СОДЕРЖАНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 15

ВЫПУСК 4

•

АПРЕЛЬ

1974

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 15, № 4 (1974), 651—660

УДК 519.4

О ГРУППЕ МАТЬЕ M_{12}

В. М. Ситников

Пусть G — конечная простая неабелева группа. t — некоторая инволюция из G, $L = O^2 (C_G (t)/O (C_G (t)))$. Если центр $Z (L)$ — циклический и $L/Z (L) \simeq PGL (2, q)$, q — нечетно, то либо силовская 2-подгруппа из G полудиэдральна, либо $C_G (t) \simeq Z_2 \times PGL (2,5)$ и G изоморфна группе Матье M_{12} степени 12. Библ. 14 назв.

В [1] доказано, что группа Матье M_{12} определяется централизатором центральной инволюции при условии, что в группе не более ~~трех~~ двух классов сопряженных инволюций. Позднее группа M_{12} была охарактеризована Брауэром и Фонгом [2] своей силовской 2-подгруппой при условии, что в группе не менее двух сопряженных классов инволюций.

В работе получена следующая

ТЕОРЕМА А. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и G содержит инволюцию t такую, что $C_G (t) \simeq Z_2 \times PGL (2, q)$, q — нечетно. Тогда $q = 5$ и G изоморфна группе Матье M_{12} степени 12.*

В работе будет доказана более общая теорема Б, частным случаем которой и будет теорема А.

либо симплектична

ТЕОРЕМА Б. *Пусть G — конечная неабелева простая группа, t — некоторая инволюция из G,*

$$L = O^{2'} (C_G (t)/O (C_G (t))).$$

Если центр $Z (L)$ группы L циклический и $L/Z (L) \simeq PGL (2, q)$, q — нечетно, то ~~либо~~ силовская 2-подгруппа из G полудиэдральна, либо $C_G (t) \simeq Z_2 \times PGL (2, 5)$ и G изоморфна группе Матье M_{12} степени 12.

Обозначения стандартны. Отметим только некоторые. Z_n — циклическая группа порядка n. $A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение двух групп с инвариантным множителем A. $O^{2'}(H)$ — подгруппа, порожденная 2-элементами из H. $O^2(H)$ — подгруппа, порожденная элементами нечетного порядка из H. $O(H)$ — наибольшая инвариантная подгруппа нечетного порядка в группе H. Инволюция в группе H называется центральной, если она содержится в центре некоторой силовской 2-подгруппы H. $\mathscr{U}_H(2)$ — множество четверных подгрупп, каждая из которых инвариантна в некоторой силовской 2-подгруппе из группы H. $\langle h\rangle_n$ — циклическая группа, порожденная элементом h порядка n.

Доказательство теоремы Б. Пусть G — конечная простая неабелева группа, t — инволюция в G и $L = O^{2'}(C_G(t)/O(C_G(t)))$. Обозначим через S силовскую 2-подгруппу из $C_G(t)$, через T силовскую 2-подгруппу из G, содержащую S. Обозначим через $K = O^2(L)$. Группа K изоморфна либо $PSL(2, q)$, либо $SL(2, q)$ и L/K — абелева 2-группа. По теореме Бернсайда [3] S' — циклическая группа.

Если $|Z(L)| > 2$, то в этом случае $\langle t\rangle = \Omega_1(\Phi(Z(S)))$ и S является силовской 2-подгруппой в G. По результату Чебота [4] получаем, что S — силовская ~~противоречие с простотой~~ группы G. Если $K \simeq SL(2, q)$, то $\langle t\rangle = \Omega_1(S')$ и S является силовской 2-подгруппой в G. Так как в этом случае S-полудиэдральная группа, то выполняется первое утверждение теоремы. Поэтому будем считать, что $K \simeq PSL(2, q)$. Следовательно, группа L изоморфна либо $Z_2 \times PGL(2, q)$, либо $PGL(2, q) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|b| = 4$, $[\langle b^2\rangle, PGL(2, q)] = 1$. Если инволюция t является центральной, то по результату Чебота [4] и Харады [5] получим противоречие с простотой группы G. Поэтому в дальнейшем будем считать, что t — нецентральная инволюция. Договоримся, что гомоморфные образы элементов из S в L мы будем обозначать теми же символами, чтобы избежать лишних обозначений. Также заметим, что элементы из S, сопряженные в L, сопряжены и в $C_G(t)$.

Таким образом, группа L может быть двух типов:

1) $L = \langle t\rangle \times F$, $F \simeq PGL(2, q)$, $|F : K| = 2$.

2) $L = K \leftthreetimes \langle c\rangle_4$, $\langle c^2\rangle = \langle t\rangle = Z(L)$, где $K \simeq PSL(2, q)$.

Обозначим через $S_0 = S \cap K$, через $F_0 = \langle t\rangle \times K$. Сохраним в дальнейшем эти обозначения. Так как все

инволюции из S_0 центральные в G, то инволюции из $(S_0 \times \langle t\rangle) \setminus (S_0 \cup \langle t\rangle)$ также сопряжены в L. С другой стороны, инволюция t сопряжена с инволюцией tz в $N_T(S)$, где z — инволюция из центра T. Поэтому все инволюции из $(S_0 \times \langle t\rangle) \setminus S_0$ также сопряжены в G. Ясно, что центр $Z(T) = \langle z\rangle$ порядка 2. Заметим также, что T-группа не максимального класса, и поэтому по лемме Томпсона о сдвиге [6] S содержит некоторый элемент U из $\mathscr{U}_G(2)$.

ЛЕММА. *Имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) $|T : S| = 2$;

(2) *в T существует инвариантная четверная подгруппа, все инволюции которой сопряжены в G.*

Доказательство. Если некоторый элемент U из $\mathscr{U}_G(2)$ содержится в F_0, то выполняется одно из утверждений леммы, так как F_0 имеет два класса сопряженных инволюций относительно группы G, один класс центральных инволюций, второй класс инволюций, сопряженных с t.

В случае, когда L — типа 2), все инволюции из L содержатся в F_0. Поэтому элемент U из $\mathscr{U}_G(2)$, содержащийся в S, будет лежать в F_0. Следовательно, в этом случае лемма справедлива. В дальнейшем будем считать, что $L = \langle t\rangle \times F$, где $F \simeq PGL(2, q)$ и $F = K \cdot U$. Обозначим через Z — некоторую четверную подгруппу из S_0. Тогда в K существует элемент f порядка 3, который нормализует, но не централизует Z. Обозначим через $A = \langle t\rangle \times Z$. Тогда $N_L(A) = A \leftthreetimes (\langle f\rangle_3 \leftthreetimes \langle v\rangle_2)$, причем $N_k(A)/A \simeq S_3$. Заметим, что $C_G(A) = A \times E$, где E — 2-группа и $N(A)/C(A)$ изоморфно вкладывается в $GL(3, 2)$.

Докажем, что фактор-группа $N(A)/C(A)$ изоморфна симметрической группе S_4 степени 4. Так как фактор-группа $N_G(A)/C_G(A)$ не изоморфна $GL(3, 2)$ в силу несопряженности инволюции из $A^\#$ относительно G, то нам достаточно доказать, что $|N(A)/C(A)|_2 > 2$. Если $|F|_2 > 8$, то инвариантная четверная подгруппа W в T не содержится в S, иначе $t \in W$ и $|T : S| = 2$, что и требовалось. Так как $W \subseteq N_T(A)$, то $|N_G(A)/A|_2 > 2$ и $N_G(A)/C_G(A) \simeq S_4$. Предположим теперь, что $|F|_2 = 8$. В этом случае S содержит точно две элементарные подгруппы порядка 8, именно, $A = \langle t\rangle \times Z$ и $B = \langle t\rangle \times \langle z\rangle \times \langle v\rangle$, где $U = \langle z\rangle \times \langle v\rangle$. Так как

$| N_T(S) : S | = 2$, то нам достаточно доказать, что $N_T(S) \leqslant N_G(A)$. Предположим противное. Тогда для каждого элемента $h \in N_T(S)/S$ $A^h = B$. Заметим, что $t^h = tz$ и $z^h = z$. Поэтому, если $Z^h = Z$, то $h \in N(A)$. Следовательно, $Z^h \leqslant B$. Аналогично получаем, что $U^h = \langle z \rangle \leftthreetimes \langle v^h \rangle \leqslant A$. Если $v^h = tx$, где $x \in Z^{\#}$, то $| T : S | > 2$, и лемма доказана. Значит, $v^h \in Z^{\#}$. Но тогда $Z \in \mathcal{U}(2)$, что и требовалось для доказательства леммы. Следовательно, $N_T(S) \leqslant N(A)$ и $N(A)/C(A) \simeq S_4$.

Таким образом $N(A)/E = P \leftthreetimes (\langle f_3 \rangle \leftthreetimes \langle v_2 \rangle)$, где $| P | = 2^5$.

Имеет место равенство $P = [P, \langle f \rangle] C_P(f)$. Так как $N(A)/C(A) \simeq S_4$ и $C_A(f) = \langle t \rangle$, то $C_P(f) = \langle t \rangle$ и $[P, \langle t \rangle] \leftthreetimes \langle f \rangle$ является группой Фробениуса порядка $2^4 \cdot 3$. Ясно, что $P_0 = [P, \langle f \rangle]$ — либо элементарная группа порядка 16, либо абелева группа типа (2, 2). Обозначим через $R = P \leftthreetimes \langle v \rangle$ силовскую 2-подгруппу из $N(A)$, содержащую S.

Ясно, что все инвариантные четверные подгруппы из R содержатся в P. Заметим, что $| C_P(t) | = 8$. Так как P_0 абелева, то порядок централизатора любой инволюции из $P \setminus P_0$ в P имеет также порядок 8. Поэтому инвариантные четверные подгруппы из P содержатся в P_0. Если P_0 — абелева группа типа (2,2), то $\Omega_1(P_0) = Z$ является единственной инвариантной четверной подгруппой в R. Без ограничения общности можно считать, что $R \leqslant T$. Поэтому инвариантная четверная подгруппа в T содержится в $N_T(A)$. Следовательно, $Z \lhd T$, все инволюции из $Z^{\#}$ сопряжены, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что P_0 — элементарная группа порядка 16. Тогда $P_0 = Z \times V$, где Z и V — четверные подгруппы, допустимые относительно группы $\langle f \rangle \times \langle v \rangle$, $C_{P_0}(t) = Z$ и $Z = P_0'$. Пусть W — инвариантная четверная подгруппа из R, которая принадлежит $U_G(2)$. Если W совпадает с Z, то выполнено условие (2). Поэтому $W \neq Z$ и $C_R(W) = P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle$.

Пусть Q_0 — силовская 2-подгруппа из $N_G(W)$, содержащая 2-подгруппу R. Тогда $Q = Q_0 \leftthreetimes \langle t \rangle$, где $Q_0 = C_Q(W)$. По лемме Томпсона о сдвиге инволюция t сопряжена с некоторым элементом δ из Q_0. Из строения централизатора $C_G(t)$ следует, что $| C_{Q_0}(\delta) | = 8$. По теореме Фомина [7] получаем, что $| Q_0 : Q_0' | = 8$ и Q_0' — абелева группа ранга < 2. Заметим, что $P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle \leqslant Q_0$.

Если $P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle \leqslant Q_0' \cdot P_0$, то по модулярному закону $P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle = Q_0' \bigcap (P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle) \leftthreetimes P_0 = P_0$, так как $Q_0' \bigcap (P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle) = W$, что противоречиво. Поэтому $Q_0 = Q_0' \cdot P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle$. Если $Q_0' \neq W$, то в Q_0' найдется собственная подгруппа E индекса 2, инвариантная в Q_0 такая, что Q_0/E — элементарная подгруппа порядка 16, так как $(P_0 \leftthreetimes \langle v \rangle)' = W$. Это противоречие доказывает, что $Q_0' = W$ и $Q = R$. Нетрудно проверить, что в этом случае силовская 2-подгруппа Q из G изоморфна силовской 2-подгруппе из A_8. Из теоремы A^* [8] следует, что либо G изоморфна A_8, либо A_9, либо слияние инволюций в G такое, как и в $PS_P(4, q)$, $q \equiv 3{,}5 \pmod 8$. В первом случае группа не содержит инволюций, централизаторы которых были бы изоморфны централизатору инволюции t. Во втором случае централизатор каждой инволюции содержит элементарную подгруппу порядка 16, что не так в нашей группе.

З а м е ч а н и е. Из доказательства леммы видно, что если $| T : S | > 2$ и T не изоморфна силовской 2-подгруппе из A_8, то в T существует инвариантная четверная подгруппа Z такая, что $Z \leqslant C_T(t)$, и существует 3-элемент f из $C_G(t)$, который транзитивно действует на $Z^{\#}$.

Предположим, что в группе G выполняется утверждение (2) леммы. Заметим, что $| C_G(t) |_2 > 16$ и $| T : S | > 2$, то $SCN_3(T) = \varnothing$. По результату Маквильямс [9] T либо изоморфна силовской 2-подгруппе из $U_3(4)$, либо изоморфна силовской 2-подгруппе в группе Лайонса, либо изоморфна силовской 2-подгруппе из группы Холла — Янко. В первом случае T не содержит элементарных подгрупп порядка 8, во втором случае, как показано в работе [10], все инволюции были бы сопряжены в G, что противоречиво. В третьем случае централизатор каждой инволюции содержит элементарную подгруппу порядка 16, что не выполняется в группе G. Поэтому в этом случае будем считать, что $| C_G(t) |_2 > 16$. Обозначим через $T_0 = C_T(Z)$. Из строения централизатора $C_G(t)$ следует, что $C_{T_0}(t) = Z \times \langle t \rangle$. Поэтому по теореме Фомина [7] $| T_0/T_0' | = 8$, T_0' — абелева группа ранга $\leqslant 2$.

Рассмотрим нормализатор $N = N_G(Z)$. По замечанию имеем $N = C_G(Z) \cdot (\langle f \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle)$, $f^v = f^{-1}$. $| v | = 2$, если L — типа 1), $| v | = 4$, если L — типа 2). По лемме Фраттини $N = C_G(Z) \cdot N_N(T_0)$. Так как $N_N(T_0)$ разрешим, то $N_N(T_0)$ содержит холловскую $\{2, 3\}$-подгруппу

Если T' — циклическая группа, то в силу результата Чебота [4] и простоты группы G получаем, что либо все инволюции сопряжены в G, либо централизатор каждой инволюции содержит элементарную подгруппу порядка 16, что противоречиво. Так как $T' \neq S'$, то по теореме Бернсайда [3] получаем $T' = S' \times \langle t \rangle$, где $S = \langle t \rangle \times D$, D — группа диэдра. Заметим также, что $D \ntriangleleft T$, иначе $T_1 \leqslant D$.

Предположим сначала, что $\Omega_1(T) \nleqslant S$. В этом случае $T = S \leftthreetimes \langle \omega \rangle$, $|\omega| = 2$. Покажем, что $C_S(\omega)$ содержит элемент порядка 4. Предположим противное. Тогда из того, что $[t, \omega] \neq 1$, и строения S получаем, что $|C_T(\omega)| = 8$. Но тогда по теореме из [7] ω инвертирует $T' = \langle a \rangle \times \langle t \rangle$, что не так. Заметим также, что $Z \in \Omega_1(Z(T))$ сильно изолирована среди квадратов, так как $\Phi(T) = T'$, а из инволюций t и tz квадраты не извлекаются. Поэтому по лемме 3.1 из [4] ω — нецентральная инволюция. Из строения фактор-группы T/S' следует, что в D существует подгруппа D_0 индекса 2, допустимая относительно ω.

Предположим, что D_0 — группа диэдра. Рассмотрим группу $K = D_0 \leftthreetimes \langle \omega \rangle$. Ясно, что $D_0 \triangleleft T$ и $T/D_0 = (\langle \bar{t} \rangle \times \langle \bar{z} \rangle \leftthreetimes \langle \bar{\omega} \rangle)$, где $[\bar{z}, \bar{\omega}] = \bar{t}$. Пусть $C_{D_0}(\omega)$ содержит инволюцию $\mu \in D_0 \setminus \langle z \rangle$. Тогда $C_T(\mu) = \langle \mu \rangle \times [(\langle t \rangle \times \langle z \rangle) \leftthreetimes \langle \omega \rangle)]$. Следовательно, по лемме 3.1 из [4] μ — нецентральная инволюция и D_0 порождается нецентральными инволюциями. Обозначим через D_1 вторую максимальную диэдральную подгруппу из D, которая порождается центральными инволюциями. Ясно, что в этом случае D_1 неинвариантна относительно $\langle \omega \rangle$. Обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ нецентральные инволюции в G из $D_0 \setminus \langle z \rangle$, а через $z = z_0, z_1, \ldots, z_k$ инволюции из D_1. Так как $D_1^{\omega} \neq D_1$, то $Z_1^{\omega} = t_{\mu_i}$ для некоторого μ_i, ибо в этом случае инволюции вида tz_i сопряжены с t. Поэтому $z_1^{\omega^2} = (t, \mu_i)^{\omega} = tz\mu_j = z_1$. С другой стороны, $tz\mu_j \notin D_1$. Полученное противоречие показывает, что $C_{D_0}(\omega)$ — циклическая группа. Более того, мы доказали, что все инволюции из D_0 центральны в G. Если D_0 содержится в $S_0 = S \cap K$, то, как и выше, получим противоречие. Поэтому $D_0 \leqslant S_0$, $z, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ — центральные инволюции в G, инволюции вида $t_{\mu_i} (i = 1, \ldots, k)$ сопряжены с t и $t^{\omega} = tz$. Имеем $\mu_i^{\omega} = z\mu_i$.

Из строения централизатора $C_G(t)$ видно, что в K_0 содержится элемент f порядка 3, который нормализует подгруппу $A = \langle t \rangle \times \langle z \rangle \times \langle \mu_1 \rangle$, но не централизует ее. Так как $C_S(\omega)$ — циклическая группа порядка > 2, то $|D_0| > 4$. Поэтому $N_{K_0}(A) = A \leftthreetimes \langle \bar{f} \rangle \leftthreetimes \langle \mu \rangle$ и $N_{K_0}(A)/A \simeq S_3$. Заметим, что подгруппа $Z = \langle z \rangle \times \langle \mu \rangle$ инвариантна в $N_{K_0}(A)$. С другой стороны, инволюция ω также нормализует A. Поэтому в этом случае $N_G(A)/C_G(A) \simeq S_4$, так как $N(A)$ не содержит элемента порядка 7 и $N(A) > N_{C(t)}(A)$. Из строения силовской 2-подгруппы T видно, что такой подгруппы в G нет.

Предположим теперь, что D_0 — циклическая группа. В наших прежних обозначениях $D = \langle z, \mu_1 \rangle \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$ и $|z\mu_1| = 2^l$. Тогда

$$z = (z_1\mu_1)^{2^{l-1}}, \quad t^{\omega} = zt \quad \text{и} \quad z_1^{\omega} = t_{\mu_i}.$$

Так как $z_1^{\omega^2} = z_1 = (t\mu_i)\omega = zt\mu_i^{\omega}$, то $\mu_i^{\omega} = tzz_1$. Поэтому $(z_1\mu_i)^{\omega} = t\mu_i tzz_1 = \mu_i z_1 z = (z\mu_i)^{-1+2^{l-1}}$, т. е. $\langle z_1\mu_i \rangle \leftthreetimes \langle \omega \rangle$ — полудиэдральная группа. С другой стороны, $|C_{\langle z, \mu_i \rangle}(\omega)| > 2$, что противоречит первому утверждению.

Предположим теперь, $\Omega_1(T) \leqslant S$. Тогда $T = S\langle c \rangle$, $c^2 \in S$ и из строения фактор-группы T/S' следует, что $T/T' \simeq \langle \bar{c} \rangle_4 \times \langle s \rangle_2$. Поэтому $\Phi(T) = T'\langle c^2 \rangle$. По модулярному закону получаем $\Phi(T) = \langle t \rangle \times D_1$, где $D_1 = \Phi(T) \cap D$. Заметим, что $|D : D_1| = 2$ и D_1 — либо группа диэдра, либо циклическая группа. Пусть D_1 — группа диэдра. Тогда $S' = \langle a \rangle$ — максимальная циклическая подгруппа в D_1, допустима относительно циклической подгруппы $\langle c \rangle$ и элемент c^2 инвертирует a. С другой стороны, циклическая группа не обладает таким автоморфизмом порядка 4. Полученное противоречие позволяет нам считать, что $D = \langle d_1 \rangle$ — циклическая группа и $\langle d_1^2 \rangle = S'$. Так как $\Phi(T) = \langle T, U(T) \rangle$, то существует такой элемент d, что $\langle d^2 \rangle$ является максимальной подгруппой в $\Phi(T)$. Поэтому $|\Phi(T)\langle d \rangle : \langle d \rangle| = 2$, $\langle d \rangle \times \langle t \rangle$ — полуабелева группа и $|T : \langle d \rangle| = 4$. Следовательно, $T = (\langle d \rangle \leftthreetimes \langle t \rangle) \leftthreetimes \langle \mu \rangle$, $|\mu| = 2$ $[t, \mu] = 1$ $|d| = 2^l$, $l > 3$. Так как T' — нециклическая группа, то $\langle d \rangle \ntriangleleft T$. Так как $T' = \langle d^4 \rangle \times \langle t \rangle$, то $d^{\mu} = d^{\alpha}t$, где $\alpha = 2s + 1$. Далее $(\alpha^2)^{\mu} = d^{-2} = (d^{\mu})^2 = d^{\alpha}td^{\alpha}t = d^{4s+1}d^t = d^{4s+2-2^{l}-1}$, откуда $d^{4(s+1)+2+2^{l-1}} = 1$. Следовательно, $4(s+1) + 2^{l-1} \equiv \equiv O(2^l)$. Так как $l > 3$, то s — нечетно. С другой стороны, $[d, \mu] = d^{\alpha-1}t = d^{2S}t \in \langle d^4 \rangle \times \langle t \rangle$, т. е. s — четно. Полученное противоречие доказывает, что условие (1) леммы также не выполняется в группе G. Теорема Б доказана.

Институт математики
и механики АН СССР

Поступило
28.V.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W o n g W., A characterization of the Mathieu group M_1 Math. Z., **84** (1964), 378—388.

[2] B r a u e r R., F o n g P., A characterization of Mathieu group M_{12}, Trans. Amer. Math. Soc., **122** (1966), 18—47.

[3] B u r n s i d e W., On some properties of groups whose orders are powers of prime, Proc. London Math. Soc. (2), **11** (1912), 225—245.

[4] C h a b o t P., Groups whose Sylow 2-subgroups have cyclic commutator groups I, II, J. Algebra, **19** (1971), 21—30; **21** (1972), 312—320.

[5] H a r a d a K., Groups with a certain type of Sylow 2-subgroups, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 303—307.

[6] T h o m p s o n J. G., Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 383—437.

[7] Ф о м и н А. Н., Конечные 2-группы, в которых централизатор некоторой инволюции имеет порядок 8, XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Резюме сообщений и докладов, Кишинев, 1971, 95.

[8] G o r e n s t e i n D., H a r a d a K., On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$, Math. Z., **117** (1970), 207—238.

[9] M a c W i l l i a m s A., On 2-groups with no normal abelian subgroups of rank 3 and their occurence as Sylow 2-subgroups of finite simple groups, Trans. Amer. Math. Soc., **150** (1970), 345—408.

[10] G o r e n s t e i n D., H a r a d a K., On finite groups with Sylow 2-subgroups of type $\hat{A}_n$, $n = 8, 9, 10, 11$, J. Algebra **19** (1971), 185—227.

[11] H a r a d a K., On some 2-groups of normal 2-rank, 2, J. Algebra, **20** (1972), 90—93.

[12] G o r e n s t e i n D., H a r a d a K., Finite simple groups of low 2-rank and the famillies $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, q odd, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971), 829—862.

[13] H i g m a n G., Odd Characterisation of Finite Simple Groups, Lectures, University of Michigan, 1968.

[14] A l p e r i n J., B r a u e r R., G o r e n s t e i n D., Finite groups with quasidihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, Trans. Amer. Math. Soc., **151** (1970), 1—261.