x-x^3$.

Решение. Заменим уравнение равносильной ему совокупностью систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3-3x^2+x < 0, \\ -(x^3-3x^2+x) = x-x^3, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3-3x^2+x \ge 0, \\ x^3-3x^2+x = x-x^3. \end{cases} \end{array}\right.$$

В каждой из систем решим уравнение и с помощью прямой подстановки установим, являются ли найденные значения корнями уравнения.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + x < 0, \\ -(x^3 - 3x^2 + x) = x - x^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x < 0, \\ 3x^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + x < 0, \\ x(3x - 2) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x < 0, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$x_1 = 0$ – посторонний корень, так как не удовлетворяет неравенству, тогда решением первой системы является $x = \frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + x \geq 0, \\ x^3 - 3x^2 + x = x - x^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x \geq 0, \\ 2x^3 - 3x^2 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + x \geq 0, \\ \mathrm{x}^2(2x - 3) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x \geq 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$x_4 = \frac{3}{2}$ – посторонний корень, так как не удовлетворяет неравенству, тогда решением второй системы является $x = 0$.

Ответ: 0; $\frac{2}{3}$.

1.6 Иррациональные уравнения

Определение. Иррациональным называют уравнение, содержащее переменную под знаком корня, или уравнение, в котором переменная входит в основание степени с дробным показателем [7].

Иррациональные уравнения решаются, в основном, следующими методами:

- замена иррационального уравнения равносильным ему рациональным уравнением;
- замена иррационального уравнения равносильной ему системой рациональных уравнений и неравенств;

- возведение обеих частей уравнения в n-ю степень с последующей проверкой и отбрасыванием посторонних корней;
- введение новой переменной [9].

Рассмотрим сначала уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$, где $f(x)$ – иррациональное выражение, a – некоторое число. Такие иррациональные уравнения решаются методом замены равносильными им рациональными уравнениями.

Теорема. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при четном n и $a < 0$ не имеет корней, при $a \geq 0$ оно равносильно уравнению $f(x) = a^n$.

Это следует из определения арифметического корня.

Теорема. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при нечетном n и любом a равносильно уравнению $f(x) = a^n$.

Это следует из определения корня нечетной степени.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^2 - 4x + 24} = 3$ [7].

Решение. Возведем обе части равенства в третью степень, получим

$$x^2 - 4x + 24 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 3 = 0.$$

По теореме Виета: $x_1 = 3, x_2 = 1$.

Ответ: $1;\ 3$.

Рассмотрим теперь уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$. Такие иррациональные уравнения решаются методом замены равносильными им рациональными уравнениями либо равносильными им системами рациональных уравнений и неравенств.

Теорема. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ (1), где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения и n – четное число, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g^n(x), \\ \quad g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Пусть x_1 – корень уравнения (1). Тогда верно равенство $\sqrt[n]{f(x_1)} = g(x_1)$. Так как при четном n число $\sqrt[n]{f(x_1)}$

неотрицательное, то и равное ему число $g(x_1)$ неотрицательное. Следовательно, если уравнение (1) имеет корень $x = x_1$, то это число удовлетворяет системе (2).

Покажем, что верно и обратное. Пусть x_2 – число, которое удовлетворяет системе (2), то есть $f(x_2) = g^n(x_2)$ – верное равенство и $g^n(x_2) \geq 0$ – верное неравенство. Тогда по определению арифметического корня верно равенство $\sqrt[n]{f(x_2)} = g(x_2)$.

Таким образом, каждое решение уравнения (1) является решением системы (2), и наоборот, каждое решение системы (2) является решением уравнения (1), значит, уравнение (1) равносильно системе (2). ■

Теорема. Уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ (3), где $f(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения и n – нечетное число, большее 1, равносильно уравнению $f(x) = g^n(x)$ (4).

Доказательство. Пусть x_1 – корень уравнения (3). Тогда верно равенство $\sqrt[n]{f(x_1)} = g(x_1)$. Возведем левую и правую части этого равенства в n-ю степень. Получим верное равенство $f(x_1) = g^n(x_1)$. Значит, x_1 – корень уравнения (4).

Покажем, что верно и обратное. Если x_2 – корень уравнения (4), то верно равенство $f(x_2) = g^n(x_2)$. Тогда по определению корня нечетной степени верно равенство $\sqrt[n]{f(x_2)} = g(x_2)$, то есть x_2 – корень уравнения (3).

Значит, уравнения (3) и (4) равносильны. ■

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{6x^2 - 4x + 1} = 1 - x$ [7].

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6x^2 - 4x + 1 = (1 - x)^4, \\ 1 - x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 4x + 1 = (1 - x)^4, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Решим уравнение. Для этого выполним возведение в степень, раскроем скобки и приведем подобные.

$$6x^2 - 4x + 1 = (1 - x)^4,$$

$$6x^2 - 4x + 1 = 1 + 4x^2 + x^4 - 4x - 4x^3 + 2x^2,$$

$$x^4 - 4x^3 = 0.$$

Вынесем общий множитель за скобки и найдем корни уравнения.

$$x^3(x-1) = 0,$$

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 1.$$

Оба корня удовлетворяют неравенству системы $x \leq 1$.

Ответ: $0; \; 1$.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ сводится к системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Поскольку неотрицательное число не может равняться отрицательному, достаточно решить одно из двух неравенств: $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$ [9].

Кроме того, иррациональные уравнения такого вида можно решать путем возведения обеих частей уравнения в квадрат с последующей обязательной проверкой полученных решений и отбрасыванием посторонних корней.

Для некоторых видов иррациональных уравнений целесообразно использовать комбинацию этих методов.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 28x + 53} = 3\sqrt{x^2 + 6x + 8}$ [9].

Решение. Заметим, что корни уравнения $2x^2 + 28x + 53 = 0$ являются иррациональными числами, поэтому заменим исходное уравнение равносильной ему системой

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \geq 0, \\ 9(x^2 + 6x + 8) = 2x^2 + 28x + 53. \end{cases}$$

Решим уравнение $x^2 + 6x + 8 = 0$. Корни найдем по теореме Виета: $x_1 = -4, x_2 = -2$. Тогда решением неравенства в системе является объединение интервалов $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$.

Решим уравнение системы.

$$9(x^2 + 6x + 8) = 2x^2 + 28x + 53,$$

$$7x^2 + 26x + 19 = 0.$$

$D = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 19 = 676 - 532 = 144$. Тогда корни уравнения: $x_{1,2} = \frac{-26 \pm 12}{14} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{19}{7}$.

При этом корень $x_2 = -\frac{19}{7}$ является посторонним, так как не удовлетворяет неравенству системы.

Ответ: -1.

Отметим, что при решении уравнения методом возведения обеих частей равенства в квадрат, при проверке корней у обучающихся часто возникают вычислительные ошибки.

Пример 4. Решить уравнение $2\sqrt{8 - x} + \sqrt{x + 8} = 4 - 3\sqrt{x^2 - 64}$ [9].

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения.

$$\begin{cases} 8 - x \geq 0, \\ x + 8 \geq 0, \\ x^2 - 64 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 8, \\ x \geq -8, \\ x \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty). \end{cases} \Rightarrow x \in \{-8; 8\}.$$

Простой подстановкой проверим, являются ли числа 8 и -8 корнями данного уравнения.

При $x_1 = -8$ получим

$2\sqrt{8 + 8} + \sqrt{-8 + 8} = 4 - 3\sqrt{64 - 64} \Rightarrow 8 = 4$ – неверное равенство.

Следовательно, $x_1 = -8$ не является корнем исходного уравнения.

При $x_2 = 8$ получим

$2\sqrt{8 - 8} + \sqrt{8 + 8} = 4 - 3\sqrt{64 - 64} \Rightarrow 4 = 4$ – верное равенство.

Следовательно, $x_2 = 8$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 8.

Отметим, что определение ОДЗ данного уравнения практически сразу приводит к нахождению корня. Если же возводить обе части равенства в квадрат до избавления от радикалов, получится уравнение 8 степени, решение которого для обучающихся затруднительно.

При решении уравнений вида $A\sqrt[n]{f(x)} + B\sqrt[2n]{f(x)} + C = 0$, где $f(x)$ – линейная функция или квадратный трехчлен, используется метод введения новой переменной $t = \sqrt[2n]{f(x)}$, $t \geq 0$, что приводит к квадратному уравнению $At^2 + Bt + C = 0$. Решая это уравнение, отбрасываем посторонние корни ($t < 0$) и приходим к уравнению $f(x) = t_0, t_0 \geq 0$ [9].

В уравнениях вида $Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C = 0$ вводят новую переменную $t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{6x - x^2 - 5} = x^2 - 6x + 11$ [9].

Решение. Преобразуем правую части этого уравнения и получим

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} = 6 - (6x - x^2 - 5).$$

Введем новую переменную $t = \sqrt{6x - x^2 - 5}, t \geq 0$. Получим квадратное уравнение

$$t = 6 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0.$$

По теореме Виета корни данного уравнения $t_1 = 2, t_2 = -3$. При этом $t_2 = -3$ – посторонний корень.

Выполним обратную замену, получим $\sqrt{6x - x^2 - 5} = 2$.

Возведем обе части равенства в квадрат и найдем корни этого уравнения.

$$x_2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

В статьях и монографиях многих авторов можно найти определенные классификации нестандартных задач или методов их решения. Так, В. П. Супрун выделяет следующие нестандартные методы решения уравнений:

1) метод функциональной подстановки;
2) метод тригонометрической подстановки;
3) методы, основанные на использовании численных неравенств;
4) методы, основанные на использовании монотонности функций;
5) методы решения функциональных уравнений;
6) методы, использующие понятие вектора;
7) комбинированные методы;
8) методы, основанные на использовании ограниченности функций;
9) методы решения симметрических систем уравнений;
10) методы решения уравнений, содержащих целые или дробные части [17; 44].

Некоторые из данных методов не требуют от обучающихся усвоения какого-либо теоретического материала сверх изложенного в учебниках по математике с 7 по 9 классы, а значит, могут активно применяться для углубления и расширения знаний, умений и навыков обучающихся 8-9 классов в области решения уравнений как на уроках, так во внеурочной деятельности.

В данной главе рассмотрим различные нестандартные методы решения алгебраических уравнений, перечисленных в главе 1. На основании данного материала разработаем и приведем примерную программу факультативного курса по математике для 9 классов «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений» (см. Приложение 2), а также сборник задач, достаточный для полного и комплексного освоения каждого метода (см. Приложение 3).

Апробация результатов исследования была получена во время проведения двух занятий в рамках внеурочного курса «Подготовка к олимпиадам» в 9-х классах МАОУ «Лицей №67 г. Челябинска». Технологическая карта уроков представлена в Приложении 4.

В ходе проведения данных занятий были выявлены некоторые трудности и проблемы в освоении обучающимися отдельных нестандартных методов решения уравнений и задач повышенной сложности, на основании которых в данной главе приведены методические рекомендации для преподавателя.

Заметим, что в ходе данных занятий был отмечен значительный рост интереса обучающихся к решению уравнений, а также к освоению новых, нестандартных методов. Кроме того, стоит отметить, что в начале первого занятия обучающиеся испытывали значительные затруднения в отыскании подхода к решению нестандартных задач, «впадали в ступор» и испытывали недостаток знаний для решения конктретных уравнений. Однако уже к концу второго урока более двух третей учеников с энтузиазмом подходили к решению новой задачи, не стеснялись высказывать предположения о методе решения, пытались изобретать новые подходы, что свидетельствует об активизации, развитии и формировании математического мышления и творческих способностей обучающихся.

2.1 Метод функциональной подстановки

Метод функциональной подстановки является самым распространенным методом решения задач повышенной сложности. Суть метода состоит во введении новой переменной $y = f(x)$, применение которой значительно упрощает вид уравнения и ход его решения.

Основная трудность решения задач методом функциональной подстановки для обучающихся заключается в том, что зачастую трудно угадать вид самой подстановки и вид уравнений, где эту подстановку можно использовать [44].

Нужно также обращать внимание обучающихся на необходимость определения области значений функции $y = f(x)$, представляющей собой замену, во избежание возникновения посторонних корней.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся уравнения, которые эффективно решаются методом функциональной подстановки.

Задача 1. Решить уравнение $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Решение. Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения. Тогда разделим обе части уравнения на x^3. Получим

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0.$$

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Введем новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$, $y \geq 2$ (этот факт докажем в параграфе 2.2).

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2.$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$y^3 - 3y - 3(y^2 - 2) + 2y - 3 = 0,$$

$$y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0,$$

$$y^2(y-3)-(y-3)=0,$$

$$(y^2-1)(y-3)=0,$$

$$y^2-1=0 \qquad \text{или} \qquad y-3=0.$$

Отсюда $y_{1,2}=\pm 1, y_3=3$.

Так как по условию $y \geq 2$, то $y=3$. Выполним обратную замену.

$$x+\frac{1}{x}=3,$$

$$x^2+1=3x,$$

$$x^2-3x+1=0.$$

$$D=5 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Задача 2. Решить уравнение $(x^2+4x+8)^2+3x^3+14x^2+24x=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2=0.$$

Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения. Тогда разделим обе части уравнения на x^2. Получим

$$\left(\frac{x^2+4x+8}{x}\right)^2+3\left(\frac{x^2+4x+8}{x}\right)+2=0.$$

Введем новую переменную $y=\frac{x^2+4x+8}{x}$, получим

$$y^2+3y+2=0.$$

По теореме Виета: $y_1=-2, y_2=-1$. Выполним обратную замену:

1) $\frac{x^2+4x+8}{x}=-2 \Rightarrow x^2+4x+8=-2x \Rightarrow x^2+6x+8=0$. По теореме Виета $x_1=-4, x_2=-2$.

2) $\frac{x^2+4x+8}{x}=-1 \Rightarrow x^2+4x+8=-x \Rightarrow x^2+3x+8=0$.

$D<0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

Ответ: -4; -2.

Задача 3. Решить уравнение $\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}} = 30.$

Решение. Введем новые переменные $s = \sqrt[3]{34-x},\ t = \sqrt[3]{x+1}.$ Очевидно, что $s \neq t, s - t \neq 0$, тогда получим

$$\frac{s^3t - st^3}{s-t} = 30,$$

$$st(s^2 - t^2) = 30(s-t),$$

$$st(s-t)(s+t) = 30(s-t),$$

$$st(s+t) = 30.$$

Рассмотрим сумму кубов и куб суммы выражений s и t.

$$s^3 + t^3 = \left(\sqrt[3]{34-x}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = 34 - x + x + 1 = 35,$$

$$(s+t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 = s^3 + t^3 + 3st(s+t).$$

Тогда $(s+t)^3 = 35 + 3 \cdot 30 = 125$, отсюда $s + t = 5$. Тогда $st = 6$. Составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} s + t = 5, \\ st = 6. \end{cases} \Rightarrow s_1 = 2, t_1 = 3 \text{ и } s_2 = 3, t_2 = 2.$$

Выполним обратную замену:

1) $\sqrt[3]{34-x} = 2 \Rightarrow 34 - x = 8 \Rightarrow x_1 = 26;$

2) $\sqrt[3]{34-x} = 3 \Rightarrow 34 - x = 27 \Rightarrow x_2 = 7.$

Ответ: $7;\ 26.$

Задача 4. Решить уравнение $64\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 - \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3 = 63.$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\left(4 \cdot \frac{x+3}{x-1}\right)^3 - \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3 = 63.$$

Введем новые переменные $s = 4 \cdot \frac{x+3}{x-1}, t = \frac{x+3}{x+2}$. Тогда уравнение примет вид

$$s^3 - t^3 = 63.$$

Найдем разность s и t:

$$s - t = 4 \cdot \frac{x+3}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} = (x+3)\left(\frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) =$$

$$= (x+3) \cdot \frac{4(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = (x-3) \cdot \frac{3x+9}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{3(x+3)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{3st}{4}.$$

Тогда

$$s^3 - t^3 = (s-t)(s^2+st+t^2) = (s-t)((s-t)^2+3st) =$$

$$= \frac{3st}{4}\left(\left(\frac{3st}{4}\right)^2 + 3st\right) = \frac{3st}{4}\left(\frac{9s^2t^2}{16} + 3st\right) = 63.$$

Отсюда

$$\frac{st}{4}\left(\frac{3s^2t^2}{16} + st\right) = 7.$$

Сделаем еще одну замену $y = st$. Получим новое уравнение

$$\frac{y}{4}\left(\frac{3y^2}{16} + y\right) = 7,$$

$$y(3y^2 + 16y) = 448,$$

$$3y^3 + 16y^2 - 448 = 0.$$

Если корни данного уравнения целые, то они являются делителями свободного члена. $448 = 2^6 \cdot 7$. Подбором найдем корень $y_1 = 4$. Так как функция $f(y) = 3y^3 + 16y^2 - 448$ монотонна на всей области определения $y \in R$, то уравнение $f(y) = 0$ имеет не более одного корня. Значит, $y = 4$ – единственный корень.

Последовательно выполним обратную замену.

$$y = st = 4,$$

$$st = \frac{4(x+3)^2}{(x-1)(x+2)} = 4.$$

Положим $x \neq 1, x \neq -2$, тогда

$$(x+3)^2 = (x-1)(x+2),$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + x - 2,$$

$$5x = -11,$$

$$x = -2{,}2.$$

Ответ: $-2{,}2$.

Задача 5. Решить уравнение $4\sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} = x + 4$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 4 - x^2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ (x-2)(x+2) \leq 0. \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 2].$$

Перепишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{4 - x^2} = x - 4\sqrt{x} + 4,$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2.$$

Введем новую переменную $t = \sqrt{x}, t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$. Получим

$$\sqrt{4 - t^4} = (t - 2)^2.$$

Левая и правая части равенства неотрицательны. Возведем обе части равенства в квадрат. Получим

$$4 - t^4 = (t - 2)^4,$$

$$(t - 2)^4 + t^4 = 4.$$

Введем еще одну переменную $s = \frac{t-2+t}{2} = t - 1, -1 \leq t \leq \sqrt{2} - 1$ – среднее арифметическое оснований степеней. Тогда уравнение примет вид

$$(s - 1)^4 + (s + 1)^4 = 4.$$

Преобразуем его:

$$s^4 + 4s^2 + 1 - 4s^3 - 4s + 2s^2 + s^4 + 4s^2 + 1 + 4s^3 + 4s + 2s^2 = 4,$$

$$2s^4 + 12s^2 + 2 = 4,$$

$$s^4 + 6s^2 - 1 = 0.$$

Получили биквадратное уравнение. Найдем его корни.

$D = 36 + 4 = 40 \Rightarrow s^2 = \frac{-6+2\sqrt{10}}{2}$ или $s^2 = \frac{-6-2\sqrt{10}}{2}$ – невозможно.

$$s^2 = \frac{-6 + 2\sqrt{10}}{2} = -3 + \sqrt{10} \Rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{-3 + \sqrt{10}} = \pm\sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

Выполним обратную замену $s = t - 1, t = \sqrt{x}$, отсюда $x = t^2 = (s+1)^2$. Тогда

$$x_1 = \left(\sqrt{\sqrt{10} - 3} + 1\right)^2 = \sqrt{10} - 3 + 2\sqrt{\sqrt{10} - 3} + 1 =$$

$$= \sqrt{10} - 2 + 2\sqrt{\sqrt{10} - 3},$$

$$x_2 = \left(1 - \sqrt{\sqrt{10} - 3}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{\sqrt{10} - 3} + \sqrt{10} - 3 =$$

$$= \sqrt{10} - 2 - 2\sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \sqrt{10} - 2 \pm 2\sqrt{\sqrt{10} - 3}$.

2.2 Методы, основанные на применении численных неравенств

Для решения задач повышенного уровня сложности в некоторых случаях применяется метод, в основу которого положено использование известных численных неравенств (Коши, Бернулли и Коши–Буняковского), изучению которых в основной школе не уделяется или почти не уделяется никакого внимания. Так, например, из всех рассмотренных в первой главе учебно-методических комплексов только учебник Макарычева Ю. Н. для углубленного изучения алгебры в 9 классе содержит формулировку и доказательство неравенства Коши для $n = 2$. Во всех остальных учебниках этому не уделяется должного внимания.

Однако многие нестандартные задачи эффективно решаются применением численных неравенств. Рассмотрим их.

Неравенство Коши представляет собой неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического n неотрицательных чисел.

Пусть $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$, тогда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{1}$$

где $n \geq 2$. Причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ [14].

Итак, если в (1) подставить $n = 2$, то

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) чаще всего встречается при решении школьных задач по математике.

Если в (2) положить $a_1 = a, a_2 = \frac{1}{a}$, где $a > 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (3а)$$

Здесь неравенство равносильно равенству только при $a = 1$.

Отметим, что имеется аналог неравенства (3а) для отрицательных значений a, а именно, если $a < 0$, то

$$a + \frac{1}{a} \leq -2. \qquad (3б)$$

Данное неравенство превращается в равенство при $a = -1$.

<u>Неравенство Бернулли</u>

Наиболее распространенным является неравенство Бернулли, которое формулируется в следующей форме: если $x > -1$, то для любого натурального n имеет место

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad (4)$$

причем равенство достигается при $x = 0$ или $n = 1$.

Существует также более общее неравенство Бернулли, которое содержит в себе два неравенства:

если $p < 0$ или $p > 1$, то

$$(1 + x)^p \geq 1 + px, \qquad (5а)$$

если $0 < p < 1$, то

$$(1 + x)^p \leq 1 + px, \qquad (5б)$$

где $x > -1$. Равенства в данном случае имеет место только при $x = 0$. Верно и обратное утверждение.

Неравенство Коши-Буняковского

Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ имеет место

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2), \quad (6)$$

где $n \ge 2$ [14].

Причем равенство в (6) достигается в том и только в том случае, когда числа a_k и b_k пропорциональны, то есть, существуют такие числа α и β, что $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$ и для всех $k = 1,2,\ldots,n$ выполняется равенство

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0.$$

На основе использования неравенства Коши-Буняковского можно доказать неравенство

$$(a + b)^n \le 2^{n-1}(a^n + b^n),$$

которое справедливо для произвольных $a(a \ge 0), b(b \ge 0)$ и натурального числа n.

Доказательства всех приведенных неравенств можно найти в соответствующей учебно-методической литературе [14].

Рассмотрим теперь некоторые задачи, решаемые с использованием численных неравенств.

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{25x(2x^2 + 9)} = 4x + \frac{3}{x}$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt[3]{25x^4 \cdot (2x^2 + 9)} = 4x^2 + 3.$$

Применим к левой части уравнения неравенство Коши (1) при $n = 3$. Тогда

$$\sqrt[3]{25x^4 \cdot (2x^2 + 9)} \le \frac{5x^2 + 5x^2 + (2x^2 + 9)}{3} = 4x^2 + 3.$$

Видим, что полученное неравенство превратилось в равенство, что возможно только при $5x^2 = 2x^2 + 9$, то есть при $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

С помощью проверки убедимся, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=2$.

Решение. Применим к слагаемым в левой части равенства неравенство Бернулли (5б). Тогда получим

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}}\leq$$

$$\leq 1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}+1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}=2.$$

Видим, что полученное неравенство превратилось в равенство, следовательно, $\sqrt{1-x^2}=0$. Отсюда $x_{1,2}=\pm1$.

Ответ: ±1.

Задача 3. Решить уравнение $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Применим неравенство Коши-Буняковского (6) к левой части уравнения. Тогда

$$\left(x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)^2\leq(x^2+1^2)(x+1+3-x)=4(x^2+1).$$

Отсюда следует, что

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\leq2\sqrt{x^2+1}.$$

Видим, что полученное неравенство превратилось в равенство, что возможно только если выполняется равенство

$$\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}.$$

Отсюда следует, что $0<x<3$.

Возведем обе части уравнения $x\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}$ в квадрат. Получим

$$x^3-3x^2+x+1=0.$$

Так как $x_1=1$ – корень, то

$$x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)=0,$$

$$x^2-2x-1=0.$$

$D = 4 + 4 = 8 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Корень $x_3 = 1 - \sqrt{2}$ – посторонний, так как не удовлетворяет неравенству $0 < x < 3$.

Ответ: $1;\ 1 + \sqrt{2}$.

2.3 Методы, основанные на использовании монотонности функций

При решении уравнений типа $f(x) = g(x)$ в ряде случаев весьма эффективным является метод, который использует монотонность функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на отрезке $a \leq x \leq b$, а функция $y = g(x)$ непрерывна и убывает (возрастает) на этом же отрезке, то уравнение $f(x) = g(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$ может иметь не более одного корня.

Вспомним несколько определений.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной, если малому изменению (приращению) аргумента x соответствует малое изменение (приращение) функции y. Другими словами, функция $y = f(x)$ является непрерывной, если ее график представляет собой непрерывную линию [44].

Функцию $y = f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух элементов x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцию $y = f(x)$ называют убывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух элементов x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ [38].

Если функция $y = f(x)$ является непрерывной и возрастающей (убывающей) на множестве $X \subset D(f)$ (например, на отрезке $a \leq x \leq b$), то она называется монотонной на этом множестве [44].

Таким образом, при решении уравнения $f(x) = g(x)$ необходимо исследовать функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на монотонность, и если одна из этих функций на отрезке $a \leq x \leq b$ непрерывно убывает, а другая функция

– непрерывно возрастает, то необходимо или попытаться подбором найти единственный корень уравнения, или показать, что такого корня не существует. Если, например, функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает, а функция $y = g(x)$ непрерывна и убывает на отрезке $a \leq x \leq b$ и при этом $f(a) > g(a)$, то на данном отрезке уравнение $f(x) = g(x)$ корней не имеет.

Особенно удобно применять данный метод для решения иррациональных уравнений, при этом для начала необходимо дать обучающимся попробовать решить сложное уравнение любым уже известным им способом. После чего нужно обратить их внимание на то, что, решая данное уравнение стандартными методами, то есть, путем уединения радикалов и возведения обеих частей уравнения в n-ю степень или с помощью сведения иррационального уравнения к равносильной ему системе рациональных уравнений и неравенств, получаем достаточно громоздкие выражения. Ход решения можно заметно упростить с помощью введения новой переменной, если это необходимо, и последующего исследования функций на монотонность.

Рассмотрим теперь несколько задач, решаемых с использованием свойства монотонности функций.

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{5x+2} = 7$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{5x+2}$. На всей области определения $x \geq -\frac{1}{3}$ функция $f(x)$ является непрерывной и возрастающей, а значит, исходное уравнение может иметь не более одного корня.

Данный корень найдем подбором: $x = 5$.

Ответ: 5.

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2} = 2$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} 18 - x \geq 0, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 18, \\ x \geq 2. \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 18].$$

Перепишем уравнение в равносильном ему виде

$$\sqrt[4]{18 - x} = \sqrt[8]{x - 2} + 2.$$

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt[4]{18 - x}$ и $g(x) = \sqrt[8]{x - 2} + 2$.

Функция $f(x)$ является непрерывной и убывающей на отрезке $x \in [2; 18]$, а функция $g(x)$ на этом отрезке является непрерывной и возрастающей.

Из этого следует, что уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного корня, тогда и равносильное ему исходное уравнение имеет не более одного корня.

Данный корень определим подбором: $x = 2$.

Ответ: 2.

Задача 3. Решить уравнение $x^5 + x^3 - \sqrt{1 - 3x} + 4 = 0$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$1 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}.$$

Перепишем уравнение в равносильном ему виде

$$x^5 + x^3 + 4 = \sqrt{1 - 3x}.$$

Рассмотрим функции $f(x) = x^5 + x^3 + 4$ и $g(x) = \sqrt{1 - 3x}$.

Функция $f(x)$ является непрерывной и возрастающей при всех действительных x (как сумма возрастающих функций), а функция $g(x)$ на своей области определения $x \leq \frac{1}{3}$ является непрерывной и убывающей.

Это значит, что на интервале $x \leq \frac{1}{3}$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет один корень, а значит и равносильное ему исходное уравнение имеет один корень.

Данный корень определим подбором: $x = -1$.

Ответ: -1.

Задача 4. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4.$$

Решение. Выделим в подкоренных выражениях и в правой части равенства полные квадраты.

$$\sqrt{3(x^2-6x+9)-2}+\sqrt{4(x^2-6x+9)-7}=-(x^2-6x+9)+5,$$

$$\sqrt{3(x-3)^2-2}+\sqrt{4(x-3)^2-7}=-(x-3)^2+5.$$

Введем новую переменную $y=(x-3)^2, y\geq 0$. Тогда уравнение перепишется в виде:

$$\sqrt{3y-2}+\sqrt{4y-7}=5-y.$$

Рассмотрим функции $f(y)=\sqrt{3y-2}+\sqrt{4y-7}$ и $g(y)=5-y$.

Функция $f(y)$ непрерывна и возрастает на всей области определения $y\geq\frac{7}{4}$. Функция $g(y)$ непрерывна и убывает при всех действительных значениях y. Значит, уравнение $f(y)=g(y)$ не может иметь более одного корня.

Данный корень легко найдем подбором: $y=2$.

Выполним обратную замену:

$$(x-3)^2=2,$$

$$x-3=\pm\sqrt{2},$$

$$x_1=3+\sqrt{2}, x_2=3-\sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1=3+\sqrt{2}, x_2=3-\sqrt{2}$.

Задача 5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$$

Решение. Введем новую переменную $y=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$, $y\geq 0$.

$$y^2=\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2=2x+3+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+x+1=$$

$$=3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$y=y^2-20,$$

$$y^2-y-20=0.$$

По теореме Виета корни данного уравнения $y_1 = -4, y_2 = 5$, причем $y_1 = -4$ – посторнний корень.

Выполним обратную замену:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5.$$

Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2}, \\ x \geq -1. \end{cases} \Rightarrow x \geq -1.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$. Она является непрерывной и возрастающей на своей области определения $x \geq -1$, значит, уравнение $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5$ не может иметь более одного корня.

Данный корень найдем подбором: $x = 3$.

Ответ: 3.

2.4 Методы, основанные на использовании ограниченности функций

Вспомним некоторые определения из курса алгебры основной школы.

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$, если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$, если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$ [38].

Методы, основанные на использовании ограниченности функций, предполагают рассмотрение некоторых функций и определение области значений каждой из них.

При первом рассмотрении этих методов с обучающимися полезно вспомнить определения и привести примеры некоторых функций, ограниченных сверху ($y = -x^2 + 4$; $y = -|x|$; $y = -\sqrt{x}$), функций, ограниченных снизу ($y = x^2$; $y = |x + 7|, y = \sqrt[4]{x + 2}$), и функций, ограниченных сверху и снизу ($y = sin\,x$; $y = cos\,x$; $y = \frac{4}{x^2+2}$). Тогда обучающиеся смогут легко охарактеризовать класс уравнений, решаемых данными методами, и будут «видеть» их среди остальных.

Рассмотрим теперь некоторые задачи, решаемые с использованием свойства ограниченности функций.

Задача 1. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 4 - x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 4. \end{cases} \Rightarrow x \in [2; 4].$$

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ и $g(x) = x^2 - 6x + 11$. Тогда

$$f^2(x) = \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2 = x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} + 4 - x =$$

$$= 2 + 2\sqrt{-x^2 + 6x - 8} = 2 + 2\sqrt{1 - (x-3)^2} \leq 2 + 2 = 4.$$

Так как $f^2(x) \leq 4$, то $f(x) \leq 2$.

Одновременно с этим

$$g(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geq 2.$$

Отсюда следует, что $f(x) = g(x) = 2$. Тогда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2, \\ x^2 - 6x + 11 = 2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$x^2 - 6x + 11 = 2,$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

$$(x-3)^2 = 0,$$

$$x = 3.$$

Подставим $x = 3$ в первое уравнение системы, получим

$$\sqrt{3-2} + \sqrt{4-3} = 2 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ – верно.}$$

Значит, $x = 3$ является решением системы, а также решением исходного уравнения, равносильного этой системе.

Ответ: 3.

Задача 2. Решить уравнение $(4x^2 + 4x + 17)(x^2 - x + 1) = 12$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = 4x^2 + 4x + 17$ и $g(x) = x^2 - x + 1$. Так как

$$f(x) = 4x^2 + 4x + 17 = (2x + 1)^2 + 16 \geq 16,$$

$$g(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},$$

то $f(x) \cdot g(x) \geq 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$, то есть

$$(4x^2 + 4x + 17)(x^2 - x + 1) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x + 17 = 16, \\ x^2 - x + 1 = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$4x^2 + 4x + 17 = 16,$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$(2x + 1)^2 = 0,$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Подставим $x = -\frac{1}{2}$ во второе уравнение системы, получим

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 \neq \frac{3}{4}.$$

То есть, система не имеет решений, а значит, что и исходное уравнение, равносильное этой системе, не имеет решений.

Ответ: нет корней.

Задача 3. Решить уравнение $\sqrt{x - 4} + \sqrt{5 - x} = (x - 1)^2(x - 8)$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ 5 - x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 5. \end{cases} \Rightarrow x \in [4; 5].$$

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}$, $g(x) = (x-1)^2(x-8)$. Функция $f(x)$ неотрицательна на всей области определения, а функция $g(x)$ на отрезке $x \in [4;5]$ принимает только отрицательные значения. Отсюда следует, что уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Задача 4. Решить уравнение

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}} = \frac{3}{x}.$$

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+x} \neq 0, \\ x^2+x \geq 0, \\ x-\sqrt{x^2-x} \neq 0, \\ x^2-x \geq 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x(x+1) \geq 0, \\ x(x-1) \geq 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty).$$

Избавимся от иррациональности в знаменателях дробей в левой части равенства:

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)} - \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)} = \frac{3}{x},$$

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{x^2-(x^2+x)} - \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x^2-(x^2-x)} = \frac{3}{x},$$

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{-x} - \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{x} = \frac{3}{x}.$$

Разделим почленно числители дробей на знаменатели, а затем домножим все уравнение на $x \neq 0$. Получим

$$4\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = 5x+3.$$

Возведем обе части равенства в кварат, получим

$$16x^2+16x-8\sqrt{x^4-x^2}+x^2-x = 25x^2+30x+9,$$

$$8\sqrt{x^4-x^2}+8x^2+15x+9 = 0.$$

Так как $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$, то $8\sqrt{x^4-x^2} > 0$.

Рассмотрим уравнение $8x^2 + 15x + 9 = 0$. Найдем его дискриминант: $D = 15^2 - 4 \cdot 8 \cdot 9 < 0$, значит, $8x^2 + 15x + 9 > 0$.

Таким образом, левая часть уравнения $8\sqrt{x^4 - x^2} + 8x^2 + 15x + 9 = 0$ принимает только положительные значения, значит, данное уравнение не имеет корней. Тогда и исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Задача 5. Решить уравнение

$$\frac{|3x - 4| + x^2 - 12|x| + 36}{x - 5} = |x - 2|.$$

Решение. Так как $x^2 = |x|^2$, то уравнение можно переписать в виде

$$\frac{|3x - 4| + |x|^2 - 12|x| + 36}{x - 5} = |x - 2|,$$

$$\frac{|3x - 4| + (|x| - 6)^2}{x - 5} = |x - 2|.$$

Так как $|3x - 4| + (|x| - 6)^2 \geq 0$ и $|x - 2| \geq 0$, то $x - 5 > 0$. Отсюда $x > 5$. Тогда $|3x - 4| = 3x - 4$, $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, и уравнение принимает вид

$$\frac{3x - 4 + (x - 6)^2}{x - 5} = x - 2,$$

$$3x - 4 + (x - 6)^2 = (x - 2)(x - 5),$$

$$3x - 4 + x^2 - 12x + 36 = x^2 - 7x + 10,$$

$$x = 11.$$

Ответ: 11.

2.5 Комбинированные методы

Комбинированные методы представляют собой комбинацию ранее описанных методов, либо нестандартное их применение. Так, в некоторых уравнениях удобно сделать «обратную» замену: ввести параметр, решить уравнение относительно параметра и выполнить обратную замену, отыскав корни исходного уравнения.

Рассматривать решение уравнений комбинированными методами целесообразно только после освоения обучающимися стандартных методов решения уравнений, а также изучения более простых нестандартных методов.

Рассмотрим теперь некоторые задачи, решаемые комбинированными методами.

Задача 1. Решить уравнение $x^3-\left(\sqrt{7}+1\right)x^2+x+7-\sqrt{7}=0$.

Решение. Введем параметр p и рассмотрим уравнение

$$x^3-(p+1)x^2+x+p^2-p=0,$$

которое совпадает с исходным при $p=\sqrt{7}$.

Перепишем данное уравнение в виде квадратного относительно параметра p, получим

$$x^3-px^2-x^2+x+p^2-p=0,$$

$$p^2-p(x^2+1)+x^3-x^2+x=0.$$

Найдем корни этого уравнения.

$$D=(x^2+1)^2-4(x^3-x^2+x)=x^4+2x^2+1-4x^3+4x^2-4x=$$
$$=(x-1)^4.$$

Тогда

$$p_{1,2}=\frac{x^2+1\pm(x-1)^2}{2}.$$

Отсюда

$$p_1=\frac{x^2+1+x^2+2x+1}{2}=x^2+x+1,$$

$$p_2=\frac{x^2+1-x^2-2x-1}{2}=x.$$

Так как для исходного уравнения $p=\sqrt{7}$, то

$$x=\sqrt{7} \qquad \text{или} \qquad x^2+x+1=\sqrt{7}.$$

Решим уравнение $x^2+x+1-\sqrt{7}=0$. $D=1-4\left(1-\sqrt{7}\right)=4\sqrt{7}-3$. Тогда корни данного уравнения $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$.

Исходное уравнение уравнение имеет три корня:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}, x_3 = \sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}$; $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$.

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}} = x-5$.

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} 45-2x \geq 0, \\ 35-2\sqrt{45-2x} \geq 0, \\ x-5 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 22{,}5, \\ x \geq 5. \end{cases} \Rightarrow x \in [5; 22{,}5].$$

Введем новую переменную $y = \sqrt{45-2x}$, тогда $x = \frac{45-y^2}{2}$ и исходное уравнение примет вид

$$2\sqrt{35-2y} = 35-y^2,$$

где $0 \leq y \leq \sqrt{35}$.

Так как возводить обе части равенства в квадрат нецелесообразно, рассмотрим уравнение с параметром a вида

$$2\sqrt{a-2y} = a-y^2,$$

которое совпадает с предыдущим при $a = 35$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим квадратное уравнение относительно параметра a:

$$4(a-2y) = a^2 - 2ay^2 + y^4,$$

$$4a - 8y - a^2 + 2ay^2 - y^4 = 0,$$

$$a^2 - 2a(y^2+2) + y^4 + 8y = 0.$$

Найдем его корни.

$$D = 4(y^2+2)^2 - 4(y^4+8y) = 4y^4 + 16y^2 + 16 - 4y^4 - 32y =$$

$$= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-1)^2.$$

Тогда $a_{1,2} = \frac{2y^2+4\pm 4(y-1)}{2} = y^2 + 2 \pm 2(y-1)$. Отсюда $a_1 = y^2 + 2y$, $a_2 = y^2 - 2y + 4$.

Так как для исходного уравнения $a = 35$, то

$$y^2 + 2y = 35 \qquad \text{или} \qquad y^2 - 2y + 4 = 35.$$

Решим эти уравнения.

1) $y^2 + 2y - 35 = 0$. По теореме Виета корни $y_1 = -7, y_2 = 5$.

2) $y^2 - 2y - 31 = 0$. $D = 4 + 124 = 128$, откуда корни $y_3 = 1 + 4\sqrt{2}$, $y_2 = 1 - 4\sqrt{2}$.

Так как $0 \leq y \leq \sqrt{35}$, то $y = 5$ – единственный корень уравнения $2\sqrt{35 - 2y} = 35 - y^2$. Тогда

$$x = \frac{45 - y^2}{2} = \frac{45 - 25}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Ответ: 10.

Задача 3. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3$.

Решение. Используя равенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, где $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$, преобразуем исходное уравнение к виду

$$\frac{3x^2 - 5x + 7 - 3x^2 + 7x - 2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}} = 3,$$

$$\frac{2x + 5}{\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}} = 3,$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = \frac{2x + 5}{3}.$$

Сложим получившееся уравнение с исходным, получим

$$2\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{2x + 5}{3} + 3,$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{2x + 14}{6},$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{x + 7}{3}.$$

Так как $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} \geq 0$, то и $x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$. Возведем в квадрат обе части уравнения $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{x+7}{3}$. Получим:

$$3x^2 - 5x + 7 = \frac{x^2 + 14x + 49}{9},$$

$$27x^2 - 45x + 63 = x^2 + 14x + 49,$$

$$26x^2 - 59x + 14 = 0.$$

Найдем его корни. По теореме Виета $x_1 = \frac{7}{26}, x_2 = 2.$

Выполним проверку:

1) $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} \geq 0$ – верно при $x_1 = \frac{7}{26}, x_2 = 2;$

2) $\sqrt{3x^2 - 7x + 2}$ – верно при $x_1 = \frac{7}{26}, x_2 = 2;$

3) $\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} \neq 0$ при $x_1 = \frac{7}{26}, x_2 = 2.$

Оба корня удовлетворяют условиям.

Ответ: $\frac{7}{26};\ 2.$

Задача 4. Решить уравнение $\sqrt[4]{10 + x^2 + x} + \sqrt[4]{7 - x^2 - x} = 3.$

Решение. Введем переменные $s = \sqrt[4]{10 + x^2 + x},\ t = \sqrt[4]{7 - x^2 - x},$ $s \geq 0, t \geq 0.$ Тогда $s + t = 3.$ Найдем $s^4 + t^4$:

$$s^4 + t^4 = 10 + x^2 + x + 7 - x^2 - x = 17.$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} s + t = 3, \\ s^4 + t^4 = 17. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть второго уравнения системы к следующему виду:

$$s^4 + t^4 = (s^2 + t^2)^2 - 2s^2t^2 = ((s + t)^2 - 2st)^2 - 2s^2t^2.$$

Знаем, что $s + t = 3$, тогда

$$s^4 + t^4 = (9 - 2st)^2 - 2s^2t^2 = 17.$$

Решим уравнение $(9 - 2st)^2 - 2s^2t^2 = 17.$

$$81 - 36st + 4s^2t^2 - 2s^2t^2 = 17,$$

$$2s^2t^2 - 36st + 64 = 0,$$

$$s^2t^2 - 18st + 32 = 0.$$

Отсюда по теореме Виета: $st = 2$ или $st = 16$. Тогда рассмотрим две системы:

$$\begin{cases} s+t=3, \\ st=2. \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} s+t=3, \\ st=16. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) решений не имеет. Решением системы (1) являются две пары чисел $s_1 = 1, t_1 = 2$ и $s_2 = 2, t_2 = 1$.

Тогда $\sqrt[4]{10+x^2+x} = 1$ или $\sqrt[4]{10+x^2+x} = 2$.

Отсюда:

1) $10+x^2+x = 1 \Rightarrow x^2+x+9 = 0$. $D < 0$, значит, уравнение не имеет действительных корней;

2) $10+x^2+x = 16 \Rightarrow x^2+x-6 = 0$. По теореме Виета корни этого уравнения $x_1 = -3, x_2 = 2$.

Ответ: $-3;\ 2$.

Задача 5. Решить уравнение

$$\sqrt{6x^2-40x+150} - \sqrt{4x^2-60x+100} = 2x-10.$$

Решение. Введем новые переменные $y = \sqrt{6x^2-40x+150}$, $z = \sqrt{4x^2-60x+100}$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$y - z = 2x - 10,$$

$$y - z = 2(x-5).$$

Найдем $y^2 + z^2$.

$$y^2+z^2 = 6x^2-40x+150+4x^2-60x+100 = 10(x^2-10x+25) =$$
$$= 10(x-5)^2.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y-z = 2(x-5), \\ y^2+z^2 = 10(x-5)^2, \end{cases} \quad (3)$$

где $y \geq 0, z \geq 0$.

Выразим разность $x-5$ из первого уравнения и подставим во второе, получим

$$x-5=\frac{y-z}{2},$$

$$y^2+z^2=10\left(\frac{y-z}{2}\right)^2,$$

$$y^2+z^2=2{,}5(y-z)^2,$$

$$2y^2+2z^2=5y^2-10yz+5z^2,$$

$$3y^2-10yz+3z^2=0. \qquad (4)$$

Рассмотрим два случая:

1) $z=0$, тогда из уравнения (4) $y=0$ и из системы (3) имеем $x=5$.

Подставим $x=5$ в исходное уравнение:

$$\sqrt{6\cdot 25-40\cdot 5+150}-\sqrt{4\cdot 25-60\cdot 5+100}=2\cdot 5-10,$$

$\sqrt{100}-\sqrt{-100}=0$ – не имеет смысла.

Значит, $x=5$ не является корнем исходного уравнения.

2) $z>0$, тогда разделим обе части уравнения (4) на z^2. Получим

$$3\left(\frac{y}{z}\right)^2-10\frac{y}{z}+3=0.$$

Пусть $\frac{y}{z}=t$, тогда уравнение перепишем в виде $3t^2-10t+3=0$ и найдем его корни.

По теореме Виета $t_1=3, t_2=\frac{1}{3}$.

Выполним обратную замену:

1) $\frac{y}{z}=3$, отсюда $y=3z$. Тогда

$$\sqrt{6x^2-40x+150}=3\sqrt{4x^2-60x+100},$$

$$6x^2-40x+150=36x^2-540x+900,$$

$$3x^2-50x+75=0.$$

По теореме Виета корни этого уравнения $x_1=15, x_2=\frac{5}{3}$.

2) $\frac{y}{z}=\frac{1}{3}$, отсюда $3y=z$. Тогда

$$3\sqrt{6x^2-40x+150}=\sqrt{4x^2-60x+100},$$

$$54x^2-360x+1350=4x^2-60x+100,$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0.$$

$D < 0$, значит, это уравнение не имеет действительных корней.

Получили два корня: $x_1 = 15, x_2 = \frac{5}{3}$. С помощью непосредственной подстановки, убедимся, что они яляются корнями исходного уравнения.

Ответ: $15; \frac{5}{3}$.

Заметим, что задачу 5 можно решить и другим способом: с помощью деления на $x - 5$ $(x \neq 5)$ и последующего введения новой переменной $y = \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были выполнены следующие задачи:

1. Проведен анализ современного подхода к обучению теме «Уравнения» в основной школе, в том числе, проведен сравнительный анализ различных учебно-методических комплексов по математике для 7-9 классов, определен объем и содержание темы «Уравнения» в курсе математики основной школы, а также изучена учебно-методическая литература по теме исследования.

2. Рассмотрены стандартные и нестандартные способы решения различных видов уравнений, встречающихся в курсе математики основной школы.

3. Разработана программа факультативного курса по математике для 9 класса «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений» с методическими рекомендациями для преподавателя по обучению нестандартным методам решения уравнений.

4. Разработан на основании различной учебно-методической литературы сборник задач, достаточных для полного и комплексного освоения представленных в курсе методов.

Таким образом, цель данной работы достигнута.

Апробация элементов факультативного курса в ходе занятий в рамках внеурочного курса «Подготовка к олимпиадам» в 9-х классах МАОУ «Лицей №67 г. Челябинска» была подтверждена гипотеза исследования: повысить уровень сформированности математического мышления и развития творческих способностей обучающихся возможно за счет изучения и освоения нестандартных методов решения уравнений.

Практическим результатом работы стала разработка примерной программы факультативного курса по математике для 9 класса, а также подборка теоретического и практического материала и методические рекомендации для преподавателя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Айрапетян К. А. Квадратный трехчлен в задачах повышенной сложности / К. А. Айрапетян // Сборник статей XI Международной научно-практической конференции «Современная наука: проблемы и перспективы». – Ставрополь: Центр научного знания «Логос», 2018. – С.14-21.

2. Айрапетян К. А. Применение свойств функций для решения уравнений и неравенств / К. А. Айрапетян // Сборник статей III Международного научно-исследовательского конкурса «Достижения вузовской науки 2018». – Пенза, 2018. – № 8.3 (23). – 2018. – С. 78-82.

3. Алгебра. 7 класс. Учебник. Углублённый уровень. ФП. ФГОС. Изд. 2-е, дораб. / Ю. Н. Макарычев, И. Е. Феоктистов, К. И. Нешков, Н. Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 2020. – 304 с. – ISBN 978-5-0907-1902-5.

4. Алгебра. 8 класс. Учебник для общеобразовательных организаций / Ш. А. Алимов, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, Н. Федорова, Ю. М. Колягин. – Москва: Просвещение, 2014. – 255 с. – ISBN 5-09-009964-2.

5. Алгебра. 8 класс. Учебник. Углубленный уровень. В 2-х частях. Часть 2. ФГОС. Изд. 16-е, стереотип. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. – Москва: Мнемозина, 2019. – 351 с. – ISBN 978-5-346-03637-1.

6. Алгебра. 9 класс. Учебник. Задачник (углубленное изучение). ФГОС / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. – Москва: Мнемозина, 2020. – 509 с. – ISBN 978-5-346-01312-9.

7. Алгебра. 9 класс. Учебник. Углублённый уровень. ФП. ФГОС. Изд. 2-е, дораб. / Ю. Н. Макарычев, И. Е. Феоктистов, К. И. Нешков,

Н. Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 2019. – 399 с. – ISBN 978-5-09-071904-9.

8. Алгебра. Учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией / Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбурд, Б. В. Овчинский, В. Г. Ашкинузе. – Москва: Издательство «Просвещение», 1968. – 336 с.

9. Анисова Т. Л. О необходимости изучения различных методов решения иррациональных уравнений в курсе алгебры средней школы / Т. Л. Анисова, В. Ю. Чуев // Международный журнал экспериментального образования. – 2017. – № 9. – С. 5-9.

10. Антонов Н. П. Сборник задач по элементарной математике: Пособие для самообразования / Антонов Н. П. – Москва: Книга по Требованию, 2013. – 532 с. – ISBN 978-5-548-25440-3.

11. Апайчева Л. А. Методические приемы решения уравнений, содержащих неизвестную в основании и показателе степени / Л. А. Апайчева, Л. Е. Шувалова // Вестник Томского государственного педагогического университета. – 2015. – № 1 (154). – С. 51-54.

12. Арюткина С. В. О формировании обобщенных приемов математической деятельности у учащихся средней школы (на примере приемов решения квадратных уравнений с параметром) / С. В. Арюткина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2009. – № 11. – С. 264-273.

13. Бекоева М. И. Активизация учебной деятельности школьников при овладении математическими методами познания / М. И. Бекоева // Вестник Самарского государственного технического университета. – 2020. – № 1 (45). – С. 6-19.

14. Болтянский В. Г. Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. – Москва: Издательство «Наука», 1972. – 592 с.

15. Варенцова Н. А. Дидактический потенциал решения уравнений с параметром в средней школе / Н. А. Варенцова // Научный поиск. – 2012. – № 4.4. – С. 8-10.

16. Винтиш Т. Ю. Некоторые методы решения иррациональных уравнений / Т. Ю. Винтиш, Е. В. Мартынова, Г. И. Прокопенко // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2015. – № 17. – С. 207-211.

17. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7-11 кл. / Е. В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2004. – 448 с. – ISBN 5-93946-049-6.

18. КонсультантПлюс: надежная правовая поддержка. – 2020. – URL: http://www.consultant.ru (дата обращения: 26.04.2020).

19. Кочетова И. В. Методы решения уравнений и неравенств с модулем в школьном курсе математики / И. В. Кочетова, М. С. Лапштаева // Сборник научных трудов по материалам II заочной Всероссийской научно-практической конференции «Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития» под ред. Л. С. Капкаевой. – Саранск, 2017. – С. 130-134.

20. Лагутинская А. И. Нестандартные задачи как средство развития творческого мышления у учащихся 10-11 классов на уроках математики при изучении темы "уравнения и неравенства" / А. И. Лагутинская, В. Н. Фрундин, И. Н. Бурилич // Актуальные проблемы теории и практики обучения математике, информатике и физике в современном образовательном пространстве. Сборник статей под ред. В. Н. Фрундина. – Курск, 2019. – С. 143-147.

21. Ложкина Е. М. Развитие критического мышления учащихся при обучении решению уравнений и неравенств в курсе математики основной школы / Е. М. Ложкина // Сборник научных трудов SWorld. – Иваново, 2014. – Т. 12. № 4. – С. 78-85.

22. Ляпин С. Е. Сборник задач по элементарной алгебре. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Изд. 2-е перераб., доп. / С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, З. Г. Борчугова. – Москва: Просвещение, 1973. – 351 с.

23. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс. Учебник. ФП. Изд. 11-е, доп. и перераб. / Ю. Н. Макарычев, К. И. Нешков, Н. Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 2019. – 256 с. – ISBN 978-5-09-071885-1.

24. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс. Учебник. Изд. 12-е, доп. и перераб. / Ю. Н. Макарычев, К. И. Нешков, Н. Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 2019. – 287 с. – ISBN 978-5-09071592-8.

25. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс. Учебник. Углублённый уровень. ФП. ФГОС. Изд. 2-е, дораб. / Ю. Н. Макарычев, К. И. Нешков, Н. Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 2020. – 351 с. – ISBN 978-5-09-071903-2.

26. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс. Учебник. Изд. 12-е, доп. и перераб. / Ю. Н. Макарычев, С. Б. Суворова, Н. Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 2020. – 287 с. – ISBN 978-5-09-071594-2.

27. Мерзляк А. Г. Алгебра. 7 класс. Учебник. 4-е изд., перераб. / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва: Вентана-Граф, 2019. – 336 с. – ISBN 978-5-360-04428-4.

28. Мерзляк А. Г. Алгебра. 7 класс. Учебник. ФГОС / А. Г. Мерзляк, М. С. Якир, В. Б. Полонский. – Москва: Вентана-Граф, 2019. – 272 с. – ISBN 978-5-360-03724-8.

29. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 класс. Учебник. 3-е изд., перераб. / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва: Вентана-Граф, 2020. – 368 с. – ISBN 978-5-360-05309-5.

30. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 класс. Учебник. ФГОС / А. Г. Мерзляк, М. С. Якир, В. Б. Полонский. – Москва: Вентана-Граф, 2020. – 256 с. – ISBN 978-5-360-04345-4.

31. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 класс. Учебник. 3-е изд., дораб. / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва: Вентана-Граф, 2020. – 400 с. – ISBN 978-5-360-05310-1.

32. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 класс. Учебник. ФГОС / А. Г. Мерзляк, М. С. Якир, В. Б. Полонский. – Москва: Вентана-Граф, 2020. – 320 с. – ISBN 978-5-360-11386-7.

33. Моденов П. С. Сборник задач по математике с анализом ошибок / П. С. Моденов. – Москва: Государственное издательство «Советская наука», 1959. – 480 с.

34. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС. Изд. 23-е, перераб. / А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Л. А. Александрова. – Москва: Мнемозина, 2015. – 446 с. – ISBN 978-5-346-00946-7.

35. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. Учебник. Углублённый уровень. В 2-х частях. ФГОС. Изд. 12-е, стереотип. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва: Мнемозина, 2020. – 463 с. – ISBN 978-5-3460-1658-8.

36. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС. Изд. 25-е, стер. / А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Л. А. Александрова. – Москва: Мнемозина, 2020. – 223 с. – ISBN 978-5-346-03805-4.

37. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. Учебник. В 2-х частях. Часть 1. ФГОС. Изд. 13-е, стереотип. / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – Москва: Мнемозина, 2016. – 256 с. – ISBN 978-5-346-01309-9.

38. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС. Изд. 23-е, перераб. / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва: Мнемозина, 2019. – 456 с. – ISBN 978-5-346-03809-2.

39. Паршина Т. Ю. О преодолении трудностей в обучении старшеклассников решению иррациональных уравнений / Т. Ю. Паршина // Modern Science. – 2019. – № 9-2. – С. 198-203.

40. Рассудовская М. М. Нестандартные задачи на уроке и внеклассной работе / М. М. Рассудовская, Н. В. Горшкова // Сборник статей IX Международной научно-практической конференции «Проблемы современного образования». – Москва, 2016. – С. 316-322.

41. Решу ЕГЭ: Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – 2020. – URL: https://ege.sdamgia.ru (дата обращения: 07.02.2020).

42. Санникова А. Н. Методические приемы обучения решению уравнений и неравенств с модулями в старшей школе / А. Н. Санникова // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. – 2015. – № 1 (34). – С. 28-30.

43. Сборник задач по элементарной математике / Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 532 с.

44. Супрун В. П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач / В. П. Супрун. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 272 с. – ISBN 978-5-397-00050-5.

45. Токарева Л. И. Формирование системы понятий тождества, уравнения, неравенства в курсе математики средней школы / Л. И. Токарева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2014. – № 16. – С. 267-277.

46. Шахно К. У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / К. У. Шахно. – Изд. 2-е, стер. – Минск: Издательство «Высшая школа», 1965. – 523 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сравнительный анализ содержания темы «Уравнения» в различных учебно-методических комплексах

Сравнительный анализ содержания темы «Уравнения» в различных учебно-методических комплексах представлен в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Сравнительный анализ содержания темы «Уравнения» в различных учебно-методических комплексах

УМК	**Глава**	**Теоретическое изложение материала**	**УМК**	**Глава**	**Теоретическое изложение материала**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
			7 класс		
Б1	Глава I. Выражения. Тождества. Уравнения	§3. Уравнение с одной переменной 6. Уравнение и его корни 7. Линейное уравнение с одной переменной 8. Решение задач с помощью уравнений	У1	Глава 4. Уравнения	§7. Уравнение с одной переменной 16. Уравнение и его корни 17. Линейное уравнение с одной переменной §8. Решение уравнений и задач 18. Решение уравнений, сводящихся к линейным 19. Решение задач с помощью уравнений
	Глава VI. Системы линейных уравнений	§15. Линейные уравнения с двумя переменными и их системы 40. Линейное уравнение с двумя переменными 41. График линейного уравнения с двумя переменными		Глава 8. Системы линейных уравнений	§17. Линейные уравнения с двумя переменными 42. Уравнения с двумя переменными 43. Линейное уравнение с двумя переменными и его график 44. Решение линейных уравнений с двумя переменными в целых числах

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Б2	Глава 1. Линейное уравнение с одной переменной	§2. Линейное уравнение с одной переменной §3. Решение задач с помощью уравнений	У2	Глава 1. Линейное уравнение с одной переменной	§2. Линейное уравнение с одной переменной §3. Решение задач с помощью уравнений
	Глава 4. Системы линейных уравнений с двумя переменными	§24. Уравнения с двумя переменными §25. Линейное уравнение с двумя переменными и его график		Глава 4. Системы линейных уравнений с двумя переменными	§24. Уравнения с двумя переменными §25. Линейное уравнение с двумя переменными и его график
Б3	Глава 1. Математический язык. Математическая модель	§4. Линейное уравнение с одной переменной	У3	Глава 1. Математический язык. Математическая модель	§4. Линейное уравнение с одной переменной

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
8 класс					
Б1	Глава III. Квадратные уравнения	§8. Квадратное уравнение и его корни 21. Неполные квадратные уравнения 22. Формула корней квадратного уравнения 23. Решение задач с помощью квадратных уравнений 24. Теорема Виета §9. Дробные рациональные уравнения 25. Решение дробных рациональных уравнений 26. Решение задач с помощью рациональных уравнений 27. Уравнения с параметром	У1	Глава 4. Квадратные уравнения	§9. Квадратное уравнение и его корни 28. Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения 29. Формулы корней квадратного уравнения 30. Уравнения, сводящиеся к квадратным 31. Решение задач с помощью квадратных уравнений §10. Свойства корней квадратного уравнения 32. Теорема Виета 33. Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения 34. Разложение квадратного трехчлена на множители §11. Дробно-рациональные уравнения 35. Решение дробно-рациональных уравнений 36. Решение задач с помощью уравнений

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Б2	Глава 3. Квадратные уравнения	§18. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений §19. Формула корней квадратного уравнения §20. Теорема Виета §21. Квадратный трехчлен §22. Решение уравнений, приводимых к квадратным уравнениям §23. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций	У2	Глава 3. Квадратные уравнения	§18. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений §19. Формула корней квадратного уравнения §20. Теорема Виета §21. Квадратный трехчлен §22. Решение уравнений, приводимых к квадратным уравнениям §23. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций
Б3	Глава 4. Квадратные уравнения	§24. Основные понятия §25. Формулы корней квадратных уравнений §26. Рациональные уравнения §27. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи) §28. Частные случаи формулы корней квадратного уравнения §29. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители §30. Иррациональные уравнения	У3	Глава 4. Квадратные уравнения	§24. Основные понятия §25. Формулы корней квадратных уравнений §26. Рациональные уравнения §27. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций (текстовые задачи) §28. Частные случаи формулы корней квадратного уравнения §29. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители §30. Иррациональные уравнения

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
		9 класс			
Б1	Глава II. Уравнения и неравенства с одной переменной	§5. Уравнения с одной переменной 12. Целое уравнение и его корни 13. Дробные рациональные уравнения	У1	Глава 2. Уравнения и неравенства с одной переменной	§4. Уравнения с одной переменной 10. Целое уравнение и его корни 11. Приемы решения целых уравнений 12. Теорема Виета для уравнений высших степеней 13. Решение дробно-рациональных уравнений §6. Уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля 16. Решение уравнений с переменной под знаком модуля §7. Уравнения с параметрами 18. Целые уравнения с параметрами 19. Дробно-рациональные уравнения с параметрами
	Глава III. Уравнения и неравенства с двумя переменными	§7. Уравнения с двумя переменными и их системы 17. Уравнение с двумя переменными и его график		Глава 5. Степени и корни	§16. Иррациональные уравнения и неравенства 43. Решение иррациональных уравнений
Б2	–		У2	–	
Б3	–		У3	–	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Примерная программа факультативного курса по математике для 9 классов «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений»

I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа факультативного курса по математике в 9 классах «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений» разработана в соответствии с нормативными документами:

1. Федеральный закон от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с изм., внесенными Федеральными законами от 24.04.2020 № 147-ФЗ, от 06.04.2015 № 68-ФЗ, Постановлением Конституционного Суда РФ от 05.07.2017 № 18-Пс);
2. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 05.03.2004 г. № 1089 «Об утверждении Федерального компонента государственного образовательного стандарта начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования»;
3. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 07.07.2005 г. №03-126 «О примерных программах по учебным предметам федерального базисного учебного плана»;
4. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 28.12.2018 г. № 345 «О федеральном перечне учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» (в ред. Приказов Минпросвещения России от 22.11.2019 г. № 632; от 08.05.2019 г. № 233);
5. Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 29.12.2010 № 189 (в ред. Постановления Главного государственного санитарного врача РФ от 22.05.2019 № 8) «Об

утверждении СанПиН 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях» (Зарегистрировано в Минюсте России 03.03.2011 г. № 19993);

6. Закон Челябинской области от 29.08.2013 № 515-30 (ред. от 28.08.2014) «Об образовании в Челябинской области» (в ред. от 06.03.2020 г. № 113-ЗО);

7. Письмо Министерства образования и науки Челябинской области от 31.07.2009г. №103/3404. «О разработке рабочих программ учебных курсов, предметов, дисциплин (модулей) в общеобразовательных учреждениях Челябинской области»;

8. Письмо Министерства образования и науки Челябинской области от 04.06.2019 г. № 1213/5886 «О преподавании учебных предметов образовательных программ начального, основного и среднего общего образования 2019/2020 учебном году».

Программа рассчитана на один год, на 34 часа (1 час в неделю). Освоение программы способствует реализации общеинтеллектуального направления развития личности обучающихся, формирование таких качеств математического мышления, как гибкость, критичность, рациональность, логичность.

Основная цель курса – развитие математических способностей, логического мышления, алгоритмической культуры, интуиции, систематизация, углубление и расширение знаний, полученных на уроке, формирование умения видеть альтернативные пути решения задач, интегрировать ранее усвоенные способы деятельности в новые, применительно к возникшей проблеме, а также строить субъективно новые способы решения задач в процессе рассмотрения различных стандартных и нестандартных методов решения уравнений.

Достижение этой цели обеспечено посредством решения следующих *задач*:

– формировать устойчивый интерес к математике и ее практическому применению;

– формировать и развивать у обучающихся аналитическое и логическое мышление при проектировании решения задачи;

– систематизировать, расширять и углублять содержание курса математики;

– формировать опыт творческой деятельности обучающихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;

– формировать навык работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов;

– развивать коммуникативные и общеучебные навыки работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т. д.

– воспитывать трудолюбие, терпение, настойчивость, инициативу при решении нестандартных задач и задач повышенного уровня сложности.

Факультативный курс представлен в виде практикума, который позволит систематизировать и расширить знания учащихся в решении различных видов уравнений.

Виды деятельности на занятиях: лекция учителя, беседа, практикум, консультация.

II. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА

Предметные результаты:

1) повторение, систематизация и углубление ранее изученного материала курса математики основной школы;

2) развитие умения работать с учебным математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) повторение стандартных методов решения линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений и уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля;

4) овладение навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;

5) ознакомление с нестандартными методами решения некоторых видов уравнений, формирование навыка применения их на практике.

Метапредметные результаты:

1) умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебной и познавательной деятельности;

2) умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

3) умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией;

4) умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности ее решения;

5) умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками; работать индивидуально и в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение.

Личностные результаты:

1) формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию,

осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования;

2) формирование осознанного, уважительного и доброжелательного отношения к другому человеку, его мнению; готовности и способности вести диалог с другими людьми и достигать в нем взаимопонимания;

3) формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

III. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Раздел 1. Стандартные методы решения уравнений

Алгебраическое уравнение с одним неизвестным. Корень уравнения. Теоремы о равносильности уравнений. Линейные уравнения и сводящиеся к ним. Методы решения линейных уравнений.

Квадратные уравнения и сводящиеся к ним. Методы решения квадратных уравнений. Теорема Виета. Биквадратные уравнения. Теорема Виета для уравнений высших степеней. Симметрические уравнения.

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля. Метод интервалов. Метод замены уравнения, содержащего неизвестное под знаком модуля, равносильной ему системой уравнений.

Рациональные и дробно-рациональные уравнения. Методы решения дробно-рациональных уравнений.

Иррациональные уравнения. Методы решения иррациональных уравнений.

Раздел 2. Нестандартные методы решения уравнений

Метод функциональной подстановки.

Методы, основанные на применении численных неравенств. Неравенство Коши. Неравенство Бернулли. Неравенство Коши-Буняковского.

Методы, основанные на использовании монотонности функций. Монотонность функций.

Методы, основанные на использовании ограниченности функций. Ограниченность функций.

Комбинированные методы.

IV. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование факультативного курса представлено в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Тематическое планирование

№ урока	Тема	Количество часов
1	**2**	**3**
Раздел 1. Стандартные методы решения уравнений		**12**
1	Входной контроль	1
2	Алгебраическое уравнение с одним неизвестным. Корень уравнения. Теоремы о равносильности уравнений	1
3	Линейные уравнения и сводящиеся к ним	1
4-5	Квадратные уравнения и сводящиеся к ним	2
6-7	Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля	2
8-9	Рациональные и дробно-рациональные уравнения	2
10-11	Иррациональные уравнения	2
12	Промежуточный контроль	1
Раздел 2. Нестандартные методы решения уравнений		**22**
13-17	Метод функциональной подстановки	6
18-21	Методы, основанные на применении численных неравенств	3
22-26	Методы, основанные на использовании монотонности функций	4
27-30	Методы, основанные на использовании ограниченности функций	4
31-33	Комбинированные методы	4
34	Итоговый контроль	1
	Всего часов:	**34**

V. ВИДЫ И ФОРМЫ КОНТРОЛЯ

Программа курса предполагает входной, промежуточный и итоговый контроль в форме практикума.

Целью *входного контроля* является оценка текущего уровня подготовленности обучающихся, выявление типичных ошибок и пробелов в знаниях, мотивация и самомотивация обучающихся, постановка целей и задач освоения факультативного курса. Задания входного контроля представлены в Таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Варианты заданий входного контроля

Вариант 1	Вариант 2
Решите уравнения: 1) $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$; 2) $16y^4+15y^2-1=0$; 3) $\lvert x^2+3x-4\rvert=3x$; 4) $\frac{a}{3a+5}-\frac{4a+15}{2a}=0$; 5) $\sqrt[3]{3x^2+8x+10}=x$.	Решите уравнения: 1) $3x+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{1}{9}x=1$; 2) $y^4+2y^2+6=0$; 3) $\lvert x^2-4x+4\rvert=x$; 4) $\frac{4m-1}{m+2}+\frac{3-m}{2m-4}=0$; 5) $\sqrt[3]{28-23x-x^3}=3-x$.

Целью *промежуточного контроля* является оценка степени и качества усвоения изученного материала, самоконтроль обучающихся, мотивация обучающихся к решению задач повышенного уровня сложности. Задания промежуточного контроля представлены в Таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Варианты заданий промежуточного контроля

Вариант 1	Вариант 2
Решите уравнения: 1) $\frac{(2x+1)(2x-3)}{4}=x^2-1$; 2) $(x^2+3x-20)(x^2+3x+2)=240$; 3) $\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert=3$; 4) $\frac{3x+2}{4x^2-4x+1}=\frac{2x+1}{4x^2-1}-\frac{1}{x}$; 5) $\sqrt{3x+4}-3=\sqrt{x-3}$.	Решите уравнения: 1) $3x^2-\frac{(3x+1)(4x-1)}{4}=1$; 2) $(x^2-x+8)(x^2-x-6)=120$; 3) $\lvert x\rvert+\lvert x-4\rvert+\lvert x-5\rvert=12$; 4) $\frac{3x-1}{3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{2x-3}{9x^2+12x+4}$; 5) $\sqrt{5x+2}-2=\sqrt{5x-10}$.

Целью *итогового контроля* является оценка степени и качества изученного материала, определение уровня сформированности у обучающихся навыка совершать перенос ранее усвоенных методов в новые, нестандартные ситуации, самоконтроль обучающихся. Задания итогового контроля представлены в Таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Варианты заданий итогового контроля

Вариант 1	Вариант 2
1. Решите уравнение с помощью введения одной или нескольких новых переменных: $$\frac{(30-x)\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{30-x}}{\sqrt{30-x}-\sqrt{x-1}}=10.$$	1. Решите уравнение с помощью введения одной или нескольких новых переменных: $$\frac{(26-x)\sqrt{x-6}-(x-6)\sqrt{26-x}}{\sqrt{26-x}-\sqrt{x-6}}=8.$$
2. Решите уравнение, используя свойство монотонности функций: $$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x+19}=9.$$	2. Решите уравнение, используя свойство монотонности функций: $$\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x-4}+\sqrt{6x+1}=11.$$
3. Решите уравнение, используя свойство ограниченности функций: $$5\sqrt[4]{x-1}+\lvert x+7\rvert=8.$$	3. Решите уравнение, используя свойство ограниченности функций: $$4\sqrt{x+3}+\lvert x+4\rvert=6.$$

VI. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 класс. Учебник. ФГОС / А. Г. Мерзляк, М. С. Якир, В. Б. Полонский. – Москва: Вентана-Граф, 2019. – 320 с.

2. Супрун В. П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач / В. П. Супрун. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 272 с.

3. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7-11 кл. / Е. В. Галкин. – Челябинск: Вгляд, 2004. – 448 с.

4. Сборник задач (см. Приложение 3).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Сборник задач к факультативному курсу «Стандартные и нестандартные методы решения уравнений»

Метод функциональной подстановки

1. Решите уравнение с помощью введения новой переменной:

а) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$;

б) $x^8 - 7x^7 + 4x^6 - 21x^5 + 6x^4 - 21x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0$;

в) $4\sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} = x + 4$;

г) $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} = 18$;

д) $(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = \frac{9}{2}$;

е) $\left(1 + \frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}} = 4$.

2. Выполните необходимые преобразования и решите уравнение с помощью введения новой переменной:

а) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0$;

б) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)^2$;

в) $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 10x^2$;

г) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$;

д) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$;

е) $(a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} = 0$.

3. Решите уравнение с помощью введения нескольких новых переменных:

а) $\sqrt[3]{(x-29)^2 + \sqrt[3]{(x-1)^2}} = 7 - \sqrt[3]{x^2 - 30x + 29}$;

б) $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$;

в) $\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1} - (x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30$;

г) $64\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 - \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3 = 63$;

д) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$;

е) $\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=2.$

Методы, основанные на применении численных неравенств

4. Решите уравнение, используя неравенство Коши:

а) $(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100};$

б) $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=4x+\frac{3}{x};$

в) $\left(\frac{x+4}{2}\right)^6+\left(\frac{x^2+9}{3}\right)^3=4x^3.$

5. Решите уравнение, используя неравенство Бернулли:

а) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4;$

б) $\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{1+x}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6;$

в) $\sqrt[4]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[4]{1-\sqrt{1-x^2}}=2.$

6. Решите уравнение, используя неравенство Коши-Буняковского:

а) $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1};$

б) $2\sin 3x\cdot\cos x+3\sin 5x\cdot\cos 3x=4+\cos^2 x.$

7. Решите систему, используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+2z\geq 3. \end{cases}$$

Методы, основанные на использовании монотонности функций

8. Решите уравнение, используя свойство монотонности функций:

а) $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15;$

б) $\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{5x+2}=7;$

в) $3\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-2}+5\sqrt[3]{x+3}=0;$

г) $2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{3-x}+4;$

д) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{5-4x}=1-\sqrt{x+5};$

е) $\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[8]{x-2}=2;$

ж) $x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0;$

з) $\sqrt{x^3+17}=3x-5+\sqrt{x^3+8}$;

и) $4\sqrt{x^2-24}+3\sqrt{x^2-21}+2\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=\frac{20}{x-4}$;

к) $\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4$;

л) $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=9$;

м) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

Методы, основанные на использовании ограниченности функций

9. Решите уравнения, используя свойство ограниченности функций:

а) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}=3-5x^2$;

б) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$;

в) $(4x^2+4x+17)(x^2-x+1)=12$;

г) $\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=(x-1)^2(x-8)$;

д) $x^2-x+2=2\sqrt[4]{2x-1}$;

е) $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}}+x^4\cdot\sqrt{5-x}=3$;

ж) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}=\frac{3}{x}$;

з) $x^2+2x+3=(x^2+x+1)(x^4+x^2+4)$;

и) $\sqrt{2x-y^2-z^2}-\sqrt{2x-y-3}=\sqrt{x^2+y}$;

к) $\sqrt{x^2+3x+4}=|x^2-x-2|+\sqrt{4x^2-9x+16}$;

л) $\frac{|3x-4|+x^2-12|x|+36}{x-5}=|x-2|$;

м) $\sqrt[4]{8x^2-2}+2\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3}$.

Комбинированные методы

10. Решите уравнение, используя различные методы:

а) $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$;

б) $x^3-\left(\sqrt{7}+1\right)x^2+x+7-\sqrt{7}=0$;

в) $\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5$;

г) $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$;

д) $\sqrt{5-x}=x^2-5$;

е) $\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{3x^2-7x+2}=3$;

ж) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$;

з) $x=\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right)$;

и) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$;

к) $\sqrt[4]{10+x^2+x}+\sqrt[4]{7-x^2-x}=3$;

л) $(x-2)^5-(x-3)^5=1$;

м) $(x+8)(4-x)\left(\sqrt{x-8}+2\right)=6$;

н) $\left|x+\sqrt{x+2}\right|=\left|1+2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right|-\left|\sqrt{x+3}+x+1\right|$;

о) $\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100}=2x-10$;

п) $(x^2+3x)^2+9x^2=7(x+3)^2$.

Ответы

1. а) $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $x_{1,2}=\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$; в) $x_{1,2}=\sqrt{10}-2\pm2\sqrt{\sqrt{10}-3}$; г) $x_1=2$; д) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{5}{4}$; е) $x_1=3$.

2. а) $x_1=-2, x_2=-4$; б) $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}, x_3=-1, x_4=9$; в) $x_1=\frac{11\pm\sqrt{89}}{2}$; г) $x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}, x_{3,4}=-3\pm\sqrt{7}$; д) $x_1=-1, x_2=-2$; е) $x_1=0, x_2=\frac{63}{65}a$.

3. а) $x_1=2, x_2=28$; б) $x_1=-1, x_2=3, x_3=35$; в) $x_1=7, x_2=26$; г) $x_1=-\frac{11}{5}$; д) $x_1=\frac{16}{25}$; е) $x_1=256$.

4. а) $x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, y=\pm1$; б) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$; в) корней нет.

5. а) $x_1=0$; б) $x_1=0$; в) $x_{1,2}=\pm1$.

6. а) $x_1=1, x_2=1+\sqrt{2}$; б) корней нет.

7. $x_1=\frac{1}{3}, y_1=\frac{2}{3}, z_1=\frac{2}{3}$.

8. а) $x_1 = 7$; б) $x_1 = 5$; в) $x_1 = -2$; г) $x_1 = 2$; д) $x_1 = -1$; е) $x_1 = 2$; ж) $x_1 = -1$; з) $x_1 = 2$; и) $x_1 = 5$; к) $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$; л) $x_1 = 6$; м) $x_1 = 3$.

9. а) $x_1 = 0$; б) $x_1 = 3$; в) корней нет; г) корней нет; д) $x_1 = 1$; е) корней нет; ж) корней нет; з) корней нет; и) $x_1 = 1, y_1 = -1, z_1 = 1$; к) $x_1 = 2$; л) $x_1 = 11$; м) $x_1 = \frac{1}{2}$.

10. а) $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}, x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; б) $x_1 = \sqrt{7}, x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$; в) $x_1 = 10$; г) $x_1 = 1$; д) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; е) $x_1 = 2, x_2 = \frac{7}{26}$; ж) $x_1 = 2$; з) $x_1 = 2$; и) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$; к) $x_1 = -3, x_2 = 2$; л) $x_1 = 2, x_2 = 3$; м) корней нет; н) $x_1 = -2, x \geq -1$; о) $x_1 = 15, x_2 = \frac{5}{3}$; п) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Технологическая карта урока

Учитель: Тангина Д. Ю.

Класс: 9

Предмет: Подготовка к олимпиадам

Тема занятия: Уравнения высших порядков (2 ч)

Дата: 6 марта 2020 года

Цель: развитие математических способностей, логического мышления, интуиции, формирование умения видеть альтернативные пути решения задач в процессе рассмотрения нестандартных методов решения уравнений.

Задачи:

образовательная: формировать у обучающихся понятие о различных нестандартных методах решения уравнений;

развивающая: формировать и развивать у обучающихся аналитическое и логическое мышление при проектировании решения задачи;

воспитательная: формировать устойчивый интерес к математике и ее практическому применению.

Планируемые результаты:

предметные: ознакомление с нестандартными методами решения некоторых видов уравнений, формирование навыка применения их на практике;

метапредметные: умение самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

личностные: формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми в процессе образовательной, учебно-исследовательской и творческой деятельности.

Формы работы: фронтальная, групповая.

Характеристика этапов занятия представлена в Таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Характеристика этапов занятия

№ п/п	Этап организации учебной деятельности	Цель этапа	Содержание педагогического взаимодействия			
			Деятельность учителя	Деятельность обучающихся		
				Познавательная	Коммуникативная	Регулятивная
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	Организационный этап	Подготовка обучающихся к восприятию учебного материала	Приветствует учеников. Организовывает концентрацию внимания обучающихся	–	Приветствуют учителя	Готовятся к восприятию учебного материала
2	Мотивация к учебной деятельности	Создание проблемной ситуации. Фиксация новой учебной задачи	Организовывает погружение в проблему: предлагает обучающимся решить нестандартную задачу	Пытаются решить задачу известным способом. Фиксируют проблему	Строят диалог с учителем и сверстниками	Принимают и сохраняют учебную цель и задачи
3	Изучение нового материала	Формирование у обучающихся понятия о различных нестандартных методах решения уравнений	Организовывает деятельность обучающихся по усвоению нестандартных методов решения уравнений	Анализируют учебную литературу, составляют опорные конспекты	Участвуют в коллективном обсуждении содержания учебного материала	Обсуждают предметные способы решения новой задачи. Осуществляют самоконтроль
4	Практикум по решению нестандартных задач	Формирование у обучающихся навыка решать уравнения с нестандартными методами	Организовывает деятельность обучающихся по освоению нестандартных методов решения уравнений	Анализируют содержание задач, учатся применять новые методы в решении конкретных задач	Учатся формулировать собственное мнение, аргументированно высказывать свою позицию	Отрабатывают навык применения нестандартных методов. Осуществляют пошаговый самоконтроль

Продолжение таблицы 4.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
5	Подведение итогов и рефлексия	Систематизация и обобщение изученного материала	Организовывает самостоятельную коррекционную работу обучающихся	Выявляют и анализируют собственные ошибки	Осуществляют рефлексию собственных действий	Осуществляют итоговый самоконтроль