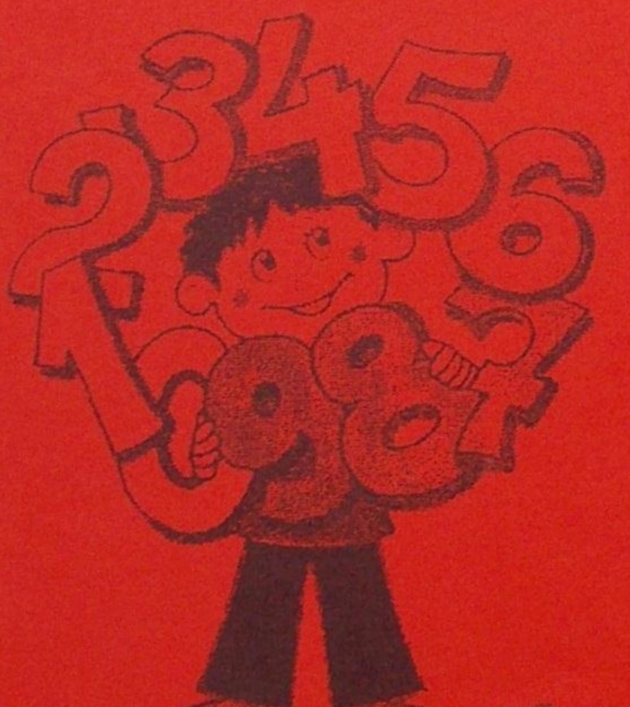
Теория и методика обучения математике: общая методика

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Челябинский государственный педагогический университет»

Теория и методика обучения математике: общая методика

Учебное пособие

Челябинск 2010

УДК 51(07)(021)
ББК 74.262.21я73

Т 33 **Теория и методика обучения математике: общая методика** : учеб. пособие / Е. А. Суховиенко, З. П. Самигуллина, С. А. Севостьянова, Е. Н. Эрентраут. − Челябинск: Изд-во «Образование», 2010. − 65 с.

УДК 51(07)(021)
ББК 74.262.21я73

В пособии, предназначенном для самостоятельной работы студентов, представлено содержание общих вопросов курса теории и методики обучения математике, контрольные вопросы и задания, библиографический список. Пособие рассчитано на студентов физико-математических направлений (специальностей) педагогических вузов, аспирантов, учителей математики общеобразовательных школ.

Рецензент: А.И. Исаченков, канд. пед. наук, доцент

Введение

Пособие по курсу теории и методики обучения математике предназначено для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности «050201 математика» с дополнительными специальностями «080507 менеджмент организации» и «050202 информатика».

Пособие включает текст лекций с иллюстрациями по общей методике преподавания математики, контрольные вопросы и задания, библиографический список.

Курс «Теория и методика обучения математике» (ТиМОМ) предназначен для подготовки студентов – будущих учителей к преподаванию математики в различных типах школ.

Для решения этой задачи курс ТиМОМ:

- раскрывает значение математики в общем и профессиональном образовании человека, психолого-педагогические аспекты усвоения предмета, взаимоотношение школьного курса математики с математикой как наукой и важнейшими областями ее применения;
- обеспечивает обстоятельное изучение студентами школьных программ, учебников и учебных пособий по математике, понимание заложенных в них методических идей, знакомит с новыми технологиями обучения математике;
- воспитывает у будущих учителей творческий подход к решению проблем преподавания математике, формирует умения и навыки самостоятельного анализа процесса обучения, исследования методических проблем, создает благоприятные условия для развития стремления к научному поиску путей совершенствования своей работы;
- вырабатывает у студентов основные практические умения проведения учебной и воспитательной работы на уровне требований, предъявляемых к школе.

Содержание курса формируется и развивается с учетом получения студентами при изучении соответствующих дисциплин знаний по теории познания, психологии, логике, педагогике, математике.

Пособие может быть использовано для подготовки студентов к зачетам и экзаменам по теории и методике обучения математике, для самообразования по предмету, для подготовки к урокам в период педпрактики. Может быть полезно в практической работе учителя математики.

Глава 1. Предмет методики преподавания математики

1. Определение методики преподавания математики и ее целей. Методика преподавания математики (МПМ) – это наука о математике как учебном предмете и закономерностях обучения математике учащихся различных возрастных групп. В своих исследованиях МПМ опирается на педагогику, психологию, математику и практическую деятельность учителей математики.

Перед МПМ стоят следующие основные задачи:

- определить конкретные цели изучения математики и отобрать содержание учебного предмета в средней общеобразовательной школе;
- разработать наиболее рациональные методы и организационные формы обучения, направленные на достижение поставленных целей изучения математики;
- рассмотреть необходимые средства обучения и разработать рекомендации по их применению в практической деятельности учителя.

Другими словами, МПМ должна дать ответы на следующие вопросы:

- зачем надо учить математике?
- что надо изучать?
- как надо обучать математике?

МПМ включает общую методику и частную (специальную) методику. Содержание общей методики составляют вопросы общих теоретических основ преподавания математики. Среди них нами будут рассматриваться следующие:

- вопросы о предмете МПМ и целях обучения математике;
- содержание школьного курса математики и принципы его отбора;
- методы обучения математике;
- математические понятия, предложения и доказательства;
- задачи в обучении математике;
- различные формы организации обучения математике; урок как основная форма организации обучения;
- средства обучения математике (учебник и учебные пособия, технические средства обучения).

Содержание частной (специальной) методики составляют вопросы изучения отдельных разделов, тем школьного курса математики. Среди таких разделов и тем следующие:

- числовые системы;
- математические выражения и тождественные преобразования;
- уравнения и неравенства;
- функции;

- производная и интеграл;
- логическое строение школьного курса геометрии;
- геометрические построения на плоскости и в пространстве;
- равенство фигур;
- параллельность прямых и плоскостей;
- перпендикулярность прямых и плоскостей;
- многогранники;
- тела вращения;
- векторы и координаты;
- геометрические величины: длины, меры углов и дуг, площади, объемы.

2. Определение методики преподавания математики и ее целей. МПМ оформилась как самостоятельная наука во второй половине XIX века. Основным предметом ее исследования в то время стали вопросы обучения математике детей младшего школьного возраста. Это было вызвано возникшими в обществе потребностями достаточно широкого развития школьного начального образования.

Вопросы методики обучения математике детей среднего и старшего школьного возраста стали предметом активных методических исследований в последние годы XIX века и приобрели широкое развитие только в последующие десятилетия. Представляется интересным обратиться к методическому наследию. Однако ограничимся лишь тем периодом, который охватывает дореволюционное время, так как он является наиболее интересным и слабо отраженным в литературе.

Остановимся более подробно на периоде становления школьного математического образования. В 1802 г. в России было учреждено Министерство народного просвещения. Главное управление училищ этого министерства выполнило разработку школьной реформы, направленной на упорядочение деятельности разных типов школ.

Первые программы по математике составлялись при участии математика Н. Фуса и астронома С. Разумовского. Согласно этой программе на изучение чистой и прикладной математики отводилось в средней школе по 6 ч. в неделю в 1 – 3 классах. Кроме того, в 3 – 4 классах изучалась статистика. В программу старших классов были включены начала дифференциального и интегрального исчисления. С 1849 г. число часов на изучение математики увеличилось с 20 до 30 в неделю (по четырем классам). Однако эти прогрессивные начинания были вскоре ограничены, а затем и отменены. Но проблемы математического образования не остались без внимания, хотя обсуждение их велось лишь в общепедагогических журналах и носило в основном эпизодический характер. Такие статьи публиковались на страницах ежемесячного «Журнала народного просвещения».

Учебные руководства по математике для средних учебных заведений в тот период ориентировались, как правило, только на то, чтобы дать знания, необходимые специалистам промышленности, армии, флота. В них отсутствовали научная строгость, последовательность и цельность. Изложение ориентировалось на запоминание материала, но не на развитие мышления обучаемых.

Попыткой преодолеть отрыв теории от практики явилось издание в 1830 г. первой методической книги по математике «Руководство по арифметике» (автор Ф.И. Буссе), а также книг Н.И. Лобачевского «Алгебра, или исчисление конечных» и «О началах геометрии». В книге «Алгебра, или исчисление конечных», изданной в 1843 г., Н.И. Лобачевский изложил свои методические взгляды : «…В постепенном развитии понятий и в попытке не допускать, чтобы одно изучение на память общих правил и механические вычисления заменяли суждения, заключается искусство преподавания и успех его». Большую роль в развитии методологии и методики математики сыграл труд С.Е. Гурьева «Опыт усовершенствования элементов геометрии».

В течение 15 лет главным наблюдателем за преподаванием математических наук в военно-учебных заведениях России был академик М.В. Остроградский. Результатом его работы на этом поприще явилось издание трехтомника «Руководство начальной геометрии», который в то время был наиболее полным и подробным учебником геометрии.

Систематическое обсуждение проблем математического образования началось с публикаций статей методического содержания на страницах «Сборников педагогического музея военно-учебных заведений», а также в журнале «Математический сборник». С 1884 г. начинает выходить «Журнал элементарной математики» (редактор В.П. Ермаков). Здесь публиковались статьи крупнейших деятелей математического образования, материалы отечественных и зарубежных съездов и совещаний, на которых обсуждались проблемы состояния и развития математического образования.

В частности, одним из вопросов, который поднимался для обсуждения, был вопрос о роли учебника в школьном преподавании математики. Наиболее полно ответ на этот вопрос дал М. Попруженко, он писал: «Наличие учебника не означает, что учитель его пересказывает. Можно сказать ученикам: «Я вам объясняю только принципы, детали вы должны разобрать сами» или «Я объясню один из случаев, другой, аналогичный, вы разберете сами». Но во всяком случае то, что преподаватель объясняет, он должен объяснить для всех, а не для единиц …».

1900 – 1917 гг. известны в МПМ как периоды всероссийских съездов преподавателей математики. На первом Всероссийском съезде преподавателей математики (декабрь 1911 – январь 1912) основные доклады сделали:

В.Ф. Каган «О преобразовании многогранников»; С.О. Шатуновский «Учение о величине»; И.И. Александров «О построении параллелограммов». Общим вопросам были посвящены выступления: Н.Н. Володкевича «О реальном направлении математики в связи с жизненными фактами»; С.А. Неаполитанского «Элементы логики в школьной математике»; Ф.А. Эрна «Спорные вопросы в современной методике арифметики»; Д.С. Галанина «Об изменении метода обучения в низшей и средней школе». Кроме того, обсуждались вопросы методов обучения. Были высказаны предложения о необходимости опираться на данные психологии и экспериментальной педагогики.

Второй съезд преподавателей математики проходил в декабре 1913 г. На этом съезде обсуждались научные вопросы, имеющие отношение к элементарной математике, рассматривалось современное положение преподавания математики, обсуждались вопросы о желательной постановке преподавания математических наук и о подготовке преподавателей математики.

В 1917 г. министр народного образования был смещен. Правительство опасалось, что разрабатываемые программы по математике станут содействовать проникновению в школы атеизма, вольнодумства и приняло решение о прекращении работы по обновлению программ. Однако в методических журналах продолжалось обсуждение вопросов о функциональной зависимости, геометрических преобразованиях и др.

До наших дней не потеряли значения труды А.И. Гольденберга (1837 – 1902), особенно его книг «Методика начальной арифметики» и «Беседы по счислению». Крупнейшими методистами-математиками дореволюционной и послереволюционной России были С.И. Шохор-Троцкий (1853 – 1929), разработавший метод целесообразных задач, и К.Ф. Лебединцев (1878 – 1925), обосновавший «конкретно-индуктивный метод» преподавания алгебры. Лучшие из созданных в дореволюционное время учебных пособий по математике получили должное признание и использовались в отечественной школе в течение многих лет. Наибольший успех имели книги «Арифметика», «Элементарная алгебра», «Элементарная геометрия», написанные Андреем Петровичем Киселевым (1852 – 1940). Эти книги стали стабильными школьными учебниками в 1934 – 1955 гг.

Многие возникающие в методике математики проблемы находят свое разрешение только после многолетних поисков. Это объясняется их сложностью, взаимосвязью с исследованиями по школьной психологии, дидактике, традициями в преподавании математики. В методике преподавания математики, в практике обучения предмету находят свое отражение особенности многовековой истории развития математики от глубокой древности до наших дней. Учителю математики необходимо ознакомиться с книгами по истории математики, в которых дается интересный фактический материал. Это позволит не только лучше понять богатую историю возникновения и развития учебного предмета, но и выбрать для сообщения школьникам различные примеры из истории развития математики.

В дореволюционной России существовала почти исключительно методика математики (арифметики) для начальной школы (средняя школа не была массовой). Считалось, что для учителя средней школы достаточно знать свой предмет, а методика ему не нужна. В 1912 году начал выходить журнал «Математическое образование». После революции методическая литература превратилась в мощный поток.

Итак, в развитии методики преподавания математики можно выделить три основных этапа:

- Период движения за реформу математического образования в конце XIX – начале XX веков. В отечественной литературе этот период нашел наиболее яркое отражение в материалах 1-го и 2-го Всероссийских съездов преподавателей математики.
- Период становления и формирования МПМ в современной трудовой политехнической школе (1917 – 1932 гг.): были разработаны принципы советской дидактики, найдены построенные на этих принципах подходы к решению методических проблем.
- Период современной реформы математического образования, вызванный требованиями НТР, возрастающей ролью математического и школьного математического образования в современных условиях, задачами подготовки подрастающего поколения к активной трудовой деятельности.

3. Колмогоровская реформа математического образования. Наиболее ярко проявились проблемы современного математического образования во время так называемой колмогоровской реформы. Три обстоятельства делают историю этой реформы особенно драматичной: то, что она связана с именем одного из наиболее выдающихся математиков нашего времени; ее размах и масштаб, и, наконец, преобладающее мнение о том, что это предприятие оказалось несостоятельным, привело к неудаче.

В середине 60-х во исполнение правительственного решения начали разрабатываться новые программы по школьному курсу математики. Это была коллегиальная работа, объединявшая специалистов из АН, АПН, университетов и школ. Однако она быстро приобрела «колмогоровский» характер благодаря объему личного вклада академика А.Н.Колмогорова в эту работу.

Новая программа была введена фронтально, до появления новых учебников, на основе временных методических разработок. В течение нескольких лет появились новые учебники, работа по которым стала вызывать значительные трудности у учителей. Курс математики стал труден для учащихся, ослабла тяга к математике. Стала нарастать критика реформы. Сначала по конкретным недостаткам учебника, затем по методике, затем по положениям программ. Начали появляться альтернативные учебники. Возникло мощное контрреформистское движение, в котором взяло верх традиционалистское отношение к школьному курсу математики. Однако на колмогоровских программах выросло поколение успешно работающих математиков. Кроме того, учителя, при всех пережитых ими трудностях, усвоили немало свежих и новаторских мыслей и тем самым перешли на новый уровень самосознания. Обогатилась литература по школьной математике.

Как отметил академик А.П. Ершов, «если колмогоровская реформа оказалась несостоятельной, то эта несостоятельность является всего лишь проекцией на математику другой грандиозной акции, состоящей в переходе к обязательному среднему образованию». В 60 – 70-е годы у нас появились учебники, цель которых была приблизить школьное преподавание к современной науке. Эти учебники затем были отвергнуты, несмотря на то, что они содержали множество интересных методических идей. Они обладали многими локальными недостатками. В основном недостатки заключались в том, что не учитывались психологические особенности школьников. Во-первых, часто выбирались нецелесообразные с точки зрения психологии определения. Во-вторых, употреблялись сложная и педантичная терминология и система обозначений.

Однако, учебники, о которых идет речь, имеют громадное достоинство, не сравнимое с их недостатками. Они – результат очень большой и высококвалифицированной работы по пересмотру всей системы школьного курса математики. Подавляющее большинство учителей признает, что эти учебники открыли для них новые горизонты и заставили задуматься над основными понятиями и методами математики. Для школы в настоящем виде они не годятся, так как школьный учебник должен быть идеальным в методическом отношении. Им еще предстоит сыграть свою роль.

4. Зачем надо учить математике?

- В современных условиях определенный объем математических знаний, владение характерными для математики методами и некоторое знакомство со специфическим языком математики стали обязательным элементом общей культуры.
- Изучение математики вносит вклад в формирование научного мировоззрения учащихся, в развитие их интеллектуальных сил и способностей.
- Еще одной причиной выступают навыки мыслительной деятельности, приобретаемые учащимися в процессе правильно организованного обу-

чения математике, формируемая при изучении предмета готовность к упорному труду.

- Подготовка учащихся к продолжению образования в высшей школе по специальностям, требующим дальнейшего изучения математики и ее приложений, воспитание стремления к непрерывному пополнению своих знаний в избранном направлении путем самообразования.
- Математика, как ни один другой предмет, располагает возможностью обучать учащихся логике на практике (развитие у учащихся навыков проведения логических рассуждений, умений находить логические следствия из данных начальных условий, способность абстрагировать, анализировать рассматриваемый вопрос, обобщать, специализировать, выделять необходимые и достаточные условия, определять понятия, составлять суждения, находить пути решения поставленной задачи). Все это формирует мышление учащихся и способствует развитию их речи, особенно таких качеств выражения мысли, как порядок, точность, ясность, краткость, обоснованность.

Таким образом, подготовка учащихся средней школы к активному участию в общественной жизни требует, во-первых, овладения школьниками определенным объемом математических знаний, умений, навыков, а во-вторых, формирования в процессе обучения предмету научного мировоззрения, высоких моральных качеств учащихся, развития их интеллектуальных сил и способностей, готовности к труду.

Как писал А.Я. Хинчин, по абстрактности своего предмета математическая наука не может давать учащемуся тех непосредственно впечатляющих, этически воздействующих и формирующих характер образов, картин, эмоций, какими располагает, например, история и литература. Было бы, однако, весьма поверхностно делать вывод, что в деле формирования нравственной личности школьника уроки математики вообще должны быть скинуты со счетов. Работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает – исподволь и весьма постепенно – в молодом человеке ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике. Для этого математика обладает рядом преимуществ:

1. В математике некоторое положение либо доказано, либо нет. Поэтому математик быстро привыкает к тому, что в его науке выгодна только правильная, объективная аргументация. Но эту черту, естественно развивающуюся у математика-специалиста, в известной степени, занимаясь математикой, воспитывает в себе и школьник.

2. Следует отметить полную определенность математических заданий.

Всегда имеется возможность однозначно решить, выполнено оно или нет. Ученик знает, что если он правильно решил задачу или доказал теорему, то он не может получить плохой оценки.

3. Творческий характер математических заданий: тот, кто испытал радость от того, что ему удалось самому найти подход к решению задачи, постарается и дальше не лишать себя этого. Творчество это иного рода, чем в истории или литературе: в математике нужно найти метод, подход к решению задачи, а в истории и литературе всего лишь систему изложения.

Мировоззрение возникает не вдруг, а формируется постепенно, в результате размышлений над привычными и новыми понятиями и представлениями. Одной из древнейших проблем является вопрос о природе математического знания, об отношении его к объективной действительности. Математические понятия, категории, математика в целом отражают диалектику самой действительности. В качестве примера можно привести расширение понятия числа. Исходя из практических нужд, еще в древности ставились задачи, приводившие к линейным уравнениям и их системам. Был разработан способ решения уравнений и систем с положительными корнями. Для формального распространения решения линейных уравнений для любых соответствующих задач в Древнем Китае были введены отрицательные числа. Китайские математики с отрицательным числами обращались как с самостоятельными объектами, для них был введен специальный термин, а позднее знак. В явном виде отрицательные числа появились в конце XV века. Новое понятие входило в математику трудно, многие математики его не принимали, высказывали недоверие (так, Ф. Виет в XVI веке не хотел слышать о них). Они утвердились после геометрической интерпретации их Р. Декартом в XVII веке. Для сохранения алгоритма решения в радикалах уравнения 3-й степени итальянские математики в XVI веке в предмет математики ввели комплексные числа. Потребовалось два века, чтобы математики признали их реальными (после геометрической интерпретации их Васселем).

Другой пример: к середине XVII века в математике накопился достаточно большой запас средств решения задач, поставленных практическими нуждами, решаемых ныне с помощью дифференциального и интегрального исчисления. Появляются работы, в которых анализируются общие методы решения таких задач. Так возникает дифференциальное и интегральное исчисления, основоположниками которого являются И. Ньютон и Г. Лейбниц. Новое исчисление было создано, но ни И. Ньютон, ни Г. Лейбниц не спешили опубликовать его, т.к. видели слабое место (основные понятия опирались на понятие актуальной бесконечно малой, которую в одном и том же процессе нужно было полагать и равной нулю, и не равной нулю). Вновь имеем пример диалектического противоречия, разрешение которого привело к развитию математического анализа на базе предельного перехода (понятия потенциальной бесконечно малой).

5. Как надо учить? Для ответа на это вопрос приведем 10 заповедей учителя математики, сформулированных выдающимся методистом-математиком Д. Пойа [4, с. 305]:

1. Интересуйтесь своим предметом.
2. Знайте свой предмет.
3. Знайте, каким путем можно изучить то, что вам необходимо. Лучший способ изучить – это открыть самому.
4. Умейте читать по лицам учащихся. Старайтесь увидеть, чего они от вас ждут, понять их затруднения; умейте ставить себя на их место.
5. Не ограничивайтесь голой информацией, стремитесь развивать у учащихся определенные навыки, нужный склад ума и привычку к методичной работе.
6. Старайтесь научить их догадываться.
7. Старайтесь научить их доказывать.
8. Выискивайте в вашей задаче то, что может пригодиться при решении других задач – за данной конкретной ситуацией старайтесь обнаружить общий метод.
9. Не выдавайте своего секрета сразу – пусть учащиеся попытаются угадать его до того, как вы его им раскроете, – предоставьте учащимся самим найти как можно больше.
10. Пользуйтесь наводящими указаниями, но не навязывайте своего мнения насильно.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие задачи стоят перед методикой преподавания математики?
2. Раскройте возможности учебного предмета «математика» в деле воспитания учащихся.
3. Пользуясь текстом лекции и источниками [1] и [6], укажите цели обучения математике в школе.
4. По [1] рассмотрите структуру и основные тенденции современного математического образования.

Библиографический список

1. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова и др. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин. – М.:Просвещение, 1980. – 368 с.
3. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. пед. ин-тов спец. 2104 Математика и 2105 Физика / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
4. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М. : Наука, 1976. – 448 с.
5. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студ. мат. спец. педвузов и учителей / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
6. Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – М. : Дрофа, 2008. − 128 с.
7. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи / А. Я. Хинчин. – М.: изд-во АПН РСФСР, 1963. – 204 с.

Глава 2. Индукция и дедукция

1. Определение индукции и дедукции. Различают два вида рассуждений: индукцию и дедукцию.

Дедукция (от лат. deduction – выведение) или дедуктивный метод – способ рассуждения от общего к частному, от общих положений к частным заключениям. Например, применение любого из признаков делимости.

Индукция (от лат. induction – наведение) – способ рассуждения от частного к общему, от фактов к обобщениям. Например, установление признаков делимости на 10, 5, 3 и 2 в VI классе (индукция используется при выводе признаков: признаки делимости устанавливаются, исходя из наблюдения за таблицей умножения).

Индукция и дедукция не изолированы друг от друга, а находятся в диалектическом единстве. Всякая научная дедукция является результатом предварительного индуктивного изучения материала и применением индуктивно полученных результатов.

2. Индукция и ее виды. Индуктивное умозаключение сложилось в процессе многовековой общественно-исторической и производственной практики и обязано своим происхождением наблюдению и опыту. Как разновидность вывода, индукция упомянута впервые в трудах древнегреческого философа Сократа (469 – 399 гг. до н. э.)

Термин «индукция» имеет три основных значения:

1) это один из видов рассуждений, при котором из двух или несколь-

ких единичных (это S есть р) или частных (некоторое S есть р) высказываний получают новое общее высказывание (все S есть р).

2) это метод исследования, при котором желая изучить некоторое множество объектов (некоторых явлений), изучают отдельные объемы (обстоятельства), устанавливая в них те свойства, которые присущи всему рассматриваемому множеству объектов (или те обстоятельства, от которых зависит данное явление);

3) это форма изложения (беседа, процесс обучения), когда от менее общих положений приходят к общим положениям (заключениям, выводам).

Рассмотрим следующие примеры:

Пример 1. Единичные суждения: если дискриминант D квадратного уравнения с действительными коэффициентами больше нуля, то квадратное уравнение имеет два действительных корня; если D=0, то уравнение имеет один действительный корень; если D<0, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Частное суждение: D>0, D=0, D<0 исчерпывают все случаи, которые могут быть относительно дискриминанта.

Новое общее суждение: всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней.

Здесь индукция выступает как особая форма вывода (умозаключения).

Пример 2. Рассмотрим последовательность, заданную формулой $f(n) = 2n^2 + 29, \quad n \in Z.$

Опытным путем находим, что f(0)=29, f(1)=31, f(2)=37.

Наблюдение и вывод: последовательность $\{\forall n \ |2n^2 + 29\}$ является последовательностью простых чисел (ложное высказывание, так как $\mathrm{f}(29) = 2 \cdot 29^2 + 29 = 29 \cdot 59$ – составное число).

Здесь индукция выступает как метод научного исследования, основанный на наблюдении и опыте.

В истории математики были случаи, когда известные математики ошибались в своих индуктивных выводах. Например, П. Ферма предположил, что все числа вида $2^{2^m} + 1$ простые, исходя из того, что при m= 1, 2, 3, 4 они являются таковыми, но Л. Эйлер нашел, что уже при m = 5 число $2^{32} + 1$ не является простым (оно делится на 641).

Однако возможность получения с помощью индукции ложного заключения не является основанием для отрицания роли индукции в школьном обучении математике. Во-первых, применение индукции в учении корректируется и направляется учителем к открытию истин. Во-вторых, нужно добиваться понимания учащимися правдоподобного характера индуктивного заключения. Поэтому, применяя индукцию, необходимо всячески подчеркивать, что заключение является лишь предположением, гипотезой, которое может быть доказано (если оно истинно) или опровергнуто (если оно ложно).

Пример 3. Знакомя учащихся с высотой треугольника, учитель чертит на доске треугольники разных видов и в каждом из них ученики проводят по три высоты; из рассмотрения этих чертежей учащиеся приходят к выводу, что три высоты в остроугольном и прямоугольном треугольниках пересекаются в одной точке (она лежит внутри треугольника или совпадает с вершиной). А в тупоугольном треугольнике проходят через одну точку прямые, которым принадлежат высоты. Здесь индукция выступает в роли метода обучения.

Различают два основных вида индукции: неполную и полную. *Неполная индукция* (как метод исследования) – индукция, при которой не исчерпываются все частные случаи, относящиеся к данной ситуации. Как отмечает Д. Пойа [3, с. 111], Л. Эйлер – мастер индуктивного исследования в математике, он сделал важные открытия с помощью индукции (о бесконечных рядах, в теории чисел и др. областях), т.е. с помощью наблюдения, дерзкой догадки и проницательных подтверждений. Однако Л. Эйлер в этом отношении не является единственным: другие математики, известные и менее известные, в своей работе также пользуются индукцией. Все же в одном отношении Л. Эйлер кажется почти единственным: он старается изложить относящиеся к вопросу индуктивные доводы заботливо, в деталях, в хорошем порядке. Он излагает их убедительно, но честно, как это подобает настоящему ученому. Его изложение является чистосердечным изложением идей, приведших его к этим открытиям, и имеет особую прелесть.

С точки зрения логики, неполной индукцией называется вывод, основанный на рассмотрении одного или нескольких (но не всех) единичных или частных суждений, относящихся к рассматриваемому понятию (или системе понятий). Например, законы арифметических действий в школе (переместительный, сочетательный и т.д.) изучаются с помощью неполной индукции.

Вывод, основанный на неполной индукции, может быть ошибочным, поэтому индукция в качестве метода исследования применяется весьма осторожно. Значение неполной индукции состоит в том, что рассмотрение частных случаев позволяет выявить закономерность, помогает высказать гипотезу о характере этой закономерности; доказательство же должно быть осуществлено другим путем (обычно дедукцией). Неполная индукция является одним из эвристических методов в творчестве математиков. Математику, являющемуся активным исследователем, математика иногда может казаться игрой в догадки: вы должны догадаться о математической теореме перед тем, как ее докажете, вы должны догадаться об идее доказательства перед тем, как проведете его в деталях.

В процессе обучения школьников к неполной индукции нужно относиться осторожно, учащиеся должны знать, что заключения по индукции могут быть и ложными, и истинными, они нуждаются в доказательстве. Но пренебрегать неполной индукцией нельзя, в этом методе реализуется принцип обучения «от простого к сложному», изучение новых абстрактных понятий и высказываний проходит естественным путем через опыт и наблюдение, через восприятие и представление и т.д. Кроме того, используя индуктивный метод обучения, мы обучаем учащихся математической деятельности, «наводим» самих учащихся на новое понятие, теорему или формулу. Но вывод надо делать на рассмотрении не одного, а нескольких частных случаев.

Полной индукцией называется вывод, основанный на рассмотрении всех единичных или частных суждений (случаев), относящихся к рассматриваемой ситуации. Если число этих случаев конечно и все они рассмотрены, то вывод, сделанный путем полной индукции, можно считать обоснованным.

Например, теорема об измерении вписанного угла, теорема косинусов.

Пример 4. В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B и D лежит между двумя другими, если углы A и B треугольника острые. (Решение: точка B не может лежать между A и D, если бы она лежала между ними, то угол ABC был бы равен сумме углов BCD и CDB по теореме о внешнем угле треугольника, а значит острый угол B (по условию) был бы больше прямого. Точно так же точка A не может лежать между точками B и D. Значит, точка D лежит между точками A и B).

Дедукция и ее виды. Дедукция есть форма вывода, при которой из одного общего или одного частного высказывания получают новое, менее общее или частное суждение. Дедуктивные процессы на строгом уровне описываются в исчислениях математической логики, а впервые теорию дедукции разработал Аристотель. Р. Декарт считал, что к познанию вещей человек приходит двумя путями: через опыт и с помощью дедукции, которую он называл умозаключением; опыт часто вводит нас в заблуждение, а дедукция избавляет нас от этого недостатка.

Дедуктивные выводы могут быть представлены следующими видами:

- Переход от более общего положения к менее общему или единичному.

Пример 5. $\forall x \in \mathrm{N} \;\; x>0$

$$\frac{n \in \mathrm{N}}{n>0}$$

- Переход от общего положения к общему положению, ему подчиненному.

Пример 6. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, сумма углов прямоугольного треугольника также равна 180°, поэтому сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

- Переход утверждения одной общности к утверждению той же общности.

Пример 7. Область определения четной (нечетной) функции симметрична относительно точки 0. Множество всех точек, соответствующих натуральным числам, не симметрично относительно никакой точки. Вывод: никакая функция с областью определения N не является четной (нечетной).

- Переход от единичного положения к частному.

Пример 8. Число e – трансцендентное.

Число π – трансцендентное.

Некоторые иррациональные числа трансцендентны.

Математика является дедуктивной наукой. При строгом изложении любой математической дисциплины устанавливается система основных понятий и отношений (которые не определяются), затем конструируется система аксиом, связывающая эти понятия и отношения. На основе системы основных понятий, отношений и аксиом образуются новые понятия (которые определяются через известные понятия и отношения), и посредством правил вывода строятся новые теоремы и следствия из них, излагаемые в логической последовательности. Дедуктивное доказательство теорем характеризуется не только логической последовательностью шагов, но и обязательностью обоснования каждого шага ссылками на известные математические предложения, предшествующие рассматриваемым.

Как метод исследования дедукция характеризуется тем, что для получения нового знания о некотором объекте (понятии, свойстве) находят ближайший к данному объекту класс объектов (ближайшее родовое понятие) и применяют к этому объекту (понятию) существенные свойства этого класса объектов (признаки рода). Так, изучая свойства прямоугольника, мы устанавливаем, что он есть параллелограмм, поэтому обладает всеми свойствами параллелограмма.

Дедукция может выступать в виде особой формы изложения материала в учебнике, как один из методов обучения, при котором от общих правил и положений приходят к менее общим или частным правилам или положениям. Например, применяя признаки подобия треугольника к рассмотрению конкретных задач, мы используем дедукцию.

В процессе развития математики индукция и дедукция не выступают изолированно: они тесно переплетаются между собой, часто бывают просто неразличимы. (Выводя из наблюдений признак делимости на 2, учащиеся пользуются индукцией, применяя его – дедукцией).

4. Метод математической индукции. Особенно ярко взаимосвязь индукции и дедукции выступает при изучении математических предложений, доказываемых методом математической индукции; например, при выводе формулы бинома Ньютона.

1) наблюдение и опыт:
$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= \\ (a+b)^1 &= \\ (a+b)^2 &= \\ (a+b)^3 &= \end{aligned}$$

2) гипотеза: очевидно, коэффициенты $(a+b)^n$ есть члены n-й строки треугольника Паскаля.

3) обоснование (доказательство) – методом математической индукции.

Метод математической индукции основан на так называемом принципе математической индукции: если какое-нибудь утверждение, сформулированное для натурального числа n, проверено для $n=1$ и из допущения его истинности для некоторого значения $n=k$ следует его истинность для значения $n=k+1$, то утверждение верно для любого натурального числа n.

Таким образом, метод математической индукции, применяемый к доказательству некоторой теоремы (формулы) обычно выглядит так:

1-й шаг. Проверяем истинность для $n=1$.

2-й шаг. Допускаем, что теорема верна для некоторого $n=k$ и, исходя из этого допущения, доказываем истинность теоремы для $n=k+1$.

3-й шаг. На основании первых двух шагов доказательства и принципа математической индукции, заключаем, что теорема верна для любого натурального n.

Пример 9. Доказать, что

$$(10^n+18n-28) \vdots 27$$

1-й шаг. Проверяем истинность для $n=1$:

$$(10+18-28) \vdots 27$$

2-й шаг. Допускаем, что теорема верна для некоторого $n=k$

$$(10^k+18k-28) \vdots 27$$

и, исходя из этого допущения, доказываем истинность теоремы для $n=k+1$:

$$\begin{aligned}&\left(10^{k+1}+18(k+1)-28\right)=10^k\cdot 10+18\cdot k+18-28= \\ &=10\cdot(10^k+18k-28)-162k+270\end{aligned}$$

Так как первое слагаемое делится на 27 по предположению индукции, а второе и третье слагаемые делятся нацело на 27, то и вся сумма делится на 27.

3-й шаг. На основании первых двух шагов доказательства и принципа математической индукции, заключаем, что теорема верна для любого натурального n.

В математике доминируют дедуктивные умозаключения, хотя индуктивные методы играют существенную роль. В школьном обучении математике по сравнению с математической наукой удельный вес индуктивных методов значительно возрастает. Это определяется психологическим факторами педагогического процесса, невысоким начальным уровнем познавательных возможностей детей, постепенным и длительным процессом формирования их интеллекта.

В обучении школьников основам дедуктивной науки математики индуктивные методы в целом находят не менее широкое применение, чем дедуктивные. Соотношение между этими методами зависит от возраста школьников. Если в начальных классах преобладают индуктивные методы, то в старших классах – дедуктивные. Однако и в начальных классах дети постепенно приучаются к использованию простейших дедуктивных умозаключений, а в старших классах нередко применяются различные индуктивные методы. В средних классах происходит постепенный переход от преимущественно индуктивного к преимущественно дедуктивному уровню мышления. Так, если в 5 – 6 классах доминирует еще первый уровень, особенно в геометрии, то в систематических курсах 7 – 8 классов, особенно в геометрии, преобладает уже второй логический уровень дедукции. Можно сказать, что примерно в 7 классе в обучении математическим предметам достигается равновесие в соотношении между двумя уровнями обучения (и мышления) школьников и намечается переход от первого уровня ко второму.

Еще в начале XX века опытные педагоги указывали, что только к 14-летнему возрасту школьники достигают той логической зрелости, которая позволяет понимать необходимость и сущность дедуктивных доказательств и оправдывает систематическое применение этого метода. Сейчас с дедуктивным методом учащиеся знакомятся примерно в 12 лет. Методисты считают, что трудности значительно уменьшились хотя бы потому, что в предыдущих классах теоретический уровень обучения и уровень математической подготовки школьников значительно повысился.

Дедуктивный метод применяется в обучении математике не только в доказательствах, с ним мы встречаемся также при использовании теории, определений, различных математических предложений, общих методов при решении задач. Именно в этой форме дедукция начинает широко применяться уже с первых лет обучения.

5. Аналогия примыкает к неполной индукции. Если две вещи связаны одна с другой в одном или более признаках, и если некоторое высказывание истинно относительно одной из них, то оно, возможно, истинно и относительно другой. Схема заключения по аналогии: А обладает признаками c_1,

c_2, …, c_n. B обладает теми же признаками c_1, c_2, …, c_n. A обладает признаком d, вероятно, и B обладает признаком d.

Пример 10. В планиметрии мы изучаем параллелограмм, в стереометрии аналогичной фигурой является параллелепипед. Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, противоположные грани параллелограмма равны и параллельны. Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам, диагонали параллелепипеда – тоже. Наличие таких аналогичных свойств позволяет предположить, что эта аналогия распространяется и дальше. Так, сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Пробуя проверять аналогичное утверждение для параллелепипеда, убеждаемся, что у него сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его ребер и т.д.

Но заключение по аналогии, как и неполной индукции, нуждается в доказательстве. Учащимся надо показать ряд примеров, когда аналогия может привести к грубым ошибкам.

В планиметрии можно построить бесконечное множество правильных многоугольников с каким угодно числом сторон, в стереометрии существует всего лишь 5 правильных многогранников. В планиметрии из всех многоугольников жестким является только треугольник (многоугольник называется жестким, если, будучи сделан из твердых негнущихся стержней, подвижно скрепленных в вершинах, он не может подвергнуться деформации). В стереометрии жестким является любой выпуклый многогранник (теорема Коши) (многогранник будет жестким, если, будучи сделан из твердых негнущихся пластинок, подвижно скрепленных в ребрах, он не может подвергнуться деформации).

В планиметрии один из двух равновеликих многогранников всегда можно разрезать на такие треугольники, из которых можно сложить другой. В стереометрии один их двух равновеликих многогранников вообще нельзя разрезать на такие тетраэдры, из которых можно сложить другой (теорема Дена – Кагана).

Разница между аналогией и индукцией состоит в том, что в индукции происходит заключение от отдельных объектов к роду, в аналогии же – от объекта к объекту, от одного класса к другому классу. Вероятность заключения по аналогии зависит от того, насколько признаки c_1, c_2, …, c_n, принадлежащие A и B, преобладают над различиями между A и B: чем больше общих свойств, чем меньше различий, тем больше вероятность правильного заключения. При этом признаки, являющиеся следствием некоторого признака, не принимаются во внимание. Если B обладает признаком, несовместимым с теми признаками, на основании которых делается заключение по аналогии, то общие признаки A и B не имеют значения, и вероятность заключения по аналогии равна нулю. Если d – следствие $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то нет надобности заключения по аналогии.

Наиболее глубоко идущей аналогией, позволяющей делать безошибочные заключения, является изоморфизм. В случае изоморфизма каждое предложение, справедливое для одного множества объектов, можно полностью и без доказательства переносить на изоморфное множество объектов. Это обстоятельство дает возможность при наличии нескольких взаимно изоморфных множеств ограничиваться детальным рассмотрением только одного из них. Так в аналитической геометрии изучение свойств фигур сводится к изучению отношений между определенными уравнениями.

Аналогия является одним из эвристических методов в процессе математического развития: может подсказать существование нового предложения, способ доказательства или решения задачи. Понятие о функции комплексного переменного создано по аналогии с функцией действительного переменного, геометрия n-мерного пространства – по аналогии с 2-мерным или 3-мерным.

Но многие математические ошибки и заблуждения учащихся объясняются неверными аналогиями:

$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c}$ по ложной аналогии $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$;

$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ по аналогии с $\sqrt{a^2 b^2} = |ab|$;

$log_c(a+b) = log_c a + log_c b$ по аналогии с $log_c(ab) = log_c a + log_c b$;

$sin\ (\alpha+\beta) = sin\ \alpha + sin\ \beta$ по аналогии с умножением одночлена на многочлен.

Учитель должен искоренять такие ошибки и предупреждать их появление (главное – добиваться ясного понимания основных понятий, знания содержания и объема понятия).

Контрольные вопросы и задания

1. Какие три основные значения имеет термин «индукция»?
2. Какие три основные значения имеет термин «дедукция»?
3. Разъясните суть метода неполной индукции, его преимущества и недостатки. Приведите пример.
4. Опишите схему применения метода математической индукции. Приведите пример.
5. Опишите схему рассуждения по аналогии. Приведите пример.

Библиографический список

1. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. пед. ин-тов спец.2104 Математика и 2105 Физика / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
3. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М. : Наука, 1975. – 464 с.
4. Репьев, В.В. Общая методика преподавания математики / В. В. Репьев. – М.: Учпедгиз, 1958. – 223 с.

Глава 3. Анализ и синтез

1. Понятие анализа и синтеза. Расчленение предметов на части есть анализ. Составление предмета из частей есть синтез. Ребенок, разбирающий игрушку, проводит своеобразный анализ (ему интересно, как она устроена); ребенок, собирающий игрушку из частей, проводит своеобразный синтез. Анализ и синтез в этом понимании встречаются и в настоящее время в некоторых экспериментальных науках, например, в химии (реакция разложения, реакция соединения химических элементов).

В первоначальном понимании анализ рассматривается как путь (метод мышления) от целого к частям этого целого, а синтез – как путь (метод мышления) от частей к целому. В дальнейшем анализ стали понимать как прием мышления, при котором от следствия переходят к причине, породившей это следствие, а синтез – как прием мышления, при котором от причин переходят к следствию, порожденному этой причиной.

Р. Декарт (1596-1650) в книге «Логика» наглядно проиллюстрировал оба метода на следующем примере: «Поставим вопрос, родственник ли я королю Карлу Великому? К ответу на этот вопрос можно идти двумя путями. Можно «идти по родословному древу» в прошлое: от меня до Карла Великого (анализ). Также можно «идти по родословному древу» из прошлого: от Карла Великого до меня (синтез). Если мы окажемся на одном родословном древе, то мы родственники».

Примером применения анализа и синтеза, понимаемых в этом смысле, могут служить арифметический и алгебраический методы решения текстовой задачи. Арифметический метод иллюстрирует синтез, алгебраический – анализ.

Пример 1. В одном бидоне было 36 л молока. Когда из него перелили в другой бидон 4 л, то в этих бидонах молока стало поровну. Сколько молока было в другом бидоне?

<u>I способ (синтез)</u> 1) 36 – 4=32 (л) – стало молока в первом бидоне;
2) 32 – 4=28 (л) – было молока во втором бидоне.

Ответ: во втором бидоне было 28 л молока.

<u>II способ (анализ).</u> Пусть во втором бидоне было x литров молока, тогда

$$x+4=36-4$$
$$x=28$$

Ответ: во втором бидоне было 28 л молока.

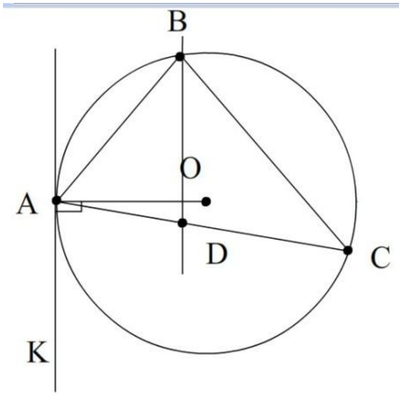
Анализ (аналитический) понимают как метод исследования, основу которого составляет количественное изучение свойств объекта, опирающихся на понимание числа и меры, а синтез (синтетический) как метод исследования, основу которого составляет изучение качественных свойств объекта. Этому пониманию анализа и синтеза отвечает такая научная дисциплина, как аналитическая геометрия. Анализ и синтез находятся в диалектическом единстве. «Без анализа нет синтеза» (Ф. Энгельс).

В мыслительных процессах синтез непрерывно переходит в анализ и наоборот. В познании нет изолированных путей, из которых один представлял бы собой синтез, а другой – анализ. Единство анализа и синтеза отчетливо выступает в сравнении. Сравнение можно охарактеризовать как анализ, который проходит с использованием синтеза и ведет к некоторому обобщению, к новому синтезу. Например, при доказательстве равенства двух данных треугольников сначала вычленяем их элементы (углы, стороны) – проводим анализ, затем делаем заключение о равенстве углов и сторон – проводим синтез. На основе полученных заключений делается вывод о том, равны или нет эти треугольники – проводится новый синтез. Сравнение начинается с соотнесения или сопоставления явлений, т.е. с синтетического акта, в результате которого производится анализ сравниваемых явлений – выделение в них общего и различного. Выступающее в результате анализа общее в свою очередь объединяет, т.е. синтезирует обобщаемые явления. Сравнение – это такая конкретная форма взаимосвязи анализа и синтеза, посредством которой осуществляется эмпирическое обобщение и классификация явлений. Роль сравнения особенно велика на уровне эмпирического познания, на начальных его ступенях, в частности у ребенка.

2. Анализ и синтез в обучении школьников. Анализ и синтез являются важнейшими методами обучения школьников. Проиллюстрируем их применение на примерах.

Аналитический метод состоит в следующем: отправляемся от заключения и, опираясь на известные предложения, показываем, что заключение является логическим следствием условия.

Пример 2. Задача: Треугольник ABC вписан в круг. Через вершину A проведена касательная, а через точку B прямая, параллельная касательной до пересечения с прямой AC в точке D. Доказать, что длина отрезка AB – среднее геометрическое отрезков AC и AD.

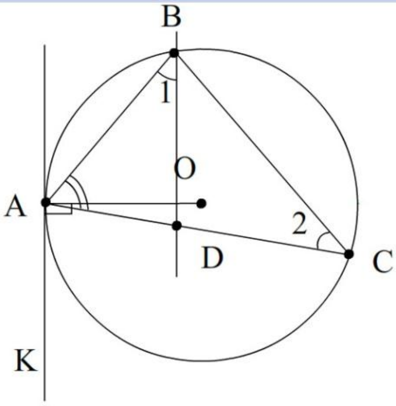


Дано: $\Delta ABC, \quad AK \perp OA, \quad BD \parallel AK.$

Доказать: $AB = \sqrt{AC \cdot AD}$ (1)

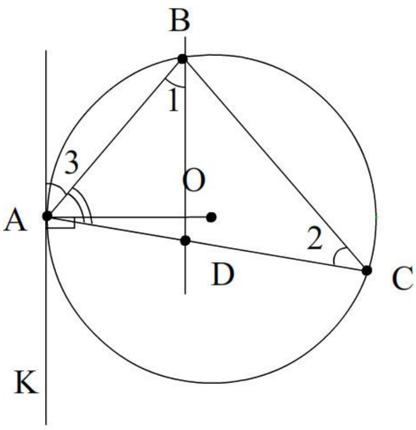
Доказательство:

Чтобы доказать (1), нужно доказать $AB^2 = AC \cdot AD$ (2)



Чтобы доказать (2), нужно доказать $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$ (3), чтобы доказать (3) хорошо бы доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ (4).

Чтобы доказать (4), нужно установить, что равны, например, две пары углов: $\angle A -$ общий, $\angle 1 = \angle 2$.



Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе, нужно рассмотреть соответствующие вписанные углы.

$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 3$ равен половине дуги BA, $\angle 2$ также опирается на дугу BA, а значит, равен ее половине. Значит, $\angle 1 = \angle 2$.

Это восходящий анализ.

Пример 3. Доказать, что при любых $a > 0, \quad b > 0$

$$a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2 \qquad (1)$$

Чтобы доказать (1), нужно доказать: $a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 \geq 0$ (2).

Чтобы доказать (2), нужно доказать: $a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$ (3).

Чтобы доказать (3), нужно доказать: $(a^2 - b^2)(a-b) \geq 0$ (4).
Чтобы доказать (4), нужно доказать: $(a-b)^2(a+b) \geq 0$ (5).
Чтобы доказать (5), нужно доказать, что при $a>0,\quad b>0$ $(a-b)^2 \geq 0,\quad a+b>0$. Но это очевидно.

Рассмотрим схему для проведения анализа. Пусть S – совокупность истинных высказываний. Требуется доказать предложение $A_n \Rightarrow B_n$. Чтобы доказать B_n, достаточно доказать B_{n-1}, из истинности которого следует истинность B_n. Если B_{n-1} есть одно из высказываний S или очевидных следствий из (S, A_n), то B_n доказано. Если же это не так, и $B_{n-1} \notin S$ и не является следствием (S, A_n), то подыскивается второе предложение B_{n-2} из которого необходимо вывести B_{n-1}, и т.д., пока не дойдут до $B_1 \in (S, A_n)$ или следствия из S. Значит, будет доказана истинность B_n. Этот метод называется регрессивным (возврат).

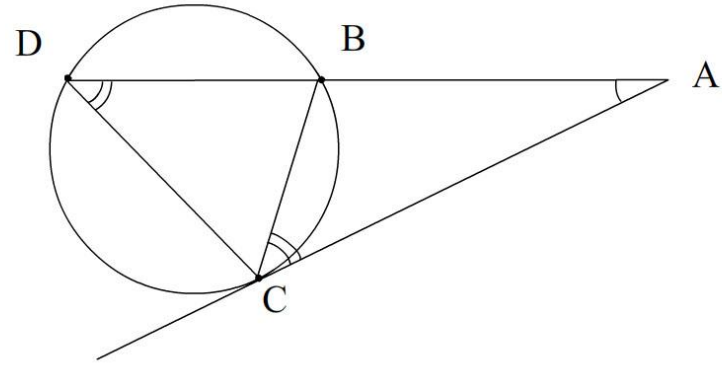
Анализ лежит в основе весьма общего подхода к решению задач, известного под названием сведения (редукции) задачи к совокупности подзадач. Идея такого подхода состоит именно в свойственном для анализа «размышлении в обратном направлении» от задачи, которую предстоит решить, к подзадачам, затем от этих подзадач к подподзадачам и т.д., пока исходная задача не будет сведена к набору элементарных задач. К ним относятся задачи, решаемые за один шаг поиска, или более сложные задачи, решение которых уже известно из имеющегося опыта решения задач.

Пример 4. Докажите, что если через точку вне окружности провести секущую и касательную, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

Обозначим для краткости условие через P, а заключение – Q. Тогда имеем P: AC – касательная. C – точка касания, AB – ее внешняя часть; Q: $AD \cdot AB = AC^2$. (1)

Во введенных обозначениях задача запишется так: $\Gamma, P \overset{?}{\Rightarrow} Q$, где Γ – совокупность уже известных истинных предложений геометрии. Чтобы доказать (1), нужно доказать:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \quad (2).$$



Пропорциональность отрезков можно получить из подобия треугольников. В частности, речь идет о треугольниках ACD и ABC. Итак, чтобы доказать (2), нужно доказать $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (3).

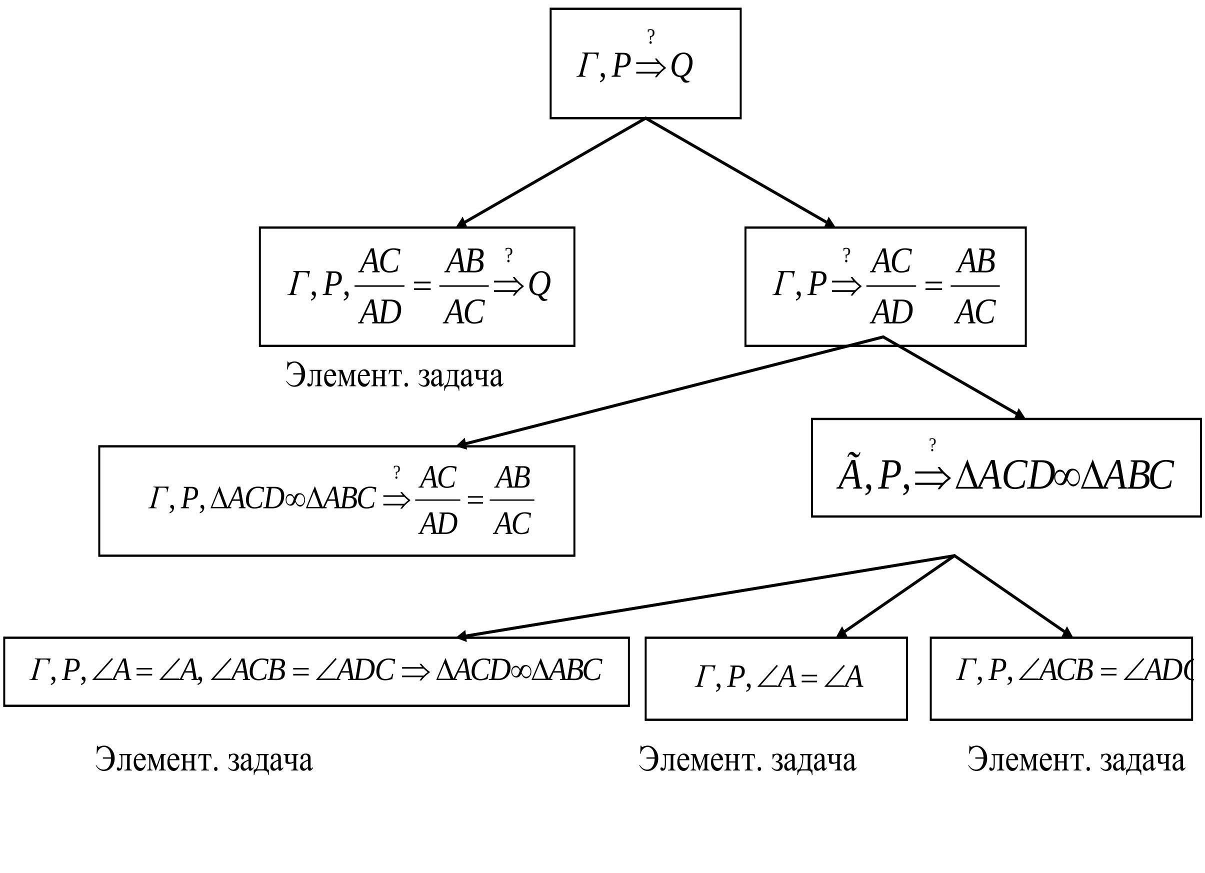
Перебирая в уме все признаки подобия треугольников и учитывая, что на пропорциональность отрезков нам ссылаться нельзя, так как это нам нужно доказать, приходим к необходимости воспользоваться первым признаком подобия (по двум углам). Речь идет об углах A (общий) и $\angle ACB$ и $\angle ADC$. Итак, чтобы доказать (3), нужно доказать, что $\angle ACB = \angle ADC$ (4).

Это равенство непосредственно следует из измерения вписанного угла и угла, образованного касательной и хордой, и потому также может считаться элементарным.

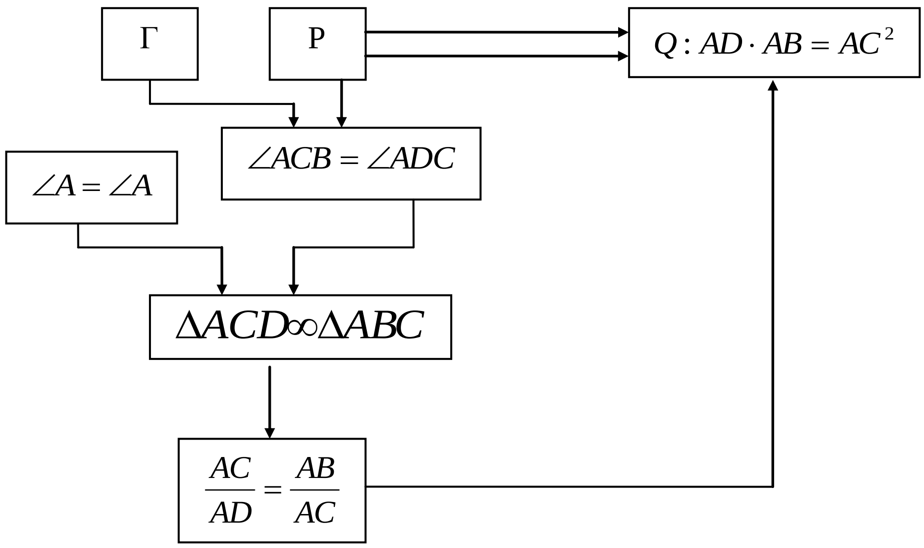
На этом сведение исходной задачи к подзадачам завершается. Теперь, идя обратным путем, от элементарных задач, к которым мы свели исходную задачу, мы получим решение этой задачи, т.е. доказательство сформулированного предложения.

Осуществленный поиск и само доказательство могут быть представлены в виде графов.

Граф поиска доказательства (анализ)



Граф доказательства (синтез)



Восходящий анализ. Рассмотренная выше форма соединения анализа и синтеза, которая называется *восходящим анализом*. Сначала ищем предложение (1), из которого вытекает требуемое предложение (*), затем предложение (2), из которого вытекает предложение (1) и т.д. Если в конце концов получается истинное утверждение (3), то получаем подтверждение гипотезы.

В этой форме аналитического метода от следствия восходят к основанию, поэтому он и называется восходящим анализом. Чтобы выделить особенности восходящего анализа, его рассматривают как особый метод. В действительности он неизменно связан с синтезом. Процесс нахождения на каждом последующем этапе достаточного основания является аналитическим процессом (так как из многих возможных оснований выбирается одно) и синтезом (так как устанавливается логическая связь между основанием и следствием: из основания выводится следствие).

Восходящий анализ дает возможность найти доказательство сформулированной теоремы: рассуждение имеет отправной пункт, мотивируются дополнительные построения и логические переходы, намечается план доказательства. Поэтому необходимо научить учащихся пользоваться этим методом.

3. Нисходящий анализ. Существует еще одна форма соединения анализа и синтеза, при которой мы на каждом шаге находим следствие из искомого (например, задачи на построение в геометрии). Такую форму соединения анализа с синтезом называют *нисходящим анализом*.

Пример 5. Длины сторон треугольника a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $ac = 6Rr$ (1), где R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности.

Предположим, что утверждение доказано.

Подставим $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ в (1).

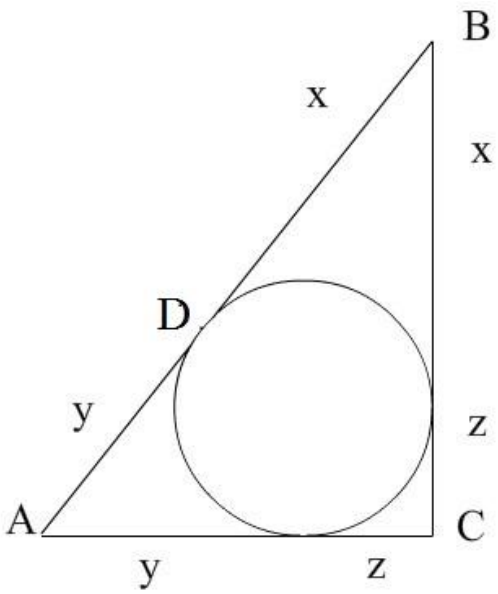
$ac = 6 \cdot \dfrac{abc}{4S} \cdot \dfrac{2S}{a+b+c}$, $1 = \dfrac{3b}{a+b+c}$, откуда

$a+b+c = 3b,$ $a+c = 2b,$ $\dfrac{a+c}{2} = b$ – но это верно, так как $a,$ $b,$ c – члены арифметической прогрессии.

Отметим, что любой переход обратим.

Пример 6. Круг, вписанный в Δ ABC, касается стороны AB в точке D, причем AC•CB = 2 AD•DB. Доказать, что Δ ABC прямоугольный.

Введем обозначения для отрезков касательных: AD =y, BD = x.



AC•CB = 2 AD•DB.

$(x+y)(x+z) = 2xy$

$xy+xz+yz+z^2 = 2xy$

$xz+yz+z^2 = xy$ (1)

Если предположить, что угол B прямой, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$(y + z)^2 = (y + x)^2 + (x + z)^2$.

$yz = xy + x^2 + xz$, что противоречит (1).

Если предположить, что угол C прямой, то $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

$(y + x)^2 = (y + z)^2 + (x + z)^2$.

$xz+yz+z^2 = xy$, что совпадает с (1).

Значит, нужно доказать, что угол C прямой.

Но это не решение, т.к. из ложного предложения можно получить истинное, например, при $a \neq b$ равенство $a - b = b - a$ ложно, но $(a - b)^2 = (b - a)^2$ истинно.

Доказательство: $xz+yz+z^2 = xy$ по условию (1)

Умножим обе части на 2: $2xz+2yz+2z^2 = 2xy$

Прибавим к обеим частям $x^2 + y^2$.

$(x^2 + 2xz + z^2) + (y^2 + 2yz + z^2) = (x^2 + 2xy + y^2)$

$(y + z)^2 + (x + z)^2 = (y + x)^2$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$. ПО теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C.

Пример 7. Ученица получила $\sqrt{98} = \sqrt{81 + 17} = 9 + \sqrt{17}$ (1). Предположим, что (1) истинно, тогда по определению квадратного корня $81 + 18\sqrt{17} + 17 = 98$ и $18\sqrt{17} = 0$. Последнее ложно, значит, и (1) ложно. Схема нисходящего анализа: пусть S – совокупность истинных высказываний. Требуется доказать предложение $A_n \Rightarrow B_n$. Допустим, что $A_n \Rightarrow B_n$ истинно. Опираясь на (S, $A_n \Rightarrow B_n$), получаем следствия B_{n-1}, B_{n-2}, …, B_1, последнее из которых либо противоречит одному из истинных предложений (или условию задачи), либо является истинным предложением. В первом случае B_n ложно (если следствие ложно, то ложно и основание). Во втором случае B_n может быть истинным или ложным (из лжи можно получить истину). Чтобы доказать, что B_n верно, нужно показать, что из B_1 также следует B_n.

Значение нисходящего анализа состоит в том, что, во-первых, это деструктивный метод: может служить для опровержения предложений, ошибочно принятых за истинные без доказательства. Так применял его Сократ (470 – 399 гг. до н.э.). Во-вторых, он помогает строить план доказательства предложения. При отыскании плана доказательства (решения) нисходящий анализ легче восходящего (переход от предложения к следствию легче и привычнее для учащихся, чем подбор для следствия достаточного основания).

4. Доказательство от противного. Нисходящий анализ является составной частью способа *доказательства от противного*. Пусть S – совокупность доказанных теорем. Требуется доказать $\overline{A_n \Rightarrow B_n}$. Допустим, что $A_n \Rightarrow B_n$ ложно, тогда истинно $\overline{A_n \Rightarrow B_n} \equiv \overline{\overline{A_n} \vee B_n} \equiv A_n \wedge \overline{B_n}$ (всякое высказывание либо истинное, либо ложное – закон исключения третьего). $\left(S, A_n, \overline{B_n}\right) \Rightarrow \overline{B_{n-1}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \overline{B_1}$. Пусть $\overline{B_1}$ отрицает истинность $A_n \in S$. В этом случае мы пришли к противоречию, абсурду, значит, $\overline{B_n}$ ложно. Но тогда $\overline{B_n}$ отклоняется. По закону исключенного третьего надо признать, что B_n истинно.

Доказательство приведением к нелепости является косвенным доказательством: истинность $A_n \Rightarrow B_n$ устанавливается доказательством ложности $\overline{B_n}$. Доказательству «от противного» присущи черты, общие с аналитическим методом. Оно начинается с рассмотрения того, что требуется доказать. $\overline{B_n}$ разбивают на возможные случаи (элементарный анализ), и в любом случае показывается, что этот анализ приводит к противоречию. Введя предложение $\overline{B_n}$, присоединяя его к совокупности известных предложений S получают следствия из $\left(S, \overline{B_n}\right)$, пока не достигают противоречивого следствия. Это сближает доказательство от противного с нисходящим анализом.

План доказательства «от противного» (А.В. Погорелов):

1. Допустим, что заключение теоремы ложно. Предположим, что верно предложение, противоположное тому, что утверждается в теореме.

2. Путем рассуждений, опираясь на аксиомы и теоремы, приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме.

3. Наличие противоречий заставляет отказаться от принятого предложения.

4. Признаем правильность заключения доказываемой теоремы.

Содержание плана доказательства учащимся необходимо предложить передать своими словами.

Необходимо подготовить учащихся к тем ситуациям, которые встречаются при доказательстве теорем методом «от противного» (примеры упражнений):

1) Даны два отрезка прямой a и b. Какие отношения могут быть между длинами этих отрезков?

2) c и d – два отрезка прямой: $c \le d$. Какие отношения могут быть между длинами этих отрезков?

3) a и b– два отрезка прямой, причем $a \ne b$. Какие отношения могут быть между длинами этих отрезков?

4) c и d – два отрезка прямой, причем с не меньше d. Какие отношения могут быть между длинами этих отрезков?

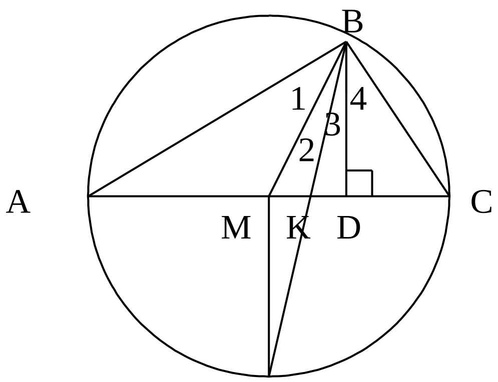
5) A и B – два угла. Угол A не меньше угла B. Какие заключения можно сделать о величинах этих углов?

6) C и D – два угла, причем $\angle C \ne \angle D$, кроме того, угол C не больше угла D. Какое соотношение существует между углами C и D?

7) AB и CD – две прямые, принадлежащие одной плоскости. Какие возможны случаи взаимного расположения этих прямых?

5. Соединение анализа и синтеза. Наиболее общим и плодотворным является такое соединение анализа с синтезом, при котором мы совершаем в рассуждении попеременное движение с двух сторон: от данных к искомому (синтез) и от искомого к данным (анализ), пока полученные утверждения не сблизятся настолько, чтобы осуществить догадку.

Пример 8. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.



Легко показать, что биссектриса лежит между медианой и высотой. Тогда искомое: $\angle 2 = \angle 3$ (*). Продвижение от данных к искомым неясно.

Попробуем пойти обратным путем (от искомого).
Так как $\angle ABK = \angle KBC$, то для доказательства равенства (*) достаточно установить $\angle 1 = \angle 4$.
Возвращаемся к данным. Замечаем, что $\angle 1 = \angle \mathrm{A}$, т.к. AM = MB = R.

Возвращаемся к искомому. Теперь для подтверждения соотношения $\angle 1 = \angle 4$ достаточно установить $\angle \mathrm{A} = \angle 4$.

Возвращаемся к данным. $\angle A$ и $\angle 4$ – острые углы прямоугольных треугольников ABC и DBC с общим острым углом C. Так как $\angle A$ и $\angle 4$ дополняют угол C до 90^0, $\angle A = \angle 4$.

Поиск решения проходит по схеме соединения анализа с синтезом: движении шло попеременно в прямом и обратном направлениях. Заметим, что при рассказе этого решения учащиеся будут излагать его не в том порядке, который реализован при решении, а в виде синтетической цепочки.

Пример 9. На мельницу привезли 9600 кг пшеницы. При размоле отходы составили 1200 кг. Муку насыпали в мешки и погрузили в три машины. На первую машину погрузили 30 мешков, на вторую – 35, в третью – 40 мешков. Сколько кг муки погрузили на каждую машину, если во всех мешках муки было поровну?

Анализ.

Каков главный вопрос задачи?	Сколько кг муки погрузили в каждую машину?
Что для этого нужно знать?	Сколько мешков муки погрузили в каждую машину (известно) и сколько муки насыпали в каждый мешок?
Чтобы узнать, сколько муки насыпали в каждый мешок, что нужно знать?	Сколько всего получилось муки после размола? Сколько мешков было занято под муку?
Как это узнать? (что известно?)	

Итак, каков план решения задачи?

Синтетический метод. Отправляемся от условия и, пользуясь известными предложениями, получаем заключение как логическое следствие.

Зная, что на мельницу привезли 9600 кг пшеницы, а при размоле отходы составили 1200 кг, что можно найти?	Сколько кг муки получились после размола? 9600-1200=8400 (кг)
Зная, что на первую, вторую и третью машины погрузили 30, 35 и 40 мешков соответственно, что можно узнать?	Сколько мешков занято под муку? 30+35+40=105 (м)
Что также можно узнать?	Сколько муки погрузили в каждый мешок? 8400:105=80 (кг)
А теперь что можно узнать? (Можно ли ответить на вопрос задачи?)	Сколько муки погрузили в каждую машину? $80 \cdot 30 = 2400$(кг) погрузили в 1 машину $80 \cdot 35 = 2800$(кг) – во вторую машину $80 \cdot 40 = 3200$ (кг) – в третью машину

Схема синтетического доказательства. Пусть S – совокупность ранее доказанных истинных высказываний. Требуется доказать предложение $A_n \Rightarrow B_n$. Исходя из S и используя условие A_n выводим первую группу следствий A_{n-1}. Если из них следует заключение B_n, то утверждение доказано. Если нет; то выводим вторую группу следствий A_{n-2} и т.д. Если в процессе доказательства придем к предложению, противоположному $\mathrm{B_n}$ то теорема $A_n \Rightarrow B_n$ ложна.

Древние греки отдавали предпочтение синтетическому изложению геометрии, поскольку, во-первых, синтетическое изложение доказательств отличается полнотой, сжатостью и краткостью, поэтому удобно для изложения законченных математических теорий. Во-вторых, синтетический метод служит для отыскания доказательства предложения, которое сформулировано, но логически не обосновано. Однако при синтетическом доказательстве невозможно мотивировать вспомогательные построения, дать обоснованный план доказательства. Оно требует лекционного преподавания, при этом ограничивается инициатива и активность учащихся, так как нужно только слушать и понимать изложение учителя.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем отличие анализа и синтеза как способа рассуждений?
2. В чем состоит преимущество анализа и синтеза как метода обучения?
3. Раскройте схему восходящего анализа.
4. Опишите применение восходящего анализа для решения задачи: «На сторонах угла XOY отмечены точки A, B, C и D так, что OA=OB, AC=BD. Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE – биссектриса угла XOY» (известны только признаки равенства треугольников, вертикальные и смежные углы).
5. Приведите схему нисходящего анализа.
6. Опишите применение нисходящего анализа для решения задачи: «Доказать, что в равнобедренной трапеции квадрат диагонали равен квадрату боковой стороны, сложенной с произведением оснований».
7. Опишите применение анализа и синтеза для решения задачи: «Велосипедист проехал 80 км за 5 ч. Сколько времени потратит на этот путь мотоциклист, если его скорость на 24 км/ч больше, чем скорость велосипедиста?».

Библиографический список

1. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
3. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. пед. ин-тов спец. 2104 Математика и 2105 Физика / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

Глава 4. Формирование математических понятий

1. Психологические основы формирования понятий. Первоисточником наших знаний о материальном мире являются *ощущения* и *восприятия* – первые сигналы действительности. На основе ощущений и восприятий образуются общие *представления*, как результат установления временных связей первой сигнальной системы. Параллельно с первой сигнальной системой у человека в результате общественной жизни развивается вторая сигнальная система, основным образованием которой является *слово*. Каждое слово представляет собой результат сложного синтеза слуховых, кинестетических и зрительных восприятий, связанных с соответствующими общими представлениями (кинестетические – ощущения и восприятия, связанные с движением организма).

Слово, связанное с более или менее обширным классом предметов, явлений или взаимоотношений между различными объектами, образует *понятие* – высший продукт мозга.

Понятия возникают и развиваются в результате процессов анализа и синтеза, абстракции и обобщения. Анализ расчленяет сложные объекты наших восприятий на более простые элементарные части, абстракция выделяет из них характерные и общие черты, синтез относит эти черты к некоторому единству, а обобщение распространяет эти свойства на все объекты, принадлежащие данному классу. Все понятия находятся в процессе развития, которое происходит вместе с развитием индивидуальным и общественным (пример: развитие понятия числа от натурального и дальше). Математические понятия возникают и развиваются на той же основе и теми же путями, как и все остальные понятия. Математические понятия – отражение в мозгу человека существующих свойств, форм и количественных отношений действительного мира.

2. **Общая характеристика понятий.** *Признаками* или свойствами предмета называется все то, в чем предметы сходны или различны между собой. Признаки предмета, отраженные в мыслях о предмете, называются *признаками понятия.* Слово (или группа слов), которым обозначают научное понятие, называется *термином.*

Признаки предмета делятся на существенные и несущественные. *Существенным* признаком предмета называют такой признак, который выражает необходимое свойство предмета. Предмет, лишенный этого свойства, перестает быть данным предметом.

В понятии «параллелепипед» отражены следующие признаки: 1) шестигранник; 2) параллельность противоположных граней; 3) равенство противоположных граней; 4) равенство противоположных двугранных углов и т.д. Каждый из этих признаков является существенным и общим для всех параллелепипедов и мысль о всех таких известных признаках есть понятие «параллелепипед».

Несущественными (второстепенными) признаками могут быть: равенство смежных граней, равенство всех ребер, перпендикулярность диагоналей и т.д. Любой из этих признаков не входит в понятие «параллелепипед», так как ни один из них не является необходимым его свойством.

Понятия вырабатываются на основе на основе представлений. *Представление* – это мысль о признаках предмета, общих и индивидуальных, существенных и несущественных. Чтобы перейти от представления к понятию, нужно проделать следующие логические операции:

1) путем анализа выделить в сходных предметах отдельные признаки;

2) выяснить, какие из этих признаков являются общими и существенными, а какие индивидуальными и несущественными;

3) абстрагироваться (отвлечься) от несущественных признаков;

4) соединить (синтез) существенные признаки, прийти к понятию о предмете или группе предметов.

Каждое понятие имеет две логические характеристики: содержание и объем. *Содержанием понятия* называется совокупность существенных признаков предмета, мыслимых в понятии. Под *объемом* понятия подразумевается множество предметов, каждому из которых присущи признаки, отражаемые в понятии. Содержание понятия отражается в определении, а объем в классификации.

Пример 1. 1) понятие «трапеция» имеет существенные признаки: а) 4 угла; б) параллельность одной пары сторон; в) непараллельность другой пары. Объемом этого понятия будет множество всех трапеций: равнобедренных и неравнобедренных, прямоугольных и непрямоугольных.

2) содержание понятия «простое число» состоит из следующих признаков: а) целое положительное число; б) имеет только два делителя; в) число больше единицы. Объемом этого понятия будет множество всех простых чисел.

Рассмотрим такие операции с понятиями, как ограничение и обобщение понятий.

Пусть содержание понятия А состоит из совокупности существенных признаков a, b, c, и пусть все эти признаки независимы. Тогда, отбрасывая хотя бы один из этих признаков, мы перейдем к более общему понятию, объем которого больше объема данного понятия А. Такая операция называется *обобщением* понятия.

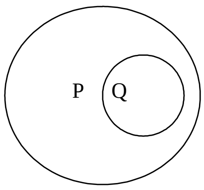
Пример 2. Исключим из признаков понятия «ромб» признак равенства смежных сторон, получим более общее понятие «параллелограмм».

Присоединяя к признакам данного понятия А новый признак (не вытекающий из признаков a, b, c…) мы осуществляем переход к менее общему понятию, к понятию меньшим объемом. Такая операция называется *ограничением понятия.*

Пример 3. Добавим к признакам понятия «ромб» новый признак – равенство всех углов (или равенство диагоналей). Получим новое понятие «квадрат». Объем понятия «квадрат» меньше объема понятия «ромб».

Итак, увеличение содержания понятия влечет за собой уменьшение его объема и наоборот. Эта связь между объемом и содержанием понятия выражается следующим законом: если содержание понятия P входит как часть в содержание понятия Q, то объем понятия Q входит как часть в объем понятия P.

Для характеристики понятий используются термины «род» и «вид».



Если $V_Q \subset V_P$, то *P* есть *род*, а *Q – вид.*

Пример 3. 1) «многогранник» – род по отношению к «призме»;

2) Рассмотрим действительные и рациональные числа. R – род, а Q – вид.

Род и вид относительны; так понятие «ромб» – вид по отношению к понятию «параллелограмм», но род по отношению к понятию «квадрат».

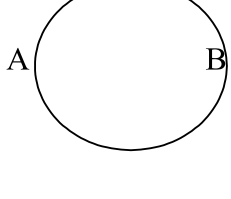
По объему понятия делятся на единичные и общие. *Единичным* понятием называется такое понятие, которое относится к единственному предмету (например: ученик Иванов, ΔABC и др.). *Общим* понятием называется понятие, относящееся к классу предметов, в том числе к любому элементу этого класса (например: треугольник, студент и др.).

Множество, охватываемое общим понятием, может быть конечным или бесконечным, то есть иметь конечный или бесконечный объем. Понятие «простое число» имеет бесконечный объем; «простое число, меньшее 10» – конечный объем (2, 3, 5, 7). Уменьшая объем общего понятия, можно получить единичное понятие (x – простое число, $21<x<29$).

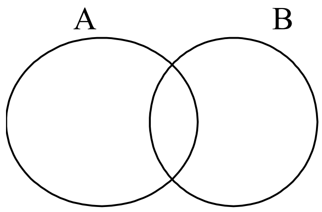
3. Отношения между понятиями. Понятия могут быть сравнимыми и несравнимыми. Два понятия называются *сравнимыми*, если в их содержании имеются общие признаки. Например, прямоугольник и ромб, действительное и мнимое число.

Два понятия называются *несравнимыми*, если по своему содержанию они весьма далеки друг от друга, например, многогранник и число, параллельность и равносильность уравнений. Сопоставление и сравнение таких понятий не имеет смысла.

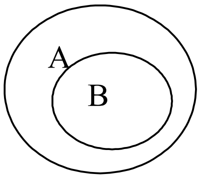
Совместимыми называются два понятия, содержание которых различно, но их объемы частично или полностью совпадают. Различают три вида совместимых понятий:



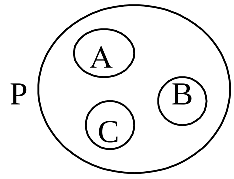
1. *тождественные* или равнозначные (их объемы совпадают). Пример: квадрат и правильный 4 угольник; куб и правильный шестигранник;



2. *пересекающиеся* понятия: пересечение объемов понятий есть непустое множество. Пример: прямоугольник и ромб; число, кратное 2 и число, кратное 3;



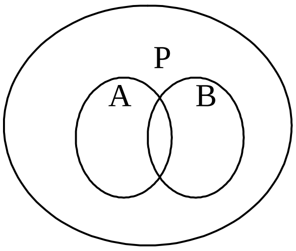
3. одно из понятий подчинено другому ($B \subset A$). Пример: действительные и рациональные числа; правильный многоугольник и квадрат, тождественные преобразования и сокращение дроби.



Несовместимыми понятиями называются такие сравнимые понятия, пересечение объемов которых пусто. Для несовместимых понятий характерно наличие общего рода.

Р – множество углов. А, В, С – острые, тупые, прямые углы. А, В, С – несовместимые понятия.

Понятия, являющие видами некоторого рода, называются *соподчиненными.* Несовместимые понятия всегда соподчиненные, но обратное не имеет места. Например, «прямоугольник», «ромб» – соподчиненные по отношению к понятию «параллелограмм», но в то же время это совместимые (пересекающиеся) понятия.



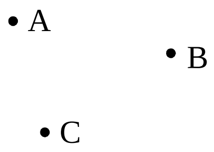
Р – множество параллелограммов;
А – множество прямоугольников;
В – множество ромбов.

В математике понятию общего рода соответствует понятие универсального класса. *Универсальным классом* называется то множество предметов, которое изучается данной наукой, или то множество предметов, которое подразумевается в данном рассуждении. Так, в теории чисел универсальным классом является множество целых неотрицательных чисел; в курсе алгебры 6 – 7 классов – множество рациональных чисел; в 8 – 11 классах – множество действительных чисел.

4. Методические пути введения понятий. Математические понятия играют различную роль при изложении курсов: одни включаются в логические операции (доказательство, обоснование правил и теорем, понятие логарифма, прогрессии и т.д.); другие выполняют служебную роль (понятия аксиомы, леммы); третьи на различных этапах имеют разную значимость (треугольник, прямоугольник, квадрат – в 1 – 6 классах и в 7 – 8 классах). Трудность усвоения понятий учащимися зависит от сущности понятия, от его роли в курсе, от возрастных особенностей учащихся.

Рассмотрим три основные методические линии введения понятий:

1) основные, *неопределяемые* понятия вводятся через абстракцию, иногда сопровождающуюся поясняющими описаниями (так вводится понятие точки, прямой, плоскости, дроби и др.)



«На рисунке изображены три точки. Они обозначены буквами латинского алфавита A, B и C. Если к точкам A и B приложить линейку и по ней провести от A до B линию, то получится отрезок AB. Точки A и B называются концами этого отрезка».

Пример: «Мама испекла пирог и разрезала его на 7 равных частей. Каждый кусок – это $\frac{1}{7}$ часть пирога. Детям она дала по два куска. Каждый ребенок получил по 2 части пирога. Это пишут так: $\frac{2}{7}$ части пирога. Чтобы выразить одну или несколько долей предмета, нужны новые числа – дроби. Числа $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$ – это обыкновенные дроби. Каждая обыкновенная дробь записывается с помощью черты и двух натуральных чисел».

Поясняющие описания не являются математическими предложениями, они не используются в доказательстве, поэтому *не нужно* требовать их запоминания учащимися, достаточно того, чтобы они умели свободно передавать их содержание.

2) Полученные путем абстракции основные понятия не подготовлены для применения их в доказательстве. Для того, чтобы подготовить их к доказательству, необходимо установить связи между ними. Такое наделение основных понятий свойствами, необходимыми для использования их в доказательствах, носит название *косвенного определения через аксиомы*.

Примером может служить определение прямой, плоскости, расстояния. Расстояние определяется путем перечисления его основных свойств: 1) расстояние от точки A до точки B положительно, если они различны, и равно нулю, если точки совпадают: $|AB| > 0$, если $A \neq B$ и $|AB| = 0$, если $A=B$; 2) расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A ($|AB| = |BA|$); 3) для любых трех точек A, B и C расстояние от точки A до точки C не больше (меньше или равно) сумме расстояний от A до B и от B до C: $|AC| \leq |AB| + |BC|$.

3) Определение через указание ближайшего рода и видового отличия.

Определение понятия – логическая операция, имеющая целью раскрыть содержание понятия, указать все его существенные признаки. Но перечисление всех существенных признаков сделало бы определение громоздким и незаконченным, т.к. с развитием науки познаются все новые и новые существенные черты изучаемых предметов (например, ромб обладает свойствами равенства противоположных углов, равенства противоположных сторон, равенства соседних сторон, параллельности противоположных сторон, перпендикулярности диагоналей и т.д.). *Научное определение* строго ограничивается перечислением только некоторых из известных существенных признаков (в определении ромба указано только то, что это параллелограмм, т.е. его противоположные стороны попарно параллельны, и что все стороны его равны). В этом смысле определение называют дефиницией – ограничением, а требование определить данное понятие понимается как требование ограничить его содержание перечислением только некоторых признаков.

При отборе существенных признаков, подлежащих включению в определение, исходят из того, что нужно установить: а) сущность определяемого предмета; б) отличие этого предмета от всех сходных с ним предметов.

Наиболее эффективным и рациональным способом решения этих задач является *подведение определяемого понятия под ближайшее к нему родовое понятие и указания затем видового признака.* Подведение под ближайшее родовое понятие означает, что все общие и существенные признаки этого рода присущи определяемому предмету, поэтому нет необходимости перечислять эти признаки. Чтобы выделить определяемый предмет среди других предметов того же класса, отделить его от всех родственных ему по классу предметов, нужно ввести такой признак, который отражал бы наиболее существенные черты предмета. Этот признак (видовое отличие) должен удовлетворять двум требованиям: чтобы он позволял проще и легче отличить этот предмет от всех остальных предметов класса; чтобы, опираясь на этот признак, можно было проще и легче вывести все остальные видовые признаки. Этим требованиям могут удовлетворять несколько определений одного и того же понятия.

Определение через ближайший род и видовое отличие является основной формой определения. Частным видом его является генетическое или конструктивное определение. *Генетическим* называется такое определение, в котором видовое отличие содержит указание на происхождение или способ образования определяемого объекта.

Пример 4. 1) Поворотом вокруг центра O называется такое перемещение плоскости, при котором: а) точка O отображается сама на себя; б) угол между любым лучом OX и соответствующим ему лучом OX_1 имеет одну и ту же величину α. Величина α называется углом поворота ($0^0 \le \alpha \le 180^0$).

2) Параллельным переносом называется отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Понятия, не имеющие рода, определяются путем перечисления характерных признаков (определение параллельных прямых, прямой, параллельной плоскости, параллельных плоскостей и др.).

Пример: прямые а и в, принадлежащие одной плоскости, называются параллельными, если они не имеют общих точек.

5. Правила определения.

1. Определение должно быть *соразмерным*: объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать, т.е. должны быть тождественными понятиями.

Пример 5. Квадрат – прямоугольник, у которого смежные стороны равны. «Квадрат» – определяемое понятие; «прямоугольник, у которого смежные стороны равны» – определяющее понятие. Объемы их совпадают.

Нарушение требования соразмерности понятий приводит к логическим ошибкам двух видов:

1) ошибка слишком узкого определения, когда объем определяющего понятия меньше объема определяемого понятия. Пример: правильной призмой называется призма, основанием которой служит квадрат (объем понятия «правильная призма» больше объема понятия «призма, в основании которой квадрат»);

2) ошибка слишком широкого определения, когда объем определяющего понятия оказывается больше объема определяемого понятия. Пример: иррациональным числом называется бесконечная десятичная дробь, или параллелепипед есть призма с четырехугольным основанием.

2. Определение *не должно содержать лишних* признаков, т.е. признаки, входящие в определение, должны быть независимыми.

Нарушение данного правила не изменяет смысла определения, поэтому обнаружить такую ошибку затруднительно. Неверны определения: «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны» или «Убывающей арифметической прогрессией называется такая арифметическая прогрессия, разность которой меньше 0 и члены которой убывают по мере удаления от начала прогрессии».

Определения, содержащие лишние признаки:

1) ромб – параллелограмм, у которого *все* стороны равны (ромб – это параллелограмм с равными смежными сторонами);

2) квадрат – ромб, у которого *все* углы прямые;

3) прямоугольник – это параллелограмм, *все* углы которого прямые (прямоугольник – это параллелограмм с прямым углом).

Логически несовершенно определение А.П. Киселева: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она, пересекаясь с плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведенной на плоскости через точку пересечения». Требование, чтобы прямая пересекала плоскость, является излишним, т.к. оно следует из перпендикулярности прямой всем прямым плоскости. Если раньше ввести понятие угла между двумя скрещивающимися прямыми, можно в определении опустить, чтобы прямая на плоскости проходила через основание перпендикуляра. Минимальным является следующее определение: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым плоскости».

Безусловное выполнение требования минимальности в науке обязательно, но в школьных учебниках *иногда допускаются отступления* из педагогических соображений: необходимо сделать определение более понятным, отвечающим наглядным представлениям (см. определение ромба через параллелограмм, определение квадрата через ромб).

4. Определение должно быть ясным, т.е.

1) излагаться в наиболее совершенной стилистической форме;

2) в нем не должны встречаться двусмысленные термины, сравнения (лев – царь зверей);

3) определяющее понятие должно быть яснее определяемого понятия, т.е. а) в определяющее понятие могут входить те и только те термины данной науки, которые в ней ранее были уже известны; б) нельзя определять неизвестное через неизвестное.

Вращение – есть движение вокруг оси (ось – это прямая, вокруг которой происходит вращение).

Таким образом, определение математического понятия, символа или действия должно состоять в замене его сочетаниями ранее известных понятий, символов, действий.

Пример 6. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, здесь a^{-m} – определение нового понятия. Символ $\frac{1}{a^m}$ – определяющее понятие, содержит ранее известные символы (дробь, число 1 и символ степени с положительным основанием), значит, удовлетворяет требованию ясности.

Характерным случае нарушения правила ясности служит ошибка, называемая порочным кругом в определении: в состав определяющего понятия входит само определяемое понятие (квадрат есть фигура, имеющая квадратную форму) или такое ранее неизвестное понятие, содержание которого затем раскрывается при помощи определяемого.

Пример 7. 1) Окружность есть граница круга. Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

2) Сложением называется нахождение суммы (сумма определяется как результат сложения).

3) Прямым углом называется угол, содержащий 90^0 (когда вслед за этим градус определяется как $\frac{1}{90}$ часть прямого угла)

Требование ясности является абсолютным, не допускающим никаких исключений ни в научном курсе, не в школьном учебнике. Неясное определение не является определением.

Необходимо, чтобы учащиеся понимали, что никакие определения не доказываются. Вместе с тем в процессе обучения математике можно (и полезно) *мотивировать* то или иное определение понятия. Хотя определение понятия – условное соглашение, оно выбирается разумно, исходя из реальных свойств тех или иных объектов. Например a^0 полагается равным 1 для того, чтобы сохранялись свойства степеней: $a^0 \bullet a^k = a^{0+k} = a^k$.

6. Деление понятий. Процесс выяснения объема понятия называется *классификацией* понятия. Таким образом, под классификацией понятия понимают разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды. Это разделение основано на сходстве объектов одного вида и отличии их от объектов других видов в существенных признаках. Правильная классификация предполагает соблюдение следующих условий:

1) деление должно быть *соразмерным,* т.е. объемы видов должны полностью исчерпывать объем класса: $V_p = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$. Часто встречаются ошибки неполного деления (треугольники бывают остроугольные и тупоугольные, натуральные числа делятся на простые и составные (забыта 1), рациональные числа – на положительные и отрицательные (забыт 0)).

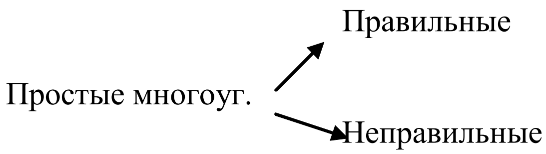
2) В процессе деления нельзя *менять основание.*

Деление данного понятия можно проводить по различным основаниям (треугольник можно делить по величине большего угла и по отношению сторон). Правило требует, чтобы выбранное основание в процессе деления не подменялось другим основанием: не закончив деления по одному основанию, нельзя переходить к другому.

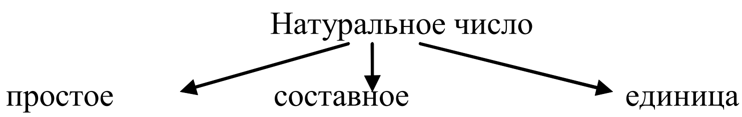
Пример нарушения: треугольник – равносторонний, равнобедренный и прямоугольный. Или: жители нашего города: русские, башкиры, студенты.

3) Образовавшиеся виды должны исключать друг друга, т.е. члены деления должны быть *несовместимыми понятиями.*

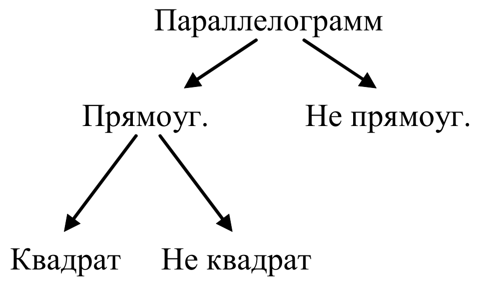
4) Деление должно быть *непрерывным,* т.е. нельзя допускать скачка в делении, следует переходить в процессе деления к ближайшему роду.

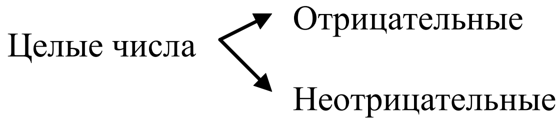


Это неверное деление. Нужно начинать с разделения простых многоугольников на выпуклые и невыпуклые. Если простые многоугольники разделить на правильные и неправильные, то это будет скачок в делении понятий.



Дихотомическое деление (деление на два класса) состоит в том, что понятие делят на B *и* $\overline{B}$. Прием дихотомии может быть применен последовательно. Преимущество дихотомического деления в том, что оно всегда соразмерно и члены деления всегда исключают друг друга.





7. Условия, способствующие успешному формированию математических понятий.

1) Учащимся должно быть указано возможно большее число объектов того класса, который определяет данное понятие. Объекты должны быть как можно более разнообразными и во всевозможных сочетаниях как друг с другом, так и с объектами классов, не принадлежащих данному понятию. При изучении углов углы необходимо представить во всех видах, при изучении пирамиды следует рассмотреть различные виды пирамид и тел, грани которых треугольники.

Чтобы исключить возможность представлений, полностью привязанных к данному конкретному чертежу, необходимо сопровождать объяснения различными чертежами.

2) К непосредственному восприятию этих объектов следует привлекать возможно большее число разнообразных зрительных, слуховых, кинестетических рецепторов (рецепторы – концевые окончания чувствительных нервов). Поэтому огромная роль отводится наглядным пособиям – моделям, таблицам, чертежам, обращениям к примерам из жизни, окружающей обстановке и из других дисциплин школьного курса. Для привлечения кинестетических рецепторов большое значение имеет самостоятельное моделирование и другие виды практических работ учащихся.

3) Вещи познаются в сравнении, поэтому наряду с объектами определяемого класса должны быть даны примеры объектов, отличных от них и указаны признаки, отличающие один класс от другого (вместе с правильными пирамидами – неправильные; с выпуклой фигурой – невыпуклые и т.д.).

4) При образовании новых понятий надо использовать уже сформировавшиеся у учащихся понятия – знать, что учащиеся знают или не знают к этому времени. В X классе, давая определение многогранников, необходимо учесть, что известно из VIII класса о многоугольниках.

5) Математические понятия первоначально усваиваются учащимися не в полном объеме, и задачей учителя является обеспечение правильного развития этих понятий в процессе дальнейшего изучения (длительное время формируются понятия функции, графика, уравнения, числа и др.).

6) Нужно учитывать, что многие математические термины имеют другие значения (обиходный жизненный смысл), прочно усвоенные учащимися

(угол, высота, вершина, опустить, восстановить и др.). Здесь для правильного формирования понятий необходимо устранить эти посторонние связи.

7) Однако и правильно образованные понятия при наличии прочно установившихся связей могут оказывать сопротивление внедрению новых понятий или расширению прежних. В этом заключается причина «консерватизма» в мышлении, этим объясняется сила привычки, традиций, предрассудков (до изучения комплексных чисел $\sqrt{-4}$ не имеет смысла).

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое содержание и объем понятия?
2. Опишите соотношение рода и вида по отношению к понятиям. Приведите пример.
3. В чем состоит обобщение и ограничение понятий?
4. Что такое совместимые и несовместимые понятия? Приведите пример.
5. Каковы методические пути введения понятий? Дайте их характеристику.
6. Перечислите требования к определению понятия.
7. В чем состоит классификация понятий?
8. Перечислите условия успешного формирования понятий.

Библиографический список

1. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова и др. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
3. Репьев, В.В. Общая методика преподавания математики / В. В. Репьев. – М.: Учпедгиз, 1958. – 223 с.
4. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студ. мат. спец. педвузов и учителей / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
5. Столяр А.А. Педагогика математики: Курс лекций / А. А. Столяр. – Минск: Выш. школа, 1974. – 382 с.

Глава 5. Методика изучения аксиом и теорем

1. Виды суждений. В мышлении понятия не выступают разрозненно, они определенным образом связаны между собой. Формой связи понятий друг с другом являются суждения. Суждение – такая форма мышления, в которой отображается наличие или отсутствие самого объекта или каких-либо его признаков и связей.

Важнейшими видами сложных суждений являются аксиомы и теоремы. Аксиома (в переводе с греческого – авторитетное предложение) – предложение, принимаемое без доказательства. Распространенный взгляд на аксиомы как «истины», не требующие доказательства ввиду своей «очевидности», совершено ненаучен. Аксиомы вовсе не являются очевидными, а представляют условные положения, косвенным образом служащие для определения основных терминов. Аксиомы принимаются без доказательства не потому, что они очевидны, а потому, что они суть первые предложения, для доказательства которых еще нет никакого исходного материала.

Определенное число аксиом образует систему исходных положений некоторой научной теории, лежащую в основе доказательств других положений (теорем) этой теории. Аксиомы и первичные (основные, базовые, неопределяемые) понятия составляют основной фундамент математической теории. К системе аксиом, характеризующих некоторую научную теорию, предъявляются требования независимости, непротиворечивости, полноты. Полнота – свойство системы аксиом данной аксиоматической теории, характеризующее степень охвата этой теорией той или иной области математики. Система аксиом называется *полной* относительно данной интерпретации, если из неё выводимы все утверждения, истинные в этой интерпретации. *Непротиворечивость* – свойство аксиом теории, состоящее в том, что в этой теории нельзя получить противоречие, т.е. доказать некоторое предложение и вместе с тем его отрицание или доказать некоторое заведомо абсурдное утверждение. *Независимость* – свойство системы аксиом, состоящее в том, что каждая аксиома является независимой, т. е. не является логическим следствием из множества остальных аксиом этой теории.

Теорема – математическое утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

2. Структура теоремы. В формулировке каждой теоремы указывается, при каких условиях рассматривается математический объект или отношение объектов и что об этом объекте или отношении объектов утверждается. Поэтому теоремы часто формулируются в виде условных предложений: если А, то В (такая форма теоремы называется *условной или импликативной*). Иногда теоремы формулируются в форме утвердительных предложений (Вертикальные углы равны. Сумма смежных углов равна 180^0). Такая форма называется *категорической.* Некоторые теоремы формулируются в *разделительной дизъюнктивной форме*: А есть или В, или С, или Д.

Пример: 1) Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180^0, то прямые параллельны.

2) При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Понятие теоремы ярко выражено в школьном курсе геометрии, но они встречаются в алгебре, арифметике (теорема Виета, свойство пропорции).

По числу условий и заключений теоремы делятся на простые и сложные (простые теоремы содержат одно условие и одно заключение). Всякое математическое предложение либо элементарное, либо построено из элементарных, определенным образом соединенных между собой логическими связками. Раскрыть логическую структуру сложного (составного) предложения значит показать, из каких элементарных предложений сконструировано данное предложение и как оно составлено из них, т.е. с помощью каких и в каком порядке применяемых логических связок «не», «и», «или», «если, то», «тогда и только тогда», «для всякого», «существует» и т.д.

3. Виды простых теорем. Рассмотрим теорему: $A \Rightarrow B$. Назовем её *прямой* теоремой. Из неё можно построить следующие предложения:

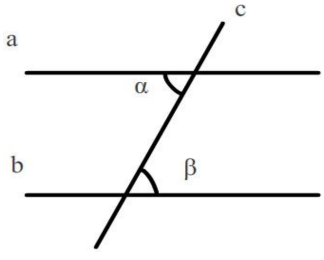
1) Обратное: $B \Rightarrow A.$
2) Противоположное: $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$
3) Обратное противоположному: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$

Рассматривая свойства математических объектов, которые выражаются теоремами, нет необходимости изучать все четыре вида предложений. Достаточно установить истинность или ложность одной какой-нибудь логически неравносильной пары предложений (прямой и обратной или прямой и противоположной), так как истинность или ложность одной такой пары влечет за собой истинность или ложность остальных двух теорем. Вот почему в любом курсе математики нам встречаются обычно лишь прямая и обратная теоремы, а остальные виды редко.

Математической моделью любой теоремы служит импликация вида: $(\forall x \in M) \quad A(x) \Rightarrow B(x)$, где M – множество, на котором задана теорема, разъяснительная часть, $A(x)$ – условие, $B(x)$ – заключение теоремы.

Пример: Теорема Пифагора: Рассмотрим треугольник ABC: $(\angle B = 90^0 \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2)$.

1) Теорема о сумме смежных углов: Рассмотрим любые углы α и β: (α и β – смежные $\Rightarrow \alpha + \beta = 180^0$).



2) Признак параллельности двух прямых, пересеченных третьей: рассмотрим прямые a и b, пересеченные третьей, а также накрест лежащие углы α и β, при этом образующиеся $(\alpha = \beta) \Rightarrow (a \parallel b)$.

3) Теорема о свойстве диагоналей ромба: Рассмотрим любой параллелограмм $ABCD$. ($ABCD$ – ромб) $\Rightarrow (AC \perp BD)$.

Чтобы получить формулировку обратной теоремы, надо оставить без изменения разъяснительную часть исходной теоремы, а условие и заключение поменять местами:

1) Теорема обратная теореме Пифагора: Рассмотрим треугольник ABC: $(AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \angle B = 90^0)$.

2) Рассмотрим любые углы α и β: ($\alpha + \beta = 180^0$) $\Rightarrow$(α и β – смежные) (ложное предложение).

3) Рассмотрим две прямые a и b, пересеченные третьей, а также образующиеся при этом накрест лежащие углы α и β. $(a \parallel b) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

4) Рассмотрим любой параллелограмм $ABCD$. $AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ – ромб.

Теорему, *противоположную* исходной, можно получить, если разъяснительную часть оставить без изменения, а условие и заключение заменить их отрицаниями.

Пример: Рассмотрим любой параллелограмм $ABCD$. Если $ABCD$ – не ромб, AC не перпендикулярна BD.

Итак, если требуется получить новую формулировку из исходной, в последней обязательно надо выделить разъяснительную часть, условие и заключение: $(\forall x \in M) \quad \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$.

4. Необходимые и достаточные условия. Условие всякой теоремы является достаточным условием по отношению к заключению. В свою очередь заключение – это необходимое условие по отношению к условию этой теоремы.

Необходимые условия утверждения – условия правильности утверждения, без выполнения которых утверждение заведомо не может быть верным. A необходимое условие для B, если утверждение $B \Rightarrow A$ истинно.

Достаточные условия утверждения – условия правильности утверждения, при выполнении которых, утверждение заведомо верно. А достаточно для В, если утверждение $A \Rightarrow B$ истинно.

Примеры:

1) Чтобы $(x-1)(x-2) = 0$, достаточно, чтобы $x = 1$, т.е. «$x = 1$» достаточное условие для $(x-1)(x-2) = 0$, или «если $x = 1$, то $(x-1)(x-2) = 0$» истинно.

2) Для того, чтобы $2a \in Z$ достаточно, чтобы $a \in Z$ («Если $a \in Z$, то $2a \in Z$» истинно). Это условие не является необходимым, т.к. «Если $2a \in Z$, то $a \in Z$» ложно – $2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \in Z, но \quad \frac{1}{2} \notin Z.$

3) Чтобы число x было больше 5, необходимо, но не достаточно, чтобы оно было больше 3, т.е. «$x>5 \Rightarrow x>3$» истинно, а «$x>3 \Rightarrow x>5$» ложно.
4) Чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Упражнения на необходимые и достаточные условия приведены в [5] (вместо многоточий следует вставить слова «необходимо» или/и «достаточно»):

1) Чтобы стать инженером, … изучить математику.
2) Чтобы сумма двух натуральных чисел была четной, … чтобы каждое слагаемое было четным.
3) Чтобы натуральное число делилось на 6, … чтобы оно делилось на 2.
4) Чтобы натуральное число делилось на 6, … чтобы оно делилось на 2 и на 3.

5. Этапы изучения теоремы.

Процесс изучения теоремы включает следующие *этапы*:

1) мотивация изучения теоремы;

2) ознакомление с фактом, отраженным в теореме;

3) формулировка теоремы и выяснение смысла каждого слова в формулировке теоремы;

4) усвоение содержания теоремы;

5) запоминание формулировки теоремы;

6) ознакомление со способом доказательства;

7) доказательство теоремы;

8) применение теоремы;

9) установление связей теоремы с ранее изученными теоремами.

Указанные этапы отражают деятельностную природу теоремы, идеи гуманизации и гуманитаризации образования, особенности математического знания и его усвоения. Отсюда главным в изучении теорем является не заучивание их формулировок и доказательств, а открытие школьниками теоремы, способа доказательства, самостоятельное конструирование доказательства, применение теоремы в различных ситуациях, установление различных связей теоремы с другими теоремами.

В зависимости от характера изучаемого материала, наличия учебного времени, уровня развития учащихся и других факторов учителя выбирают один из следующих способов ознакомления учащихся с новым математическим предложением [1]:

I – учащиеся готовятся к самостоятельному формулированию определения, аксиомы, к «открытию» теоремы;

II – учащиеся готовятся к сознательному восприятию, к пониманию нового математического предложения, формулировка которого им сообщается в готовом виде;

III – учитель сам формулирует новые определения, аксиомы, теоремы без какой либо предварительной подготовки, а затем сосредотачивает усилия учащихся на их усвоении и закреплении;

При осуществлении первых двух способов используется *эвристический метод* (сравнение двух объектов осуществляется посредством третьего, находящегося с исходными в известных отношениях), в классе создается проблемная ситуация. Это повышает интерес к знаниям, способствует развитию творческих способностей, но требует определенной затраты учебного времени, а нередко распыляет внимание учащихся на второстепенные детали, отвлекает их от основной идеи новой темы. Третий способ в методической литературе иногда осуждается, считается догматичным. Многие учителя успешно используют третий способ наряду с первыми двумя. При их выборе важно учитывать различные факторы и конечный результат. Введение новой теоремы первым или вторым способом проходит более организованно, когда используется *метод целесообразных задач*.

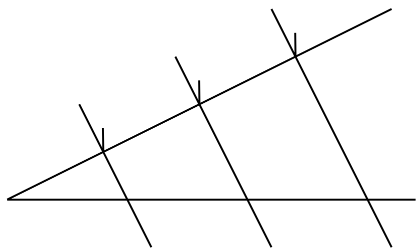
Примеры: 1) Учитель ставит задачу решить уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (2, 3)

б) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (–4, –3)

в) $x^2 + 8x + 15 = 0$ (–5, –3)

Установите зависимость между корнями приведения квадратного уравнения и его коэффициентами. Сформулируйте теорему.

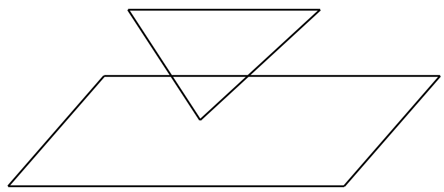


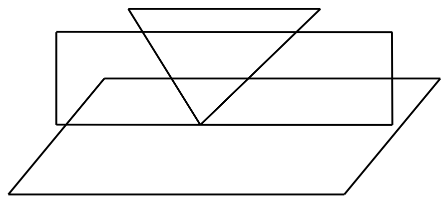
2) На одной стороне угла отложите несколько отрезков равной длины. Через точки деления проведите параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла. Измерением сравните длины получившихся отрезков. Сформулируйте вывод.

Теорема Фалеса: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

3) При введении аксиомы о пересечении плоскостей составляется модель: треугольная пластинка прикрепляется вершиной к плоскости, покрытой пластилином. Задается вопрос: «Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку?».

Многие учащиеся дают утвердительный ответ. Тогда учитель, не изменяя положения плоскостей на модели, совмещает с треугольной пластинкой прямоугольную и опускает последнюю на плоскость, покрытую пластилином.





После такой наглядной иллюстрации учащиеся хорошо осознают аксиому: «Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть прямая».

Первые два этапа реализуются посредством построений, измерений с последующим обобщением, анализа ситуаций окружающей действительности, специальных упражнений. Например, с теоремой о сумме углов треугольника учащиеся могут ознакомиться, измеряя непосредственно углы треугольника. Обобщая результаты измерений, учащиеся приходят к выводу, что сумма углов треугольника равна 180°.

Для усвоения содержания теоремы можно использовать упражнения на выделение условия и заключения теоремы; на вычленение на чертежах и моделях таких фигур, которые удовлетворяли бы условию теоремы; на выполнение чертежа, моделирующего условие и заключение теоремы. Например, усвоению формулировки теоремы «Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти две плоскости пересекаются, то их линия пересечения параллельна каждой из данных прямых» будет способствовать отыскание на моделях куба или рисунках таких фигур, которые удовлетворяли бы условию теоремы. Надо сказать, что с помощью рисунков можно открыть многие факты или убедиться в их справедливости. Так, используя графики функций, учащиеся могут самостоятельно сформулировать большинство теорем, относящихся к элементам математического анализа.

В целях облегчения запоминания громоздких формулировок теорем целесообразно поэлементное усвоение содержания теоремы. Для этого формулировка теоремы разбивается на отдельные элементы (в тексте элементы отделяются вертикальной чертой), после чего каждый из элементов используется при выполнении упражнений. Формулировка приведенной выше теоремы может быть разбита на следующие элементы: «Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, I причем эти две плоскости пересекаются, I то их линия пересечения параллельна каждой из данных прямых». После разбиения формулировки выполняются упражнения на распознавание ситуаций, удовлетворяющих условию теоремы, с последовательным использованием каждого элемента.

Способ связи аргументов от условия к заключению суждения называют методом доказательства. Методы доказательства делят на прямые и косвенные. Различают приемы прямого доказательства: прием преобразования условия суждения (синтетический); прием преобразования заключения суждения: отыскание достаточных оснований справедливости заключения (восходящий анализ); отыскание необходимых признаков справедливости суждения с последующей проверкой обратимости рассуждений (нисходящий анализ); прием последовательного преобразования то условия, то заключения суждения. К приемам косвенного доказательства относят: 1) метод доказательства от противного (истинность доказываемого утверждения устанавливается посредством опровержении противоречащего ему суждения); 2) разделительный (доказываемое утверждение рассматривается как один из возможных вариантов предложений, когда все предположения отвергаются, кроме одного). В зависимости от математического аппарата методы доказательства разделяются на алгебраический, векторный, метод геометрических преобразований и др. Рассмотрим перечисленные приемы.

1. *Прием преобразования условия (синтетический).* Суть синтетического доказательства заключается в том, что из условия выводят следствие B_1, затем из B_1 выводят B_2 и так далее до тех пор, пока следствием не окажется заключение теоремы. Другими словами, суть рассматриваемого приема состоит в доказательстве того, что заключение необходимо для условия доказываемого предложения. Схематично этот вид рассуждения можно изобразить так: $У \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow З$. Заметим, что выведение предложений осуществляется с привлечением известных фактов (теорем, аксиом, определений).

2. *Прием преобразования заключения (восходящий анализ).* Процесс рассуждения по методу восходящего анализа можно изобразить следующей схемой: $З \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \ldots \Leftarrow B_n \Leftarrow У$.

Для доказательства заключения подбирают суждение B_1, являющееся достаточным условием для заключения, затем подбирают суждение B_2, достаточное для B_1, и так далее до тех пор, пока не обнаружат, что данные являются достаточным условием для суждения B_n из цепи суждений, достаточных для заключения доказываемого предложения. Другими словами, суть метода восходящего анализа состоит в доказательстве того, что условие теоремы достаточно для ее заключения.

3. *Прием преобразования заключения (нисходящий анализ).* Сущность нисходящего анализа заключается в следующем: исходя из допущения,

что заключение доказываемого предложения верно, получают следствия B_1, B_2 и так далее до тех пор, пока не приходят к выводу, который может служить исходным соотношением в цепи обратных рассуждений. Очевидно, что этим путем находят условие, необходимое для заключения доказываемого предложения. Поэтому в отличие от восходящего анализа этот вид анализа не является доказательным.

4. *Прием последовательного преобразования то условия, то заключения утверждения.* Реальный процесс доказательства некоторого предложения не осуществляется только по одному пути: аналитическому либо синтетическому. Он следует как по одному, так и по другому пути.

6. Правила доказательства теорем. Для выработки у учащихся умения доказывать теоремы необходимо:

1) Повторить предварительно с учащимися ранее изученный материал, используемый при доказательстве.
2) Перед доказательством теоремы убедитесь, что все учащиеся правильно поняли содержание теоремы, четко усвоили условие теоремы и заключение.
3) Перед тем, как приступить к доказательству, учитель должен убедить учащихся в необходимости доказательства.
4) Учащиеся должны хорошо понимать, что в процессе доказательства мы используем истинные доводы (предложения), доказанные ранее теоремы и следствия, аксиомы и определения.
5) Учащиеся должны правильно относиться к роли чертежа, понимать, что он ничего не доказывает, а лишь помогает доказательству.
6) Постоянно, начиная с VII класса, нужно знакомить учащихся с логической структурой различных методов доказательства.
7) Условие теоремы в процессе доказательства должно быть использовано полностью. Это часто помогает натолкнуть учащихся на продолжение доказательства, когда они его забывают.
8) При доказательстве целесообразно определяемое понятие заменить его определением. При изменении доказательства использовать то определение, которое наиболее соответствует характеру рассуждений (Если интересует угол между диагоналями квадрата, то квадрат – ромб, если длина диагоналей, то квадрат – прямоугольник).
9) Определение часто заменяется необходимым и достаточным признаком определяемого понятия.
10) Чтобы предупредить формализм (формальное заучивание) доказательства без достаточного осознания его, надо повторить доказательство теоремы на измененном чертеже, при других обозначениях.

В результате изучения курса геометрии учащиеся должны знать основные свойства изучаемых фигур и методы, применяемые в геометрии, воспроизводить доказательство основных теорем курса. Существенная роль отводится развитию геометрической интуиции: чертеж должен стать важным эвристическим средством, позволяющим формулировать и проверять гипотезы, намечать пути решения задач. Сочетание наглядности со строгостью должно стать неотъемлемой частью геометрических знаний. Важным компонентом учебной деятельности на уроках геометрии должно быть аргументированное мышление о свойствах фигур, умственная деятельность по их обоснованию. Методам эвристики должно отдаваться предпочтение на уроках геометрии. А.В. Погорелов в книге «Элементарная геометрия» писал: «…очень немногие из выпускников школ будут математиками, тем более геометрами. Будут и такие, которые в своей практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора. Однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать».

Контрольные вопросы и задания

1. В чем сущность теоремы? Каковы виды теорем?
2. Выберите из школьных учебников алгебры и геометрии несколько теорем и разработайте методику ознакомления школьников с ними.
3. Проследите по учебникам геометрии и алгебры их ориентацию на реализацию этапов работы с теоремой.
4. Выберите любую геометрическую теорему и разработайте методику ее изучения.
5. Раскройте содержание этапов изучения теоремы.
6. Используя учебные пособия [1; 2; 3] по методике преподавания математики, выделите рекомендации по формированию у школьников потребности в логических обоснованиях.
7. Проследите по школьным учебникам математики решение проблемы формирования потребности доказывать. С помощью каких средств она решается авторами учебников?
8. Выберите какую-либо теорему и выделите в ее доказательстве логические шаги, его составляющие. Выделите идею доказательства.
9. Составьте упражнения, ориентированные на усвоение действий: а) выведения следствий; б) переформулировки требования задачи; в) составления вспомогательных задач.
10. Запишите доказательство любой теоремы в виде таблицы с двумя колонками:

Утверждения	Обоснования

На основе этой таблицы составьте несколько вариантов карточек для индивидуальной работы школьников.

Библиографический список

1. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : Учеб. пособие для студентов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.
3. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова и др. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
4. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
5. Репьев, В.В. Общая методика преподавания математики / В. В. Репьев. – М.: Учпедгиз, 1958. – 223 с.

Глава 6. Принципы и методы обучения математике

1. Принципы обучения. Фундаментом построения любого образовательного процесса являются принципы обучения. Анализ современной педагогической и дидактической литературы позволяет определить *принципы обучения как систему основных дидактических требований к процессу обучения, выполнение которых обеспечивает достижение объявленной цели образования.*

Согласно данному определению принципы обучения отражают общественные потребности и поэтому меняются в соответствии с изменениями в обществе (в частности, с повышением требований к уровню подготовки специалистов, к доминирующим качествам мыслительной деятельности членов общества, с появлением другого менталитета и характеристик личности и др.).

Система принципов строится на определенной методологической или мировоззренческой основе, исключающей внутренние противоречия. Таковой основой Я.А. Коменский считал принцип *природосообразности*, остальные принципы в его дидактике согласовывались с данным принципом.

К.Д. Ушинский к дидактическим принципам относил: *сознательность и активность обучения, наглядность, последовательность, прочность знаний и навыков*.

Приведем примеры систем принципов обучения в общеобразовательном процессе, предлагаемые различными педагогами-исследователями.

Ю.К. Бабанский (**система 1**):

1) научность;
2) связь с жизнью;
3) систематичность и последовательность;
4) доступность;
5) сознательность, активность;
6) наглядность.

Т.А. Ильина (**система 2**):

1) наглядность;
2) сознательность, активность;
3) доступность;
4) научность;
5) учет возрастных и индивидуальных особенностей;
6) систематичность и последовательность;
7) прочность;
8) связь с практикой и жизнью;
9) воспитание.

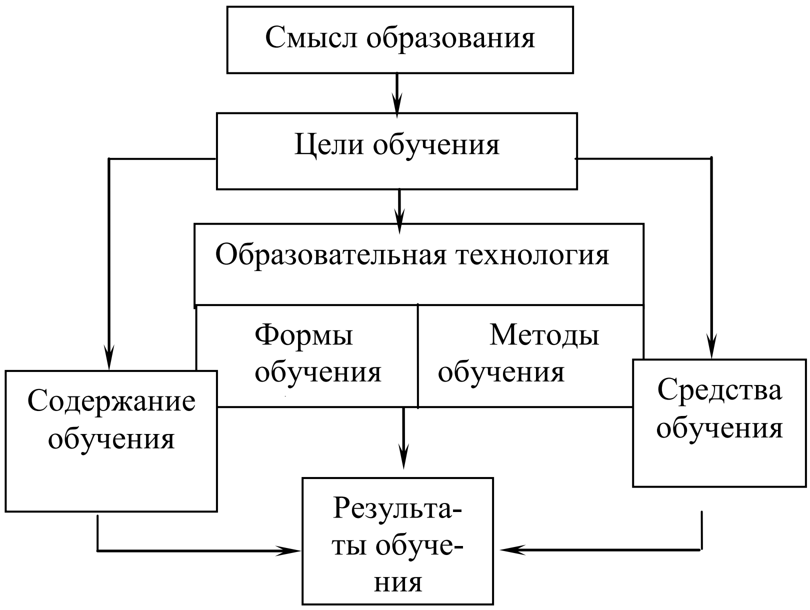
И.П. Подласый (**система 3**):

1) сознательность и активность;
2) наглядность;
3) систематичность и последовательность;
4) прочность;
5) научность;
6) доступность;
7) связь теории с практикой.

2. Различные подходы к построению иерархической системы принципов обучения математике. Каждая из приведенных выше классификаций может быть принята в качестве совокупности принципов обучения математике, однако учет особенностей современного процесса обучения (см. схему 1) и специфики математического материала требует выделения системы приоритетных принципов в определенной иерархии.

Схема 1

Дидактическая система А.В. Хуторского



В то же время переакцентировка ценностей в общественном сознании породила потребность в пересмотре основных принципов математического образования. Приведем примеры некоторых иерархических систем принципов, отвечающих, на наш взгляд, целевым требованиям к построению современного процесса обучения математике.

Система 4:

1) выделение главного;
2) учет возрастных и индивидуальных особенностей;
3) сознательность и активность;
4) самостоятельность;
5) доступность;
6) наглядность;
7) систематичность и последовательность;
8) научность;
9) прочность.

Обратим внимание на первый принцип – принцип выделения главного, сформулированный И.Д. Пехлецким. Этот принцип, трактуемый нами как принцип целеполагания на педагогическом, дидактическом и методическом уровнях, позволяет определить значимую на конкретном этапе и в конкретных условиях развития общества технологию обучения и выделить эффективный предметный материал для достижения поставленных целей обучения и развития школьников.

Система 5:

1. Принцип деятельности. Этот принцип является основным механизмом реализации целей и задач развивающего обучения, так как подразумевает обязательное включение каждого школьника в учебно-познавательную деятельность.

2. Принцип целостного представления о мире. Он означает, что у учащегося должно быть сформировано обобщенное, целостное представление о мире (природе – обществе – самом себе), о роли и месте каждой науки в системе наук. Естественно, что при этом знания, формируемые у учащихся, должны отражать язык и структуру научного знания.

Принцип единой картины мира в деятельностном подходе тесно связан с дидактическим принципом научности в традиционной системе, но гораздо глубже его. Здесь речь идет не только о формировании научной картины мира, но и о личностном отношении учащихся к полученным знаниям, а также об умении применять их в своей практической деятельности.

3. Принцип непрерывности. Он означает преемственность между всеми ступенями обучения на уровне методологии, содержания и методики.

4.Принцип минимакса. Этот принцип заключается в следующем: школа обязана предложить ученику содержание образования по максимальному уровню, а ученик обязан усвоить это содержание по минимальному уровню (А.А. Леонтьев). Система минимакса является оптимальной для реализации индивидуального подхода, так как это саморегулирующаяся система. Слабый ученик ограничится минимумом, а сильный возьмет все и пойдет дальше. Все остальные разместятся в промежутке между этими двумя уровнями в соответствии со своими способностями, возможностями и познавательными мотивами – они сами выберут себе уровень по своему возможному максимуму.

5. Принцип психологической комфортности. Согласно ему процесс обучения должен выстраиваться так, чтобы комфортно было и учителю и ученику.

6. Принцип вариативности. Этот принцип предполагает развитие у учащихся вариативного мышления, то есть понимания возможности различных вариантов решения задачи, умения осуществлять системный перебор вариантов, сравнивать и находить оптимальный вариант.

7. Принцип творчества (креативности). Принцип творчества предполагает максимальную ориентацию на творческое начало в учебной деятельности школьников, приобретение ими собственного опыта творческой деятельности.

Дидактические принципы, перечисленные в системах 4 и 5, развивая идеи традиционной дидактики, в концентрированном виде выражают методологию развивающего обучения современных психологов и дидактов и, таким образом, в целом обеспечивают решение современных задач развивающего обучения в образовательной школе. В заключение отметим, что формирование системы дидактических принципов не может быть завершено, ибо сама жизнь расставляет акценты значимости, и каждый акцент оправдан конкретной исторической, культурной и социальной заявкой. Кроме того, в конкретных условиях, определяемых особенностями личности учителя, контингента учащихся, идеологией построения образовательного процесса учебного заведения и др., может быть создана новая система принципов на основе комбинирования элементов разных систем или изменения иерархии в одной из разработанных систем.

3. Общедидактические подходы к понятию «метод обучения». Метод обучения – категория историческая. На протяжении всей истории развития педагогики и теории обучения математике проблема методов обучения развивалась с разных точек зрения:

– с точки зрения форм деятельности;
– с точки зрения логической структуры и функции форм деятельности;
– с точки зрения характера познавательной деятельности учащихся.

И сегодня существуют разные подходы к современной теории методов обучения. В соответствии с этим в методической литературе можно встретить разные определения понятия «метод обучения». Такому положению есть несколько причин, главные из которых следующие – многоплановость понятия, требующая детализации при исследованиях, и различные акценты, зависящие от сущностных особенностей времени.

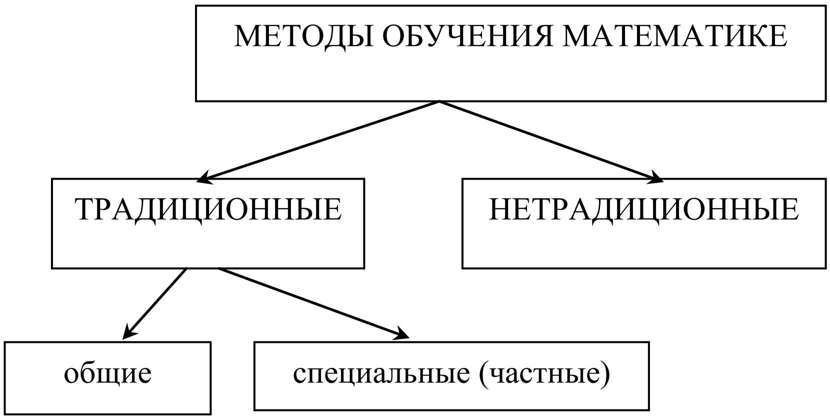
Анализ различных определений позволяет выделить следующие ключевые аспекты понятия:

МЕТОД →
- способ взаимосвязанной деятельности
- система действий
- путь достижения цели
- совокупность приемов
- форма движения содержания обучения

В педагогической деятельности многих поколений накоплено и продолжает пополняться большое количество методов обучения. Для их осмысления, обобщения и систематизации осуществляются различные классификации. Согласно С.Г. Манвелову [3, с. 87] общая схема структуры системы методов обучения математике может быть представлена следующим образом:

Схема 2

Общая структура методов обучения математике



Общие методы разрабатываются дидактикой и адаптируются к обучению математике, специальные методы – методикой преподавания математики, нетрадиционные методы зарождаются, как правило, в практике обучения. Исходя из многоаспектности понятия «метод обучения», очевидно, что и классификацию методов обучения можно проводить по разным основаниям.

Выделим наиболее известные классификации общих методов.

По характеру познавательной деятельности:

– объяснительно-иллюстративные;
– репродуктивные;
– проблемные;
– частично-поисковые;
– исследовательские.

По компонентам деятельности:

– организационно-действенные (методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности);
– стимулирования (методы влияния на мотивацию учебно-познавательной деятельности);
– контрольно-оценочные (методы, определяющие эффективность учебно-познавательной деятельности).

По дидактическим целям:

– подготовки к восприятию;
– изучения нового материала;
– закрепления изученного;
– контроля за усвоением;
– организации повторения и т.п.

По способам изложения учебного материала:

– монологические;

– диалогические.

По формам организации учебной деятельности:

– коллективные;
– групповые;
– индивидуальные.

По источникам подачи знаний и умений:

– словесные;
– наглядные;
– практические.

По уровням активности учащихся:

– изложение;
– беседа;
– самостоятельная работа.

По принципу соединений или расчленения знаний:

– аналитический,
– синтетический;
– сравнительный;
– обобщающий;
– классификационный.

По характеру движения мысли от незнания к знанию:

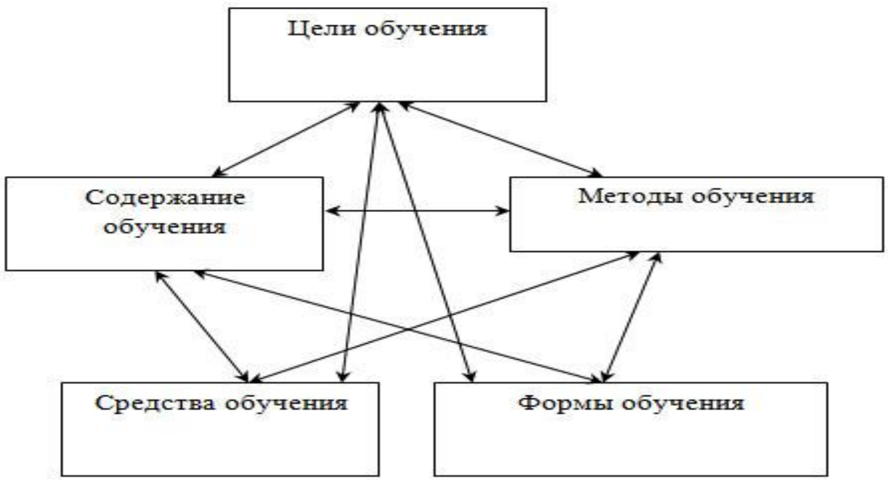
– индуктивный;
– дедуктивный.

По характеру работы с информацией:

– методы, направленные на организацию деятельности учащихся для получения знаний и формирование умений;
– методы, направленные на организацию деятельности учащихся по применению знаний и развитию умений.

Схема 3

Методическая система А.М. Пышкало



Последняя классификация приобретает большую актуальность в рамках реализации современной образовательной парадигмы.

Метод обучения не является закрытой системой: в практике обучения ни один метод не выступает в чистом виде, изолированно. Это объясняется тем, что классификации построены на оценке не всех, а только какого-нибудь одного доминирующего признака. Какой бы метод мы ни рассматривали с позиций преподавания и учения, он всегда будет словесным, наглядным или практическим, но в то же время он будет проявляться при объяснении либо в беседе, либо в демонстрации, либо в упражнениях. Одновременно с этим по характеру движения мысли он будет индуктивным или дедуктивным и т.д.

Иными словами, метод обучения – многокачественное, сложное, системное образование, которому свойственны признаки, лежащие в основе всех приведенных классификаций.

Каждый метод обучения выполняет разнообразные **функции:**

- образовательную, связанную с приращением знаний и умений;
- развивающую, связанную с последовательным изменением качества знаний ученика, с постоянным усложнением и развитием его умений, операций и способов деятельности, с обогащением его познавательных процессов;
- воспитательную, связанную с побуждением учащихся к оценке и выражению собственного отношения к изучаемым явлениям и событиям, с формированием характера и поведения учащегося, с формированием значимых качеств личности.

Составной частью метода обучения являются **приемы** учебной деятельности учителя и учащихся. Прием обучения – деталь метода, элементарное действие учителя, вызывающее ответное действие ученика. Приемы обучения – это те инструменты, которыми учитель осуществляет свой педагогический процесс. Владение большим количеством приемов определяет педагогическое мастерство.

Все указанные выше классификации имеют дидактический контекст и не учитывают предметного содержания математики, а поэтому они не могут отразить все методические особенности обучения математике.

В дидактике, как известно, основным отношением, характеризующим обучение, является «преподавание – учение», а содержанием обучения – взаимосвязанная деятельность учителя и ученика. В частной методике обучение характеризуется отношением «преподавание – предметное содержание – учение», а содержание обучения включает не только деятельность учителя и ученика, но и содержание учебного предмета, в нашем случае – математики. Методы обучения математике выступают в качестве способов организации учебного материала и взаимодействия обучающего и учащегося.

4. Методы обучения математике. Математическое содержание учебного предмета развивается главным образом посредством индукции, дедукции и обобщения, а способы взаимодействия учителя и ученика выражаются через репродукцию, эвристику и исследование. На основе этого **по характеру учебно-познавательной деятельности и организации содержания учебного материала** Г.И. Саранцев [4, с. 161] выделяет следующие методы обучения математике:

– **индуктивно-репродуктивный метод,** суть которого в том, что учитель создает такую ситуацию, в которой ученик воспроизводит понятие или теорему в процессе рассмотрения частных случаев (например, при решении задачи или доказательстве теоремы по плану, предложенному учителем; или при решении задач на выделение ситуаций, удовлетворяющих условию теоремы);

– **дедуктивно-репродуктивный метод**, предполагающий воспроизведение частных случаев в процессе решения задач, где используются общие положения (например, теорема о сумме смежных углов воспроизводится посредством решения задачи о нахождении одного из смежных углов, если известен другой);

– **обобщенно-репродуктивный метод**, при котором цель достигается путем воспроизведения изученных фактов (например, выполняя умножение $(a - в)\ (a + в)$ на основе правила умножения многочленов, учащиеся получают формулу разности квадратов);

– **индуктивно-эвристический метод**, предполагающий самостоятельное открытие фактов в процессе рассмотрения частных случаев (например, упражнения на умножение степеней с равными числовыми основаниями приводят к открытию правила умножения степеней с одинаковыми основаниями);

– **дедуктивно-эвристический метод**, предполагающий открытие частностей какого-нибудь факта при рассмотрении общего случая (например, решение конкретного квадратного уравнения по общей формуле приводит к зависимости между коэффициентами и корнями квадратных уравнений);

– **эвристическое обобщение,** предполагающее создание учителем ситуации, в которой ученик сам или с небольшой помощью приходит к обобщению (например, измеряя углы и стороны треугольников, ученик может сам открыть зависимость между ними);

– **индуктивно-исследовательский метод**, предполагающий проведение исследования различных феноменов посредством их конкретных проявлений (например, изучая свойства четырехугольников в зависимости от наличия у них осей симметрии, можно прийти к таким их видам как прямоугольник, ромб, квадрат);

– **дедуктивно-исследовательский метод**, предполагающий организацию исследования посредством дедуктивного развития учебного материала (например, при решении задач с применением теорем в нестандартной ситуации или с применением математического моделирования);

– **обобщенное исследование**, предполагающее наличие в учебном материале ситуаций, исследование которых приводит к обобщенному знанию.

Отметим, что для частных методов обучения математике предлагают следующую классификацию, отражающую адаптированные для обучения основные методы познания, применяемые в математике, и характерные для математики способы познания действительности:

1) **эмпирические методы** познания: наблюдение, опыт, измерение и др.;
2) **логические методы** познания: анализ, синтез, индукция, дедукция, сравнение, аналогия, абстрагирование, конкретизация, классификация и др.;
3) **математические методы** познания: метод математического моделирования, аксиоматический метод и др.

Особое распространение из **нетрадиционных методов**, которые появляются по мере развития теории и практики обучения, в современном образовании получили методы, разработанные П.М. Эрдниевым, Б.Г. Зивом, Р.Г. Хазанкиным, М.Б. Воловичем, А.А. Окуневым и др. и реализующие следующие идеи:

- крупных блоков, позволяющих увеличить объем изучаемого материала при снижении нагрузок на учащихся;
- опоры, являющейся средством развития памяти, логики, пространственного воображения и т.д.;
- бесконфликтности учения с применением открытого учета знаний учащихся, относительной свободой выбора задачного материала учащимися и т.д.;
- самоанализа с систематическим применением взаимо- и самоконтроля учащихся;

- личностного подхода, когда у учащихся снимается чувство страха, вселяется уверенность в его силы, каждый ученик оценивается на каждом уроке и т.д.

Представленный обзор наиболее распространенных классификаций методов обучения позволяет убедиться в необходимости разработки критериев их выбора для проектирования и осуществления реального образовательного процесса.

5. Критерии выбора методов. Выделим основные критерии выбора методов обучения, сформулированные Ю.К. Бабанским:

1) соответствие принципам дидактики и концептуальным положениям реализуемой модели и технологии обучения;
2) соответствие целям и задачам;
3) ориентированность на особенности содержания учебного материала;
4) соответствие формам организации учебно-воспитательной деятельности, так как индивидуальные, групповые и коллективные формы требуют различных методов;
5) соответствие реальным возможностям учащихся;
6) соответствие реальным возможностям учителя.

В заключение отметим, что современные методы обучения, главным образом, ориентированы на обучение не готовым знаниям, а деятельности по самостоятельному приобретению новых знаний, то есть познавательной деятельности. К таким методам относятся проблемный, проектный, лабораторный методы, а также методы построения математических моделей и программированного обучения. Именно эти методы обучения позволяют наиболее эффективно решить задачи, стоящие перед обучением вообще и обучением математике в частности.

Контрольные вопросы и задания

1. Ответьте на вопрос: может ли быть построена классификация общих и частных методов обучения, основанием которой является диапазон распространения этих методов в преподавании дисциплин школьного курса?
2. Укажите, какую классификацию методов нужно использовать при делении учащихся, например, по модальности восприятия.
3. Сравните высказывания в первых двух столбцах таблицы и предложите свои суждения в третьем столбце

Принципы обучения – субъективны, поскольку руководящие идеи и нормативные требования к организации и осуществлению образовательного процесса предлагаются людьми – субъектами	Принципы обучения – объективны, т.к. получаются в результате анализа и обобщения объективных закономерностей	Принципы обучения, на мой взгляд …
Ни один принцип по отдельности не может обеспечить организацию всего обучения. Не может этого обеспечить и любое другое количество связанных системой принципов, поскольку всегда найдется область реальности, которая не будет описываться ни одним из них. Вывод: обучение – уникальное явление, которое не может быть описано или регламентировано в форме принципов	Любую самую сложную систему обучения можно описать или регламентировать небольшим количеством принципов, задающих главные направления или позиции в деятельности учителя и учеников. Все остальные варианты многообразной действительности не нуждаются в отдельных принципах и находят опору для своего решения или развития на основе текущего их осмысления по ходу обучения	Многообразие явлений обучения связано с количеством принципов обучения следующим образом: …

Библиографический список

1. Блинова, Т.Л. Современные аспекты методики обучения математике / Т. Л. Блинова, Э. А. Власова, И. Н. Семенова, А. В. Слепухин. – Екатеринбург, 2007. – 190 с.
2. Бабанский, Ю. К. Оптимизация процесса обучения / Ю. К. Бабанский. – М., 1982. – 192 с.
3. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: кн. для учителя / С. Г. Манвелов. – М. : Просвещение, 2002. – 175 с.
4. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002. – 224 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Елена Альбертовна Суховиенко,
Зинаида Петровна Самигуллина,
Светлана Анатольевна Севостьянова,
Елена Николаевна Эрентраут

Теория и методика обучения математике: общая методика

Учебное пособие

Компьютерная верстка Е. А. Суховиенко, Е.Н. Эрентраут