Алгебра и логика, 9, № 3 (1970), 313–341.

УДК 519.44

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, РАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ 2-ЗАМКНУТЫ ИЛИ 2$'$-ЗАМКНУТЫ

В.Д.МАЗУРОВ, В.М.СИТНИКОВ, С.А.СЫСКИН

Конечная группа называется 2-замкнутой, если она обладает нормальной силовской 2-подгруппой; она называется 2$'$-замкнутой, если в ней есть нормальное 2-дополнение. Таким образом, группа 2- или 2$'$-замкнута точно тогда, когда ее 2-ряд состоит не более чем из двух членов.

В настоящей работе мы рассмотрим конечные группы, разрешимые подгруппы которых 2- или 2$'$-замкнуты. На эту задачу наше внимание первым обратил В.Т.Нагребецкий.

ТЕОРЕМА. *Пусть G – конечная группа и пусть любая разрешимая подгруппа из G 2- или 2$'$-замкнута. Тогда в G существует инвариантный ряд*

$$1 \leqslant G_2 < G_1 \leqslant G,$$

где G/G_1 – группа нечётного порядка, $G_2 = T \times R$, T – 2-группа, R – 2$'$-группа, $G_1 \leqslant G_2 C(G_2)$, $G = T C(T)$ и G_1/G_2 изоморфна одной из следующих простых групп:

$PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$;

$PSL(2,2^n)$, $n > 1$;

$PSU_3(2^{2n})$, $n > 1$;

$Sz(2^n)$, $n > 1$ нечетно;

группа Янко J с абелевой силовской 2-подгруппой.

В частности, простые группы, разрешимые подгруппы которых 2-замкнуты или $2'$-замкнуты, исчерпываются простыми группами $PSL(2,q)$, $q=2^n$ или $q\equiv 3,5 (mod 8)$, J, $PSU_3(2^{2n})$ и $Sz(2^{2n+1})$.

Доказательство теоремы ведется индукцией по порядку группы. Пусть G – противоречащий теореме пример минимального порядка. На первом шаге показывается следующее: если группа G проста, то либо централизаторы всех ее инволюций разрешимы, либо в G силовская 2-подгруппа абелева и имеет порядок 8. Второй случай исключается результатом Уолтера [16].

На втором шаге рассматривается случай простой группы G с разрешимыми централизаторами инволюций. Тогда справедлива теорема транзитивности Томпсона и доказательство сразу сводится к случаю, когда в силовской 2-подгруппе из G инвариантные абелевы подгруппы имеют не более двух порождающих. Это позволяет установить, что централизаторы инволюций $2'$-замкнуты, и применить результат Глаубермана [8].

На третьем шаге устанавливается простота G, чем доказательство и заканчивается.

В работе используются стандартные определения и обозначения. Если $\pi_1,\dots,\pi_k$ – множества простых чисел, то $O_{\pi_1}(X)$ означает максимальную нормальную π_1-подгруппу группы X и $O_{\pi_1,\dots,\pi_k}(X)$ – полный прообраз в X подгруппы $O_{\pi_2,\dots,\pi_k}(X/O_{\pi_1}(X))$, $C_H(K)$ и $N_H(K)$ – централизатор и, соответственно, нормализатор K в H. Иногда $C_G(K)$ и $N_G(K)$ обозначаются просто через $C(K)$ и $N(K)$. Инволюцией называется элемент порядка 2.

$S(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G, $O^2(G)$ – подгруппа, порожденная элементами из G нечетного порядка.

Определения и свойства групп $PSL(2,q)$, группы J, групп типа Ри, $PSU_3(2^n)$, $Sz(q)$, использованные в этой статье, можно найти в [1], [11], [12], [13], [17].

Через $\langle \dots \mid \dots \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная элементами, выписанными до черты, удовлетворяющими условиям, выписанным после черты. $\{\dots \mid \dots\}$ означает множество, состоящее из элементов ..., удовлетворяющих условиям ... .

Если $A \leq G$ то $\mathcal{U}(A) = \{H \mid H \leq G,\ A \leq \mathcal{N}(H),\ H \cap A = 1\}$. $\mathcal{U}(A;p)$ означает множество элементов из $\mathcal{U}(A)$, являющихся p-подгруппами, а $\mathcal{U}^*(A;p)$-множество максимальных элементов в $\mathcal{U}(A;p)$; $X^{\#}$ означает $X - \{1\}$. $|H|$- порядок H и $|H|_\pi$ - наибольший π-делитель $|H|$.

Предварительные результаты

В этом пункте G — простая группа. означает минимальный противоречащий теореме пример.

ЛЕММА 1. а) Если T - силовская 2-подгруппа из G, то любые два элемента из T, сопряженные в G, сопряжены в $\mathcal{N}(T)$.

б) Если G - простая группа, то $O^2(\mathcal{N}(T)) = \mathcal{N}(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. б) следует из а) и теоремы Д.Хигмана [10] о фокальных подгруппах.

Пусть а) неверно. По теореме Альперина [3] существует такое пересечение D подгруппы T с некоторой силовской 2-подгруппой T_1 группы G и такие два элемента x, y из D, что $\mathcal{N}_T(D)$ и $\mathcal{N}_{T_1}(D)$- силовские 2-подгруппы из $\mathcal{N}(D)$, x, y не сопряжены в $\mathcal{N}(T)$, но сопряжены в $\mathcal{N}(D)$. Если $\mathcal{N}(D)$- неразрешимая группа, то по индуктивному предположению $\mathcal{N}(D) = D \cdot C(D)$ и x, y сопряжены в D, а значит, и в $\mathcal{N}(T) \geqslant D$.

Если $\mathcal{N}(D)$- 2-замкнутая подгруппа, то $\mathcal{N}_{T_1}(D) = \mathcal{N}_T(D)$, что противоречиво; если же $\mathcal{N}(D)$- $2'$-замкнут, то $\mathcal{N}(D) = O_{2'}(\mathcal{N}(D)) \cdot \mathcal{N}_T(D)$ и $O_{2'}(\mathcal{N}(D)) \leqslant C(D)$. В этом случае x и y сопряжены в $\mathcal{N}_T(D)$, и, следовательно, в $\mathcal{N}(T)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G - простая группа, T - её силовская 2-подгруппа. Если $Z(T)$ лежит в некоторой силовской 2-подгруппе T_1 группы G, то $T = T_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $T_1 = T^x$, где $x \in G$. Если $Z(T) \neq Z(T_1)$, то $Z(T^{x^{-1}}) \leq T$ и $Z(T^{x^{-1}}) \neq Z(T)$. В $Z(T^{x^{-1}})$ существует элемент $z^{x^{-1}}$, не лежащий в $Z(T)$, в то время как $z \in Z(T)$. По лемме 1 z и $z^{x^{-1}}$ сопряжены в $\mathcal{N}(T)$, то есть $z^{x^{-1}} \in Z(T)$

Противоречие.

Если $Z(T) = Z(T^x)$, то $N(Z(T))$ содержит T и T_1. Если $N(Z(T))$ – $2'$-замкнутая подгруппа, то $N(T) \leq N(Z(T))$ – $2'$-замкнутая подгруппа. Лемма 1 показывает, что G обладает нормальным 2-дополнением и G разрешима по [6]. Если $N(Z(T))$ 2-замкнут, то T – единственная силовская 2-подгруппа из $N(Z(T))$ и $T = T_1$. Если $N(Z(T))$ – неразрешимая группа, то по индуктивному предположению $N(Z(T)) = C(Z(T))$. Лемма 1 и теорема Глаубермана [7] показывают, что G не проста. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если G – простая группа, D – некоторая подгруппа из силовской 2-подгруппы T из G, а X – подгруппа нечетного порядка из G, нормализующая, но не централизующая D, то $X \leq N(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_1 – подгруппа из T, содержащая D, нормализуемая подгруппой X и максимальная относительно этих свойств.

Тогда X не централизует D_1 и по индуктивному предположению $N(D_1)$ разрешим и 2-замкнут. Если T_0 – силовская 2-подгруппа из $N(D_1)$ и T_1 – силовская 2-подгруппа из G, содержащая T_0, то $Z(T) \leq T_0 \leq T_1$, и $T = T_1$ по лемме 2. Поэтому $T_0 \leq T_1$ и X нормализует T_0. В силу максимальности D_1 имеем: $D_1 = T_0 = T$ и лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если G – простая группа, то центр силовской 2-подгруппы группы G не циклический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 1 и теоремы Глаубермана [7].

V ЛЕММА 5. Если H – группа Фробениуса с ядром F и дополнением L, U – представление H, не содержащее F в своем ядре, над полем, характеристика которого не делит $|H|$, то степень U не меньше, чем $|L|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что U абсолютно неприводимо. По известному соответствию между обыкновенными представлениями и представлениями над полем комплексных чисел ([5], § 4), можно считать, что U – комплексное представление. Наша лемма теперь – частный случай утверждения 25.4 из книги Фейта [5].

ЛЕММА 6. Если T – силовская 2-подгруппа из $Sz(2^n)$ или $PSU_3(2^{2n})$, T_1 – такая её подгруппа, что $T = T_1 \cdot C_T(T_1)$ то либо $T_1 \leq Z(T)$, либо $T = T_1$. Если T – силовская 2-подгруппа из группы Сузуки и $Z(T) < T_1$, то $C(T_1) \leq T_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $Z(T) \leq \Phi(T)$, мы можем предположить, что $Z(T) \leq T_1$. Предположим, что $Z(T) < T_1$ и докажем, что $T_1 = T$. Если T – силовская 2-подгруппа из $Sz(q)$, то по [12] $T = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in GF(q)\}$ и $(\alpha,\beta)(\gamma,\delta) = (\alpha+\gamma, \alpha\gamma^{\theta}+\beta+\delta)$, где θ – автоморфизм поля $GF(q)$, переводящий γ в $\gamma^{\sqrt{2q}}$. Пусть $(\alpha,\beta)(\gamma,\delta) = (\gamma,\delta)(\alpha,\beta)$, где $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha\gamma^{\theta} = \gamma\alpha^{\theta}$ и $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\theta} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Поскольку θ – образующий элемент группы автоморфизмов $GF(q)$, то $\frac{\gamma}{\alpha} \in GF(2)$, поэтому либо $\gamma = 0$ и $(\gamma,\delta) \in Z(T)$, либо $\alpha = \gamma$ и $(\gamma,\delta) \in (\alpha,\beta)\, Z(T)$.

Таким образом, если $Z(T) < T_1$, то в T_1 содержится элемент (α,β) с $\alpha \neq 0$ и $C_T(T_1) \leq C_T(\alpha,\beta) \leq \langle(\alpha,\beta)\rangle Z(T) \leq T_1$, и лемма в этом случае доказана.

Пусть T – силовская 2-подгруппа из $PSU_3(q^2)$. Тогда по [13] $T = \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in GF(q^{1})\}$ и

$$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2, \gamma_1+\gamma_2+\alpha_1\alpha_2+\varepsilon\alpha_1\beta_2+\beta_1\beta_2).$$

?

Если $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = (\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, то $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$, или $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.

Мы можем предполагать, что $Z(T) \leq T_1$. Если в T_1 содержатся два элемента $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ с $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$, то $C_T(T_1) \leq Z(T)$ и $T_1 = T$. Если же для любых двух элементов из T_1 $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$, то $T_1 \leq C(T_1)$ и $C(T_1) = T$, откуда $T_1 \leq Z(T)$. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Будем доказывать её индукцией по порядку группы. На протяжении всей статьи G означает минимальный противоречащий теореме пример, T – некоторую силовскую 2-подгруппу из G.

Очевидно, все собственные неразрешимые подгруппы и гомоморфные образы группы G удовлетворяют условиям теоремы, и поэтому их строение определяется заключением теоремы.

Первый шаг. G -простая группа и централизатор некоторой инволюции из G неразрешим

Пусть $\mathfrak{M}=\{H \mid H$ - неразрешимая подгруппа из G, $O_2(H) \neq 1\}$. По предположению, $\mathfrak{M}$ непусто. Пусть $\mathfrak{X}$ - множество максимальных по включению элементов из $\mathfrak{N}=\{H \mid H\in \mathfrak{M},\ |H|_2 \geq |H_1|_2$ для любого $H_1 \in \mathfrak{M}\}$ и $H\in \mathfrak{X}$. Пусть $\bar{H} = H/O_{2'}(H)$. Обозначим $O_2(\bar{H})$ через V, через T_0 -силовскую 2-подгруппу из $\bar{H}$ и через T -силовскую 2-подгруппу группы G, содержащую T_0. $\bar{H}/V$ содержит нормальную подгруппу $\bar{H}_0/V$ нечётного индекса, изоморфную $PSL(2,2^n)$, $PSL(2,r)$ $(r\equiv\pm 3 \pmod 8)$, $Sz(2^n)$, $PSU_3(2^{2n})$, J или группе типа Ри.

Отсюда $Z(T_0/V)$ - элементарная абелева 2-группа. Обозначим $|Z(T_0/V)| = q = 2^n$. Тогда в H_0 содержится циклическая подгруппа X порядка $q-1$, нормализующая T_0 и действующая транзитивно на $Z(T_0/V)^{\#}$. Кроме того, если $H_0/V \simeq PSU_3(2^{2n})$, то в H_0 содержится циклическая подгруппа Y порядка $\frac{q+1}{(3,q+1)}$, централизующая X и $Z(T_0/V)$ и действующая без неподвижных точек на

$$(T_0/V)/Z(T_0/V).$$

Положим $Y=1$, если H_0/V не изоморфна $PSU_3(2^{2n})$. По лемме 3 $X\times Y \leq N(T)$. Пусть $\tilde{K}$ - дополнение к T в $N(T)$, содержащее X и Y, пусть $K=\tilde{K}/C_{\tilde{K}}(T)$ - группа автоморфизмов, индуцированная $\tilde{K}$ в T и пусть $\mathcal{N}=TK$ - естественное полупрямое произведение T на K.

Мы можем считать, что $(X\times Y)\leq K$, так как $(X\times Y)\cap C(T)=1$.

В следующей лемме перечислены те свойства $\mathcal{N}$, которые нам потребуются в дальнейшем.

ЛЕММА 7. С у щ е с т в у е т г р у п п а $\mathcal{N}$ с о с л е д у ю щ и м и с в о й с т в а м и:

(а) $\mathcal{N}=TK$, г д е T - 2 - г р у п п а, K - г р у п п а нечетного порядка, $T \lhd \mathcal{N}$ и $C_{\mathcal{N}}(T) = Z(T)$.

(б) в T существует собственная нетривиальная подгруппа V такая, что $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V) = VC_{\mathcal{N}}(V)$. Положим $\mathcal{N}_T(V) = T_0$.

(в) $Z(T_0/V)$ - элементарная абелева порядка $q=2^n$, T_0/V - элементарная абелева или изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $Sz(2^n)$ или $PSU_3(2^{2n})$.

(г) в $\mathcal{N}_K(V)$ существует подгруппа $X \times Y$, где X - циклическая группа порядка $q-1$, действующая транзитивно на $Z(T_0/V)$, T_0X/V - группа Фробениуса. В случае, когда T_0/V изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSU_3(2^{2n})$, Y - циклическая группа порядка $\frac{q+1}{(3,q+1)}$, действующая без неподвижных точек на $T_0/V/Z(T_0/V)$ и тождественно на $Z(T_0)/V$, , в остальных случаях $Y=1$. Если T_0/V изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $Sz(2^n)$, то X действует транзитивно на $(T_0/V)/Z(T_0/V)$.

(д) для любой подгруппы $1 \neq V_0 \lhd V$ $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V_0) = \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)$.

(е) $O^2(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ и $Z(\mathcal{N}) = 1$.

(ж) $|T| > 8$.

(з) Если $|T:T_0| = q$, $T_0 = \Phi(T)V$; $V \cap \Phi(T) \neq 1$, $V \leq Z_2(T)$, V - элементарная абелева и действует транзитивно на T/T_0, то T_0/V не изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $Sz(8)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V, T, T_0, X, Y, K, \mathcal{N}$ - группы, определенные перед леммой. Покажем, что они удовлетворяют условиям леммы.

Пункт (а) выполнен по определению $\mathcal{N}$. Так как $H \leq \mathcal{N}(V)$, то, в силу максимальности H, $H = \mathcal{N}(V)$, $T_0 = \mathcal{N}_T(V)$, и (б) следует из леммы 1. (в) и (г) выполнены по определению $\mathcal{N}$. (е) выполнено по лемме 1б) и теореме Глаубермана [7].

Докажем (д). Пусть $V_0 \lhd V$, $V_0 \neq 1$. Тогда $N_G(V_0) \geqslant \langle V, C(V)\rangle = H$ и в силу максимальности H, $N_G(V_0) = H$, откуда (д) следует.

Пусть $|T| \leqslant 8$. Так как $|T_0/V| \geqslant 4$, то $T_0 = T$, $|T| = 8$ и $|V| = 2$. По (е) T – элементарная абелева и $N(V)$ содержит нормальную подгруппу, изоморфную $PSL(2, r)$, $r \equiv \pm 3 (mod\, 8)$. Результаты Уолтера [16] и Уорда [17] показывают, что $G \simeq J$. Докажем (з). Допустим противное. По (д) $V \cap Z(T) = 1$. Так как X действует транзитивно на $Z(T_0/V)$ и $Z(T)V/V \leqslant Z(T/V)$, то $Z(T) \simeq Z(T_0/V)$ и X действует на $Z(T)$ транзитивно. По (д) и (б) $V \leqslant Z(T_0)$, т.к. $\Omega_1(T_0/V) = Z(T)V/V$, $\Omega_1(T_0) = V \times Z(T)$. Далее, по (д) для любого $t \in T - T_0$ $t^{-1}\sigma t = \sigma z$, где $z \in Z(T)$ и $z \neq 1$.

Пусть $V \cap \Phi(T_0) \neq 1$. Тогда существует элемент t такой, что $t^2 = \sigma z$, где $\sigma \in V^{\#}$, $z \in Z(T)$, $t \in T_0$. Кроме того, существует $t_1 \in T - T_0$ такой, что $t_1^2 \notin V \times Z(T)$. Иначе $\Phi(T) \leqslant V \times Z(T)$, что по условию не так.

Смежный класс $t_1^2(V \cdot Z(T))$ сопряжен элементом x из X со смежным классом $t(V \cdot Z(T))$. Поэтому

$$(t_1^x)^2 = tu \quad, \text{ где } \quad u \in V \cdot Z(T),$$

но тогда $(t_1^x)^4 = t^2 = \sigma z$, и t_1^x перестановочен с σ, что неверно, поскольку $t_1^x \notin T$. Итак, $V \cap \Phi(T_0) = 1$. В частности, $H = N_G(V) = C_G(V) = V \times H_1$.

Предположим, что $V_0 = V \cap \Phi(T)$ имеет порядок 2, то есть $V_0 = \langle \sigma \rangle$. По предыдущему $\Phi(T) = \Phi(T) \cap T_0 = V_0 \times T_1$, где $T_1 \simeq T_0/V$. Если для любого $t \in T$ $t^2 \in T_1$, то $\Phi(T) \cap V = 1$, что по условию неверно. Поэтому существует элемент $t \in T$, что $t^2 = \sigma t_0$, где $\sigma \in V^{\#}$, $t_0 \in T_0$. Тогда $t \in T - T_0$, $t^{-1}(\sigma t_0)t = \sigma t_0$ и если $t_0^{-1}\sigma t = \sigma z$, то $t^{-1} t_0 t = t_0 z$.

Пусть $t_1 \in T_1$. Тогда $(tt_1)^2 = tt_1tt_1 = t^2 t^{-1} t_1^2 t_1^{-1} t t_1$. Поскольку $t_1^2 \in Z(T)$ $(tt_1)^2 = t^2 t_1^2 [t, t_1] = \sigma t_0 t_1^2 \sigma_1 z_1$, где $\sigma_1 \in V$, $z_1 \in Z(T)$. Итак, $(tt_1)^2 = \sigma \sigma_1 t_0 t_1^2 z_1$. Поэтому $t_1^{-1} t^{-1} (\sigma \sigma_1 t_0 t_1^2 z_1) t t_1 = \sigma \sigma_1 t_0 t_1^2 z_1$, откуда

$$\sigma z \sigma_1^t t_0^{t_1} z t_1^2 z_1 = \sigma \sigma_1 t_0 t_1^2 z_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1^t t_0^{t_1} = \sigma_1 t_0.$$

Если $\sigma_1 = 1$, то $t_0^{t_1} = t_0$, если же $\sigma_1 \neq 1$, то $\sigma_1 = \sigma$ и $t_0^{t_1} = t_0 z$.

Если же $O_2(\mathcal{N}_G(\langle u\rangle))=1$, то так как в $\mathcal{N}_G(\langle u\rangle)$ все инволю ции сопряжены и $\mathcal{N}_G(\langle u\rangle)$ содержит V и содержит неединичный эле мент из центра некоторой силовской 2-подгруппы, то T_0 - силовская 2-подгруппа из G, что по условию неверно. Итак, $H_1\simeq Sz(8)$.

Пусть $D=(V\times K)^{\#}$, где K - множество элементов нечетного порядка из H. Покажем, что D является TI -множеством, то есть покажем, что $D\leq\mathcal{N}(D)$ и $D\cap D^g=\phi$ для $g\in G-\mathcal{N}(D)$.

Очевидно, что $\mathcal{N}(D)\leq\mathcal{N}(V^{\#})=H$, откуда $\mathcal{N}(D)=H$, так как D - инвариантное в H подмножество.

Пусть $g\in G-H$ и пусть $D\cap D^g\neq\phi$. Очевидно, если $D\cap D^g\neq\phi$, то $(V^{\#}\cap V^{\#g})\cup(K\cap K^g)\neq\phi$. Если $V^{\#}\cap V^{\#g}\neq\phi$, то пусть $v\in V^{\#}\cap V^{\#g}$. Тогда $C(v)$ содержит $\langle H,H^g\rangle>H$, что невозможно, поэтому $K\cap K^g\neq\phi$. Существует элемент $k\in K$ такой, что $k^g\in K$. Мы можем считать k элементом простого порядка. Поскольку все силовские подгруппы нечетного порядка из группы $Sz(8)$ - циклические, то существует такой элемент h из H, что $\langle k\rangle=\langle k\rangle^{gh}$ и $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)\nleq H$. Покажем, что это неверно. Действительно, $\mathcal{N}_H(\langle k\rangle)$ - разрешимая не 2-замкнутая группа, содержащая V. Если $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)$ $2'$-замкнут, то вследствие нецикличности V $O_{2'}(\mathcal{N}_G(\langle k\rangle))\leq C(V)$ и поэтому $V\leq O_2(\mathcal{N}_G(\langle k\rangle))\leq\leq C(V)$. Отсюда $V\leq O_2(\mathcal{N}_G(\langle k\rangle))$. Так как V - силовская 2-подгруппа в $C_H(\langle k\rangle)$, то $V=O_2(\mathcal{N}_G(\langle k\rangle))$ и $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)\leq\leq\mathcal{N}(V)=H$. Если же $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)$ - неразрешимая группа и $O_2(\mathcal{N}_G(\langle k\rangle))\neq 1$, то $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)$ содержится в подгруппе, сопряженной с H и поэтому $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)\leq H$. Если же $O_2(\mathcal{N}_G(\langle k\rangle))=1$, то в $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)$ по индуктивному предположению все инволюции сопряжены и так как $\mathcal{N}_H(\langle k\rangle)$ содержит V и неединичный элемент из центра некоторой силовской 2-подгруппы, то T_0 - силовская 2-подгруппа группы G, что по предположению не так. Итак, $\mathcal{N}_G(\langle k\rangle)\leq H$ для любого $k\in K$ и D - TI -множество.

Пусть φ - неприводимый характер группы $H_1\simeq Sz(8)\simeq Sz(q)$ степени q^2 (см. [12]), φ_1 - неприводимый характер H_1 степени q^2+1, рассматриваемые как характеры H; δ - линейный неединичный характер V и v - такой элемент из V, для которого $\delta(v)=-1$. Пусть I - класс сопряженных элементов группы G, содержащий v, $J=H\cap I$. Обобщенные характеры $\varphi-\delta\varphi$ и $1_H+\varphi-\varphi_1$ обращаются в нуль на всех элементах из $H-\mathcal{D}$. По [14] индуцированные характеры $(\varphi-\delta\varphi)^G$ и $(1_H+\varphi-\varphi_1)^G$ имеют вид $\varepsilon(\chi-\chi_1)$ и $1_G+\varepsilon(\chi-\chi_2)$, где χ, χ_1, χ_2 - различные неприводимые характеры группы G и $\varepsilon=\pm 1$.

Кроме того, если f - степень χ, то $\chi_1(1)=f$, $\chi_2(1)=f+\varepsilon$ и так как $\varepsilon(\chi-\chi_1)(v) = (\varphi-\delta\varphi)(v)$ и $(1_G+\varepsilon(\chi-\chi_2))(v) = (1_H+\varphi-\varphi_1)(v)$, то $\chi_1(v)=x-2\varepsilon q^2$, $\chi_2(v)=x+\varepsilon$. Отсюда

$$|G|\,\frac{\varepsilon\cdot T_{G,I}(\chi)^2-\varepsilon T_{G,I}(\chi_1)^2}{f} = |H|\,\frac{T_{H,J}(\varphi)^2-T_{H,J}(\delta\varphi)^2}{q^2}.$$

Здесь $T_{G,I}(\chi)$ и $T_{G,I}(\chi_1)$ равны $\frac{\chi(v)}{|H|}$ и $\frac{\chi_1(v)}{|H|}$, соответственно, а $T_{H,J}(\varphi)=-T_{H,J}(\delta\varphi)=\frac{q^2}{|H|}$. Поэтому

$$\varepsilon x^2-\varepsilon(x-2\varepsilon q^2)^2=0 \quad \text{и} \quad 2\varepsilon q^2(2x-2\varepsilon q^2)=0,$$

откуда $x=\varepsilon q^2$. Произведя аналогичные вычисления с $1-\varepsilon(\chi-\chi_2)$, мы придем к равенству

$$\frac{|G|\,(f-x)^2}{f\,(f+\varepsilon)} = |H|\,q^2(q-1)^2(q^2+1),$$

и

$$\frac{|G|}{|H|\,q} = \frac{q(q-1)^2(q^2+1)f(f+\varepsilon)}{(f-x)^2}$$

Поскольку $|T:T_0|=q$ и любая силовская подгруппа нечётного порядка из H является силовской подгруппой в G, поэтому $\frac{|G|}{|H|}$ делится на q и $\left(\frac{|G|}{|H|q}, |H|\right)=1$. Так как $q(q-1)(q^2+1)$ свободно от квадратов и делит $|H|$, то $f-q$ делится на $q(q-1)(q^2+1)$. Пусть $f-\varepsilon q_2=q(q-1)(q^2+1)s$, где s - положительное число. Тогда

$$f = q(q-1)(q^2+1)s+\varepsilon q^2$$

и

$$f+\varepsilon = q(q-1)(q^2+1)s+\varepsilon(q^2+1)=(q^2+1)[q(q-1)s+\varepsilon]$$

и

$$\frac{|G|}{|H|\,q} = \frac{[(q-1)(q^2+1)s+\varepsilon q][q(q-1)s+\varepsilon]}{s^2}$$

s^2 делит $(q-1)(q^2+1)s+\varepsilon q$ и поэтому s делит q. Пусть q =

$=q_0 s$. Тогда $(sq_0-1)(s^2q_0^2+1)s+\varepsilon q_0 \equiv 0 \pmod{s^2}$, $\varepsilon s q_0 - s \equiv 0 \pmod{s^2}$, $\varepsilon q_0 - 1 \equiv 0 \pmod{s}$. Так как s - степень числа 2, то $s=1$ или $q_0=1$, $\varepsilon=1$, $s=8$. Если $s=1$, то

$$\frac{|G|}{|H|} = q[(q-1)(q^2+1)+\varepsilon q][q(q-1)+\varepsilon] = 8(7\cdot 65+8\varepsilon)(56+\varepsilon).$$

Если $\varepsilon=-1$, то $\left(\frac{|G|}{|H|}, |H|\right)$ делится на 5, что неверно. Поэтому $\varepsilon=1$ и $\frac{|G|}{|H|} = 8(7\cdot 65+8)57$. Учитывая, что нормализатор силовской 5-подгруппы из H содержится в H, мы получаем, что $\frac{|G|}{|H|} \equiv 1 \pmod 5$, но $8(7\cdot 65+8)\cdot 57 \equiv -2 \pmod 5$. Противоречие. Случай $s=8$ исключается аналогично. Т.о., пункт (з) леммы верен и лемма доказана.

Пусть $\mathcal{N}$ - группа, удовлетворяющая условиям леммы 7. Цель оставшейся части этого пункта - показать, что группы $\mathcal{N}$ не существует.

ЛЕММА 8. (а) *Для любого* $x\in X^{\#}$ $C_T(x)=V$.

(б) *Если* $L \lhd M \leqslant T$ - x*-допустимые подгруппы и* $VL\cap M \leqslant L$, *то* $M\langle x\rangle/L$ *- группа Фробениуса с ядром* M/L.

(в) *Для любой неединичной подгруппы* X_0 *из* X $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(X_0) \leqslant \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7(г) T_0X/V - группа Фробениуса, поэтому для любого x из $X^{\#}$ $C_{T_0}(x)=V$. Если $T_1=C_T(x)>V$, то $\mathcal{N}_{T_1}(V)>V$, но $\mathcal{N}_{T_1}(V)\leqslant T_0\cap C_{T_0}(x)=C_{T_0}(x)=V$. Противоречие, и (а) верно. (б) следует из (а).

Пусть $1\neq X_0\leqslant X$ и $y\in \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(X_0)$. Тогда y нормализует $C_T(X_0)=V$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9 (а) V *- элементарная абелева группа,* $|V|\leqslant q$ *и* $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)=C_{\mathcal{N}}(V)$

(б) $C_{\mathcal{N}}(v)=C_{\mathcal{N}}(V)$ *для любого* $v\in V^{\#}$.

(в) $V\cap V^x = V$ *или* 1 *для любого* $x\in\mathcal{N}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 8 (б) и 8 (е) $V \ntriangleleft \mathcal{N}$. $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)$ нормализует $\mathcal{N}_T(V)=T_0$, поэтому $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(T_0)\geqslant \mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)$. Покажем вначале, что $\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(T_0)\geqslant\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)$. Если $T_0=T$, то $|\mathcal{N}:\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)| = |\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(T_0):\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)| = |K:\mathcal{N}_K(V)|$ - нечетное число, отличное от единицы. Если же $T_0<T$, то $|\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(T_0):\mathcal{N}_{\mathcal{N}}(V)|\geqslant|\mathcal{N}_T(T_0):T_0|$. Но $\mathcal{N}_T(T_0)/T_0$ - X - допустимая подгруппа, и по лемме 8 (б) $\mathcal{N}_T(T_0)X/T_0$

группа Фробениуса с ядром $N_T(T_0)/T_0$. Так как $|X| \geqslant 3$, то

$$|N_T(T_0) : T_0| \geqslant 4 \quad \text{и} \quad |N_N(T_0) : N_N(V)| \geqslant 3$$

во всех случаях.

Пусть $y \in N_N(T_0) - N_N(V)$. Тогда $V^y \triangleleft T_0$ и $D = V \cap V^y \triangleleft V$. Пусть $D \neq 1$. По лемме 7 (д) $N_N(D) = N_N(V)$ и $C(V^y) \leqslant C(D) \leqslant N(D) \leqslant N(V)$. По лемме 7 (б) $N(V^y) = C(V^y)V^y \leqslant N(V)T_0 \leqslant N(V)$ и $N(V^y) = N(V)$. Так как $N(V^y) = V^y C(V^y)$ и $X \leqslant N(V^y)$, то $X \leqslant C(V^y)$. По лемме 8 (а) $V^y \leqslant C_T(X) = V$ и $y \in N(V)$. Противоречие. Поэтому $D = 1$ и $V^yV/V \simeq V^y \simeq V$. Далее, по лемме 7 (б)

$$T_0 = V^y \cdot C_{T_0}(V^y) \quad \text{и} \quad T_0/V \simeq (V^yV/V)\,C_{T_0/V}(V^yV/V).$$

Таким образом, V изоморфна подгруппе $\overline{V}$ из $\overline{T} = T_0/V$, для которой $\overline{T}_0 = \overline{V} \cdot C_{\overline{T}_0}(V)$. Если V – не элементарная абелева, то $\overline{T}_0$ не элементарная абелева и по лемме 7 (в) $\overline{T}_0$ изоморфна силовской 2-подгруппе одной из групп $Sz(2^n)$ или $PSU_3(2^n)$. По лемме 1 $\overline{V} \simeq T_0/V$. Отсюда $T_0 = V \times V^y$, и группа V изоморфна силовской 2-подгруппе $Sz(2^n)$ или $PSU_3(2^n)$. Покажем, что это невозможно. Пусть $y_1 \in N_N(T_0) - (yN_N(V) \cup N_N(V))$. Такой элемент существует, поскольку $|N_N(T_0) : N_N(V)| \geqslant 3$. Тогда $T_0 = V \times V^{y_1}$ и $\langle V^y, V^{y_1} \rangle \leqslant C_{T_0}(V) = V^y \times Z(V)$ и $\Omega(\langle V^y, V^{y_1} \rangle) \leqslant \Omega_1(V^y)$. Отсюда $\Omega_1(V^{y_1}) = \Omega_1(V^y)$, $V \cap V^{y_1 y^{-1}} \neq 1$. Но $y_1 y^{-1} \in N_N(T_0) - N_N(V)$ и $V \cap V^{y_1 y^{-1}} = 1$. Противоречие. V – элементарная абелева. По лемме 7 (б) $N_N(V) = C_N(V)$. Пункт (а) доказан. Пусть $v \in V^{\#}$. По пункту (а) $\langle v \rangle \triangleleft V$ и по лемме 7 (г) $C_N(v) \leqslant N_H(\langle v \rangle) = N_N(V) = C_N(V)$, что доказывает (б).

Пусть $V \cap V^x = D \neq 1$, где $x \in N$. Тогда $C_N(V^x) \leqslant C_N(D)$ и по пункту (б) $C_N(V^x) \leqslant C_N(V)$. Поэтому $C_N(V^x) = C_N(V)$ и X централизует V^x, откуда $V^x \leqslant C_T(X) \leqslant V$ и $x \in N(V)$, то есть $V^x \cap V = V$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть L – подгруппа из K, для которой $X_0 = L \cap X \neq 1$. Пусть V_0 – нетривиальная подгруппа из V. Пусть $T_1 \leqslant T$, $T_1 = T_2 V_0$, где $T_2 \triangleleft T_1$ и $V_0 \nleqslant T_2$. Если T_1 и T_2 L-

$H \cap V \not\leq H_1$

допустимы, то $L \leq C(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M} = \{H / H \leq T_1, H = H_1 (H \cap V)$, и H, H_1 – L -допустимые подгруппы $\}$. Пусть H – минимальный по включению элемент из $\mathfrak{M}$. Покажем, что $H \leq V$.

$\bar{H}_1 = {}^{H_1 \Phi(H)}/_{\Phi(H)}$ – L -допустимая подгруппа, поэтому в $\bar{H} = {}^{H}/_{\Phi(H)}$ к ней существует L -допустимое дополнение $\bar{D} = {}^{D}/_{\Phi(H)}$. При этом

$$[\bar{H}, L \cap X] = \left[{}^{H_1 (H \cap V)}/_{\Phi(H)}, L \cap X\right] \leq \bar{H}_1$$

так как $H \cap V \leq C_T(X)$. Поэтому $[\bar{D}, L \cap X] \leq \bar{D} \cap \bar{H}_1 = {}^{\Phi(H)}/_{\Phi(H)}$ и $D = \Phi(H) V_1$, где $V_1 \leq C_T(L \cap X)$. Так как $X \cap L \neq 1$ по условию, то по лемме 8 (а) $V_1 \leq V$ и $D = \Phi(H)$, $H = H_1 \cdot \Phi(H)$, откуда $H = H_1$ и $H \cap V \leq H_1$, вопреки условию. Поэтому $D \cap V \not\leq \Phi(H)$.

Далее, D и $\Phi(H)$ – L -допустимы. В силу минимальности H $D = H$ и $H = \Phi(H) \cdot (H \cap V)$. Поэтому $H = H \cap V$ и $H \leq V$. По определению $H \neq 1$ и $L \leq N_N(H)$. По лемме 9 (а) $H \lhd V$. По лемме 7 (д) $L \leq N_N(V)$. По лемме 9 (а) $C_N(V)$ включает L . Лемма доказана.

ЛЕММА 11. $T_0 \neq T$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_0 = T$.

1. Допустим вначале, что T/V – элементарная абелева. По леммам 7 (е) и 9 (а) $V \lhd N$. По лемме 9 (в) существует $x \in N = N(T)$ для которого $V \cap V^x = 1$. Так как T/V – элементарная абелева, то $\Phi(T) \leq V$ и $\Phi(T)^x = \Phi(T)$. Отсюда следует, что $\Phi(T) = 1$ и T – элементарная абелева.

Пусть M – минимальная нормальная подгруппа в K . Предположим, что для некоторого элемента x из $X^{\#}$ $C_M(x) \neq 1$. Тогда $M_1 = C_M(x) \leq C_N(x) \leq N_N(V)$. По лемме 9 (а) $M_1 \leq C_N(V)$.Пусть $C_T(M_1) \neq V$. Так как X нормализует $\langle x \rangle$ и M , то X нормализует $M_1 = C_M(x)$, поэтому $C_T(M_1)$ – X -допустимая подгруппа и $C_T(M_1)/V$ – X -допустимая подгруппа. По лемме 7 (г) X действует неприводимо на T/V , откуда $T = C_T(M_1)$, что противоречит лемме 7 (а). Итак, $C_T(M_1) = V$ и, так как по [6] K разрешима, M нормализует M_1 и, значит, $M \leq N(C_T(M_1)) = N(V) = C(V)$. Поэтому $C_T(N) = V$ и K нормализует V . Но тогда $K \leq C(V)$ и $V \leq Z(N)$

вопреки лемме 7(е). Поэтому $C_M(x) = 1$ для любого $x \in X^{\#}$ и MX – группа Фробениуса. По лемме 9(в) $|X| \leq |T:V| = q$ и $|T| \leq 2^{2n}$. По лемме 5 $2n \geq |X| = 2^n - 1$. Отсюда $n \leq 2$, и по лемме 7(в) $n = 2$, $|X| = 3$ и $|MX|$ делит $(2^4-1)(2^3-1)(2^2-1)$. Так как $|M|-1$ делится на 3, $|M| = 7$. Если $|T| = 16$, то $C_T(M) = 2$ и

$$K \leq N(C_T(M)) = C(C_T(M)),$$

что противоречит лемме 7(е). Поэтому $|T| \leq 8$, что противоречит лемме 7(ж).

2. Пусть теперь T/V – неабелева.

Снова возьмем M – минимальную нормальную подгруппу в K. Если для некоторого элемента $x \in X^{\#}$ $C_M(x) \neq 1$, то обозначим $M_1 = C_M(x)$. По леммам 8 (в) и 9(а) $M_1 \leq C_N(V)$.

Если $C_{\Omega_1(T)}(M_1) = V$, то так как M нормализует M_1, M нормализует и V. Поэтому $C_{\Omega_1(T)}(M) = V$ и $K \leq N(V)$. Но тогда $V \leq Z(N)$, что противоречит лемме 7(е). Пусть $C_{\Omega_1(T)}(M_1) > V$. Так как $\Omega_1(T)V/V \leq \Omega_1(T/V) \leq Z(T/V)$ и так как $C_{\Omega_1(T)}(M_1)$ – X-инварианая подгруппа, содержащая V и содержащаяся в полном прообразе $Z(T/V)$, то по лемме 7 (г) $C_{\Omega_1(T)}(M_1)/V = Z(T/V)$ и M_1 централизует $\Omega_1(T)$. Если $V \leq \Phi(T)$, то $\Phi(T/V) = \Phi(T)/V$ и $\Phi(T) = \Omega_1(T) = Z(T)$. Очевидно, $Z(T) = V \times Z$, где $Z = [Z(T), X]$ и Z – XY-допустимая подгруппа. Так как фактор-группа T/V изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSU_3(2^{2n})$ или $Sz(2^n)$, то для любого элемента $t \in T - \Phi(T)$ $t^2 \notin V$. Если для всех $t \in T - \Phi(T)$ $t^2 \notin Z$, то $\Omega_1(T/Z) \leq Z(T)/Z$, и циклическая группа XY действует неприводимо на $(T/Z)/\Phi(T/Z)$ и тождественно на $\Omega_1(T/Z)$. По теореме 1 из [2] *)

$$\sqrt{|(T/V)/\Phi(T/V)|} + 1 = \sqrt{|(T/Z)/\Phi(T/Z)|} + 1$$

делится на $|XY|$, что неверно. Поэтому существует $t \in T - \Phi(T)$, для которого $t^2 \in Z^{\#}$. Так как $V \leq \Phi(T)$, то существует элемент $t_1 \in T - \Phi(T)$ такой, что $t_1^2 = vz$, где $v \in V^{\#}$, $z \in Z^{\#}$. Существует $n \in N$, что $V^n \neq V$. По лемме 9 в) $V^n \cap V = 1$. Поскольку X действует

---

*) Пользуясь случаем, отметим, что в [2] после слова "совпадает" в последней строке теоремы 1 пропущено "на $G/\Phi(G)$", а в теореме 2 вместо "неприводимо" следует читать "без неподвижных точек".

транзитивно на $Z^{\#}$, в равенстве $v_1^{n} = v_1' z_1$, где $v_1, v_1' \in V$, $z_1 \in Z$, v_1' вместе с v_1 пробегает всю группу V. В частности, существует элемент $v_1 \in V^{\#}$ такой, что $v_1^{n} = v z_1$, где $z_1 \in Z^{\#}$. Поскольку X действует транзитивно на $Z^{\#}$, найдется $x \in X$, что $v_1^{nx} = vz$. Но тогда

$$(t_1^{(nx)^{-1}})^2 = v_1 \in V^{\#},$$

что невозможно.

(2) Пусть $V \nleq \Phi(T)$. Тогда

$$V\Phi(T)/\Phi(T) = \overline{V} \leq C_{T/\Phi(T)}(M_1).$$

Пусть $\overline{T} = T/\Phi(T)$ и $C_{\overline{T}}(M_1) > \overline{V}$. Так как XY действует неприводимо на $\overline{T}/\overline{V} \simeq TV/Z(T/V)$, то M_1 централизует $\overline{T} = T/\Phi(T)$ и, значит, $M_1 \leq C(T) \cap K = 1$. Поэтому $\overline{V} = C_{\overline{T}}(M_1)$ и $V\Phi(T)$ - M - допустимая подгруппа. Так как $V\Phi(T)$ - X -допустима, то лемма 10 с равенствами $L = MX$, $T_1 = V\Phi(T)$, $T_2 = \Phi(T)$ показывает, что $M \leq C(V)$ и $\overline{V} = C_{\overline{T}}(M)$ и $\overline{V}$ - K -допустима. Лемма 10 с $L = K$ показывает, что $K \leq C(V)$ и $V \leq Z(N)$. Это противоречит лемме 7(е).

(3) Мы можем считать, что MX -группа Фробениуса. Если T/V изоморфна силовской 2-подгруппе из группы $Sz(2^n)$, то, так как по лемме 9(а) $|V| \leq q$ и $|[T,T]| \leq |[T/V, T/V]||V|$ имеем: $|T/\Phi(T)| \leq 2^{2n}$. По лемме 5 $2n \geq 2^n - 1$ и $n = 2$. Это невозможно, поскольку по определению группы $Sz(2^n)$ $2^n \geq 8$.

Пусть T/V изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSU_3(2^{2n})$. Тогда $|T/\Phi(T)| \leq 2^{3n}$.

Рассмотрим группу $MXY \leq K$. Пусть существует элемент $y \in Y^{\#}$ что $M_1 = C_M(y) \neq 1$. Тогда M_1 нормализует

$$V\Phi(T)/\Phi(T) = C_{T/\Phi(T)}(y) \quad \text{и} \quad V\Phi(T)/\Phi(T) \neq 1,$$

так как некоторый элемент из $X^{\#}$ централизует некоторый элемент из $T/\Phi(T)$. Кроме того, $\langle y \rangle$ - X -допустимая подгруппа, поэтому $M_1 = C_M(y)$ - X -допустима и $M_1 X$ - группа Фробениуса. Так как X централизует $V = V\Phi(T)/\Phi(T)$, то M_1 тоже централизует $\overline{V}$. Если $\overline{V} < C_{T/\Phi(T)}(M_1)$, то вследствие того, что Y действует не приводимо на $(T/V)/\Phi(T/V)$, имеем: $C_{T/\Phi(T)}(M_1)=T/\Phi(T)$ и $M_1=1$. Поэтому $C_{T/\Phi(T)}(M_1)=V$ и $\overline{V}$ - M -инвариантная подгруппа. Как и раньше, двукратное применение леммы 10 показывает, что $V\leqslant Z(N)$. Это противоречит лемме 7(е). Поэтому MXY - группа Фробениуса с ядром M и дополнением XY и по лемме 5, если рассматривать представление MXY на $T/\Phi(T)$, индуцированное сопряжением в группе N. $3n \geqslant |XY| = \frac{2^{2n}-1}{(3,2^n+1)}$, откуда $n=1$. Это невозможно и лемма доказана.

ЛЕММА 12. (а) $VZ(T)/V = Z(T_0/V)$.

(б) $\Omega_1(T_0)=V\times Z(T)$ и $|Z(T)|=q$.

(в) X действует на $Z(T)^{\#}$ транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $Z(T)\leqslant N_T(V)=T_0$. Если $Z(T)\cap V$ содержит $v\neq 1$, то по лемме 9(б) $C_T(V)=C_T(v)=T_0$ и $T_0=T$, что неверно по лемме 11. Поэтому $Z(T)\cap V=1$ $Z(T)V/V\leqslant Z(T_0/V)$ и так как $Z(T)V/V$ - X -допустимая подгруппа, то по лемме 7(г) $Z(T)V/V=Z(T_0/V)$ и (а) доказано.

Кроме того, $Z(T)$ - X -допустимая подгруппа и действие X на $Z(T)$ совпадает с действием X на $Z(T_0/V)$. Лемма 7(г) показывает (в).

Докажем (б). $V\leqslant \Omega_1(T_0)$ и по лемме 7(в)

$$\Omega_1(T_0)/V\leqslant \Omega_1(T_0/V)=Z(T_0/V)=Z(T)V/V.$$

По (в) $V\times Z(T)\leqslant \Omega_1(T_0)$ и поэтому (б) доказано.

ЛЕММА 13. $N_T(T_0)/T_0$ - элементарная группа порядка $q=2^n$. Если $t\in N_T(T_0)-T_0$, то для любого $v\in V^{\#}$ $v^t=vz$, где $z\in Z(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $t\in N_T(T_0)-T_0$, то $V^t\cap V\neq V$ и по лемме 9 (в) $V^t\cap V=1$. Пусть $v\in V^{\#}$. Тогда $v^t=v_1z$, где $v_1\in V$, $z\in Z(T)^{\#}$. Если $v_1=1$, то $v\in Z(T)$ и $T_0=C_T(v)=T$, вопреки лемме 11. Поэтому $v_1\neq 1$. Далее, для $x\in X$

$$v^{x^{-1}tx}=(v^x)^{x^{-1}tx}=(v_1z)^x=v_1z^x$$

и так как $z^x\neq z^{x_1}$ для $x, x_1\in X$, $x\neq x_1$, то отсюда следует, что $|N_T(T_0):T_0|\geqslant q$.

Пусть $|N_T(T_0):T_0|>q$ и t_1 - такой элемент из $N_T(T_0)-T_0$, что $t_1 T_0 \neq x^{-1} t x T_0$ для любого $x \in X$. Тогда $v_1^{t_1} = v_2 z_1$, где $z_1 \in Z(T)^{\#}$. Пусть x - такой элемент из X, что $z_1^{x} = z$. Тогда $v_1^{x^{-1} t_1 x} = v_2 z_1^{x} = v_2 z$. Мы сожем считать, что уже $v_1^{t_1} = v_2 z$. Тогда $v^{tt_1} = (v_1 z)^{t_1} = v_2 z^2 = v_2$ и $V \cap V^{tt_1} \neq 1$. Отсюда следует, что $tt_1 \in N_T(V) = T_0$ и $t_1^{-1} T_0 = t T_0$. Поскольку мы можем заранее выбрать t так, чтобы $t^2 \in T_0$, то можно считать, что $tT_0 = t_1 T_0$, что противоречит выбору t_1. Итак, $|N_T(T_0) : T_0| = q$.

Так как $\Omega_1(Z(N_T(T_0)/T_0))$ - X-допустимая подгруппа и по лемме 8(б) X действует на $\Omega_1(Z(N_T(T_0)/T_0))$ без неподвижных точек, то $|\Omega_1(Z(N_T(T_0)/T_0))| \geqslant q$ и первая часть леммы доказана.

Положим $T_1 = N_T(T_0)$. Пусть $Z_i(T_1) \cap V = 1$, а $Z_{i+1}(T_1) \cap V \neq 1$ и $v \in Z_{i+1}(T_1) \cap V$. Тогда

$$[v, T_1] \leqslant \Omega_1(T_0) \cap Z_i(T_1) = VZ(T) \cap Z_i(T_1) = Z(T) \leqslant Z(T_1).$$

Если $V \leqslant Z_2(T_1)$, то вторая часть утверждения доказана. Поэтому пусть $V \nleqslant Z_2(T_1)$ и пусть $Z_i(T_1) \cap V = Z_2(T_1) \cap V$, а $Z_{i+1}(T_1) > Z_2(T_1) \cap V$. Пусть $v_1 \in (Z_{i+1}(T_1) \cap V) - (Z_2(T_1)$. Тогда существует $t \in T_1$, что $v_1^{t} = v_1 v_2 z$, где $v_2 \neq 1$, $v_2 \in Z_2(T_1) \cap V$. Тогда $t \notin T_0$ и по первой части леммы $t^2 \in T_0 \leqslant C(v_1)$. Поэтому $v_1 = v_1^{t^2} = (v_1 v_2 z)^{t} = (v_1 v_2 z) z v_2^{t}$. Поскольку $V \times Z$ - элементарная абелева группа, то отсюда $v_2^{t} = v_2$ и $t \in C(v_2) = T_0$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Если $V \cap Z_2(T) \neq 1$, то $V \leqslant Z_2(T)$, $T_0 \lhd T$ и X действует на $(T/T_0)^{\#}$ транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in V^{\#} \cap Z_2(T)$. Тогда $C_N(v) = T_0 \geqslant [T, T]$ и поэтому $T_0 \lhd T$. По лемме 13 T/T_0 - элементарная абелева группа порядка $q = 2^n$ и если $t \in T - T_0$, то для любого $v \in V$ $v^{t} = vz$, $z \in Z(T)$. Поскольку $T_0 \leqslant C(V), V \leqslant Z_2(T)$. Теперь лемма следует из леммы 8(а).

ЛЕММА 15. $V \cap [T, T] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Если $v \in V^{\#} \cap [T, T]$, то $v \in C_T(Z_2(T))$ и $Z_2(T) \leqslant C(v) = T_0$. Если $Z_2(T) \cap V = 1$, то так как $Z_2(T) > Z_1(T)$ и $T_0/Z(T)V$ - минимальный XY-допустимый фактор T_0, имеем: $T_0 = VZ_2(T)$ и T_0/V неабелева.

Пусть k - класс нильпотентности T. Тогда $\Gamma_{k-1}(T) \leqslant Z_2(T)$ и $\Gamma_{k-1}(T) \nleqslant Z(T)$, иначе $\Gamma_k(T) = [\Gamma_{k-1}(T), T] = 1$. Так как

$Z_2(T) = T_0/V$. $Z_2(T)$ неабелева группа, поэтому

$$[\Gamma_{k-1}(T), \Gamma_{k-1}(T)] \neq 1.$$

Но тогда $T = Z_2(T)$ и $V \leqslant Z_2(T)$.

Итак, в любом случае $V \cap Z_2(T) \neq 1$.

По лемме 14 $V \leqslant Z_2(T)$, $T_0 \lhd T$ и T/T_0-элементарная абелева группа порядка $q = 2^n$ и X действует на T/T_0 без неподвижных точек.

Заметим еще, что Y действует на T/T_0 тождественно. Действительно, $C_{TY}(V \cdot Z(T)) = T_0 Y$. Так как $T \leqslant N_{TY}(VZ(T))$, то $[T, Y] \leqslant T \cap T_0 Y = T_0$.

Пусть N – минимальная среди групп, удовлетворяющих лемме 7, но не удовлетворяющих лемме 15. По лемме 8 (а) $C_T(X) = V$. Так как $[T, X] \lhd T$ и $T = C_T(X)[T, X]$, $[T, X] \geqslant [T, T]$ и поэтому $[T, X] \cap V \neq 1$. Тем более $[T, XY] \cap V \neq 1$.

Рассмотрим группу $N^* = [T, XY]\, XY$ и покажем, что она удовлетворяет условиям леммы 7.

Положим $T^* = [T, XY]$, $K^* = XY$, $V^* = V \cap T^*$, $T_0^* = T_0 \cap T^*$. Тогда п.п. (а)-(д) и (з) леммы 7 проверяются без труда. $O^2(N^*) = N^*$, так как $Z(N^*) \leqslant Z(T)$ и если $Z(N^*) \neq 1$, то $Z(N^*) \leqslant Z(T)$ и $V \cap Z(T) \neq 1$, что по лемме 13(а) не имеет места. Далее, по лемме 14 $|T| = |T_0| q$ и $|T_0| \geqslant |V| q$. Так как $q \geqslant 4$, то $|T| \geqslant 16|V|$ и $|T^*| > \frac{|T|}{|V|} \geqslant 16$. Если $V \cap [T^*, T^*] = 1$, то

$$V^*[T^*, T^*]/[T^*, T^*] \leqslant C_{XY}(T^*/[T^*, T^*]).$$

и поэтому $V^* \cap [T^*, T^*] = 1$. Но $[T^*, XY] = T^*$, и мы получим $V^* = 1$, что неверно.

Итак, $N^* = N = TXY$ и $T = [T, XY]$. Отсюда следует, что $V = C_T(XY) \leqslant [T, T]$. Так как $Z(T) \cap [T, T] \neq 1$ и $Z(T)$ – минимальная X-допустимая подгруппа в T, то $Z(T) \leqslant [T, T]$. Далее, $[T, T] \leqslant T_0$ и так как $T_0/V \times Z(T)$ – минимальный XY-допустимый фактор T_0, то либо $[T, T] = V \times Z(T)$, либо $[T, T] = T_0$.

Рассмотрим каждую из этих возможностей.

1. Пусть $[T, T] = V \times Z(T)$. Так как $\Phi(T) \leqslant T_0$ и $T_0/V \times Z(T)$ не содержит собственных XY-инвариантных подгрупп, то либо $\Phi(T) = [T, T] = V \times Z(T)$, либо $\Phi(T) = T_0$. Пусть $\Phi(T) = T_0$. Рас -

смотрим $\overline{T} = T/Z(T)$, тогда $\overline{V} = V\cdot Z(T)/Z(T)$ лежит в $Z(\overline{T})$ … $[\overline{T},\overline{T}] = \overline{V}$. Пусть $z, y \in \overline{T}$. Тогда $[z,y] \in \overline{V} \leq Z(\overline{T})$ … $[z, y^2] = [z,y]^2 = 1$, поскольку V имеет показатель 2. Поэтому $y^2 \in Z(\overline{T})$ для любого $y \in \overline{T}$ и $\overline{T}_0 = T_0/Z(T) \leq Z(\overline{T})$. Пусть $z, y \in \overline{T}$. Тогда для любых $z_1 \in z\overline{T}_0$, $y_1 \in y\overline{T}_0$ $[z_1, y_1] = [z,y]$, и мы имеем кососимметрическое билинейное отображение квадрата векторного пространства $\overline{T}/\overline{T}_0$ в векторное пространство $\overline{V}$, заданное равенством $[z,y] = (z\overline{T}_0, y\overline{T}_0)$.

Пусть $X = \langle x \rangle$. x можно рассматривать как линейное преобразование ξ векторного пространства $\overline{T}/\overline{T}_0$, для которого

$$(z\xi, y\xi) = (z,y) \quad \text{при всех } z, y \in \overline{T}/\overline{T}_0.$$

ибо $(z,y) \in \overline{V}$.

Расширим поле из двух элементов так, чтобы оно содержало характеристические корни линейного преобразования ξ . ξ действует неприводимо на $\overline{T}/\overline{T}_0$, и если λ – характеристический корень ξ , то все характеристические корни ξ исчерпываются элементами $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2^{n-1}}$. Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ – характеристические векторы ξ … $u_i\xi = \lambda^{2^i} u_i$. Тогда $(u_i, u_j) = (u_i\xi, u_j\xi) = \lambda^{2^i+2^j}(u_i, u_j)$. Так как хотя бы для одной пары (i,j) $(u_i, u_j) \neq 0$, то существуют такие числа $0 \leq i \leq j \leq n-1$, что $\lambda^{2^i+2^j} = 1$. Так как порядок ξ равен $2^n - 1$, то $2^i + 2^j \equiv 0 \pmod{2^n-1}$, или $2^{j-i} + 1 \equiv 0 \pmod{2^n-1}$. Так как $0 \leq 2^{j-i} \leq 2^{n-1}$, то $n \leq 2$, откуда $n = 2$ и T_0/V либо изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSU_3(2^{2n})$, либо элементарная абелева, но в первом случае Y , действуя тождественно на $T/T_0 = T/\Phi(T)$, действует тождественно на T , что невозможно, во втором случае $\Phi(T) = V \times Z(T)$ и для некоторого $t \in T - T_0$ $t^2 = vz$, где $v \neq 1$. Но тогда t перестановочен с v , что невозможно.

Поэтому $\Phi(T) = V \times Z(T)$ и $V \times Z(T) \neq T_0$.

Покажем, что $V \cap \Phi(T_0) = 1$. Предположим, что это не так. Обозначим $T_1 = [T_0, X]$, $V_1 = V \cap \Phi(T_1)$. Тогда T_1 Y-допустимая подгруппа, и так как $V \cap \Phi(T_0) \neq 1$, то $V_1 = V \cap \Phi(T_1) \neq 1$ и $Z(T) \leq T_1$. Кроме того, $\Phi(T_1) = Z(T) \times V_1 = \Omega_1(T_1)$. Если для любого t из $T_1 - \Phi(T_1)$, $t^2 \notin Z(T)$, то $\Omega_1(T_1/Z(T)) \leq V_1 Z(T)/Z(T)$ и циклическая группа XY действует неприводимо на

$0 \le i \le j \le k \le n-1$, что $\lambda^{2^k+2^i+2^j} = 1$, откуда $2^{k-i}+2^{j-i}+1 \equiv$ $\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^n-1)$. Вспомним, что $n \ge 3$. Так как $0 \le j-i \le k-i \le$ $\le n-1$, то $n = 3$ и T_0/V изоморфна силовской 2-подгруппе из группы Сузуки, что противоречит лемме 8(а). Лемма доказана.

Доказать, что MX - гр. Фроб.

ЛЕММА 16. Если $V \cap Z_2(T) \ne 1$, то $K = C_K(V)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 14 $V \le C$, $T_0 \lhd T$, T/T_0 – элементарная абелева группа порядка $q=2^n$, и X действует на $(T/T_0)^{\#}$ транзитивно. Пусть M – минимальная нормальная подгруппа из K.

Пусть для некоторого элемента $x \in X^{\#}$ $M_1 = C_M(x) \ne 1$

По лемме 8(а) M_1 централизует V и T_0 – M_1-допустимая подгруппа. Если $C_{T_0}(M_1) = V$, то $C_T(M_1) = V$, $M \le N(V) = C(V)$ и $V = C_T(M)$ откуда $K \le N(V) = C(V)$. Пусть $V < C_{T_0}(M_1)$. Если $M_1 \le$ $\le C_N(T_0)$, то $M_1 \le C(T)$ и $M_1 = 1$. Так как $C_{T_0}(M_1)$ – X-допустимая подгруппа, то $C_{T_0}(M_1) = V \times Z(T)$. Если $C_T(M_1) = V \times Z(T)$ то $M \le N_K(V \times Z(T))$ и $V \times Z(T) = Z(T) \times V_1$, где V_1 – MX-допустимая подгруппа. Так как X действует тождественно на $V \times Z(T)/Z(T)$ то X действует тождественно на V_1, поэтому $V = V_1$ и $M \le N(V) = C(V)$ $C_T(M) = V$ или $C_T(M) = V \times Z(T)$. В любом случае $V \times Z(T)$ – K-допустимая подгруппа и $V \times Z(T) = V_1 \times Z(T)$, где V_1 – K-допустимая подгруппа, откуда, как и раньше, $V_1 = V$, и лемма доказана.

Пусть $C_T(M_1) > V \times Z(T)$. Так как $C_T(M_1)$ – X-допустимая подгруппа и $C_T(M_1) \cap T_0 = V \times Z(T)$, то $T = C_T(M_1) \cdot T_0$. Если $T_0 \le \Phi(T) \cdot C_T(M_1)$, то $T = C_T(M_1)$, что не так.

Поскольку $\Phi(T) \le T_0$ и $\Phi(T) \cdot V \cdot Z(T)$ – X-допустимая подгруппа, то $\Phi(T) \le V \cdot Z(T)$. Так как

$$V[T,T]/[T,T] = C_{T/[T,T]}(X),$$

то $V[T,T]/[T,T]$ выделяется прямым множителем в $T/[T,T]$ Так как V – элементарная абелева и $V \cap [T,T] = 1$ по лемме 15, то $V \cap \Phi(T) = 1$. Поэтому $\Phi(T) \le Z(T)$. Поскольку $Z(T)$ – минимальная X-допустимая подгруппа и $\Phi(T) \ne 1$, то $\Phi(T) = Z(T)$.

Пусть $[T, M_1] = T_1$ и $C_T(M_1) = T_2$. Тогда $T = T_1 T_2$ и T_1, T_2 X-инвариантны. $T_1 C(T_1) \ge T_0$. Если $C(T_1) T_1 = T_0$, то $C(T_1) =$ $= V \times Z(T)$ и M централизует V, M нормализует T_0 и если $C_{T_0}(M) = V$, то $C_T(M) = V$ и $K \le N(V) = C(V)$. Поэтому $C_{T_0}(M) =$

$V \times Z(T)$ и T_1 - M -допустима, $T_1=[T, M]$. Но тогда T_1 - K -инвариантна и $K \leq N(V) = C(V)$.

Если $T_1C(T_1) > T_0$, то $T_1C(T_1)=T$ и $C(T_1)=C_T(M_1) = T_2$. $C(T_1)$ - M -инвариантная подгруппа. Пусть M не централизует T_2 и M^* - минимальная XY -инвариантная подгруппа в $\overline{M} = M/C(T_2)$.

Пусть $C_{M^*}(x^*) \neq 1$ для некоторого $x^* \in X^*$. Тогда $C_{M^*}(x^*)$ - XY - инвариантная подгруппа и $M^* = C_{M^*}(x^*) \leq C(V)$. Если $C_{T_2}(M^*) = V$, то $C_{T_2}(M) = V$. Но тогда $C_T(M) = V$ и $K \leq N(V)=C(V)$. Поэтому $C_{T_2}(M^*) = V \times Z(T)$ и M нормализует $V \times Z(T)$, откуда $M \leq N(V) = C(V)$. Но тогда $C_T(M) \leq V \times Z(T)$, поэтому K нормализует $V \times Z(T)$ и $K \leq N(V) = C(V)$.

Это рассуждение показывает, что M^*X -группа Фробениуса. Так как $|T_2/\Phi(T_2)| \leq |V| \cdot 2^n$, то размерность векторного пространства $T_2/\Phi(T_2)$ не превышает $2n$, и по лемме 5 $2n \geq 2^n - 1$, откуда $n=2$, $|X|=3$ и так как $T_0 \neq V \times Z(T)$, то T/V изоморфна силовской 2-подгруппе из $PSU_3(4)$, откуда $|Y|=5$, а $|M^*|=7$.

Пусть $\overline{T} = [T_2, M^*]$, тогда $|\overline{T}/\Phi(\overline{T})| = 8$ и $\Phi(\overline{T}) = Z(T)$. Пусть $v \in \overline{T} \cap V^{\#}$. Так как $C_T(v) = \langle v \rangle \times Z(T) = \langle v \rangle \times \Phi(T)$, то m не централизует v, где $\langle m \rangle = M^*$. Пусть $[v, v^m] = z$. Тогда $[v^{m^{-1}}, v] = z$ и $[v, v^m \cdot v^{m^{-1}}] = 1$, откуда $v^m v^{m^{-1}} \in v\Phi(\overline{T})$ и $v^m \in \langle v^{m^{-1}}, v, \Phi(\overline{T}) \rangle$. Но тогда $v^{m^2} \in \langle v, v^m, \Phi(\overline{T}) \rangle$, $v^{m^3} \in \langle v^m, v^{m^2}, \Phi(\overline{T}) \rangle \leq \langle v^m, v, \Phi(\overline{T}) \rangle$ и $\langle v, v^m, \Phi(\overline{T}) \rangle$ - $\langle m \rangle$-допустимая подгруппа, но так как $\langle v, v^m, \Phi(\overline{T}) \rangle / \Phi(\overline{T})$ имеет порядок 4, то M^* централизует $\overline{T}$, что неверно. Поэтому M централизует T_2, и T_2 и $T_1=[T, M]=[T, M_1]$ - K -инвариантны. Если $K=C_K(T_2)$, то $K \leq C(V)$. Пусть теперь $\overline{K}$ - минимальная инвариантная подгруппа в $K/C_K(T_2) \neq 1$ и K^* - минимальная XY -допустимая подгруппа в $\overline{K}$. Повторив с K^* в качестве M^* предыдущие рассуждения, мы придем к тому, что K^* централизует T_2, что неверно.

(3) Мы можем считать, что MX - группа Фробениуса. Пусть вначале $|T_0/V| = q^3$. Тогда $Y \neq 1$. Пусть M_0 - минимальная XY -инвариантная подгруппа из M. Если $M_0 = C_M(y) \neq 1$ для некоторого $y \in Y^{\#}$, то M_0 - XY -инвариантная подгруппа и $M_0 \leq C(y)$.

Тогда M_0 нормализует $T_1 = C_T(y)$, $V \times Z(T) \le T_1$ и $q = |T_1 : (V \times Z(T)|$ и $C_{T_1}(V) = V \times Z(T)$, откуда $\Phi(T_1) = Z(T)$ и

$$\left| {}^{T_1}/\Phi(T_1) \right| = |V|\, q \le q^2 = 2^{2n}.$$

$M_0 X$ – группа Фробениуса и по лемме 5 $2n \ge 2^n - 1$, то есть $n = 2$, $|X| = 3$, $|M_0| = 7$ и доказательство из предыдущего пункта показывает, что это невозможно.

Пусть $M_0 X Y$ – группа Фробениуса. Так как $|T| = q\,|T_0| \le \le q^2 |{}^T/V| = q^5$ и $Z(T) \le \Phi(T)$, то $|{}^T/\Phi(T)| \le q^4 = 2^{4n}$ и по лемме 5 $4n \ge \frac{2^{2n}-1}{(2^n+1,3)}$, откуда $2n = 2$, а это невозможно.

Пусть $|{}^{T_0}/V| = q^2$. Тогда $|{}^T/\Phi(T)| \le 2^{3n}$. По лемме 5 $3n \ge 2^n - 1$, откуда $n \le 3$, то есть $n = 3$, $2^n - 1 = 7$ и M – p-подгруппа из $GL(9,2)$, такая, что $|M| - 1$ делится на 7.

$$|GL(9,2)| = 2^{36}(2^9-1)(2^8-1)\dots(2^2-1) =$$

$$= 2^{36}(7\cdot 73)(15\cdot 17)\cdot 127\cdot(9\cdot 7)\cdot 31\cdot 15\cdot 7\cdot 3,$$

откуда $|M| = 127$. Но в этом случае пространство ${}^T/\Phi(T) = V_1 \otimes V_2$, где размерность V_1 равна 7, размерность V_2 не превышает двух и MX централизует V_2 и $V_2 \le V$.

Если теперь $T_1 = [T_1, MX]$, то $\Phi(T_1) = Z(T)$ и $|{}^{T_1}/\Phi(T_1)| = 2^7$. Но теперь M действует транзитивно на $({}^{T_1}/\Phi(T_1))^{\#}$ и тривиально на $\Phi(T_1)$.

Пусть x – элемент из T_1, такой, что $x^2 = z \ne 1$. Если $m \in M^{\#}$, то $(x^m)^2 = (x^2)^m = x^2$. Так как

$$T_1 = Z(T) \cdot \bigcup_{m \in M^{\#}} x^m Z(T),$$

то $\Phi(T_1) = T_1^2 = \langle x^2 \rangle$, что неверно.

Пусть $|{}^{T_0}/V| = q$, то есть $T_0 = V \times Z(T)$. Тогда $|{}^T/\Phi(T)| \le \le 2^{2n}$, откуда, как и раньше, $n = 2$, $|X| = 3$, $|M| = 7$ и предыдущие рассуждения исключают этот случай.

ЛЕММА 17. $K \le C(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 16 мы можем считать, что $V \cap \cap Z_2(T) = 1$. Если $V \cap C(Z_2(T)) \ne 1$, то существует $v \in V^{\#}$, такой, что $C(v) \ge Z_2(T)$ и $T_0 = V \times Z_2(T)$. Но тогда $\Gamma_{k-1}(T) = Z_2(T)$ – неабелева группа и T имеет класс нильпотентности, равный двум, то

есть $V \leq Z_2(T)$. Поэтому $V \cap C(Z_2(T)) = 1$. Пусть $\bar{K} = K/C_K(Z)$
и M - минимальная нормальная подгруппа в $\bar{K}$. Пусть x - элемент
простого порядка из X и $C_M(x) = 1$. Тогда $(Z_2(T)M)\langle x \rangle$ -
группа Фробениуса и $M \leq C_K(Z_2(T))$. Поэтому $M_1 = C_M(x) \neq 1$
M_1 нормализует $V \cdot C_T(Z_2(T))$. По лемме 10 полный прообраз $\hat{M}_1$
группы M_1 в K нормализует V . централизует

Если $C_T(\hat{M}_1) = V$, то

$$C_{T/C_T(Z_2(T))}(M) = V \cdot C_T(Z_2(T))/C_T(Z_2(T))$$

и K нормализует $V \cdot C_T(Z_2(T))$, откуда по лемме 10 $K \leq C(V)$.
Пусть $C_T(\hat{M}_1) > V$, тогда $C_{T_0}(\hat{M}_1) = V \times Z(T)$.

$$|N_T(V \times Z(T)) : T_0| = q,$$

и поэтому $N_T(T_0) = N_T(V \times Z(T)) \cdot Z_2(T) \leq N_T(T_0)$, если
$T_0 \cap Z_2(T) = Z(T)$, то $\hat{M}_1$ централизует $Z_2(T)$, откуда $M_1 = 1$.
Поэтому $Z_2(T)V \geq T_0$ и $\hat{M}_1$ централизует $\Gamma_{k-1}(T)$, так как $N_T(T_0) =$
$= T_0\Gamma_{k-1}(T)$ и $T_0 \cap \Gamma_{k-1}(T) = Z(T)$. При этом $V \cap C(\Gamma_{k-1}(T)) = 1$.
Рассмотрим теперь

$$K^* = K/C_K(\Gamma_{k-1}(T)).$$

Пусть M^* - минимальная нормальная подгруппа в K^* и $M_1^* = C_{M^*}(x)$
для $x \in X^\#$. Повторив предыдущие рассуждения с M^*, M_1^*, K^* вместо M, M_1 и $K/C_K(Z_2(T))$, мы найдем, что $M_1^* = 1$ и $K^* = 1$. Но
если $\bar{K} = 1$ или $K^* = 1$, то K нормализует $V \cdot C_T(Z_2(T))$
или $VC_T(\Gamma_{k-1}(T))$ и в любом случае по лемме 10 $K \leq N(V) =$
$= C(V)$ и лемма доказана.

Теперь легко показать, что группы N , удовлетворяющей лемме 7, не существует.

Действительно, по лемме 17 $K \leq C(V)$, а по лемме 15 $V \cap [T, T] = 1$. Но тогда N обладает 2-фактор-группой, изоморфной V , что по лемме 7(e) невозможно.

Таким образом, мы показали, что централизаторы всех инволюций разрешимы.

Второй шаг. G - простая группа с разрешимыми централизаторами инволюций

Здесь мы рассматриваем группу G - минимальный противоречащий теореме пример-и предполагаем, что G проста и централизаторы всех её инволюций разрешимы.

Пусть T означает фиксированную силовскую 2-подгруппу из G, Z - центр T.

ЛЕММА 18. С у щ е с т в у е т и н в о л ю ц и я $z \in Z$ т а к а я, ч т о $C_G(z)$ н е 2 - з а м к н у т.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D - максимальное пересечение T с некоторой силовской 2-подгруппой из G. По [15] $D \neq 1$. Если $\mathcal{N}_G(D)$ неразрешим, то по индуктивному предположению в D найдется инволюция с неразрешимым централизатором. Поэтому $\mathcal{N}_G(D)$ $2'$-замкнут. $\mathcal{N}_G(D)$ содержит Z. Пусть T_0 - силовская 2-подгруппа из $\mathcal{N}_G(D)$, содержащая Z. По лемме 2 $T_0 \leq T$. Ясно, что $\mathcal{N}_G(D) = RT_0$, где R - группа нечетного порядка. Если централизатор любой инволюции из Z 2-замкнут, то T_0 централизует $C_R(z)$ для любого $z \in Z^{\#}$, и поэтому T_0 централизует R, что неверно. Лемма доказана.

ЛЕММА 19. Л ю б а я н о р м а л ь н а я а б е л е в а п о д г р у п п а и з T п о р о ж д а е т с я д в у м я э л е м е н т а м и.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть лемма неверна, A_1 - нормальная абелева подгруппа из T, имеющая более двух образующих. Пусть A - максимальная абелева нормальная подгруппа из T, содержащая A_1.

Мы покажем сейчас, что в группе G справедлива теорема транзитивности Томпсона. Именно, покажем, что любые два элемента из $И^*(A; p)$, где p - нечётное простое число, сопряжены элементом из $C(A)$. Пусть это неверно, и P, P_1 - такие два элемента из $И^*(A; p)$, что P и P_1 не сопряжены никаким элементом из $C(A)$ и $P_0 = P \cap P_1$ имеет максимальный порядок. В A существует инволюция α, такая, что $C = C_P(\alpha) \neq 1$ и $C_1 = C_{P_1}(\alpha) \neq 1$. Если $C(\alpha)$ 2-замкнут, то $< C, C_1 > \leq C(A)$, если же $C(\alpha)$ $2'$-замкнут, то существует такой $x \in C(A)$, что $< C, C_1^x >$ является p-группой. В любом случае $P_0 = P \cap P_1 \neq 1$. Если $\mathcal{N} = < \mathcal{N}_{P_1}(P_0), \mathcal{N}_P(P_0), A >$ - неразрешимая группа, то по индуктивному предположению $C(O_2(\mathcal{N}))$ - неразрешимая группа и поэтому $O_2(\mathcal{N}) = 1$. По предположению индукции $< \mathcal{N}_{P_1}(P_0), \mathcal{N}_P(P_0)) > \leq O_{2'}(\mathcal{N})$. Если $\mathcal{N}$ -2-замкнутая группа, то $< \mathcal{N}_{P_1}(P_0), \mathcal{N}_P(P_0)) > \leq C(A)$. Если $\mathcal{N}$ $2'$-замкнута, то $< \mathcal{N}_{P_1}(P_0), \mathcal{N}_P(P_0)) > \leq O_{2'}(\mathcal{N})$. В любом случае сущест -

вует такой $x_1 \in C(A)$, что $\langle N_{P_1}(P_0), N_P(P_0)^{x_1} \rangle$ - p -группа, что противоречит максимальности P_0.

$C(A) = A \times B$, где B - группа нечетного порядка. Заметим, что $B \le C(T)$. Действительно, T нормализует $C(A)$, поэтому $[T,B] \le B$. С другой стороны, по лемме 2 $N(A)$ 2-замкнут, то есть $[B,T] \le T$, откуда $[B,T] = 1$. По лемме 18 T не централизует некоторый максимальный элемент из $И(A;p)$ для некоторого p. Пусть $x \in N(T) - C(T)T$ (такой элемент существует по лемме 1). P^x - максимальный элемент в $И(A;p)$, поэтому существует $b \in B$ такой, что $P^{xb} = P$. Так как $b \in C(T)$, то группа $PT\langle xb \rangle$ разрешима и не является ни 2-замкнутой, ни $2'$-замкнутой. Лемма доказана.

ЛЕММА 20. Централизатор любой инволюции из G $2'$-замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 4 и 19 $|\Omega_1(Z)| = 4$. По лемме 1(а) и теореме Глаубермана [7] все инволюции из Z сопряжены в нормализаторе T. По лемме 18 $|N(T):C(T)T| = 3$. Пусть, вопреки доказанному, централизатор инволюции t из T не $2'$-замкнут. По лемме 3 $C(t) = O_2(C(t))X$, где $X \le N(T)$, но X не централизует T.

Пусть $N(T) = T\hat{K}$, где $\hat{K} \cap T = 1$ и $K = \hat{K}/C_{\hat{K}}(T)$. Тогда $TK = N$ превращается в естественное полупрямое произведение T на K. По предыдущему абзацу $K = \langle k \rangle$ имеет порядок 3 и K централизует некоторую инволюцию t из $T - Z$. Пусть $\Omega_1(Z) = Z_1$, $\bar{T} = T/Z$, и $\bar{A}$ - минимальная K -допустимая подгруппа из $Z(\bar{T})$. Тогда $|\bar{A}| \le 4$. Пусть A - полный прообраз $\bar{A}$ в T. Если $|A| = 8$, то K централизует $\bar{A}$, то есть A - элементарная абелева. Так как $A \lhd T$, то получаем противоречие с леммой 19. Если $|A| = 16$, то по лемме 19 из того, что $A\langle k \rangle$ - группа Фробениуса, следует, что A - прямое произведение двух циклических групп четвертого порядка. По результату Альперина [4] t не лежит в $C_T(A)$. Так как $A \le Z_2(T)$, $[T,T] \le C_T(A)$ и $t \notin [T,T]$. Так как k централизует t, то

$$[T/[T,T], k] \ne T/[T,T] \quad \text{и} \quad O^2(N(T)) \ne N(T).$$

Это противоречит лемме 1. Лемма доказана.

зана.

Литература

1. Р.КАРТЕР. Простые группы и простые алгебры Ли, Математика, 10, № 5 (1966), 3-47.

2. В.Д.МАЗУРОВ. Конечные 2-группы, обладающие автоморфизмом нечётного порядка, тождественным на инволюциях, Алгебра и логика,8, №6 (1969), 674-685.

3. J.L.ALPERIN, Sylow intersections and fusion, J.Algebra , 6 (1967),222-241.

4. J.L.ALPERIN, Centralizers of abelian normal subgroups of p-groups,J.Algebra,1,N2(1964),110-113.

5. W.FEIT, Characters of finite groups, Benjamin,N.Y.,1967.

6. W.FEIT,J.G.THOMPSON, Solvability of groups of odd order, Pacif.J.Math.,13,N3(1963),775-1029.

7. G.GLAUBERMAN, Central elements in core-free groups,J.Algebra, 4,N3(1966),403-420.

8. G.GLAUBERMAN, A characterization of the Suzuki groups, Ill. J.Math.,12,N1(1968),76-98.

9. D.GORENSTEIN,J.H.WALTER, The characterization of finite groups with dihedral Sylow-2-subgroups,I,II,III,J.Algebra,2(1965) , 85-151,218-270,334-393.

10. D.G.HIGMAN, Focal series in finite groups,Canad.J.Math.,5, N4(1953),477-497.

11. Z.JANKO, A new finite simple group with abelian 2-Sylow - subgroups,Proc.Nat.Acad.Sc.USA,53,N3(1965),657-658.

12. M.SUZUKI, On a class of doubly transitive groups,II Ann. Math.,75(1962),105-145.

13. M.SUZUKI, On a class of doubly transitive groups,II Ann. Math.,79(1964),514-589.

14. M.SUZUKI, Applications of group characters,Proc.Symp. Pure Math.,Amer.Math.Soc.,1(1959),88-99.

15. M.SUZUKI, Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent,Ann.Math.,80(1964),58-77.

16. J.H.WALTER, Finite groups with abelian Sylow 2-subgroups of order 8,Inv.Math.,2,N5(1967),332-376.

17. H.WARD, On Ree's series of simple groups,Trans.Amer.Math. Soc.,12(1966),62-89.

Поступило 20 февраля 1970 г.

Алгебра и логика, 9, № 3 (1970), 342-348.

УДК 519.48

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ НИЛЬПОТЕНТНОСТЕЙ В ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

А.М.СЛИНЬКО

Кольцо называется правоальтернативным, если в нем выполняется тождество $(xy)y = xy^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кольцо $\mathfrak{A}$ называется нильпотентным индекса n, если произведение любых n элементов из $\mathfrak{A}$ с произвольной расстановкой скобок равно нулю.

Пусть $\mathfrak{A}$ - кольцо. Введем следующие обозначения: положим $\mathfrak{A}_{[0]} = \mathfrak{A}_{(0)} = \mathfrak{A}$, а через $\mathfrak{A}_{[i]}$ и $\mathfrak{A}_{(i)}$ обозначим $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{[i-1]}$ и $\mathfrak{A}_{(i-1)}\mathfrak{A}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кольцо $\mathfrak{A}$ называется левонильпотентным (правонильпотентным) индекса n, если $\mathfrak{A}_{[n]} = 0$ $(\mathfrak{A}_{(n)} = 0)$.

В дальнейшем Σ - произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{A}$ - левонильпотентное правоальтернативное Σ - операторное кольцо такое, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ конечно порождено как Σ - модуль. Тогда $\mathfrak{A}$ нильпотентно.*

Отсюда, в частности, следует, что в правоальтернативных кольцах с конечным числом образующих левая нильпотентность и нильпотентность эквивалентны.

В доказательстве существенным образом используется правоальтернативный аналог аппарата колец умножений, развитый К.А.Жевлаковым для йорданова случая в [1]. Кроме того, в работе показано, что от условий конечности отказаться нельзя. В качестве примера пост-

Если T – элементарная абелева, то по лемме 19 $|T|=4$ и результат Горенштейна и Уолтера [9] дает: $G \simeq PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 (mod 8)$. Если же T не является элементарной абелевой, то леммы 1 и 19 показывают, что выполнены условия теоремы Глаубермана [8] и G изоморфна одной из простых групп Сузуки $Sz(q)$. В любом случае G не противоречит теореме.

Итак, мы доказали, что группа G не может быть простой.

Третий шаг. G – непростая группа

Два предыдущих шага доказательства показывают, что минимальный противоречащий теореме пример не может быть простой группой. Сейчас мы докажем, что она является именно простой группой, чем и докажем теорему.

Пусть $S(G) \neq 1$. По предположению индукции $G/S(G)$ содержит нормальную подгруппу $H/S(G)$, изоморфную одной из простых групп, перечисленных в теореме. $S(G)$ лежит в полных прообразах двух разрешимых подгрупп из $H/S(G)$, одна из которых не 2-замкнута, а вторая – не $2'$-замкнута. Отсюда следует, что

$$S(G)=O_2(G)\times O_{2'}(G) \quad \text{и} \quad S(G)C_G(S(G))$$

содержит H. Так же легко показать, что $G=O_2(G)\cdot C(O_2(G))$.

Нам осталось лишь доказать, что индекс $|G:H|$ нечётен. Можно считать, допустив противное, что $|G:H|=2$ и $S(G)=1$. Если H – группа $Sz(q)$, то G обладает центром порядка два, так как группа внешних автоморфизмов $Sz(q)$ имеет нечётный порядок.

Таким образом, либо H есть унитарная группа $PSU_3(q^2)$, либо силовская 2-подгруппа T_1 из H абелева.

Пусть сначала T_1 абелева. $G=H\cdot\langle x\rangle$, где x – 2-элемент, лежащий в T -силовской 2-подгруппе из G, $T=H\cap T_1$. Если T абелева, то G обладает инвариантной 2-подгруппой. Таким образом, в G есть элемент t порядка 4, тогда $t^2 \in T_1^{\#}$. Как легко понять, в этом случае $t^2 \in Z(N_H(T_1))^{\#}$, что невозможно.

Пусть теперь $H \simeq PSU_3(q^2)$; как и раньше, $G=H\langle x\rangle$, $x\in T$ – силовской 2-подгруппе из G, $T_1=T\cap H$. Тогда x нормализует $N=N_H(T_1)$, а так как $\langle N,x\rangle$ должна быть 2-замкнутой группой, то x централизует K, где $N=T_1K$, $K\cap T_1=1$. Ни при каком внешнем автоморфизме $PSU_3(q^2)$ это невозможно. Теорема доказана.

1. Р.КАРТЕ
ка, 10, № 5 (196
2. В.Д.МАЗ
нечётного поряд
№6 (1969), 674-
3. J.L.ALP
(1967),222-241.
4. J.L.ALP
groups,J.Algebr
5. W.FEIT,
6. W.FEIT,
cif.J.Math.,13,
7. G.GLAU
4,N3(1966),403-
8. G.GLAU
J.Math.,12,N1(
9. D.GORE
groups with di
85-151,218-270
10. D.G.H
N4(1953),477-4
11. Z.JA
subgroups,Proc
12. M.SU
Math.,75(1962)
13. M.SU
Math.,79(1964)
14. M.SU
Math.,Amer.Ma
15. M.SU
groups are in
16. J.H.
of order 8,In
17. H.W
Soc.,12(1966)