Р. М. Нигматулин

КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПРАКТИКУМ

Челябинск
2025

Министерство просвещения РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный
гуманитарно-педагогический университет»

Р. М. Нигматулин

КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПРАКТИКУМ

Челябинск
2025

УДК 514.11(076.1)
ББК 22.151.02я73
Н 60

Нигматулин, Р. М. Координатно-векторный метод решения стереометрических задач: практикум / Р. М. Нигматулин; Министерство просвещения РФ, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет. – Челябинск: Изд-во ЮУрГГПУ, 2025. – 63 с. – ISBN 978-5-907869-85-1. – Текст: непосредственный.

Пособие содержит задачи для практических занятий и самостоятельной работы, необходимый справочный материал, примеры решений с подробными пояснениями. Предназначено для формирования и развития у обучающихся умений применения координатно-векторного метода для решения стереометрических задач.

Издание адресовано студентам бакалавриата, обучающимся по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки, один из которых «Математика»), и преподавателям, реализующим соответствующие образовательные программы, а также будет полезно старшеклассникам при подготовке к ЕГЭ и учителям математики.

Рецензенты:
Карачик В. В., д-р. физ.-мат. наук, профессор ЮУрГУ
Шарафутдинова А. М., канд. физ.-мат. наук, доцент ЮУрГГПУ

ISBN 978-5-907869-85-1

© Нигматулин Р. М., 2025
© Издательство Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие разработано в соответствии с методическими рекомендациями по подготовке педагогических кадров («Ядро высшего педагогического образования»), с учетом рекомендуемого содержания дисциплин «Элементарная математика» и «Геометрия» рабочей программы предметно-методического модуля по профилю «Математика».

Пособие предназначено для проведения практических занятий, организации самостоятельной работы и текущего контроля студентов дневной и заочной форм обучения по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки, один из которых «Математика»). Задания, включенные в практикум, направлены на формирование и развитие у студентов умений решения стереометрических задач координатно-векторным методом.

Как правило, в пособиях для подготовки к ЕГЭ, в материалах для учителей и экспертов предметных комиссий решение геометрических задач представлено преимущественно «традиционным» поэтапно-вычислительным методом, а координатно-векторному методу практически не уделяется должного внимания. При этом координатно-векторный метод является одним из ключевых инструментов изучения стереометрии, позволяющим глубже понять взаимосвязь геометрических объектов в пространстве и эффективно решать разнообразные задачи. Применение данного метода способствует развитию у обучающихся пространственного мышления и аналитических навыков, что является важным элементом подготовки будущих учителей математики.

В пособие включены в основном стереометрические задачи, предлагавшиеся на ЕГЭ по профильной математике в течение последних десяти лет [1, 3, 6, 10, 13], а также задачи, содержащиеся в пособиях по подготовке к ЕГЭ [9, 12, 14] или представленные в других открытых источниках (например, в материалах для экспертов предметных комиссий [5, 17, 18]). Формулировка таких задач состоит из двух пунктов: первый (а)) – на доказательство, второй (б)) – на вычисление. Поэтому подборка задач позволяет охватить все основные вопросы стереометрии: взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, параллельность и перпендикулярность прямых или плоскостей, углы и расстояния между прямыми и плоскостями, объёмы тел, площади сечений и др.

Первая часть пособия сдержит основные формулы и другие справочные материалы, необходимые для решения задач координатно-векторным методом. Основное внимание уделяется формулам, изучаемым в школьном курсе стереометрии и в вузе в рамках дисциплины «Элементарная математика», поэтому формулы, связанные с векторным и смешанным произведением векторов, которые изучаются в университете в рамках дисциплины «Геометрия», в справочные материалы не были включены.

Во второй части пособия представлены примеры решения задач, охватывающие различные виды многогранников и тел вращения. В примерах показаны различные способы введения системы координат. В решение задач включены необходимые рисунки и подробные комментарии.

Третья часть пособия содержит задачи для практических занятий или для самостоятельного решения. Задачи разделены на две группы по типу фигур:

1) куб и прямоугольный параллелепипед – многогранники, для которых достаточно просто и удобно ввести прямоугольную систему координат при решении задач;

2) призмы, пирамиды и тела вращения (конус и цилиндр).

В конце пособия приводятся ответы к пунктам б) задач и список библиографических источников.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Координаты середины отрезка

Если точка M – середина отрезка AB, то координаты точки M равны полусумме соответствующих координат точек A и B.

$$\begin{array}{c} A(x_1, y_1, z_1), \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{array} \Rightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

2. Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении $m : n$

Пусть точка M делит отрезок AB в отношении $m : n$, т. е. $AM : MB = m : n$. Тогда координаты точки M вычисляются по следующим формулам.

$$\begin{array}{c} A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \\ AM : MB = m : n \end{array} \Rightarrow M\left(\frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \frac{ny_1 + my_2}{n + m}, \frac{nz_1 + mz_2}{n + m}\right)$$

Можно использовать другой вид этих формул, обозначив отношение $\dfrac{m}{n} = \lambda$.

$$\begin{array}{c} A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \\ \dfrac{AM}{MB} = \lambda \end{array} \Rightarrow M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$$

3. Длина отрезка

Длина отрезка AB равна корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат точек A и B.

$$\begin{array}{c} A(x_1, y_1, z_1), \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{array} \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

4. Координаты вектора

Пусть точка A – начало, а точка B – конец вектора $\overrightarrow{AB}$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности соответствующих координат точек B и A.

$$\begin{array}{c} A(x_1, y_1, z_1), \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

5. Линейные операции с векторами

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k каждая его координата умножается на это число.

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3), \qquad k \in \mathbb{R} \ \ \Rightarrow \ \ k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$$

При сложении двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получается вектор, каждая координата которого равна сумме соответствующих (одноимённых) координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\begin{array}{c} \vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3) \\ \vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3) \end{array} \ \Rightarrow \ \ \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3)$$

Если известны координаты точки A и вектора $\overrightarrow{AB}$, то координаты точки M такой, что $AM : MB = m : n$, $k = \dfrac{m}{m+n}$ (см. п. 2), равны сумме соответствующих координат точки A и вектора $k\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{array}{c} A(x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{AB}(a, b, c), \\ AM : MB = m : n, \\ k = \dfrac{m}{m+n} \end{array} \ \Rightarrow \ \ M(x_1 + k \cdot a,\ y_1 + k \cdot b,\ z_1 + k \cdot c)$$

6. Длина вектора

Если известны координаты вектора $\vec{a}$, то его длина вычисляется по следующей формуле.

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3) \ \Rightarrow \ |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Если известны координаты начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$, то его длину можно найти, вычислив его координаты (см. п. 4), либо по формуле для длины отрезка AB (см. п. 3).

$$\begin{matrix} A(x_1, y_1, z_1), \\ B(x_2, y_2, z_2) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{matrix}$$

7. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами, то скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно сумме произведений соответствующих (одноимённых) координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\begin{matrix} \vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3) \\ \overrightarrow{b =} (b_1,\ b_2,\ b_3) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

8. Угол между векторами

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен отношению скалярного произведения этих векторов к произведению их длин.

$$\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Заметим, что если $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) > 0$, то угол между векторами острый, т. е. $0 < \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90°$; если $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) < 0$, угол между векторами тупой, т. е. $90° < \angle(\vec{a},\vec{b}) < 180°$.

9. Уравнение плоскости

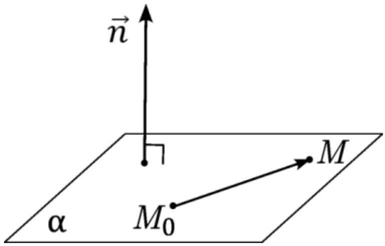

Рис. 1

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и вектор $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$, перпендикулярный плоскости α (вектор нормали), т. е. $\vec{n} \perp \alpha$ (см. рис. 1). Если точка $M(x, y, z) \in \alpha$, то вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Тогда их скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (a, b, c)$, имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости α можно записать в виде:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Если плоскость проходит через точки A, B, C, то, подставляя координаты этих точек в уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$, получим следующую систему уравнений.

$$\begin{matrix} A(x_1, y_1, z_1) \\ B(x_2, y_2, z_2) \\ C(x_3, y_3, z_3) \end{matrix} \xRightarrow{ax+by+cz+d=0} \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0, \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0, \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0. \end{cases}$$

Если плоскость не проходит через начало координат, то при решении системы можно задать $d = 1$ (или любое другое «удобное» ненулевое значение), в противном случае $d = 0$.

10. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α имеет уравнение $ax + by + cz + d = 0$ и $P(x_0, y_0, z_0) \notin \alpha$. Тогда расстояние от точки P до плоскости α вычисляется по формуле

$$\boxed{\begin{matrix} P(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \\ \alpha : ax + by + cz + d = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \rho(P, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

11. Угол между плоскостями

Косинус угла между плоскостями α и β равен модулю косинуса угла между их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. (См. рис. 2. Угол φ между пересекающимися плоскостями $0 < \varphi \leq 90°$, а угол между векторами может быть и тупым.)

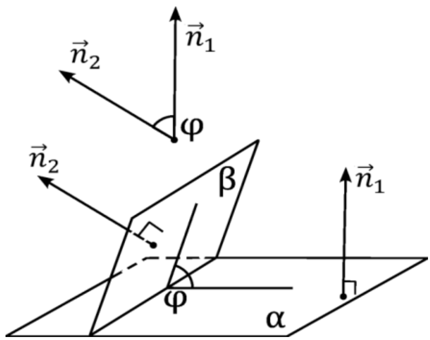

Рис. 2

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \vec{n}_1 = (a_1,\ b_1,\ c_1), \\ \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ \vec{n}_2 = (a_2,\ b_2,\ c_2) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \cos\angle(\alpha, \beta) = |\cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}$$

В координатной форме эта формула примет вид:

$$\boxed{\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}}$$

12. Угол между прямой и плоскостью

Синус угла между прямой ℓ, проходящей через точки A и B, и плоскостью α равен модулю косинуса угла между вектором $\overrightarrow{AB}$ и нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости α.

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \in \ell,\ \alpha: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \sin\angle(\ell, \alpha) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{AB}, \vec{n}\right)\right|$$

13. Угол между прямыми

Косинус угла между прямыми $\ell_1 = AB$ и $\ell_2 = CD$ равен модулю косинуса угла между их направляющими векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (угол φ между прямыми $0 < \varphi \leq 90°$, а угол между векторами может быть и тупым).

$$\begin{matrix} A, B \in \ell_1 \\ C, D \in \ell_2 \end{matrix} \Rightarrow \cos\angle(\ell_1, \ell_2) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\right|$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямые AB и CD – скрещивающиеся. Известны координаты точек A, B, C, D.

Проведём через AB плоскость α, параллельную CD (см. рис. 3). Найдём какой-нибудь нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости α. Например, из условий:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0. \end{cases}$$

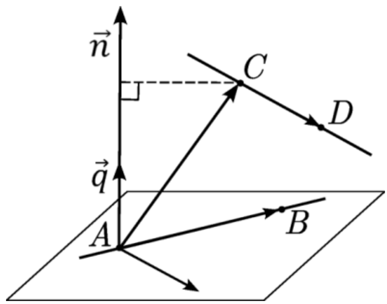

Рис. 3

Найдём вектор $\vec{q} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Очевидно, что $|\vec{q}| = 1$. Тогда

$$\left|\vec{q} \cdot \overrightarrow{AC}\right| = \left|1 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\angle\left(\overrightarrow{AC}, \vec{q}\right)\right| = \left|\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\angle\left(\overrightarrow{AC}, \vec{q}\right)\right| =$$
$$= \rho(AB, CD).$$

$$\begin{matrix} AB \text{ и } CD - \\ \text{скрещивающиеся,} \\ AB \in \alpha,\ \ CD \parallel \alpha, \\ \vec{n} \perp \alpha \ \text{ и } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \rho(AB, CD) = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{AC}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{|\vec{n}|}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O – середина отрезка CB_1.

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A.

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

Решение

а) Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 4), что точка A – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч AB, для оси ординат – луч AD, для оси аппликат – луч AA_1.

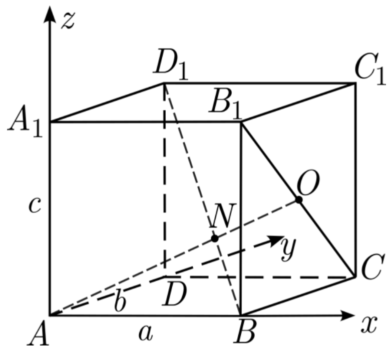

Рис. 4

Пусть $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Тогда получим следующие координаты точек: $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, $C(a, b, 0)$, $B_1(a, 0, c)$, $D_1(0, b, c)$. Точка O – середина отрезка CB_1, поэтому она имеет координаты $O\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Для доказательства п. а) покажем, что векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AO}$ коллинеарные.

Найдём координаты точки N. Так как $BN : ND_1 = 1 : 2$, получаем:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1} = \frac{1}{3}(-a, b, c) = \left(-\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Тогда получаем координаты точки N как сумму соответствующих координат точки B и вектора $\overrightarrow{BN}$ (см. п. 5 в справочных материалах):

$$N\left(a-\frac{a}{3}, 0+\frac{b}{3}, 0+\frac{c}{3}\right) \Longrightarrow N\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Заметим, что координаты точки N можно было вычислить по формуле из п. 2 справочных материалов:

$$N\left(\frac{mx_B+nx_{D_1}}{m+n}, \frac{my_B+ny_{D_1}}{m+n}, \frac{mz_B+nz_{D_1}}{m+n}\right) =$$
$$= N\left(\frac{0+2a}{1+2}, \frac{b+0}{1+2}, \frac{c+0}{1+2}\right) = N\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AN} = \left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right), \qquad \overrightarrow{AO} = \left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \Longrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}.$$

Таким образом, векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AO}$ коллинеарные, значит, точки A, N, O лежат на одной прямой.

б) По условию $NO = \rho(BD_1, CB_1) = \sqrt{2}$.

Найдём координаты векторов

$$\overrightarrow{BD_1}(-a, b, c), \qquad \overrightarrow{B_1C}(0, b, -c).$$

По условию NO – расстояние между прямыми BD_1 и CB_1, поэтому NO – общий перпендикуляр прямых BD_1 и CB_1. Выразим длину вектора $\overrightarrow{NO}$ через его координаты:

$$\overrightarrow{NO} = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{6}, \frac{c}{6}\right) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{NO}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{36}+\frac{c^2}{36}} = \sqrt{2}.$$

Так как $\overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{NO} \perp \overrightarrow{B_1C}$, то в координатной форме скалярное произведение вектора $\overrightarrow{NO}$ и векторов $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ примет вид:

$$\begin{cases}\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0,\\ \overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{b^2}{6}+\dfrac{c^2}{6}=0,\\ \dfrac{b^2}{6}-\dfrac{c^2}{6}=0.\end{cases}\Longrightarrow a=b=c.$$

Таким образом, параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является кубом. Заменяя b, c на a в формуле для $\left|\overrightarrow{NO}\right|$, получим:

$$\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{36}+\frac{a^2}{36}=2\Longrightarrow a=2\sqrt{3}.$$

Следовательно, объём параллелепипеда равен:

$$V=a^3=\left(2\sqrt{3}\right)^3=24\sqrt{3}.$$

Пример 2

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}, SB=2\sqrt{3}$ и $SD=\sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости (SBC).

Решение

а) Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 5), что точка A – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч AD, для оси ординат – луч AB, для оси аппликат – некоторый луч AM такой, что $AM\perp(ABC)$.

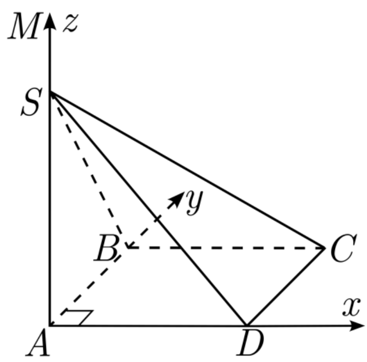

Рис. 5

По условию $ABCD$ – прямоугольник, поэтому получим следующие координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(0,\sqrt{5},0)$, $D(2,0,0)$, $C(2,\sqrt{5},0)$.

Пусть координаты вершины $S(x, y, z)$. По условию известны длины рёбер SA, SB, SD, поэтому выразим через x, y, z координаты векторов $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{DS}$ и их длины:

$$\overrightarrow{AS} = (x, y, z), \qquad \overrightarrow{BS} = \left(x, y - \sqrt{5}, z\right), \qquad \overrightarrow{DS} = (x - 2, y, z).$$

Тогда

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{7} \implies x^2 + y^2 + z^2 = 7.$$

Подставляя значение этого выражения в формулу для $\left|\overrightarrow{BS}\right|$, получим:

$$\left|\overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \sqrt{5}\right)^2 + z^2} = 2\sqrt{3} \implies$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{5}y + 5 = 12 \implies 7 - 2\sqrt{5}y + 5 = 12 \implies y = 0.$$

Действуя аналогично, для $\left|\overrightarrow{DS}\right|$ получим:

$$\left|\overrightarrow{DS}\right| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{11} \implies$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4 = 11 \implies 7 - 4x + 4 = 11 \implies x = 0.$$

Находим z из равенства $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{0 + 0 + z^2} = \sqrt{7}$ и при выбранных направлениях осей получаем $S\left(0, 0, \sqrt{7}\right)$.

Таким образом, точка $S \in Oz$, следовательно, $SA \perp (ABC)$ и SA – высота пирамиды $SABCD$.

б) Для нахождения расстояния от точки A до плоскости (SBC) составим уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ по трем точкам (см. п. 9 в справочных материалах): $S\left(0, 0, \sqrt{7}\right)$, $B(0, \sqrt{5}, 0)$, $C(2, \sqrt{5}, 0)$.

Плоскость (SBC) не проходит через начало координат, поэтому пусть $d = 1$. Подставляя координаты точек в уравнение плоскости, составим систему:

$$\begin{cases} c\sqrt{7} + 1 = 0, \\ b\sqrt{5} + 1 = 0, \\ 2a + b\sqrt{5} + 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем, что $c = -\frac{1}{\sqrt{7}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $a = 0$. Следовательно, плоскость (SBC) имеет уравнение

$$-\frac{y}{\sqrt{5}} - \frac{z}{\sqrt{7}} + 1 = 0.$$

Тогда расстояние от точки $A(0,0,0)$ до плоскости (SBC) равно:

$$\rho(A,(SBC)) = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{0+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{12}{35}}} = \frac{\sqrt{105}}{6}.$$

Пример 3

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$. Точка Q – середина ребра A_1C_1. Через середину M ребра BC провели плоскость α, перпендикулярную отрезку PQ.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок A_1C_1, считая от точки A_1, если известно, что $AB = AA_1$ и $AB : BC = 2 : 7$.

Решение

а) Пусть O – середина AB, $OA = a$, $AA_1 = h$, $BC = b$. Тогда OC – медиана и высота в ΔABC. В прямоугольном ΔBOC получаем $OC = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 6), что точка O – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч OA, для оси ординат – луч OC, для оси аппликат – луч OD такой, что $OD \parallel AA_1$, следовательно, $OD \perp (ABC)$.

Получаем следующие координаты точек: $A(a, 0, 0)$, $B(-a, 0, 0)$, $C\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}, 0\right)$, $A_1(a, 0, h)$, $C_1\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}, h\right)$.

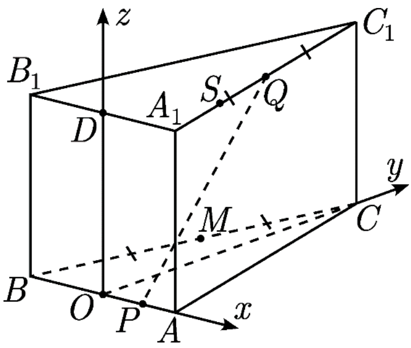

Рис. 6

По условию $AP : PB = 1 : 3$, следовательно, $P\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$. Точка Q – середина отрезка A_1C_1, поэтому её координаты $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}, h\right)$. Точка M – середина отрезка BC, поэтому её координаты $M\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}, 0\right)$. Получаем координаты вектора $\overrightarrow{PQ} = \left(0, \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}, h\right)$.

Составим уравнение плоскости α по точке M и нормальному вектору $\overrightarrow{PQ}$ (см. п. 9 в справочных материалах). Подставляя их координаты, получим уравнение:

$$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}\right) + h \cdot z = 0.$$

Проверим, проходит ли плоскость α через середину ребра AC – точку с координатами $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}, 0\right)$. Её координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}\right) + h \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, плоскость α делит ребро AC пополам.

б) По условию $AB = AA_1$, поэтому $h = 2a$, и $AB : BC = 2a : b = 2 : 7$, поэтому $b = 7a$, $\sqrt{b^2 - a^2} = 4\sqrt{3}a$, а уравнение плоскости α примет вид: $\sqrt{3}y + z - 6a = 0$. Тогда получим следующие координаты точек: $A_1(a, 0, 2a)$, $C_1\left(0, 4\sqrt{3}a, 2a\right)$.

Пусть точка $S = A_1C_1 \cap \alpha$. Векторы $\overrightarrow{A_1S}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ коллинеарные, тогда $\overrightarrow{A_1S} = k \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \left(-ka, k \cdot 4\sqrt{3}a, 0\right)$, следовательно, координаты точки $S\left(a - ka, k \cdot 4\sqrt{3}a, 2a\right)$. Подставляя координаты точки S в уравнение плоскости α, решаем уравнение относительно переменной k:

$$\sqrt{3}\left(k \cdot 4\sqrt{3}a\right) + 2a - 6a = 0,$$

$$12ka = 4a \implies k = \frac{1}{3}.$$

Получили, что $\overrightarrow{A_1S} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$, следовательно, $A_1S : SC_1 = 1 : 2$.

Пример 4

Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 4 и перпендикулярны друг другу. Плоскость α перпендикулярна ребру CD и пересекает рёбра AB и CD в точках K и M соответственно, причём $CM : MD = 5 : 3$.

а) Докажите, что K – середина ребра AB.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α.

Решение

а) Пусть точка O – середина AD. Тогда в ΔABD и в ΔACD отрезки BO и CO являются медианами и высотами соответственно.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 7), что точка O – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч OD, для оси ординат – луч OC, для оси аппликат – луч OB.

Тогда получаем следующие координаты точек:

$$O(0,0,0), A(-2,0,0), D(2,0,0), C\left(0,2\sqrt{3},0\right), B\left(0,0,2\sqrt{3}\right).$$

Найдём уравнение плоскости α. Её вектор нормали $\overrightarrow{DC}$ имеет координаты $\overrightarrow{DC} = \left(-2, 2\sqrt{3}, 0\right)$. Тогда

$$\overrightarrow{DM} = \frac{3}{8}\overrightarrow{DC} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right)$$

и получаем координаты точки $M\left(\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right)$.

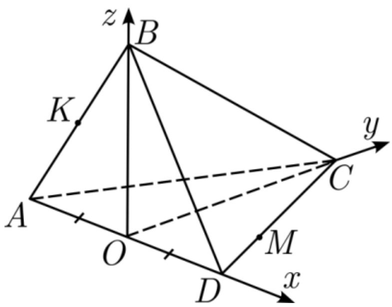

Рис. 7

Так как $M \in \alpha$, $\overrightarrow{DC} \perp \alpha$, уравнение плоскости α составим по точке M и вектору $\overrightarrow{DC}$:

$$-2\left(x - \frac{5}{4}\right) + 2\sqrt{3}\left(y - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) + 0 = 0,$$

$$-2x + 2\sqrt{3}y - 2 = 0,$$

$$x - \sqrt{3}y + 1 = 0.$$

Найдём координаты точки K, используя уравнение плоскости α и координаты вектора $\overrightarrow{AK} = k \cdot \overrightarrow{AB} = \left(2k, 0, 2\sqrt{3}k\right)$. Тогда точка K имеет координаты $K\left(-2+2k, 0, 2\sqrt{3}k\right)$. Подставляя координаты в уравнение плоскости α, получим:

$$-2 + 2k + 0 + 1 = 0 \implies k = \frac{1}{2} \implies \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}.$$

Таким образом, K – середина AB.

б) Пусть $L = \alpha \cap AD$. Так как $L \in AD$, её координаты имеют вид $L(x, 0, 0)$. Подставляя координаты в уравнение плоскости α, получим $x = -1$ и координаты точки $L(-1,0,0)$ (лежит на отрезке AD).

Пусть $N = \alpha \cap CB$, тогда

$$\overrightarrow{CB} = \left(0, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right), \qquad \overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{CB} = \left(0, -2\sqrt{3}k, 2\sqrt{3}k\right).$$

Находим координаты точки $N\left(0,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}k,2\sqrt{3}k\right)$. Подставляя координаты в уравнение плоскости α, получим:

$$0-\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}k\right)+1=0,$$
$$-6+6k+1=0 \Longrightarrow k=\frac{5}{6}.$$

Тогда координаты точки $N\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ (лежит на BC).

Замечание. Плоскость α не пересекает ребро (отрезок) BD. Действительно, пусть P – точка пересечения ребра BD с плоскостью α, т. е. $P=\alpha\cap BD$, тогда

$$\overrightarrow{DB}=\left(-2,0,2\sqrt{3}\right),\qquad \overrightarrow{DP}=k\cdot\overrightarrow{DB}=\left(-2k,0,2\sqrt{3}k\right).$$

Следовательно, получаем $P\left(2-2k,0,2\sqrt{3}k\right)$. Подставляя координаты в уравнение плоскости α, получим:

$$2-2k-0+1=0 \Longrightarrow k=\frac{3}{2}.$$

Тогда получаем координаты точки $P\left(-1,0,3\sqrt{3}\right)$. Но $z_P=3\sqrt{3}>2\sqrt{3}=OB$, следовательно, точка P не лежит на ребре BD (лежит на его продолжении).

Таким образом, четырёхугольник $KLMN$ – искомое сечение тетраэдра $ABCD$ (см. рис. 8).

Зная координаты четырёх его вершин:

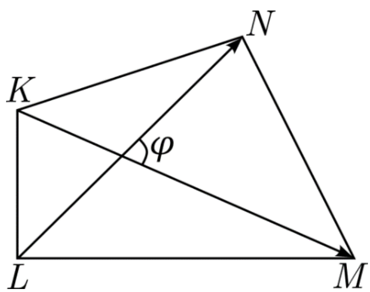

Рис. 8

$$K\left(-1,0,\sqrt{3}\right), L(-1,0,0), M\left(\frac{5}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},0\right), N\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5\sqrt{3}}{3}\right),$$

найдём площадь по формуле

$$S_{KLMN}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{KM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{LN}\right|\cdot\sin\angle\left(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{LN}\right).$$

Находим координаты векторов:

$$\overrightarrow{KM} = \left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}, -\sqrt{3}\right), \qquad \overrightarrow{LN} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right).$$

Тогда

$$\left|\overrightarrow{KM}\right| = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{27}{16} + 3} = \frac{\sqrt{39}}{2}, \qquad \left|\overrightarrow{LN}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{3} + \frac{25}{3}} = \frac{\sqrt{87}}{3},$$

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{LN}\right) = \frac{\frac{9}{4}\cdot 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{39}}{2}\cdot\frac{\sqrt{87}}{3}} = -\frac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}},$$

$$\sin\angle\left(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{LN}\right) = \sqrt{1 - \frac{16}{13\cdot 29}} = \frac{19}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}.$$

Подставляя найденные значения в формулу для площади, получаем:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{39}}{2}\cdot\frac{\sqrt{87}}{3}\cdot\frac{19}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}} = \frac{19}{4}.$$

Пример 5

Точка M – середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка N принадлежит ребру SB, причём $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость (CMN) параллельна прямой SD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью (CMN), если все рёбра пирамиды равны 6.

Решение

а) Пусть O – центр основания пирамиды, тогда $OS = h$ – высота пирамиды. Точка K – середина AD, L – середина DC.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 9), что точка O – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч OK, для оси ординат – луч OL, для оси аппликат – луч OS.

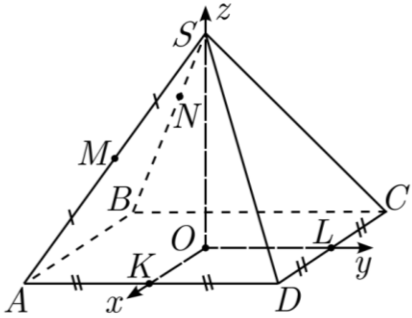

Рис. 9

Обозначим $AB = 2a$, тогда получаем следующие координаты точек:

$A(a, -a, 0), B(-a, -a, 0), C(-a, a, 0), D(a, a, 0), S(0,0, h)$.

Далее находим координаты середины AS:

$$M\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

По условию $SN : NB = 1 : 2$, поэтому

$$\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS} = \left(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}h\right).$$

Тогда получаем координаты точки

$$N\left(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, \frac{2h}{3}\right).$$

Найдём вектор нормали $\vec{n}$ плоскости (CMN) из условий $\vec{n} \perp \overrightarrow{CM}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{CN}$. Тогда

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3),\ \ \overrightarrow{CM} = \left(\frac{3}{2}a, -\frac{3}{2}a, \frac{h}{2}\right),\ \ \overrightarrow{CN} = \left(\frac{2}{3}a, -\frac{4}{3}a, \frac{2}{3}h\right).$$

Записывая скалярное произведение этих векторов в координатной форме, получим систему:

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CM} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CN} = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}a \cdot n_1 - \dfrac{3}{2}a \cdot n_2 + \dfrac{h}{2} \cdot n_3 = 0, \\ \dfrac{2}{3}a \cdot n_1 - \dfrac{4}{3}a \cdot n_2 + \dfrac{2}{3}h \cdot n_3 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение в системе на $\frac{2}{3a}$, а второе – на $\frac{3}{2a}$, получим систему:

$$\begin{cases} n_1 - n_2 + \frac{h}{3a} \cdot n_3 = 0, \\ n_1 - 2 \cdot n_2 + \frac{h}{a} \cdot n_3 = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти какой-либо один вектор $\vec{n}$, выберем ненулевое значение одной из координат, например, $n_3 = \frac{3a}{h}$. Система примет вид:

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = -1, \\ n_1 - 2 \cdot n_2 = -3. \end{cases}$$

Решив систему, получим $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Следовательно, вектор нормали плоскости (CMN) имеет координаты $\vec{n} = \left(1, 2, \ \frac{3a}{h}\right)$.

Тогда скалярное произведение векторов $\vec{n} = \left(1, 2, \ \frac{3a}{h}\right)$ и $\overrightarrow{SD} = (a, a, -h)$ равно

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{SD} = 1 \cdot a + 2 \cdot a - \frac{3a}{h} \cdot h = 0.$$

Следовательно, (CMN) параллельна прямой SD.

б) Уравнение плоскости (CMN) получим по нормальному вектору $\vec{n} = \left(1, 2, \ \frac{3a}{h}\right)$ и точке $C(-a, a, 0)$:

$$1 \cdot (x + a) + 2 \cdot (y - a) + \frac{3a}{h} \cdot z = 0.$$

Ребро AD пересекает плоскость (CMN) в точке с координатами $(a, y, 0)$. Подставив эти координаты в уравнение плоскости (CMN), находим y:

$$2a + 2y - 2a + 0 = 0 \implies y = 0.$$

Получим, что плоскость (CMN) проходит через точку $K(a, 0, 0)$.

По условию $AB = 6$, следовательно, $a = 3$. В прямоугольном ΔSOD получим $SD = 6$, $OD = 3\sqrt{2}$, тогда по теореме Пифагора $SO = h = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{36 - 18} = 3\sqrt{2}$.

Сечение пирамиды – четырёхугольник $CNMK$ (см. рис. 10). Его вершины имеют координаты $C(-3,3,0)$, $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $K(3,0,0)$, $N\left(-1, -1, 2\sqrt{2}\right)$.

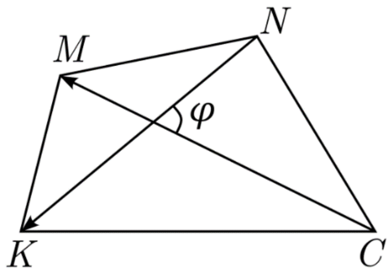

Рис. 10

Площадь $CNMK$ найдём по формуле

$$S_{CNMK} = \frac{1}{2} CM \cdot NK \cdot \sin\varphi,$$

где φ – угол между диагоналями CM и NK. Используя векторы, эту формулу можно записать в виде

$$S_{CNMK} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{NK}\right| \cdot \sin\angle\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{NK}\right).$$

Находим координаты векторов $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{NK} = \left(4, 1, -2\sqrt{2}\right)$. Тогда

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{180}}{2} = 3\sqrt{5}, \qquad \left|\overrightarrow{NK}\right| = \sqrt{16 + 1 + 8} = 5.$$

Находим угол между векторами $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{NK}$, используя скалярное произведение:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{NK}\right) = \frac{\frac{9}{2} \cdot 4 - \frac{9}{2} \cdot 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $\sin\angle\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{NK}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{19}{20}}$.

Таким образом, площадь четырёхугольника $CNMK$ равна:

$$S_{CNMK} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{NK}\right| \cdot \sin\angle\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{NK}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{19}{20}} = \frac{15\sqrt{19}}{4}.$$

Пример 6

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 7, BC = 8$.

Решение

а) Пусть $CA = a,\ CB = b,\ CC_1 = h$.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 11), что точка C – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч CA, для оси ординат – луч CB, для оси аппликат – луч CC_1.

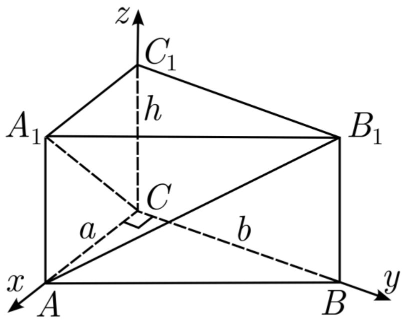

Рис. 11

Получаем следующие координаты точек:

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $A_1(a, 0, h)$, $B_1(0, b, h)$.

По условию $AB_1 \perp CA_1$, поэтому $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{CA_1}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, т. е. $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0$. Найдём координаты векторов и выразим через них скалярное произведение:

$\overrightarrow{AB_1} = (-a, b, h)$, $\overrightarrow{CA_1} = (a, 0, h) \implies \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = -a^2 + h^2 = 0$.

Учитывая, что $a > 0, h > 0$, получаем, что $a = h$, т. е. $AA_1 = AC$.

б) По условию $AC = a = 7$, $BC = b = 8$, поэтому $\overrightarrow{AB_1} = (-7, 8, 7)$, $\overrightarrow{CA_1} = (7, 0, 7)$.

Найдём уравнение плоскости α, проходящей через прямую CA_1, параллельно прямой AB_1. Пусть $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – нормальный вектор плоскости α. Тогда $\vec{n} \perp \overrightarrow{CA_1}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1}$. Следовательно,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} 7n_1 + 7n_3 = 0, \\ -7n_1 + 8n_2 + 7n_3 = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} n_1 = -n_3, \\ 4n_2 = -7n_3. \end{cases}$$

Чтобы найти какой-либо вектор $\vec{n}$, выберем ненулевое значение одной координаты, например, $n_3 = -4$. Тогда получим вектор нормали $\vec{n} = (4,\ 7, -4)$.

Уравнение плоскости α получим по нормальному вектору $\vec{n} = (4,\ 7, -4)$ и точке $C(0, 0, 0)$:

$$4x + 7y - 4z = 0.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и CA_1 равно расстоянию от любой точки прямой AB_1 до параллельной ей плоскости α (содержащей прямую CA_1). Возьмем, например, точку $A(7,0,0)$, тогда искомое расстояние равно

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|4 \cdot 7 + 0 - 0|}{\sqrt{16 + 49 + 16}} = \frac{28}{9}.$$

Пример 7

На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что AB – диаметр основания. Угол между образующей и плоскостью основания равен 60°.

а) Докажите, что $\cos\angle ASC + \cos\angle CSB = 1{,}5$.

б) Найдите объём тетраэдра $SABC$, если $SC = 1$ и $\cos\angle ASC = \dfrac{2}{3}$.

Решение

а) Пусть $OA = r$, $AB = 2r$, $SO = h$. В прямоугольном ΔSOA получаем $\operatorname{tg}\angle SAO = \dfrac{h}{r} = \sqrt{3}$, следовательно, $h = r\sqrt{3}$.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 12), что точка O – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч OA, для оси ординат – луч OD ($OD \perp AB$), для оси аппликат – луч OS.

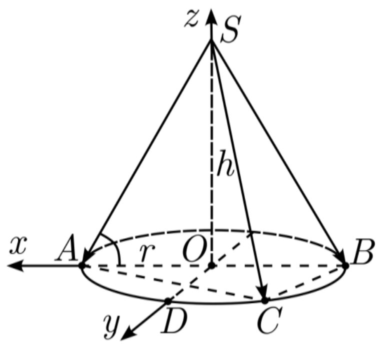

Рис. 12

Получаем следующие координаты точек: $A(r, 0, 0)$, $B(-r, 0, 0)$, $S\left(0,0, r\sqrt{3}\right)$.

Точка $C(x, y, 0)$ лежит на окружности основания, поэтому $x^2 + y^2 = r^2$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$:

$$\overrightarrow{SA} = \left(r, 0, -r\sqrt{3}\right),\quad \overrightarrow{SB} = \left(-r, 0, -r\sqrt{3}\right),\quad \overrightarrow{SC} = \left(x, y, -r\sqrt{3}\right).$$

Их длины равны как образующие конуса:

$$\left|\overrightarrow{SA}\right| = \left|\overrightarrow{SB}\right| = \left|\overrightarrow{SC}\right| = \sqrt{r^2 + 3r^2} = 2r.$$

С помощью скалярного произведения находим косинусы углов между векторами:

$$\cos\angle ASC = \frac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|} = \frac{rx+3r^2}{2r\cdot 2r} = \frac{x+3r}{4r},$$

$$\cos\angle CSB = \frac{\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|} = \frac{-rx+3r^2}{2r\cdot 2r} = \frac{-x+3r}{4r}.$$

Находим сумму косинусов:

$$\cos\angle ASC + \cos\angle CSB = \frac{x+3r}{4r} + \frac{-x+3r}{4r} = \frac{3}{2}.$$

б) По условию $SC = 1$, следовательно, $\left|\overrightarrow{SC}\right| = 2r = 1$. Тогда $r = \frac{1}{2}$.

Так как $\cos\angle ASC = \frac{2}{3}$, то из равенства

$$\cos\angle ASC = \frac{x + 3\cdot\frac{1}{2}}{4\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

получаем $x = -\frac{1}{6}$.

Учитывая равенство $x^2+y^2=r^2$ для координат точки $C(x,y,0)$, получим, что $\frac{1}{36}+y^2=\frac{1}{4}$, т. е. $y^2=\frac{2}{9}$. Условию задачи удовлетворяют две симметричные относительно оси абсцисс точки $\left(-\frac{1}{6},\frac{\sqrt{2}}{3},0\right)$ и $\left(-\frac{1}{6},-\frac{\sqrt{2}}{3},0\right)$. Пусть $C\left(-\frac{1}{6},\frac{\sqrt{2}}{3},0\right)$, тогда высота ΔABC, проведенная к стороне AB, равна $\rho(C,AB)=\frac{\sqrt{2}}{3}$. Получаем, что площадь ΔABC равна

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot\rho(C,AB) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Следовательно, объём тетраэдра $SABC$ равен

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6\sqrt{6}}.$$

Пример 8

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15, B_1C_1 = 8$.

Решение

а) Пусть OO_1 – ось цилиндра, $BB_1 = h$ – образующая цилиндра, $OB = r$ – радиус основания.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 13), что точка O – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч OB, для оси ординат – луч OD ($OD \perp OB$), для оси аппликат – луч OO_1.

Получаем следующие координаты точек: $B(r, 0, 0)$, $B_1(r, 0, h)$. Точка $A(a_1, a_2, 0)$ лежит на окружности основания, поэтому $a_1^2 + a_2^2 = r^2$. Проведём образующую CC_1. Так как $AC_1 \cap OO_1 = P$, точка A принадлежит плоскости осевого сечения (CC_1O_1O) и симметрична точке C относительно точки O, следовательно, она имеет координаты $C(-a_1, -a_2, 0)$, поэтому $C_1(-a_1, -a_2, h)$.

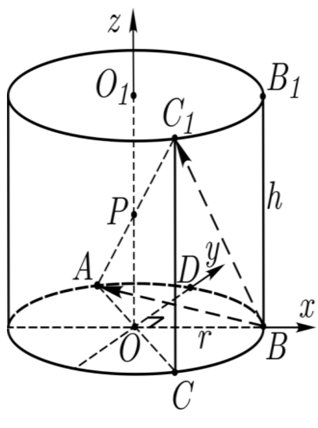

Рис. 13

Найдём угол ABC_1 как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC_1}$. Они имеют следующие координаты:

$$\overrightarrow{BA} = (a_1 - r, a_2, 0), \qquad \overrightarrow{BC_1} = (-a_1 - r, -a_2, h).$$

Тогда их скалярное произведение равно:

$$\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{BA} = -(a_1 + r)(a_1 - r) - a_2^2 + 0 = r^2 - a_1^2 - a_2^2 = 0.$$

Следовательно, $\angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1}\right) = \angle ABC_1 = 90°$.

б) По условию $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$, поэтому $h = 15$. Найдём длины векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$. Они имеют следующие координаты:

$$\overrightarrow{BA} = (a_1 - r, a_2, 0), \qquad \overrightarrow{B_1C_1} = (-a_1 - r, -a_2, 0).$$

Выражая их длины через координаты, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_1 - r)^2 + a_2^2 = 36, \\ (a_1 + r)^2 + a_2^2 = 64. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое и подставляя $a_2^2 = r^2 - a_1^2$ во второе уравнение, получаем преобразованную систему:

$$\begin{cases} 4a_1 r = 28, \\ 2a_1 r + 2r^2 = 64. \end{cases}$$

Тогда получаем $r = 5$, $a_1 = \dfrac{7}{5}$, следовательно, $a_2 = \dfrac{24}{5}$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$:

$$\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 15), \qquad \overrightarrow{AC_1} = \left(-\frac{14}{5}, -\frac{48}{5}, 15\right).$$

Для угла φ между прямыми BB_1 и AC_1 выполняется равенство

$$\cos\varphi = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC_1}\right)\right| = \frac{|0 + 0 + 225|}{15 \cdot \sqrt{\dfrac{196}{25} + \dfrac{2304}{25} + 225}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Таким образом, угол между прямыми BB_1 и AC_1 равен $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Замечание. Ответ задачи при решении другим способом может получиться в другой форме, например, в виде $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$. Несложно проверить, что выполняется равенство $1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{13}}{3}\right)^2$ в соответствии с известной тригонометрический формулой $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Пример 9

Дана прямая призма, в основании которой равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 5$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 4$, точка K – середина DD_1.

а) Докажите, что плоскость MCK параллельна стороне BD.

б) Найти тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания, если $\angle BAD = 60°$, а $\angle CKM = 90°$.

Решение

а) Проведём $BH \perp AD$. Пусть $BH = h$, $BB_1 = d$.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 14), что точка B – начало координат, положительные направления соответственно для оси

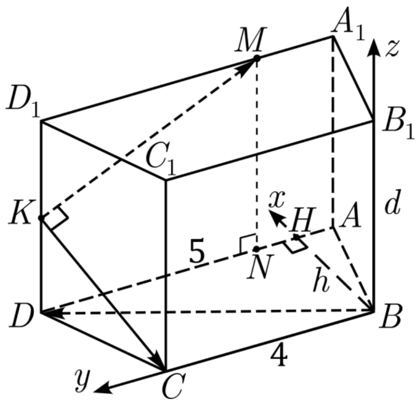

Рис. 14

абсцисс – луч BH, для оси ординат – луч BC, для оси аппликат – луч BB_1.

По условию $A_1M : MD_1 = 1 : 4$. Проведём $MN \parallel AA_1$. Тогда $A_1M = AN = 1$. Так как BH – высота в равнобедренной трапеции, то $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Получаем следующие координаты точек:
$A\left(h, -\dfrac{1}{2}, 0\right), B(0,0,0), C(0,4,0), D\left(h, \dfrac{9}{2}, 0\right), K\left(h, \dfrac{9}{2}, \dfrac{d}{2}\right), M\left(h, \dfrac{1}{2}, d\right)$.

Для доказательства п. а) покажем, что вектор нормали $\vec{n}$ плоскости (MCK) и вектор $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярны, т. е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Плоскость (MCK) не проходит через начало координат, поэтому её уравнение будем искать в виде

$$ax + by + cz + 1 = 0.$$

Найдём уравнение плоскости (MCK) по трём точкам. Подставляя координаты точек C, M, K в уравнение плоскости, получим систему:

$$\begin{cases} 4b + 1 = 0, \\ ah + \dfrac{b}{2} + cd + 1 = 0, \\ ah + \dfrac{9b}{2} + \dfrac{cd}{2} + 1 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $b = -\dfrac{1}{4}$. Вычитая из второго уравнения третье и подставляя b, получим $cd = -2$, тогда $c = -\dfrac{2}{d}$. Из второго уравнения находим $ah = \dfrac{9}{8}$, тогда $a = \dfrac{9}{8h}$.

Следовательно, вектор нормали плоскости (MCK) имеет координаты:

$$\vec{n} = \left(\frac{9}{8h}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{d}\right).$$

Вектор $\overrightarrow{BD}$ имеет координаты: $\overrightarrow{BD} = \left(h, \frac{9}{2}, 0\right)$. Тогда скалярное произведение равно:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{9}{8h} \cdot h - \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} + 0 = 0.$$

Таким образом, $\vec{n} \perp \overrightarrow{BD}$, а значит, $(CMK) \parallel BD$.

б) По условию $\angle CKM = 90°$. Следовательно, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KM}$ равно нулю. Найдём координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{KC} = \left(-h, -\frac{1}{2}, -\frac{d}{2}\right), \qquad \overrightarrow{KM} = \left(0, -4, \frac{d}{2}\right).$$

Получаем

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KM} = 0 + 2 - \frac{d^2}{4} = 0,$$

следовательно, $d = 2\sqrt{2}$.

По условию $\angle BAD = 60°$, тогда $\angle ABC = 120°$. Поэтому получаем следующие координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA} = \left(h, -\frac{1}{2}, 0\right), \qquad \overrightarrow{BC} = (0, 4, 0).$$

Вычисляя их скалярное произведение по определению и в координатной форме, получим

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 4 \cdot \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}},$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 - 2 + 0 = -2.$$

Приравняв полученные выражения, находим $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда вектор нормали плоскости (CMK) имеет координаты:

$$\vec{n}=\left(\frac{9}{8h},-\frac{1}{4},-\frac{2}{d}\right)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Угол φ между плоскостью (CMK) и плоскостью основания удовлетворяет равенству:

$$\cos\varphi=\left|\cos\angle\left(\vec{n},\vec{k}\right)\right|,\ \ \vec{k}=(0,0,1)\perp(ABC).$$

Подставляя координаты векторов, получим

$$\cos\varphi=\left|\cos\angle\left(\vec{k},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|0+0-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}{1\cdot\sqrt{\frac{27}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Из формулы $1+\operatorname{tg}^2\varphi=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$ находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}=\sqrt{\frac{9}{2}-1}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Пример 10

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. На рёбрах SA, SB, SC и SD отмечены точки L, K, N и M соответственно так, что четырёхугольник $KLMN$ – трапеция с основаниями $KL=4$ и $MN=3$. Известно, что $SK:KB=2:1$.

а) Докажите, что плоскость KLM пересекает рёбра SC и SD в их серединах.

б) Найдите высоту SH пирамиды, если точка пересечения диагоналей основания совпадает с точкой H, площадь основания равна 48, а площадь сечения $KLMN$ равна 24,5.

Решение

а) Покажем, что $\overrightarrow{CD}\parallel\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$. Рассмотрим ненулевые векторы (см. рис. 15):

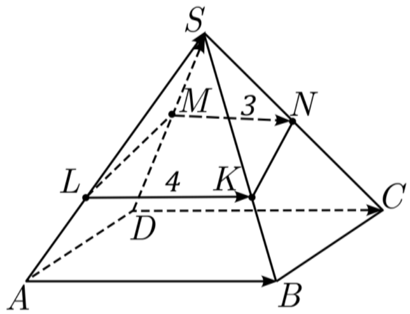

Рис. 15

1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS}$ и $\overrightarrow{LK}$ – компланарные (лежат в (ASB)) и $\overrightarrow{AS} \nparallel \overrightarrow{LK}$;

2) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DS}$ и $\overrightarrow{MN}$ – компланарные (лежат в (DSC)) и $\overrightarrow{DS} \nparallel \overrightarrow{MN}$;

3) по условию $KLMN$ – трапеция, следовательно, $\overrightarrow{LK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$ и $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{3}{4}\left|\overrightarrow{LK}\right|$, получаем, что $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{LK}$;

4) из (1) и (2) получим разложения векторов

$$\overrightarrow{AB} = k_1\overrightarrow{AS} + m_1\overrightarrow{LK}, \qquad \overrightarrow{DC} = k_2\overrightarrow{DS} + m_2\overrightarrow{MN};$$

5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, следовательно,

$$\underbrace{k_1\overrightarrow{AS} - k_2\overrightarrow{DS}}_{\in(ASD)} = m_2\overrightarrow{MN} - m_1\overrightarrow{LK} = \left(\frac{3}{4}m_2 - m_1\right)\underset{\notin(ASD)}{\overrightarrow{LK}}.$$

Равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$k_1 = k_2 = 0, \qquad \frac{3}{4}m_2 - m_1 = 0;$$

6) из (4) получим, что $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{LK} \parallel \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AB} = m_1\overrightarrow{LK}$;

7) по условию $SK : KB = 2 : 1$, тогда $\overrightarrow{SK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{AS} = m\overrightarrow{LS}$;

8) из (6) и (7) получим

$$\overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LS} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}\right) = \frac{2}{3}\left(m_1\overrightarrow{LK} - m\overrightarrow{LS}\right),$$

т. е. $\left(1 - \frac{2}{3}m_1\right)\overrightarrow{LK} = \left(1 - \frac{2}{3}m\right)\overrightarrow{LS}$, но $\overrightarrow{LK} \nparallel \overrightarrow{LS}$, тогда равенство выполняется только при $m = m_1 = \frac{3}{2}$;

9) из (6) получим $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{LK}$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$;

10) из (6) имеем $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{MN}$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = m_2\left|\overrightarrow{MN}\right|$, $m_2 = 2$, следовательно, $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC}\right|$ и $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{MN}$, т. е. MN – средняя линия в ΔDSC. Следовательно, M, N – середины рёбер SD и SC.

б) Пусть P – середина BC, Q – середина DC. По условию $S_{ABCD} = 48$, из п. а) $AB = 6$, тогда $AD = BC = 8$.

Введём прямоугольную систему координат так (см. рис. 16), что точка H – начало координат, положительные направления соответственно для оси абсцисс – луч HP, для оси ординат – луч HQ, для оси аппликат – луч HS. Получим следующие координаты точек:

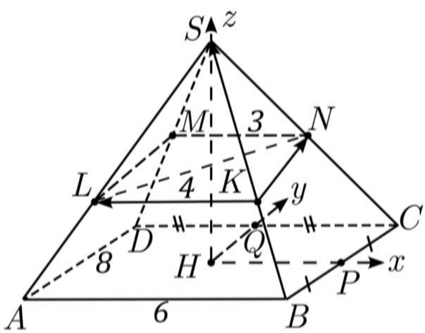

Рис. 16

$$A(-3,-4,0),\qquad B(3,-4,0),\qquad C(3,4,0),\qquad D(-3,4,0).$$

Пусть $S(0,0,z)$, тогда

$$\overrightarrow{BS} = (-3,4,z) \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS} = \left(-1,\frac{4}{3},\frac{z}{3}\right).$$

Находим координаты точки $K\left(2,-\frac{8}{3},\frac{z}{3}\right)$ и точки $N\left(\frac{3}{2},2,\frac{z}{2}\right)$. Следовательно,

$$\overrightarrow{KN} = \left(-\frac{1}{2},\frac{14}{3},\frac{z}{6}\right),\qquad \overrightarrow{KL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = (-4,0,0).$$

Диагональ LN в трапеции $LKNM$ делит её на два треугольника – ΔLMN и ΔLKN, площади которых относятся как

$$\frac{S_{LMN}}{S_{LKN}} = \frac{MN}{LK} = \frac{3}{4}.$$

Тогда $S_{LKNM} = S_{LMN} + S_{LKN} = \frac{7}{4} S_{LKN} = 24{,}5$. Следовательно, площадь треугольника LKN равна

$$S_{LKN} = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{KN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KL}\right| \cdot \sin \angle K = 14.$$

Используя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KN}$ и $\overrightarrow{KL}$, находим косинус $\angle K$:

$$\cos \angle K = \frac{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN}}{\left|\overrightarrow{KL}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KN}\right|} = \frac{2}{4 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{196}{9} + \frac{z^2}{36}}} = \frac{3}{\sqrt{793 + z^2}}.$$

Тогда $\sin \angle K = \sqrt{1 - \frac{9}{793+z^2}} = \sqrt{\frac{784+z^2}{793+z^2}}$. Подставляя это выражение в формулу площади треугольника LKN, получаем

$$S_{LKN} = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{KN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KL}\right| \cdot \sin \angle K = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{793 + z^2}}{6} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{784 + z^2}{793 + z^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{784 + z^2}}{3} = 14.$$

Учитывая расположение вершины S, из последнего равенства получаем: $z = 14\sqrt{5}$, т. е. $SH = 14\sqrt{5}$.

ЗАДАЧИ

1. Куб и прямоугольный параллелепипед

1.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

1.2. На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

1.3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M – центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM – правильная пирамида.

б) Найдите объём B_1KLM.

1.4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку C отмечена точка N так, что $B_1C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и MN.

1.5. Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

1.6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

1.7. Точка O – точка пересечения диагоналей грани CDD_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость DA_1C_1 пересекает диагональ BD_1 в точке F.

а) Докажите, что $BF : FD_1 = A_1F : FO$.

б) Точки M и N – середины рёбер AB и AA_1 соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью DA_1C_1.

1.8. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1, и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

1.9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 2$, $AA_1 = 2$. Точка M – середина B_1C_1, точка L делит ребро A_1B_1 в отношении $1 : 3$, считая от вершины B_1. Плоскость LMC пересекает ребро AB в точке K.

а) Докажите, что K – середина AB.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью KLM.

1.10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке K.

а) Докажите, что $B_1K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ.

1.11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны оснований AB и BC равны соответственно 8 и 5, а боковое ребро AA_1 равно 4. На ребре A_1B_1 отмечена точка K, а на луче BC – точка F, причём $A_1K = KB_1$ и $BF = AB$. Плоскость AKF пересекает ребро B_1C_1 в точке P.

а) Докажите, что $B_1P : PC_1 = 4 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью AKF.

1.12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно прямой AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K.

а) Докажите, что K – середина CC_1.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

1.13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$.

а) Пусть B_1E – высота треугольника BB_1C_1. Докажите, что AE – проекция AB_1 на плоскость ABC_1.

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

1.14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

1.15. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = 5$, $BC = 3$ и $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро A_1B_1.

2. Призмы, пирамиды и тела вращения

2.1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

2.2. Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите объём призмы, если $A_1C = BD = 2$.

2.3. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре AA_1 отмечена точка K так, что $AK : KA_1 = 1 : 2$. Плоскость α проходит через точки B и K параллельно прямой AC. Эта плоскость пересекает ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что $MD : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения, если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

2.4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MCK делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle ADC = 60°$, а $\angle MKC = 90°$.

2.5. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно, причём $B_1K : KC_1 = 1 : 2$, а $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что N – середина BC.

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12, а её высота равна 2.

2.6. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

2.7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро $AA_1 = 3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L, соответственно, причём $AK = B_1L = 3$. Точка M – середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна ребру AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

2.8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ.

2.9. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Диагонали боковых граней ABB_1A_1 и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды AA_1C_1B.

2.10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

2.11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка M – середина ребра A_1C_1, а точка O – точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB, лежит на отрезке OC_1.

б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB.

2.12. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AB = 1$ и $AA_1 = 3$. Точки O и O_1 являются центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ сответственно. На ребре CC_1 отмечена точка M такая, что $CM = 2$.

а) Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM.

б) Найдите объём пирамиды $ABMC_1$.

2.13. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q – точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K – середины BC, CC_1 и A_1C_1 сответственно.

а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения QMN.

2.14. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что A_1 – середина AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 – середина B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB = 4, AA_1 = 1$.

2.15. Точка M – середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC. Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M.

а) Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из рёбер этой грани.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 5$, считая от вершины A, если $AC = 20, AA_1 = 32$.

2.16. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AB. На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1. Точка M делит пополам ребро BC. Через точку M проведена плоскость α, перпендикулярная PQ.

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ, если $AA_1 = 5, AB = 12$ и $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$.

2.17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M является серединой ребра BB_1, а точка N – середина ребра A_1C_1. Плоскость α, параллельная прямым AM и B_1N, проходит через середину отрезка B_1M.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка B_1C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если все рёбра этой призмы равны 4.

2.18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отмечены середины M и N рёбер A_1C_1 и BC соответственно.

а) Докажите, что плоскость AB_1M делит отрезок A_1N в отношении 2 : 3, считая от вершины A_1.

б) Найдите объём пирамиды $AMNB_1$, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 4.

2.19. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4, а боковое ребро равно 3. На ребре BB_1 взята точка F, а на ребре CC_1 – точка G так, что $B_1F = 1$, $CG = \frac{2}{3}$. Точки E и D – середины рёбер AC и B_1C_1 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение суммы $EP + PQ$, где точка P принадлежит отрезку A_1D, а точка Q – отрезку FG.

2.20. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

2.21. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объём пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

2.22. В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

2.23. Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = AB = AC = \sqrt{17}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC.

б) Найдите расстояние между рёбрами BC и SA.

2.24. Дана пирамида $SABC$, в которой $SC = SB = \sqrt{17}$, $AB = AC = \sqrt{29}$, $SA = BC = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что ребро SA перпендикулярно ребру BC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC.

2.25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 3$, а боковое ребро $SA = 2$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 2$, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.

2.26. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P делит сторону AB в отношении $2 : 3$, считая от вершины A;

точка K делит сторону BC в отношении $2:3$, считая от вершины C. Через точки P и K параллельно SB проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольником.

б) Найдите расстояние от точки S до плоскости α, если известно, что $SC = 5$, $AC = 6$.

2.27. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K делит сторону SC в отношении $1:2$, считая от вершины S, точка N делит сторону SB в отношении $1:2$, считая от вершины S. Через точки N и K параллельно SA проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α параллельно прямой BC.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если известно, что $SA = 9$, $AB = 6$.

2.28. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

2.29. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, в которой $AB = 9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 7:3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости ABC.

а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

2.30. Дана правильная треугольная пирамида SABC, сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$, точка K – середина AS. Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь $PQBC$ относится к площади BSC как $3 : 4$.

б) Найдите объём пирамиды $KBQPC$.

2.31. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, $AB = 24$, высота SH, проведённая к основанию, равна 14, точка K – середина AS, точка N – середина BC. Плоскость, проходящая через точку K и параллельная основанию пирамиды, пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что PQ проходит через середину отрезка SN.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью APQ.

2.32. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB.

а) Докажите, что $SA = SC$.

б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC, если $AC = 16, AB = 20, SA = 26$.

2.33. Грани ABD и ACD тетраэдра ABCD являются правильными треугольниками со стороной 10 и перпендикулярны друг другу. На рёбрах AB, AD и CD отмечены точки K, L и M соответственно, причём $BK = 2$, $AL = 4$, $MD = 3$.

а) Докажите, что плоскость KLM перпендикулярна ребру CD.

б) Найдите длину отрезка пересечения грани ABC и плоскости KLM.

2.34. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 1 : 2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB.

2.35. В тетраэдре ABCD ребро AD = 4, а все остальные рёбра равны 7.

а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC.

2.36. Основание пирамиды $ABCS$ – равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания, равно 2. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

2.37. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $ABCD$ и её высота DH равны $\sqrt{3}$. Точки M и N – середины рёбер BC и AB соответственно. Найдите угол и расстояние между прямыми AM и DN.

2.38. Основание ABC пирамиды $SABC$ – равносторонний треугольник. Высота пирамиды проходит через точку A и равна стороне основания. Найдите:

а) угол между медианами SL и CK граней ASB и ASC соответственно;

б) расстояние между прямыми SL и CK, если $SA = AB = a$.

2.39. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка А лежит на одной из них, точка В – на другой, причём расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми. Найдите угол между общим перпендикуляром данных прямых и прямой АВ.

2.40. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

2.41. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{3}$. Точки M и N – середины рёбер CD и AB соответственно, а NT – высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между NT и SC.

2.42. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

2.43. На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q, причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P – середина ребра AS.

а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна 6.

2.44. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро $SA = 8$. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $1 : 3$, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KN.

2.45. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

2.46. Точка E лежит на высоте SO, а точка F – на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF, если $AB = 8, SO = 14$.

2.47. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ проведена высота SH. K – середина ребра SD, N – середина ребра CD. Плоскость ABK пересекает ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая PK делит отрезок NS пополам.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS, если $SH = 15, CD = 16$.

2.48. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 14$, высота $SH = 24$. Точка K – середина бокового ребра SD, а точка N – середина ребра CD. Плоскость ABK пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS.

2.49. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точка M – середина SA, на ребре SB отмечена точка N так, что $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью CMN, если все рёбра равны 12.

2.50. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $SA = SC = 10\sqrt{2}$, $SB = 20$ и $AC = 10$.

а) Докажите, что ребро SD перпендикулярно плоскости основания пирамиды $SABCD$.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и SB.

2.51. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Плоскость α пересекает рёбра SA, SB, SC и SD в точках L, K, N и M соответственно, причём $SK : KB = 2 : 1$, а точки L и M – середины рёбер SA и SD.

а) Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ является трапецией, длины оснований которой относятся как $3 : 4$.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостями ABC и α равен $45°$, площадь сечения пирамиды плоскостью α равна $14\sqrt{3}$, а площадь основания пирамиды равна 54.

2.52. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{14}$, $SB = 9$ и $SD = 10\sqrt{2}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды $SABCD$.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

2.53. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания $ABCD$. Точка N делит ребро SD в отношении $SN : ND = 1 : 2$. Плоскость α, проходящая через точки O и N и параллельная ребру SA, пересекает ребро SC в точке M. Известно, что $SA = AB = 6$.

а) Докажите, что точка M – середина SC.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость α пересечет грань BSC.

2.54. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = 7$, а боковое ребро $SA = 10$. Точка M лежит на ребре BC, причём $BM = 4$; точка K лежит на ребре SC, причём $SK = 7$.

а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

2.55. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро $SA = 14$, а сторона $AB = 8$. Точка M – середина стороны AB. Плоскость α проходит через точки M и D и перпендикулярна плоскости ABC. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что $MK = KD$.

б) Найдите объём пирамиды $MCDK$.

2.56. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30°$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45°.

б) Найдите объём цилиндра.

2.57. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки A и B. На окружности верхнего основания отмечены точки B_1 и C_1 так, что BB_1 является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям, а AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые AB и B_1C_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AC_1 и B_1C_1, если $AB = 12$, $B_1C_1 = 9$, $BB_1 = 8$.

2.58. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

а) Точка N – середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

2.59. В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B – концы образующих, M – середина SA, N – точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB.

а) Докажите что ANO – прямой угол.

б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно, что $AB = 10$.

2.60. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как $1 : 5$.

а) Докажите, что сечение конуса плоскостью ABP – равнобедренный остроугольный треугольник.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

2.61. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

ОТВЕТЫ

1.

1.1. б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{3} = \arccos\frac{3}{\sqrt{26}}$. **1.2.** б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$. **1.3.** б) 11. **1.4.** б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **1.5.** б) $\sqrt{11}$. **1.6.** б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **1.7.** б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1.8.** б) $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$. **1.9.** б) $\frac{9}{2}$. **1.10.** б) $\frac{11\sqrt{3}}{2}$. **1.12.** б) $\frac{24}{\sqrt{41}}$. **1.13.** б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **1.14.** а) $3 : 11$; б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{19}} =$ $= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{3}$. **1.15.** б) $9 : 16$.

2.

2.1. б) 55. **2.2.** б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. **2.3.** б) $8\sqrt{6}$. **2.4.** б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$. **2.5.** б) $\frac{5\sqrt{37}}{6}$. **2.6.** б) $\operatorname{arctg} 2 = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2.7.** б) $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **2.8.** б) $\frac{3\sqrt{30}}{5}$. **2.9.** б) $20\sqrt{14}$. **2.10.** б) $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **2.11.** б) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{8} = \arccos\frac{8}{\sqrt{91}}$. **2.12.** б) $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **2.13.** б) $18\sqrt{2}$. **2.14.** б) $\frac{8\sqrt{3}}{7}$. **2.15.** б) 10. **2.16.** б) $\frac{16}{25}$. **2.17.** б) $\frac{7\sqrt{6}}{2}$. **2.18.** б) $9\sqrt{3}$. **2.19.** $\sqrt{\frac{51}{2}}$. **2.20.** б) 44. **2.21.** б) $\frac{10\sqrt{51}}{3}$. **2.22.** б) 96. **2.23.** б) $\sqrt{7}$. **2.24.** б) $\operatorname{arctg}\sqrt{14} =$ $= \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. **2.25.** б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **2.26.** б) $\frac{9\sqrt{39}}{25}$. **2.27.** б) $\frac{2\sqrt{23}}{3}$. **2.28.** б) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{41}}{37} = \arccos\frac{37}{45}$. **2.29.** б) $\frac{6\sqrt{73}}{10}$. **2.30.** б) $80\sqrt{3}$. **2.31.** б) $\operatorname{arctg}\frac{7\sqrt{3}}{30} = \arccos\frac{30}{\sqrt{1047}}$. **2.32.** б) $\operatorname{arctg} 4 = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$. **2.33.** б) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **2.34.** б) $\frac{6}{\sqrt{19}}$. **2.35.** б) $\frac{\sqrt{131}}{2}$. **2.36.** $45°$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.37. $\arccos\frac{\sqrt{13}}{26}$, $\sqrt{\frac{3}{17}}$. **2.38.** а) $\arccos\frac{3}{5}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **2.39.** $45°$ или $60°$. **2.40.** б) $\frac{12}{\sqrt{5}}$. **2.41.** б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2.42.** б) $\frac{7}{2}$. **2.43.** б) $\sqrt{5}$. **2.44.** б) $\frac{\sqrt{210}}{15}$. **2.45.** б) $\frac{12\sqrt{41}}{7}$. **2.46.** б) $\frac{88\sqrt{2}}{3}$. **2.47.** б) $\frac{120}{17}$. **2.48.** б) $\frac{168}{25}$. **2.49.** б) $15\sqrt{19}$. **2.50.** б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **2.51.** б) 24. **2.52.** б) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{5966}}{119} = \arccos\frac{119}{195}$. **2.53.** б) $\sqrt{7}$. **2.54.** б) $\frac{63\sqrt{17}}{40}$. **2.55.** б) $36\sqrt{11}$. **2.56.** б) 4π. **2.57.** б) 7,2. **2.58.** б) $\arccos\frac{5}{16} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{231}}{5}$. **2.59.** б) $45°$. **2.60.** б) $18\sqrt{2}$. **2.61.** б) $144 + 72\sqrt{3}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бардушкин, В. В. О различных подходах к вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев // Математика в школе. – 2015. – № 5. – С. 18–32.
2. Болодурин, В. С. Координатно-векторный метод решения геометрических задач : метод. пособие для учителей математики, студ. физ.-мат. ф-тов пед. вузов и колледжей, уч-ся старших кл. ср. шк. / В. С. Болодурин; М-во образования и науки РФ, ОГПУ, Ин-т повышения квалиф. и проф. переподгот. работников образования. – Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2015. – 52 с. – ISBN 978-5-85859-600-4.
3. Васильева, Т. В. Вычисление расстояний и углов в стереометрических задачах (по материалам ЕГЭ) / Т. В. Васильева, Т. Л. Панфилова; Департамент образования Вологодской области, Вологодский институт развития образования. – Вологда : ВИРО, 2020. – 92 с. – ISBN 978-5-87590-516-2.
4. Вергазова, О. Б. Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) / О. Б. Вергазова // Концепт: научно-методический электронный журнал. – 2017. – № 1. – С. 153–162. – URL: https://e-koncept.ru/2017/170022.htm (дата обращения: 01.02.2025).
5. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2022 года. Математика / И. Р. Высоцкий, О. Н. Косухин, А. В. Семенов, А. С. Трепалин, М. А. Черняева. – Москва, 2022. – URL: https://doc.fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf/2022/matematika_mr_ege_2022.pdf (дата обращения: 01.02.2025).

6. Гаджимурадов, М. А. О различных методах вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми / М. А. Гаджимурадов, З. Д. Гаджиева, Ш. С. Гаджиагаев // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Серия: Естественные и точные науки. – 2022. – Т. 16, № 3. – С. 5 –9.
7. Гельфанд, И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. – Москва : МЦНМО, 2009. – 184 с. – ISBN 978-5-94057-533-7.
8. Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» : сайт. – URL: https://zadachi.mccme.ru/ (дата обращения: 01.02.2025).
9. Калабухов, С. Ю. Математика. ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат : учебно-методическое пособие / С. Ю. Калабухов, Е. Г. Коннова, Е. М. Фридман. – Ростов-на-Дону : Легион, 2018. – 64 с. – ISBN 978-5-9966-1192-8.
10. Каталог заданий для подготовки к экзаменам – Школково // Школково – Подготовка к ЕГЭ : сайт. – URL: https://3.shkolkovo.online/catalog (дата обращения: 01.02.2025).
11. Косярский, А. А. Визуализация при решении стереометрических задач ЕГЭ по математике через использование координатно-векторного метода / А. А. Косярский, О. В. Мороз // Школьные технологии. – 2020. – № 3. – С. 89–97.
12. Потоскуев, Е. В. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. ФГОС / Е. В. Потоскуев. – Москва : Экзамен, 2019. – 233 с. – ISBN 978-5-377-13239-4.
13. Прокофьев, А. А. О решении стереометрических задач координатно-векторным методом / А. А. Прокофьев,В. В. Бардушкин // Математика. Первое сентября. – 2013. – № 1. – С. 26–33.
14. Прокофьев, А. А. Стереометрия. Решение задач повышенного уровня в вариантах ЕГЭ и не только / А. А. Прокофьев. – Москва : Интеллект-центр, 2023. – 224 с. – ISBN 978-5-907651-22-7.

15. Прояева, И. В. Методические аспекты решения стереометрических задач : учебное пособие / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова, А. Н. Колобов; М-во просвещения РФ, ОГПУ. – Оренбург : Экспресс-печать, 2024. – 64 с.
16. Темербекова, А. А. Использование векторно-координатного метода при решении геометрических задач в школе и в вузе / А. А. Темербекова // Информация и образование: границы коммуникаций INFO'16 : сб. науч. тр. – Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2016. – С. 201–205.
17. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2024 года. Математика / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. В. Семенов, А. С. Трепалин, М. А. Черняева. – Москва, 2024. – URL: https://doc.fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf/2024/matematika mr_ege_ 2024.pdf (дата обращения: 01.024.2025).
18. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2023 года. Математика / И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. В. Семенов, А. С. Трепалин, М. А. Черняева. – Москва, 2023. – URL: https://doc.fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf/2023/matematika_mr_ege_2023.pdf (дата обращения: 01.02.2025).

Учебное издание

Нигматулин Равиль Михайлович

КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Практикум

ISBN 978-5-907869-85-1

Рукопись рекомендована РИС ЮУрГГПУ
Протокол № 33, 2025 г.

Издательство ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Редактор О. В. Боярская
Технический редактор Т. Н. Никитенко

Подписано в печать 17.10.2025. Тираж 100 экз.
Формат 60×84/16. Объём 1,5 уч.-изд.л. (3,66 усл. п. л.)
Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69