ЧПИ
математика
механика
техника

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ЧЕЛЯБИНСК, 1986

имеют "порождающие векторы" и поэтому согласно теории перестановочных соотношений шестивершинной модели оператор, осуществляющий их эквивалентность, в общем положении определяется этим свойством однозначно (с точностью до постоянного множителя). Теорема доказана.

Представляет интерес также тот факт, что вакуумные кривые вида (I0) обнаруживают очевидную аналогию с вакуумными кривыми L -операторов хорошо известной модели Фельдергофа, изучавшимися впервые в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

I. Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т. 34, вып. 5(209), с. I3-63.

2. Кричевер И.М. Уравнения Янга-Бакстера и алгебраическая геометрия. - Функциональный анализ, 198I, т. I5, вып. 2, с. 22-35.

3. Варден Б.Л. Ван Дер. Алгебра.- М.: Наука, 1979.

4. Корепин В.Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели. - ДАН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. I36I-I364.

5. Тарасов В.О. О строении квантовых L -операторов для R - матрицы XYZ - модели. - ТМФ, 1984, т. 6I, № 2, с. I63-I73.

6. Тарасов В.О. Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке. II. - ТМФ, 1984, т. 6I, № 3, с. 387-392.

7. Izergin A.G., Korepin V.E. Lattice versions of quantum field theory models in two dimensions.- Nucl. Phys., 1982, v B 205 [FS5], №3, p. 401-413.

УДК 5I7.98

А.С.Макаров

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БАНАХОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с σ -конечной полной неатомической мерой, $S(T, \Sigma, \mu)$ - пространство измеримых почти всюду конечных функций, заданных на T. Равенство функций из $S(T, \Sigma, \mu)$ понимается обычно как равенство почти всюду.

Определим на $S(T, \Sigma, \mu)$ функционал $\|x\| = |||x|||$, $0 \leq \|x\| \leq \infty$, удовлетворяющий следующим условиям:

I. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

II. Если $0 \leq x_n \in S(T, \Sigma, \mu)$ и $x_n \nearrow x$, то $\|x_n\| \nearrow \|x\|$;

III. Существует последовательность множеств $T_n \in \Sigma$, $\mu T_n < \infty$, $T_n \nearrow T$, таких, что $\|\chi_{T_n}\| < \infty$ (χ_E - характеристическая функция множества E).

Пространство

$$L = \{x \in S(T, \Sigma, \mu) : \|x\| < \infty\}$$

является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_L$. Это пространство уже изучалось [I, 2]. В классе идеальных пространств оно рассматривается в работе [3]. Двойственное к L пространство

$$L^* = \{y \in S(T, \Sigma, \mu) : (x, y) = \int_T xy\,d\mu < \infty, \forall x \in L\}$$

тоже является банаховым с двойственной нормой

$$\|y\|_{L^*} = \sup_{\|y\|_L \leq 1} |(x, y)|,$$

причем $L = L^{**}$ и $\|x\|_L = \|x\|_{L^{**}}$.

Предположим, что функционал $\|\cdot\|$, определяемый свойствами I-III, удовлетворяет еще свойству

IУ. $\|x\| = \sup_{\mu E \leq 1} \|P_E x\|$ $\quad (P_E x(t) = x(t)\chi_E(t))$.

Банахово пространство функций с нормой, удовлетворяющей свойствам I-IУ, обозначим через $\hat{L}$,

$$\hat{L} = \{x \in S(T, \Sigma, \mu) : \|x\|_{\hat{L}} < \infty\}.$$

К классу пространств $\hat{L}$ относится, в частности, известное пространство Гульда $\hat{L}_1$ ([4], [5]) с нормой

$$\|x\|_{\hat{L}} = \sup \|P_E x\|_{L_1}.$$

Поэтому пространство $\hat{L}$ назовем пространством типа Гульда. Один подкласс класса пространств типа Гульда рассматривался в работе [6], откуда нам понадобится один результат, сформулированный для пространства $\hat{L}_1$.

Л е м м а. Справедливы равенства:

а) $\hat{L}_1 = \{x \in S(T, \Sigma, \mu) : P_E x \in L_1\ \forall E \in \Sigma, \mu E < \infty\}$;

б) $\hat{L}_1 = L_1 + L_\infty$.

Предложение. Пространство $L \subset \hat{L}_1 \Leftrightarrow \{\forall \mathcal{A} \in \Sigma, \mu\mathcal{A} < \infty, \chi_{\mathcal{A}} \in L^*\}$.

Необходимость. Пусть $L \subset \hat{L}_1$. Тогда $\hat{L}_1^* = L_1 \cap L_\infty \subset L^*$. Отсюда следует, что $\chi_{\mathcal{A}} \in L^*$ $\forall \mathcal{A} \in \Sigma$, $\mu\mathcal{A} < \infty$.

Достаточность. Пусть $x \in L$, $\mathcal{A} \in \Sigma$, $\mu\mathcal{A} < \infty$, $\chi_{\mathcal{A}} \in L^*$. Тогда $(x_1, x_{\mathcal{A}}) < \infty$, т.е. $P_E x \in L_1$. Следовательно, в силу пункта а леммы $x \in \hat{L}_1$. ▲[1].

Так как $L = L^{**}$, то из предыдущего предложения вытекает

С л е д с т в и е. Пространство $L^* \subset \hat{L}_1 \Leftrightarrow \{\forall \mathcal{A} \in \Sigma, \mu\mathcal{A} < \infty, \chi_{\mathcal{A}} \in L\}$.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $\chi_{\mathcal{A}} \in \hat{L}$ и $x_{\mathcal{A}}$ $\forall \mathcal{A} \in \Sigma$, $\mu\mathcal{A} < \infty$.

Взяв в качестве пространства L в предложении и следствии из него пространство $\hat{L}$, получим включения $\hat{L} \subset \hat{L}_1 = L_1 + L_\infty$ и $\hat{L}^* \subset \hat{L}_1$, т.е.

$$L_1 \cap L_\infty = \hat{L}_1^* \subset \hat{L} \subset L_1 + L_\infty.$$

Это означает, что пространство $\hat{L}$ является промежуточным между L_1 и L_∞. Непрерывность вложений следует из теоремы I.I из работы [I].

Т е о р е м а I. Если $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ и для любого множества $E \in \Sigma$, $\mu\Sigma \leq 1$, $P_E x \in \hat{L}$, то $x \in \hat{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что $x \geq 0$. Предположим, что $x \bar{\in} \hat{L}$. Тогда в силу свойства IУ

$$\|x\|_{\hat{L}} = \sup_{\mu E \leq 1} \|P_E x\|_{\hat{L}} = \infty. \tag{I}$$

Из выражения (I) следует, что $\exists E_K \in \Sigma$, $\mu E_K \leq 1$ и

$$\|P_{E_K} x\|_{\hat{L}} > K,$$

$\forall K \in N$ (N - множество натуральных чисел).

Пусть $n \in N$. Тогда $\exists K_0 \in N$ такое, что

$$\|P_{E_{K_0}} x\|_{\hat{L}} > n 2^{2n}.$$

---
1) Символ ▲ означает завершение доказательства.

Найдем далее такую функцию $0 \leq y \in \hat{L}^*$, что $\|y\|_{\hat{L}^*} \leq 1$ и

$$\int_{E_{K_0}} xy\,d\mu > n \cdot 2^{2n}.$$

Разобьем множество E_{K_0} на 2^n измеримых подмножеств $E^1, E^2, \ldots, E^{2^n}$ так, чтобы $\mu E^i \leq \frac{1}{2^n}$, $i = \overline{1, 2^n}$. Тогда хотя бы при одном i

$$\int_{E^i} xy\,d\mu > n \cdot 2^n.$$

Таким образом, $\forall n \in N$, существуют измеримое множество $D_n = E^i$, $\mu D_n \leq \frac{1}{2^n}$ и функция $0 \leq y_n \leq \hat{L}^*$, для которых выполняется неравенство

$$\int_{D_n} xy\,d\mu > n \cdot 2^n. \tag{2}$$

Положим $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ и $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$. Тогда $\mu E \leq 1$, $0 \leq y \in \hat{L}^*$ и в силу неравенства (2) $\forall n \in N$,

$$\int_E xy\,d\mu \geq \int_{D_n} xy\,d\mu \geq \frac{1}{2^n} \int_{D_n} xy_n\,d\mu > n.$$

Это противоречит тому, что $P_E x \in \hat{L}$.

С л е д с т в и е. $L_\infty \subset \hat{L}$.

Т е о р е м а 2. Любую функцию $x \in \hat{L}$ можно представить в виде $x = x \cdot \chi_E + x_1$, где $\mu E \leq 1$, $x_1 \in L_\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множества $\mathcal{A}_n = T(|x| > 2^{n+1})$. Тогда $\exists n \in N$ такое, что $\mu\mathcal{A}_n \leq 1$. Предположив, что $\forall n\, \mu\mathcal{A}_n > 1$, найдем множества $E_n \in \Sigma$ со следующими свойствами:

$$E_1 \subset \mathcal{A}_1, \frac{1}{4} < \mu E_1 \leq \frac{1}{2}, \ldots, E_n \subset \mathcal{A}_n / \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k, \frac{1}{2^{n+1}} < \mu E_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Тогда $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\mu E = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq 1$ и

$$\int_E |x|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |x|\,d\mu > \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \mu E_n = \infty.$$

Но это противоречит тому, что $\hat{L} \subset \hat{L}_1$. Таким образом, $\exists n \in N$ такое, при котором $\mu A_n \leq 1$. Следовательно, $x\chi_{A_n^c} \in L_\infty$ и $x = x\chi_{A_n} + x\chi_{A_n^c}$. ▲. Положим

$$L_0 = \{z : z = x\chi_E,\ x \in \hat{L},\ \mu E \leq 1\}.$$

Очевидно, $L_0 \subset \hat{L}$. Дуальным к L_0 является множество

$$L_0^* = \{y \in S(T,\Sigma,\mu) : (z,y) < \infty,\ \forall z \in L_0\}.$$

Определим функционал $\|\cdot\|^* : S(T,\Sigma,\mu) \to [0,+\infty]$ равенством

$$\|y\|^* = \sup_{\mu E \leq 1} \|P_E y\|_{\hat{L}^*} = \sup_{\mu E \leq 1} \sup_{\|x\|_{\hat{L}} \leq 1} \int_E |xy|\, d\mu. \tag{3}$$

Из выражения (3) следует, что $\forall F \in \Sigma$, $\mu F \leq 1$,

$$\|P_F y\|^* = \|P_F y\|_{\hat{L}^*} \tag{4}$$

и выполняются неравенства:

$$\|y\|^* \leq \|y\|_{\hat{L}^*}, \tag{5}$$

$$\int_E |yx|\, d\mu \leq \|y\|^* \cdot \|x\|_{\hat{L}}; \tag{6}$$

$\forall E \in \Sigma$, $\mu E \leq 1$. Нетрудно проверить, что функционал удовлетворяет свойствам I-IУ.

Т е о р е м а 3. Если $y \in S(T,\Sigma,\mu)$, то $y \in L_0^*$ тогда и только тогда, когда $\|y\|^* < \infty$.

Необходимость. Не ограничивая общности, можно считать $y > 0$. Предположим, что $\|y\|^* = \infty$. Тогда найдется такая последовательность измеримых функций $z_n = x_n \chi_{E_n}$, при которой $\|x_n\|_{\hat{L}} \leq 1$, $x_n \geq 0, \mu E_n \leq 1$ и

$$\int_T y z_n\, d\mu > n \cdot 2^{2n}. \tag{7}$$

Каждое из множеств E_n разобьем на 2^n измеримых подмножеств $E_n^1, E_n^2, \ldots, E_n^{2^n}$ с мерами $\mu E_n^i \leq \frac{1}{2^n}$. Тогда $\forall n \in N$; в силу неравенства (7) $\exists i_n \in N$ такой, что

$$\int_T x_n y \chi_{E_n^{i_n}}\, d\mu > n \cdot 2^n.$$

Положим $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{i_n}$ и $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n \cdot \chi_{E_n^{i_n}}$. Очевидно, $\mu E \leq 1$, $\|x\|_{\hat{L}} \leq 1$, $x \cdot \chi_E \in L_0$. Однако

$$\int_T xy\chi_E\, d\mu \geq \frac{1}{2^n} \int_T x_n y \chi_{E_n^{i_n}}\, d\mu > n,$$

что противоречит $y \in L_0^*$.

Достаточность. Пусть $\|y\|^* < \infty$ и $z = x \cdot \chi_E \in L_0$. Тогда $\|x\|_{\hat{L}} < \infty$ и в силу неравенства (6)

$$\int_T |yz|\, d\mu \leq \|y\|^* \cdot \|x\|_{\hat{L}} < \infty.$$

Отсюда следует: $y \in L_0^*$. ▲.

С л е д с т в и е. $L_0^* = \{y \in S(T,\Sigma,\mu) : \|y\|^* < \infty\}$ есть банахово пространство.

Обозначим через L банахово функциональное пространство L_0^{**} с нормой

$$\|x\|_L = \sup_{\|y\|^* \leq 1} \int_T |xy|\, d\mu.$$

Из определения нормы $\|\cdot\|$ следует: $\|y\|^* = \|y\|_{L^*}$. Отметим неравенство

$$\|x\|_{\hat{L}} \leq \|x\|_L, \tag{8}$$

вытекающее из того, что в силу неравенства (5) единичный шар пространства $\hat{L}^*$ содержится в единичном шаре пространства L_0^*. Из определения дуального множества следует, что $L_0 \subset L_0^{**} = L$.

Т е о р е м а 4. Справедливо равенство $\hat{L} = L + L_\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L_0 \subset \hat{L}$, то $L = L_0^{**} \subset \hat{L}^{**} = \hat{L}$. Поскольку $L_\infty \subset \hat{L}$, имеем включение $L + L_\infty \subset \hat{L}$. Докажем обратное: так как $L_0 \subset L$ и в силу теоремы 2 $\hat{L} = L_0 + L_\infty$, то $\hat{L} \subset L + L_\infty$. ▲.

Т е о р е м а 5. Если $x \in S(T,\Sigma,\mu)$, то $x \in \hat{L}$ тогда и только тогда, когда $\forall A \in \Sigma$, $\mu A < \infty$, $x \cdot \chi_A \in L$.

Необходимость. Пусть $x \in \hat{L}$ и $A \in \Sigma$, $\mu A < \infty$. Представим в виде $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, где $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\mu E_i \leq 1$. Тогда $\forall_i\ x\chi_{E_i} \in L_0 \subset L$, следовательно, $x\chi_A = \sum_{i=1}^{n} x\chi_{E_i} \in L$.

Достаточность. Предположим, что $\|x\| = \infty$. Можно считать, что $x \geq 0$. Используя свойство IУ, найдем такую последовательность множеств $E_k \in \Sigma$, при которой $\mu E_k \leq 1$ и

$$\|P_{E_k} x\|_{\hat{L}} > k.$$

В силу неравенства (8)

$$\|P_{E_k} x\|_L \geq \|P_{E_k} x\|_{\hat{L}} > k.$$

Далее, рассуждая, как при доказательстве достаточности теоремы I, можно найти множество $E \in \Sigma$, $\mu E < \infty$, функцию $0 \leq y \in L^*$ ($\|y\|_{L^*} \leq 1$), такие, при которых $\forall n \in N$,

$$\int_E xy\, d\mu > n.$$

Это противоречит тому, что $x \cdot \chi_E \in L$. ▲

Установим одно выражение для нормы в $\hat{L}$. Использовав равенство (4), $\forall E \in \Sigma$, $\mu E \leq 1$, получим

$$\|P_E x\|_L = \sup_{\|y\|^* \leq 1} \int_E |xy|\, d\mu \leq \sup_{\|P_E y\|^* \leq 1} \int_E |xy|\, d\mu = \sup_{\|P_E y\|_{\hat{L}^*} \leq 1} \int_E |xy|\, d\mu. \tag{9}$$

В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int_E |xy|\, d\mu \leq \|x\|_{\hat{L}} \cdot \|P_E y\|_{\hat{L}^*}.$$

Отсюда

$$\sup_{\|P_E y\|_{\hat{L}^*} \leq 1} \int_E |xy|\, d\mu \leq \|x\|_{\hat{L}}.$$

Тогда из выражения (9) следует, что $\|P_E x\|_L \leq \|x\|_{\hat{L}}$. Поэтому

$$\sup_{\mu E \leq 1} \|P_E x\|_L \leq \|x\|_{\hat{L}}.$$

Докажем обратное: в силу неравенства (8) и свойства IУ имеем

$$\|x\|_{\hat{L}} = \sup_{\mu E \leq 1} \|P_E x\|_{\hat{L}} \leq \sup_{\mu E \leq 1} \|P_E x\|.$$

Это неравенство вместе с предыдущим дает новое выражение для нормы:

$$\|x\|_{\hat{L}} = \sup_{\mu E \leq 1} \|P_E x\|_L.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Грибанов Ю.И. Банаховы пространства функций и интегральные операторы. - Изв.вузов. Математика, 1966, № 4, с. 41-49.

2. Luxemburg W.A.J. Banach function spaces, Assen (Netherlands), 1955.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.-М.: Наука, 1977.

4. Грибанов Ю.И. Некоторые классы локально выпуклых топологических пространств, IУ.-Изв. вузов. Математика, 1969, № 5, с. 12-19.

5. Gould GG. On a class of integration spaces. J. London Math. Soc., V. 34. 1959.

6. Макаров А.С. Некоторые вопросы банаховых функциональных пространств и нелинейных операторов в них: Автореф...дисс. канд. физ-мат. наук. - Казань: КГУ, 1975.

УДК 517.546

Г.В.Марков

О КРИВЫХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИЗОБРАЖАЮЩИМИ ВЕКТОРАМИ ТРЕХФАЗНЫХ СИСТЕМ

I. Трехфазная периодическая электрическая система "без нулевого провода" обладает изображающим радиус-вектором, конец которого описывает замкнутую кривую. Этот вектор (проекции которого на фазные оси равны соответствующим фазным компонентам) можно представить, используя метод, описанный в работе [I], рядом Лорана

$$\omega = \ldots + a_{-n}\xi^{-n} + \ldots + a_{-1}\xi^{-1} + a_1\xi + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$$

Здесь $\xi = \exp it$, и a_k $(k = \pm 1 \ldots)$ - комплексные коэффициенты, определенным образом связанные с параметрами системы.

При решении некоторых задач электротехники необходимо, чтобы 3-фазная система по своим геометрическим свойствам была близка к синусоидальной. К примеру, потребуем, чтобы она имела такие же число и порядок перемен фаз, что и синусоидальная система (невырожденная). Это эквивалентно требованию, чтобы конец вектора описывал простую и звездообразную относительно точки $\omega = 0$ кривую. Для краткости такие кривые будем называть кривыми класса S.